

# Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari  
Corso di Laurea Magistrale in  
Architettura  
A.A. 2016-2017

*Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino*

[antonio.cazzani@unica.it](mailto:antonio.cazzani@unica.it)

*<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>*

*Lezione 4 - Analisi delle pareti murarie*

# Sommario

- Le pareti murarie
- Soluzioni in campo elastico per le pareti murarie:
  - Funzione delle tensioni di Airy
  - Modelli numerici
- Soluzioni a rottura per le pareti murarie:
  - Collasso per slittamento
  - Collasso per ribaltamento
- Meccanismi di collasso per pareti soggette a spinta orizzontale:
  - Il caso di un singolo maschio murario
  - Il caso di una parete composta da più blocchi
  - Il caso del trilito
  - Il caso di una parete multipiano

# Le pareti murarie

Nelle costruzioni murarie gli elementi verticali, detti pareti murarie oltre alla funzione di delimitare e separare i vari ambienti esercitano anche la funzione statica di sostenere l'intera costruzione.

Si tratta normalmente di strutture murarie prismatiche, aventi 2 dimensioni prevalenti rispetto alla terza (lo spessore); il termine *parete muraria* (sinonimo del termine comune *muro*) denota le parti di un edificio che costituisce l'organismo portante.

Riservando a una lezione successiva lo studio degli elementi portanti aventi forma di pilastro, si considerano in questa i metodi di analisi per pareti murarie soggette a carichi verticali costanti e spinte orizzontali crescenti.

In particolare si presentano e discutono le soluzioni in campo elastico ma soprattutto i meccanismi di collasso di pareti murarie, al fine di poterne valutare la capacità portante ultima.

# Soluzioni in campo elastico per le pareti murarie (1/4)

Si consideri un pannello murario che soddisfi queste ipotesi:

- il materiale costituente possa essere considerato omogeneo e isotropo;
- lo schema strutturale che approssima il comportamento del pannello sia quello di una lastra piana sottile soggetta a carichi applicati sul contorno, in corrispondenza del piano medio e uniformemente distribuiti nello spessore (eventuali forze di volume vengono riportate sul contorno sotto forma di forze di superficie);
- non si abbiano eccentricità né geometriche (strutturali) né di carico.

In queste ipotesi il comportamento elastico del pannello può essere ricondotto allo studio di uno *stato tensionale piano*, costante in tutti i piani paralleli al piano medio della lastra.

Per problemi di questo tipo le equazioni governanti (equilibrio, congruenza e legame costitutivo) possono essere scritte sotto forma dell'equazione di Maxwell, nella quale l'incognita è il potenziale degli sforzi, ovvero la funzione  $F = F(x,y)$  dipendente dalle coordinate  $x, y$  definite nel piano medio della lastra:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0,$$

# Soluzioni in campo elastico per le pareti murarie (2/4)

La funzione  $F(x,y)$  incognita è la funzione di Airy: una volta determinata risolvendo il problema, essa permette di determinare completamente lo stato di sforzo, in quanto risulta che le componenti non nulle dello stato piano di tensione sono date dalle seguenti espressioni:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - b_x x - b_y y,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - b_x x - b_y y,$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

Dove  $b_x$  e  $b_y$  sono le componenti delle forze di volume, di intensità costante.

Nella risoluzione del problema, all'equazione di Maxwell si associano le condizioni al contorno di tipo statico:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = p_x \quad \text{e} \quad \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y = p_y,$$

dove  $p_x$  e  $p_y$  rappresentano le componenti delle forze di superficie applicate sul contorno.

# Soluzioni in campo elastico per le pareti murarie (3/4)

La soluzione in forma chiusa dell'equazione di Maxwell può essere ottenuta solo per geometrie, condizioni di vincolo e condizioni di carico particolarmente semplici, come nel caso di pareti rettangolari, prive di aperture, con vincoli perfetti e presenza di soli carichi uniformemente distribuiti o di un unico carico concentrato.

Per esempio a una funzione di Airy polinomiale di secondo grado, del tipo:

$$F(x,y) = a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$$

corrispondono, in assenza di forze di volume, le seguenti componenti di tensione:

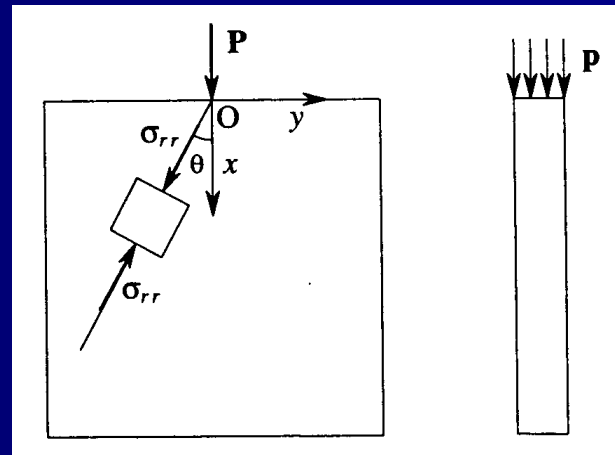
$$\sigma_{xx} = 2 a_2 , \quad \sigma_{yy} = 2 a_0 , \quad \sigma_{xy} = - a_1 .$$

che definiscono uno stato di tensione costante.

La soluzione può essere impiegata per determinare, in forma chiusa, lo stato di tensione prodotto il lastre rettangolari da distribuzioni di forze superficiali uniformi sul contorno.

# Soluzioni in campo elastico per le pareti murarie (4/4)

Nel caso di carico costituito da un unico carico concentrato (azione trasmessa da una trave di solaio che si appoggia alla parete muraria) il problema si può ancora risolvere considerando la lastra come un semispazio elastico soggetto a una forza concentrata applicata al bordo.



Parete muraria modellata come una lastra elastica piana soggetta a un carico verticale concentrato; si è evidenziata la componente radiale dello sforzo.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.* )

Il valore della tensione nella parete in direzione radiale risulta dato da:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}$$

# Modelli numerici (1/3)

Le soluzioni presentate sono valide nel caso di elementi murari di spessore costante o costante a tratti.

Le soluzioni in forma chiusa presentano limitazioni, legate alla complessità dell'algoritmo e alle conseguenti difficoltà di rappresentare forme geometriche complicate o condizioni di vincolo e/o di carico non regolari.

In queste situazioni si ricorre a metodi numerici di soluzione, di diverso tipo ma accomunati dal fatto che si riducono a risolvere un sistema di equazioni algebriche lineari.

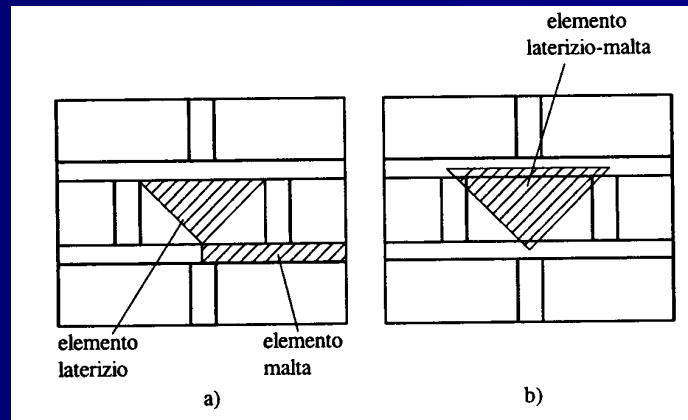
Si può pervenire a questo sistema (i) *a posteriori* procedendo con un approccio che sostituisce l'equazione differenziale con le *differenze finite*; oppure (ii) si può pervenire a questo sistema *a priori*, attraverso un modello che discretizza il continuo mediante un insieme di elementi interconnessi in un numero finito di punti (*elementi finiti*).

Il metodo degli elementi finiti è il più usato per l'analisi strutturale di pareti murarie in quanto consente la determinazione dello stato tensionale e deformativo delle pareti soggetti a carichi nel loro piano, qualsiasi sia la geometria (anche in presenza di aperture), e per qualunque condizione di carico.

## Metodi numerici (2/3)

In particolare si possono seguire due approcci differenti:

- adottare una discretizzazione che coincide con la suddivisione in laterizi e giunti di malta, attribuendo a ciascuno le caratteristiche meccaniche proprie;
- adottare un approccio al continuo omogeneizzato, riferendosi a elementi di materiale equivalente, caratterizzato da una legge che media il comportamento dell'insieme dei laterizi e dei giunti di malta.



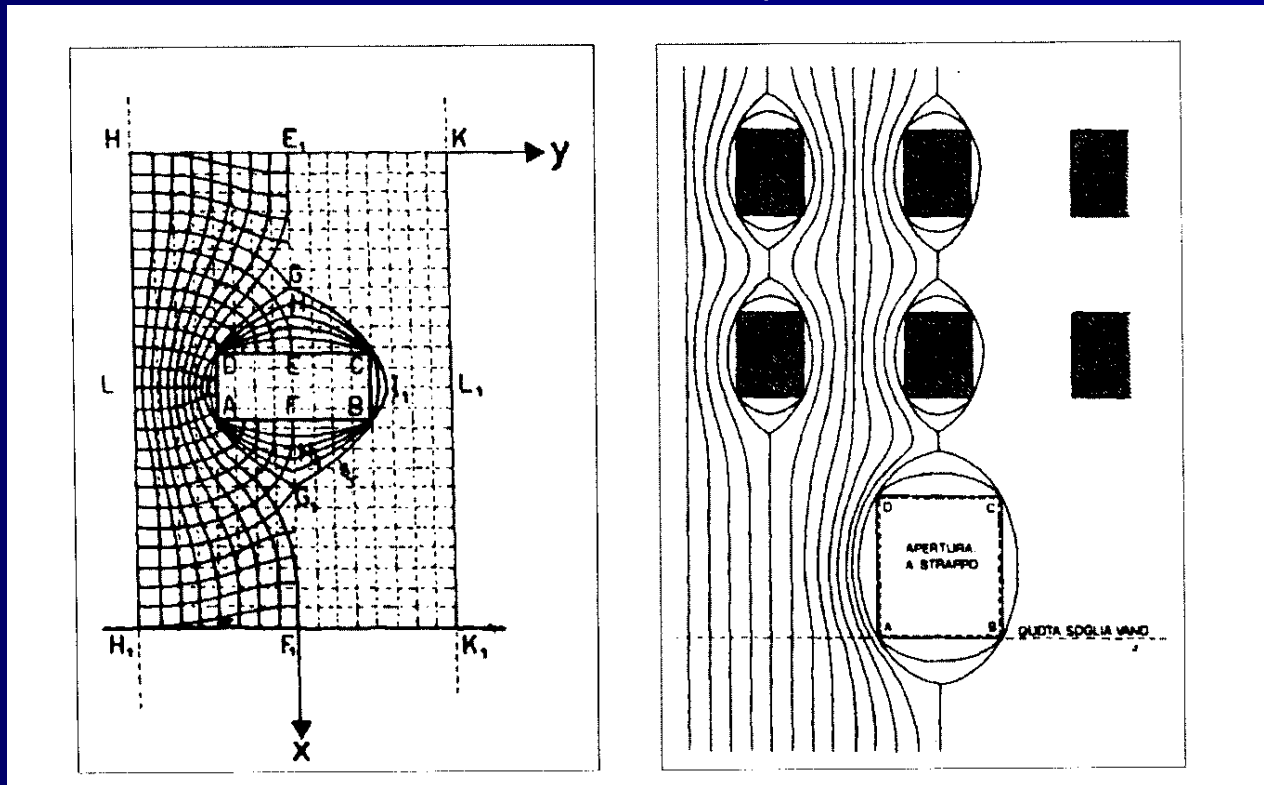
Discretizzazione di un blocco di muratura: in (a) la suddivisione in elementi corrisponde ai singoli costituenti; in (b) la suddivisione avviene dopo il processo di omogeneizzazione. (Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il primo approccio richiede una descrizione accurata della geometria (e l'adozione di un reticolo a maglia piuttosto fitta), ma coglie in dettaglio l'interazione fra laterizi e giunti di malta, consentendo un riscontro con i dati sperimentali; il secondo richiede reticoli più regolari e meno fitti, ma fornisce soluzioni valide dal punto di vista applicativo.

In sede di analisi si può adottare un modello costitutivo elastico lineare per la verifica in esercizio, in assenza di fessurazioni e di altre deformazioni anelastiche.

# Metodi numerici (3/3)

Esempio di determinazione dello stato tensionale in un pannello murario con metodi numerici.

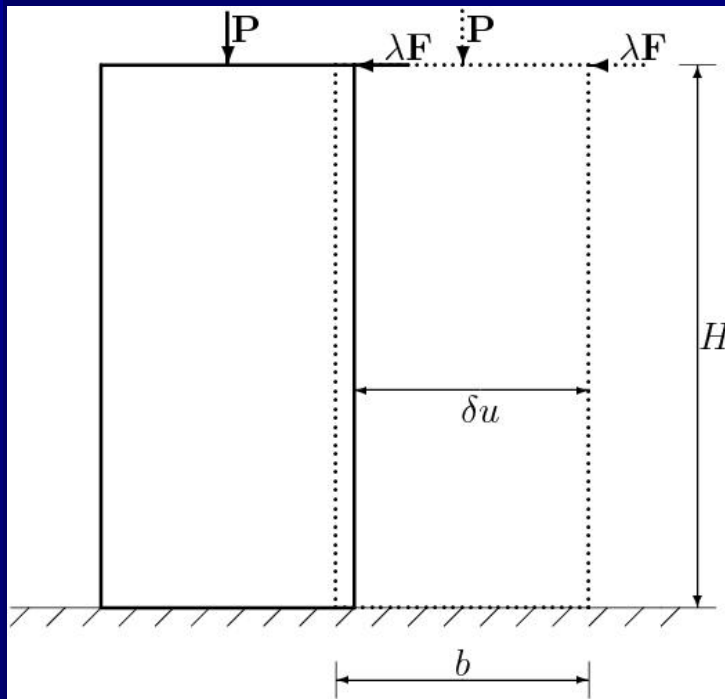


Soluzioni elastiche ottenute con metodi numerici su pannelli dotati di aperture.  
Le linee indicate rappresentano le isostatiche cioè le curve di livello degli sforzi.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.* )

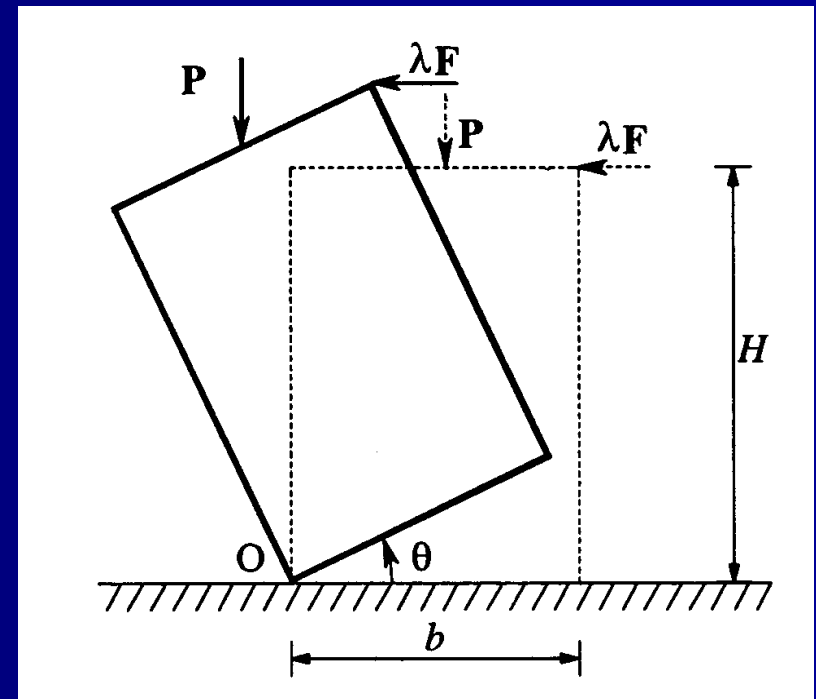
# Soluzioni a rottura per le pareti murarie

Si consideri il caso di un blocco murario rigido, poggiato su una base piana, sottoposto a un carico concentrato  $P$  in sommità, e a una spinta orizzontale crescente,  $\lambda F$ .

Si considerano separatamente le possibilità di crisi per slittamento e per ribaltamento, ipotizzando che i due fenomeni si presentino separatamente.



Meccanismo di collasso per slittamento.



Meccanismo di collasso per ribaltamento.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Collasso per slittamento

Si considera che sotto l'effetto dei carichi agenti si abbiano due reazioni vincolari alla base del blocco, una verticale,  $\Phi_N = P$  (per equilibrio), e una orizzontale,  $\Phi_T$ , legata alla precedente da una condizione di attrito Coulombiano:

$$\Phi_T \leq k_A \Phi_N,$$

dove  $k_A$  è il coefficiente di attrito statico, e in condizione di collasso incipiente vale il segno di eguaglianza:

$$\Phi_T = k_A P.$$

In condizioni di slittamento incipiente il valore limite della spinta orizzontale,  $\lambda_A F$ , si ottiene se si applica il P.L.V. al meccanismo di slittamento:

$$\lambda_A F \delta u - k_A P \delta u = 0 \quad (\text{per ogni } \delta u)$$

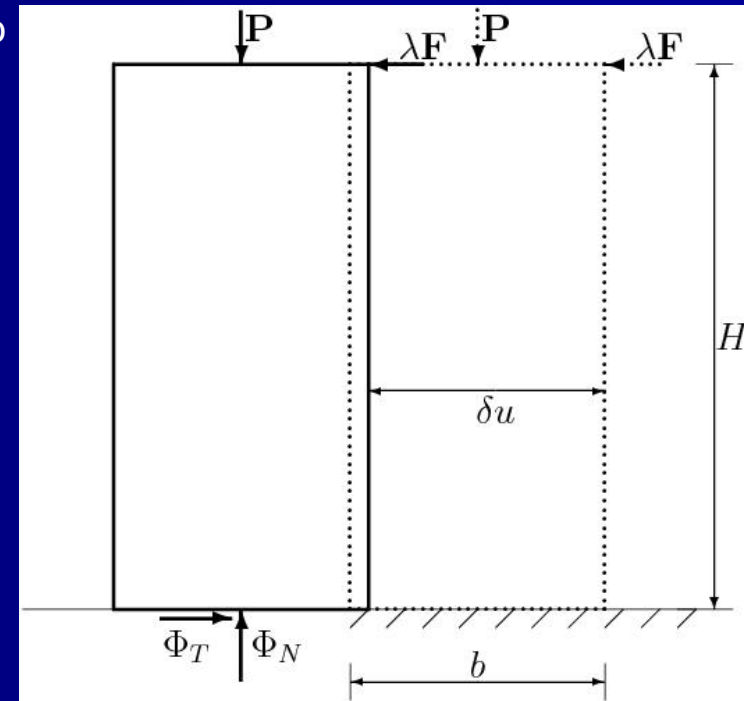
e dunque

$$\lambda_A F = k_A P,$$

dove  $\delta u$  è l'ampiezza dell'atto di moto.

Il moltiplicatore di collasso per slittamento vale dunque:

$$\lambda_A = k_A P/F.$$



Meccanismo di collasso per slittamento. Sono indicate, in condizioni limite, le reazioni vincolari  $\Phi_N$  e  $\Phi_T$  (dovuta all'attrito).

# Collasso per ribaltamento (1/3)

Si considera che in questo caso l'attrito alla base sia sufficiente a evitare lo slittamento del blocco sotto l'azione dei carichi agenti.

In condizioni di incipiente collasso per ribaltamento si applica il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) trovando:

$$\lambda_R FH\theta - P(b/2)\theta = 0 \quad (\text{per ogni } \theta);$$

dunque

$$\lambda_R FH = P(b/2).$$

Il moltiplicatore di collasso per ribaltamento vale quindi:

$$\lambda_R = (P/F)(b/2H).$$

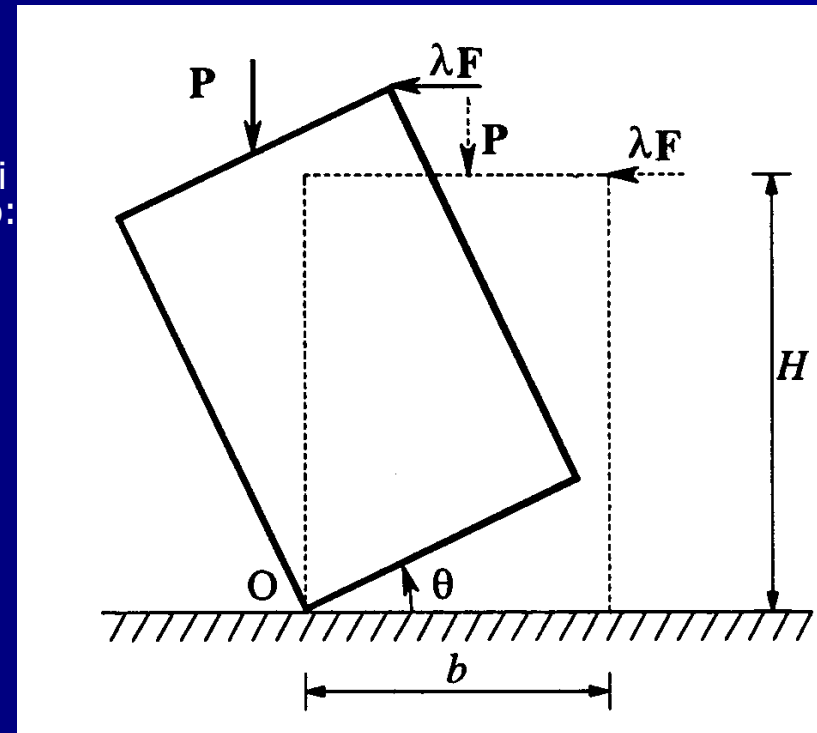
Poiché  $\lambda_R < \lambda_A$  in quanto il rapporto

$$\lambda_R / \lambda_A = (1/k_A)(b/2H) < 1$$

per valori correnti del rapporto  $(b/2H)$  dei maschi murari e tenuto conto inoltre che per le murature risulta sempre  $k_A \cong 1$ .

Ne consegue che il collasso avviene per ribaltamento e dunque si ha:

$$\lambda_c = \lambda_R.$$



Meccanismo di collasso per ribaltamento. Le reazioni vincolari in condizioni limite passano per il punto fisso O e non compiono lavoro.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

## Collasso per ribaltamento (2/3)

Nell'equazione dei lavori virtuali si riconosce il lavoro resistente compiuto dal carico  $P$ :  $- P (b/2)\theta$ , e il lavoro ribaltante compiuto dalla forza orizzontale  $F$  (che risulta amplificata dal moltiplicatore  $\lambda$ ):  $FH\theta$ .

Dunque per effetto della rotazione  $\theta$  del blocco il carico verticale  $P$  si solleva di  $(b/2)\theta$ , mentre la forza orizzontale  $\lambda F$  subisce lo spostamento positivo  $H\theta$ .

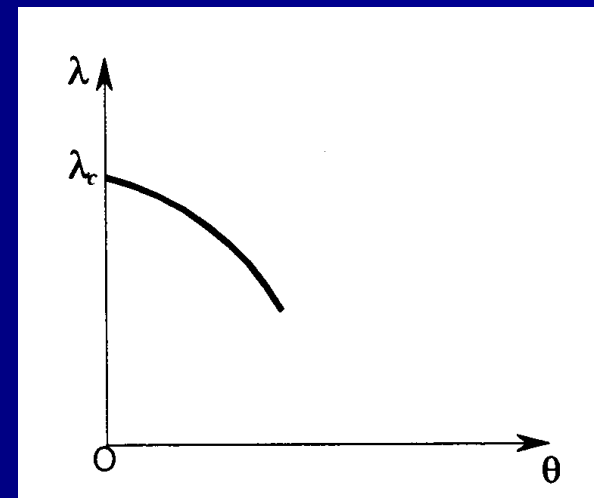
Se il valore del moltiplicatore  $\lambda$  è minore di  $\lambda_R$ , il lavoro resistente prevale su quello ribaltante, e di conseguenza il blocco murario non si ribalterà, anche se gli si imprime una piccola rotazione  $\theta$ . Per  $\lambda = \lambda_R = \lambda_C$  e per *piccoli* valori di  $\theta$  si ha equilibrio in condizioni limite (il lavoro resistente e quello ribaltante si bilanciano).

Peraltro l'equilibrio nella condizione limite è instabile.

In un intorno di  $\theta = 0$  e per valori di  $\theta$  piccoli, il valore del moltiplicatore  $\lambda$  necessario a garantire l'equilibrio del blocco sotto l'azione della forza orizzontale  $\lambda F$  si discosta comunque poco dal valore  $\lambda_R = \lambda_C$

Dipendenza del moltiplicatore di collasso  $\lambda_C$  dall'entità della rotazione  $\theta$  per valori non piccoli di  $\theta$ .

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



# Collasso per ribaltamento (3/3)

Se si considera il dominio di rottura della sezione di muratura interessata dal collasso in funzione delle caratteristiche generalizzate  $M - N$ , è noto che esso risulta convesso.

I parametri di deformazione generalizzati, associati a  $M$  e a  $N$ , sono rispettivamente la rotazione della sezione,  $\Theta^f$ , e lo spostamento del baricentro,  $\Delta^f$ , prodotti dalla fessurazione.

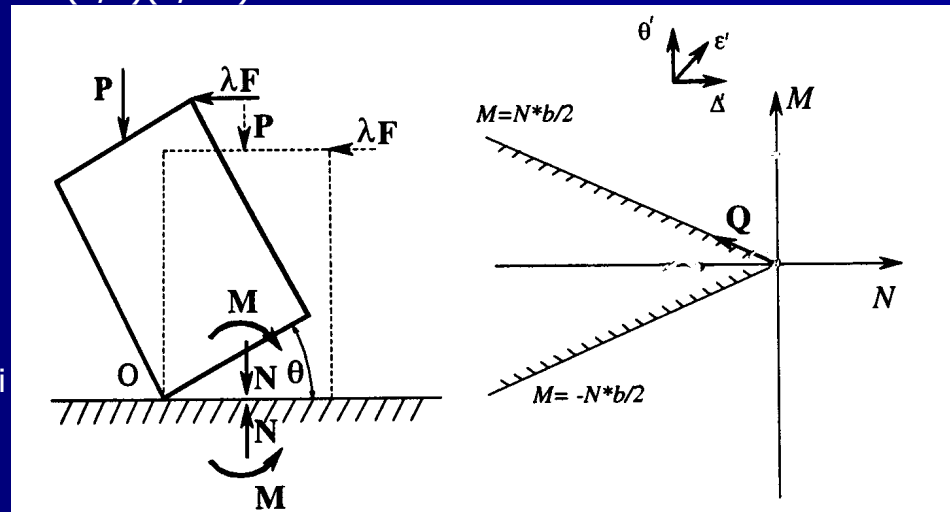
Tenuto conto che  $M = -\lambda FH$ ;  $N = P$ , e che per il meccanismo assegnato è  $\Delta^f = (b/2)\Theta^f$ , se si valuta il lavoro virtuale in termini di  $M$ ,  $N$  si trova:

$$M\Theta^f + N\Delta^f = -\lambda FH\Theta^f + P(b/2)\Theta^f = 0 \text{ per ogni } \Theta^f$$

e risolvendo rispetto a  $\lambda$  si ritrova ancora:  $\lambda = (P/F)(b/2H)$ .

Le azioni interne nel blocco in condizioni di collasso e il corrispondente dominio limite espresso in funzione delle azioni interne.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

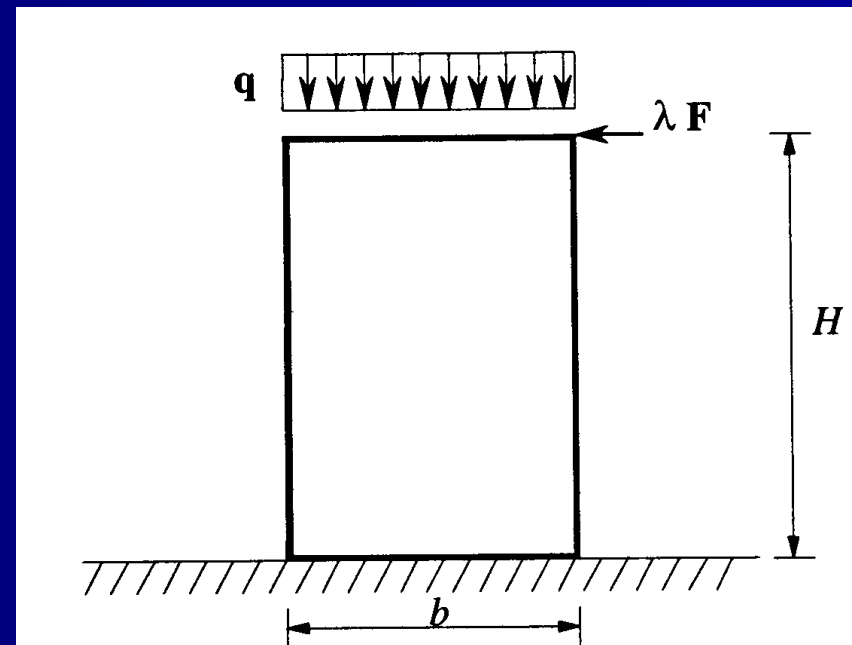


# Meccanismi di collasso per pareti soggette a spinta orizzontale (1/2)

Si considera una parete muraria soggetta a un carico permanente verticale, uniformemente distribuito, di valore  $q$  e a una spinta orizzontale con valore base  $F$  e amplificata del moltiplicatore  $\lambda$ , crescente.

Il collasso si verifica quando il moltiplicatore  $\lambda$  raggiunge un valore critico, in corrispondenza del quale si ha formazione di un *meccanismo di rottura* lungo una linea che consente uno *spostamento rigido* di una porzione di parete.

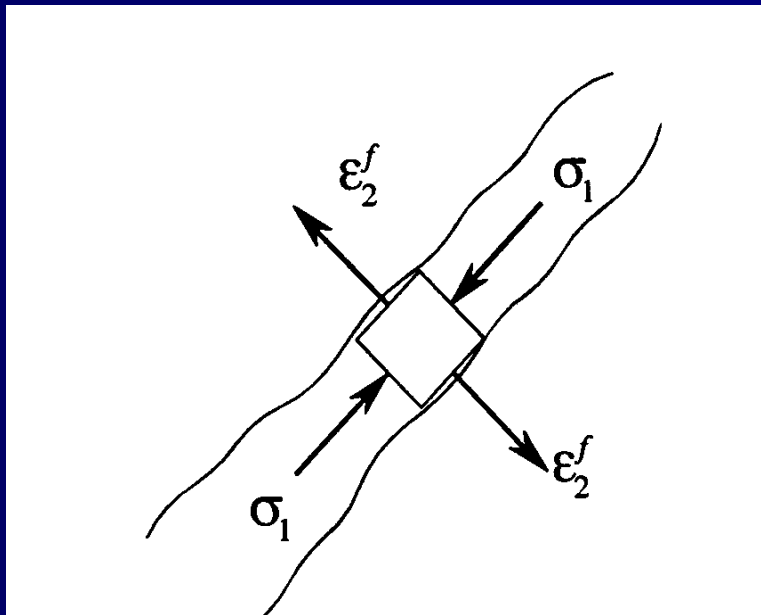
Il meccanismo di rottura è caratterizzato da deformazioni di fessurazione  $\varepsilon^f$  che si sviluppano lungo la linea di frattura, secondo le modalità caratteristiche di un materiale NRT.



Collasso di una parete muraria monolitica in presenza di un carico verticale distribuito uniformemente.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.* )

# Meccanismi di collasso per pareti soggette a spinta orizzontale (2/2)



Parallelismo fra linee di fessurazione e sforzi di compressione in un mezzo NRT.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

L'ampiezza della frattura, in termini di spostamento lungo la linea di fessurazione dipende dallo stato di tensione presente lungo la linea stessa, che risulta essere una *isostatica di compressione*, e comporta spostamenti relativi normali alla fessura solo se lo stato di tensione è ivi nullo.

*Solo dove si ha tensione nulla si possono avere degli spostamenti relativi (di distacco), cioè una fessura.*

La relazione fra sforzi e deformazioni di fessurazione

$$\sigma_1 \varepsilon_1^f = 0, \sigma_2 \varepsilon_2^f = 0$$

esclude che possano esserci meccanismi di rottura che comportano lo scivolamento di una parte della parete sulla restante (fra i due lembi della fessura non esiste sforzo normale, e dunque non si hanno effetti dovuti all'attrito).

# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (1/6)

I meccanismi di rottura di una parete muraria sotto spinta orizzontale possono essere curvi o rettilinei.

Gli spostamenti del meccanismo, compatibili con quelli del blocco murario rigido, sono caratterizzati da una rotazione della porzione superiore del blocco attorno al punto O.

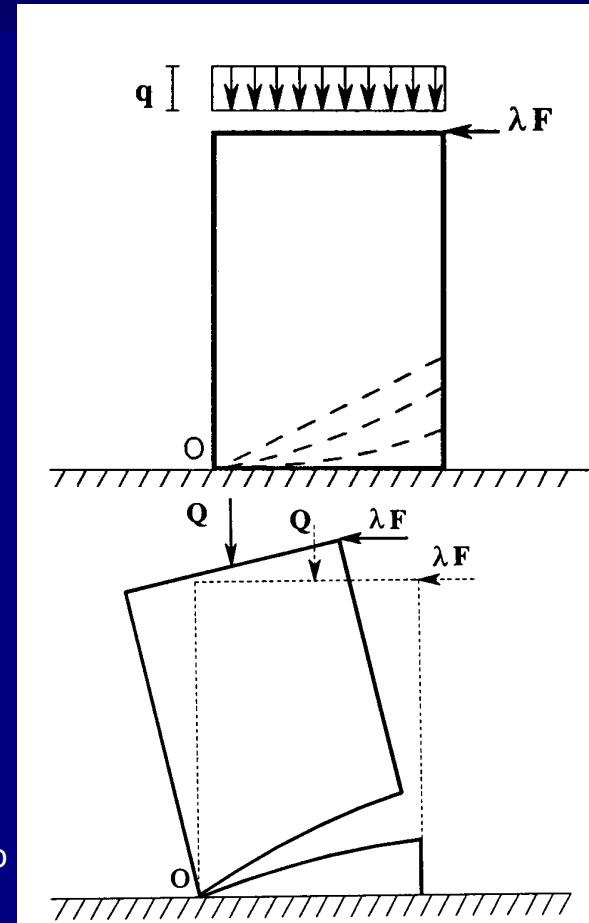
L'eguaglianza dei lavori ribaltante e resistente (ottenuti a partire dal P.L.V.) consente di determinare il valore del moltiplicatore di collasso  $\lambda_c$ , in grado di produrre il collasso secondo il meccanismo considerato:

$$\lambda_c = (Q/F)(b/2H) , \text{ con } Q = qb .$$

Il meccanismo di collasso associato con il valore  $\lambda_c$  non è necessariamente unico: ogni linea contenuta nella zona non reagente della parete muraria (porzione inferiore) può definire un meccanismo, che in questo caso si attiva per lo stesso valore del moltiplicatore di carico.

Possibili meccanismi di collasso in un maschio murario costituito da materiale NRT.

(Immagine tratte da Olivito, *op. cit.* )



# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (2/6)

Una altra classe di meccanismi è quella definita da linee di fessurazione che interessano tutta l'altezza della parete muraria, a partire dal punto O e raggiungendo la sezione di testa della parete.

Se si considera la sola quota  $F(x/b)$  del carico orizzontale (che a sua volta si suppone essere uniformemente distribuito) che produce lavoro ribaltante si trova, applicando il P.L.V.:

$$\lambda_{R'} F(x/b)H\theta - q(x^2/2)\theta = 0 \quad (\text{per ogni } \theta);$$

dunque:

$$\lambda_{R'} F(x/b)H = q(x^2/2).$$

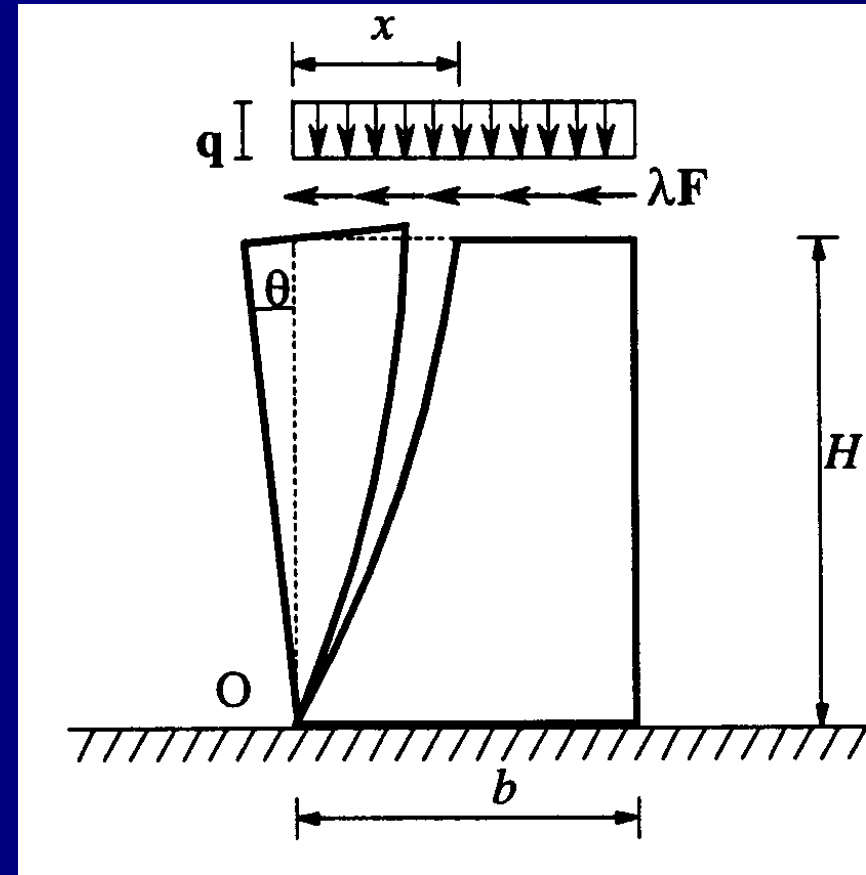
Ne segue, ponendo  $q = Q/b$  che, per questo meccanismo è:

$$\lambda_{R'} = (Q/F)(x/2H).$$

Si osserva che

$$\lambda_{R'} < \lambda_R$$

e, inoltre, che  $\lambda_{R'} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

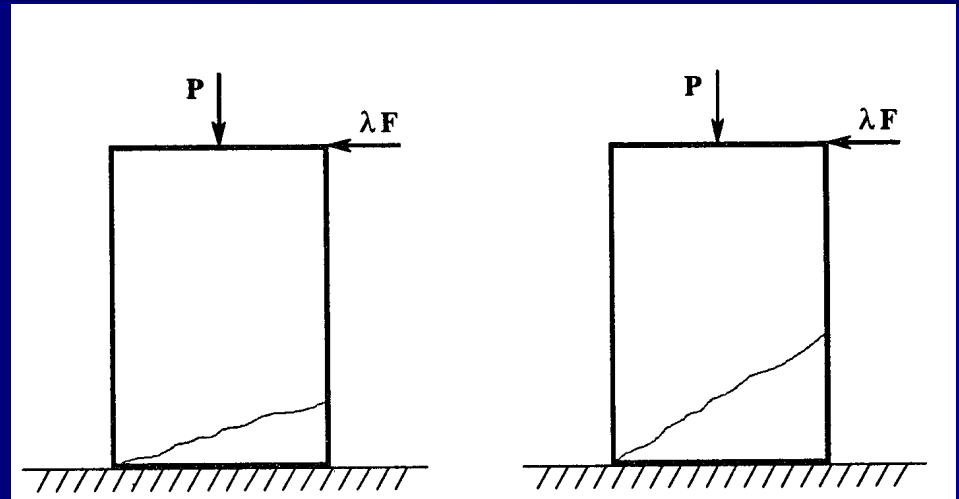


Meccanismo di collasso sub-verticale in un maschio murario costituito da materiale NRT. (Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (3/6)

Situazioni di possibile indeterminazione del meccanismo di collasso a parità di valore del moltiplicatore di collasso.

(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.* )



La conoscenza della vera distribuzione del quadro fessurativo a collasso *non è necessaria* per il calcolo del moltiplicatore di collasso.

Per valutare l'effettiva distribuzione delle lesioni a collasso occorre eseguire un calcolo di tipo passo-passo, considerando la resistenza a trazione del materiale.

Per il modello di materiale NRT adottato, e al livello di carico di collasso, non è distinguibile la rottura per flessione da quella a taglio: a seconda della geometria del pannello (snello o tozzo) si ha a collasso solo un differente quadro fessurativo, più o meno inclinato.

Nel caso di forza eccentrica, o di pannello di forma generica, nell'espressione di  $\lambda_c$  compare la distanza fra il fulcro e la retta d'azione della risultante del carico verticale.

# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (4/6)

Per un pannello murario soggetto a carico verticale costante e a un carico orizzontale crescente, si ha:

$$\lambda_c = (Q/F)(b/2H).$$

Se l'area trasversale del pannello murario è  $A$ , la tensione tangenziale media e la tensione normale media a collasso valgono in *ogni* sezione:

$$\tau_c = \lambda_c F/A \quad \sigma = Q/A$$

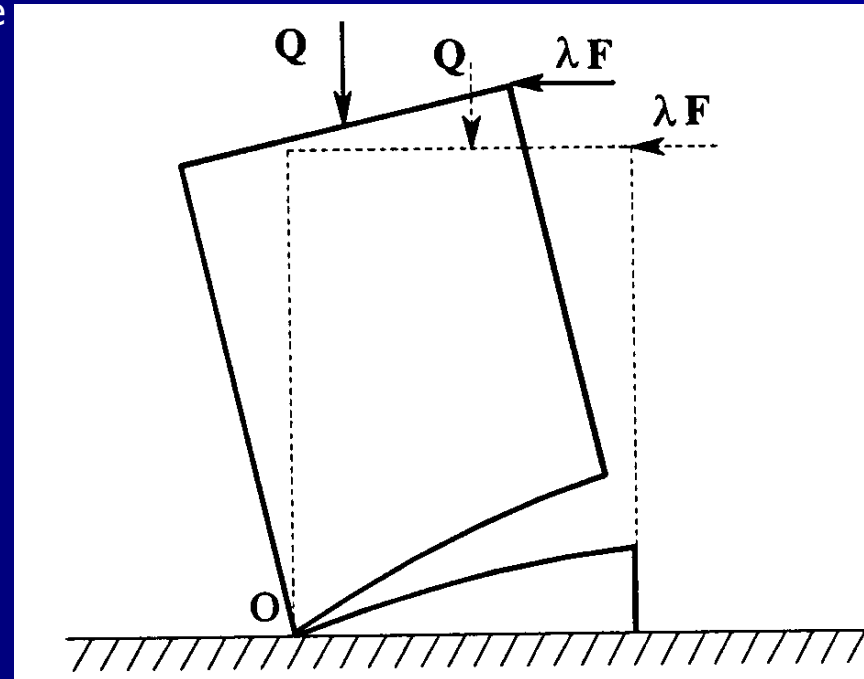
sicché risulta:

$$\tau_c = \sigma_c (b/2H).$$

Si considera ora l'effetto della *limitata resistenza a compressione* della muratura.

Se la resistenza a compressione della muratura ha un valore finito,  $\sigma_{rc}$ , prima che la forza orizzontale raggiunga il valore limite  $\lambda_c F$  (in modo tale che la risultante dei due carichi passi per il punto  $O$  alla base della parete muraria) la tensione sotto questo spigolo, dove la compressione risulta massima può attingere un valore pari a  $\sigma_k = \sigma_{rc}$ .

In questo caso occorre considerare l'estensione (di lunghezza  $t$ ) della zona dove si ha schiacciamento.



Possibile meccanismo di collasso in un maschio murario costituito da materiale NRT e con limitata resistenza a compressione.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (5/6)

Nell'ipotesi di comportamento elastico-perfettamente plastico a compressione e che lo spessore della muratura sia  $s$ , se si considera la condizione di equilibrio a rotazione delle forze rispetto al punto  $O'$  (dove passa la risultante  $N_k = \sigma_k s \cdot t$  delle azioni che danno schiacciamento) si trova in condizioni di collasso:

$$- P(a - t/2) + \lambda_c FH = 0.$$

Si ha quindi:

$$\lambda_c F = P/H (a - t/2).$$

Ipotizzando che sia  $N_k = P$ , cioè che il pannello si mantenga a contatto sul bordo inferiore solo per un tratto di lunghezza  $t$ , si trova per questo un valore pari a:

$$t = P/(\sigma_k s) = \sigma A/(\sigma_k s) = \sigma b/\sigma_k,$$

in quanto  $A = b \cdot s$ .

Si trova così:

$$\lambda_c F = P [a/H - (b/2H) \sigma/\sigma_k].$$

In termini di tensioni medie a collasso risulta:

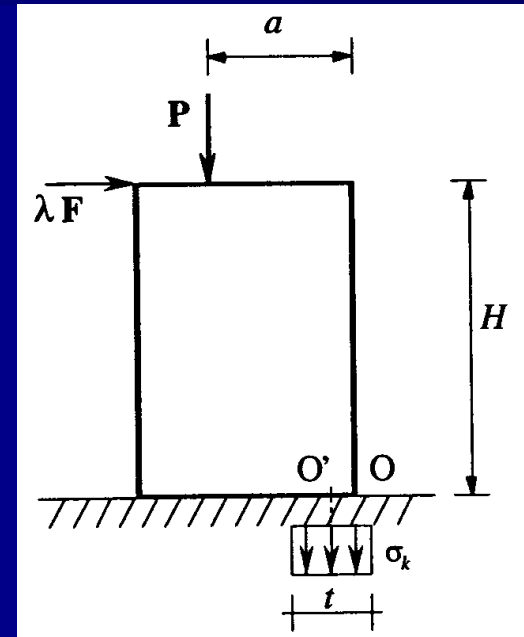
$$\tau_c = \sigma [a/H - (b/2H) \sigma/\sigma_k].$$

Se si esplicita la eccentricità  $e$  del carico verticale,  $P$ , tenendo conto che

$$e = a - b/2$$

si ottiene:

$$\tau_c = \sigma (b/2H) (1 + 2e/b - \sigma/\sigma_k).$$



Condizioni di equilibrio a collasso incipiente di un maschio murario costituito da materiale NRT e con resistenza a compressione finita.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Meccanismi di rottura per un singolo maschio murario (6/6)

In presenza di eccentricità nulla,  $e = 0$ , si trova dalle precedenti relazioni:

$$\tau_c = \sigma (b/2H) (1 - \sigma/\sigma_k)$$

e

$$\lambda_c = P/F (b/2H) (1 - \sigma/\sigma_k),$$

che sono la tensione tangenziale media e il moltiplicatore di collasso comprensivi del *termine correttivo*  $\sigma/\sigma_k$  da introdurre per tenere conto della rottura per schiacciamento della muratura nella zona di contatto prima che si verifichi la condizione di ribaltamento.

Per elementi murari a *debole compressione*,  $\sigma/\sigma_k \ll 1$ , il *termine correttivo* può essere trascurato : ciò equivale a considerare la muratura con resistenza illimitata a compressione e nulla a trazione.

Questa condizione si verifica tipicamente nella valutazione delle spinte sismiche di collasso di maschi murari sotto l'azione di carichi permanenti verticali: in queste condizioni si ha tipicamente  $\sigma/\sigma_k \cong 0.10$  e la limitata resistenza a compressione della muratura può essere trascurata.

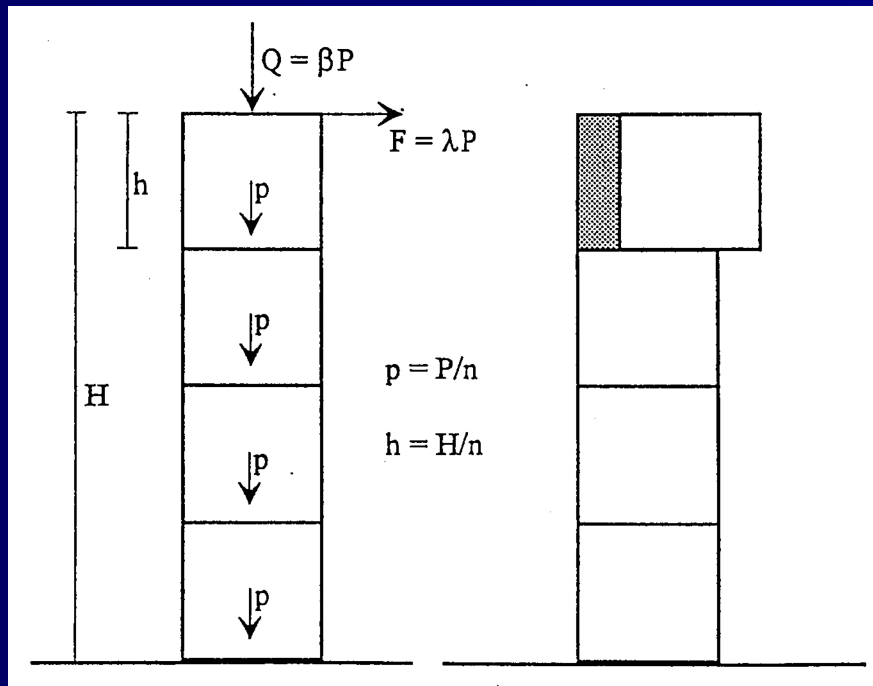
L'esperienza mostra che la resistenza sotto spinta orizzontale di una parete muraria soggetta a sforzo assiale cresce al crescere della compressione applicata.

L'andamento delle fessurazioni nella fase che precede la rottura è generalmente inclinato: tutto ciò è interpretato e definito come schema di rottura a taglio con attrito.

Il quadro fessurativo con andamento inclinato (diagonale) dipende fortemente dalla debole resistenza a trazione del materiale; essa, con il suo progredire, prepara il meccanismo di collasso.

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (1/10)

Consideriamo una parete composta da  $n$  blocchi sovrapposti, ciascuno di altezza  $h=H/n$  e di peso  $p=P/n$ . Esiste attrito tra i giunti dei blocchi e i meccanismi di collasso che possono avvenire tra i singoli blocchi sono gli stessi enunciati prima (scorrimento e ribaltamento). I valori dei moltiplicatori dei carichi da attribuire alla complessiva sono i valori minimi tra quelli relativi all'innescarsi dei meccanismi in ciascuno dei giunti.



I meccanismi di collasso sono  $2n$  e vanno considerati tutti per individuare quello che si attiva con i valori minori delle azioni.

Meccanismo di collasso per scorrimento del primo blocco.

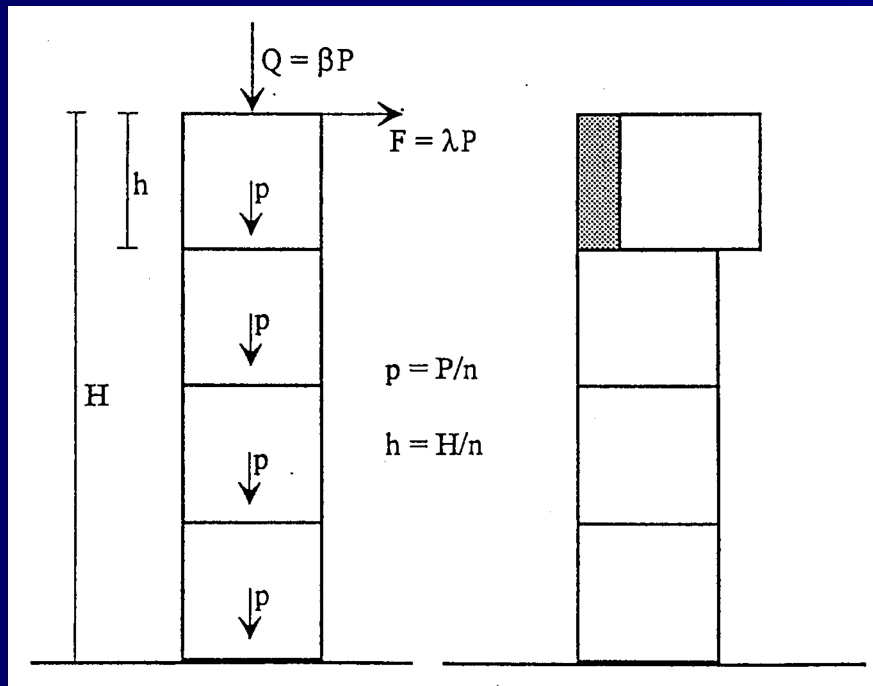
(Immagine tratta da Giuffr , *op. cit.*  
)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (2/10)

La forza  $F$  che produce lo scorrimento è uguale alla reazione di attrito che il giunto può esplicare in base al peso che grava su di esso. Se consideriamo l'ultimo concio della pila:

$\lambda P = f (P/n + Q)$ , e ponendo  $Q = \beta P$  si ottiene:  $\lambda = f(P/n + Q)$  e infine  $\lambda_s = f(1/n + \beta)$

In cui  $f$  è il coefficiente di attrito mentre  $Q$  è la risultante dei carichi verticali mentre  $F$  quella dei carichi orizzontali.



Con analogo criterio possiamo valutare la forza che produce lo scorrimento nei blocchi successivi.

$$\lambda = f(2/n + \beta)$$

$$\lambda = f(3/n + \beta)$$

$$\lambda = f(4/n + \beta)$$

Si può osservare come il valore relativo al primo blocco risulta essere il valore minimo. Se la forza  $F$  supera l'attrito massimo possibile sotto il primo blocco ivi si ha uno scorrimento.

(Immagine tratta da Giuffré, *op. cit.*)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (3/10)

Consideriamo il meccanismo di ribaltamento immaginando che possa verificarsi in ogni blocco.  
 Gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze applicate al blocco soggetto al meccanismo sono:

$$\delta_{yG} = \delta_{yB} = \theta S/2; \quad \delta_{xC} = \theta H/n;$$

Mentre il lavoro da esse compiuto:

$$L = -(P/n + Q) \theta S/2 + \lambda P \theta H/n.$$

Quindi il carico di collasso per il primo blocco corrisponde a:

$$\lambda = (1 + n\beta) S/2H$$

Mentre per il secondo blocco:

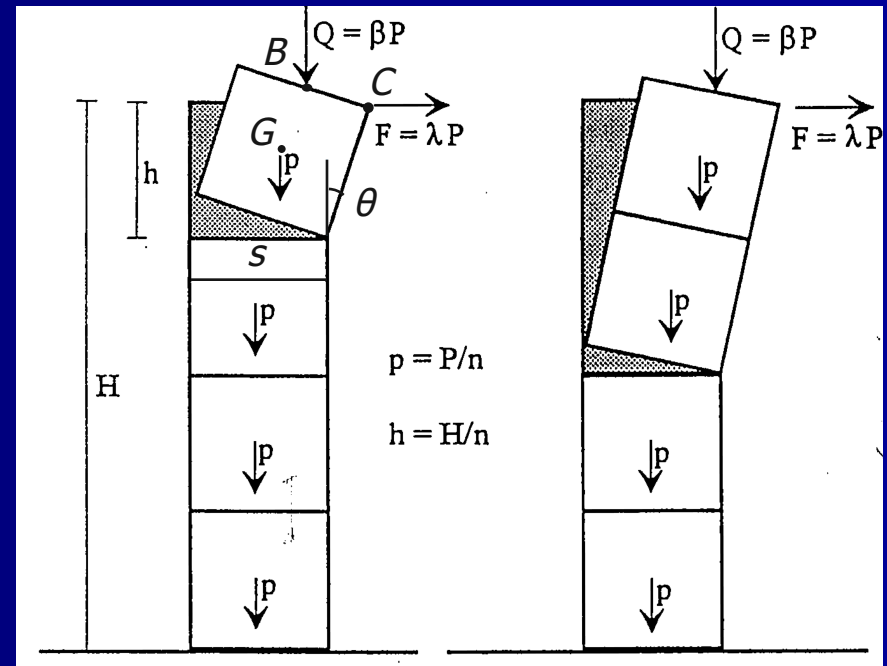
$$\lambda = (1 + n\beta/2) S/2H$$

Il valore minimo di  $\lambda$  si ha nel giunto di base:

$$\lambda_R = (1 + \beta) S/2H$$

Meccanismo di collasso per ribaltamento in un giunto intermedio

(Immagine tratta da Giuffr , *op. cit.*)



# Parete composta da più blocchi sovrapposti (4/10)

Il meccanismo di scorrimento si può esplicitare solo sul primo giunto (cui corrisponde il carico più basso) ed il sovraccarico verticale è essenziale per evitarlo. Se il sovraccarico è tale da suscitare una forza d'attrito maggiore o uguale a quella necessaria per ribaltare l'intera parete lo scorrimento è Evitato. L'unico meccanismo possibile è quello del ribaltamento.

Tale valore si calcola uguagliando la forza d'attrito prodotta dal sovraccarico  $Q = \beta P$  alla forza di ribaltamento rispetto al giunto di base  $F = \lambda_R P$

$$f\beta P = P(1 + \beta) S/2H \text{ da cui } \beta = 1/2 S/H/(f - S/H)$$

- In presenza di sovraccarico il meccanismo di ribaltamento si può esplicitare solo sul giunto di base rendendo monolitica la parete.
- In assenza di sovraccarico il valore di  $\lambda$  relativo al meccanismo di ribaltamento è uguale in qualsiasi giunto, identico a quello della parete monolitica. Il ribaltamento può avvenire in qualsiasi giunto dato che la forza ribaltante, in assenza di sovraccarico, è indipendente dall'altezza del singolo blocco.

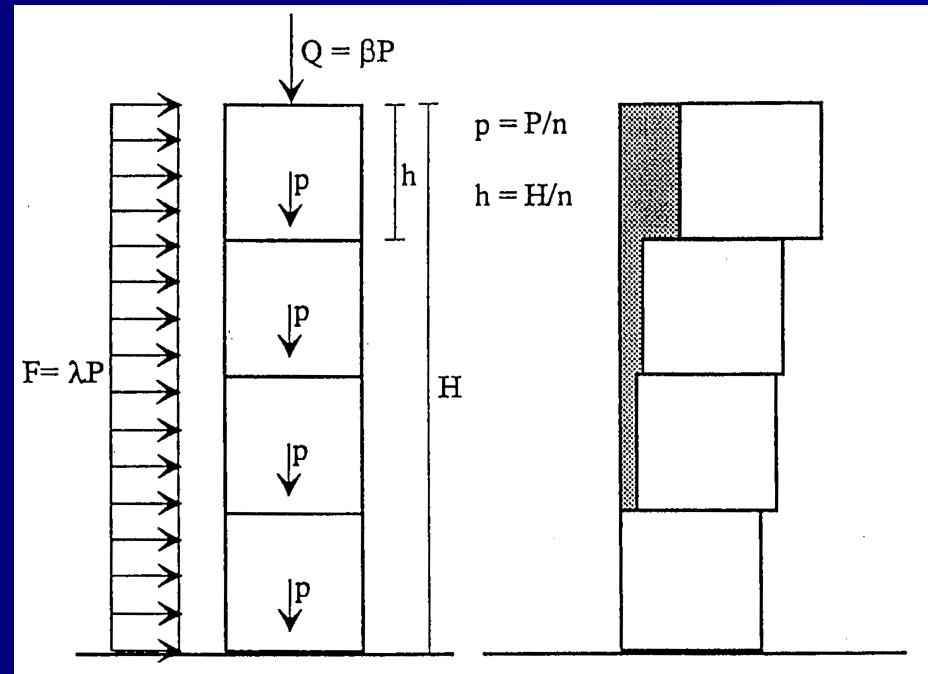
# Parete composta da più blocchi sovrapposti (5/10)

Supponiamo che ogni singolo blocco ed il loro insieme sia sufficientemente tozzo affinché il meccanismo di scorrimento corrisponda ad un carico più basso di quello di ribaltamento.

Il collasso avviene per scorrimento sotto l'azione di una forza orizzontale  $F = f P$  quindi  $f = \lambda$ .

In questo caso tutto l'assemblaggio si scompone e ciascun giunto può essere sede di scorrimento che si verificherà nel punto in cui l'attrito è inferiore.

Se invece la catasta di blocchi costituisce una parete snella il collasso avviene per ribaltamento sotto l'azione della forza minima tra quelle che ribalterebbero ciascun gruppo di blocchi. Infatti la parete snella soggetta a forza orizzontale collassa per ribaltamento.



Meccanismo di collasso per scorrimento sui giunti intermedi

(Immagine tratta da Giuffré, *op. cit.*)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (6/10)

Consideriamo la parete costituita da blocchi sovrapposti, ma di spessore così piccolo che un qualsiasi punto tra la base e l'altezza possa essere considerato sede di un piano di separazione.

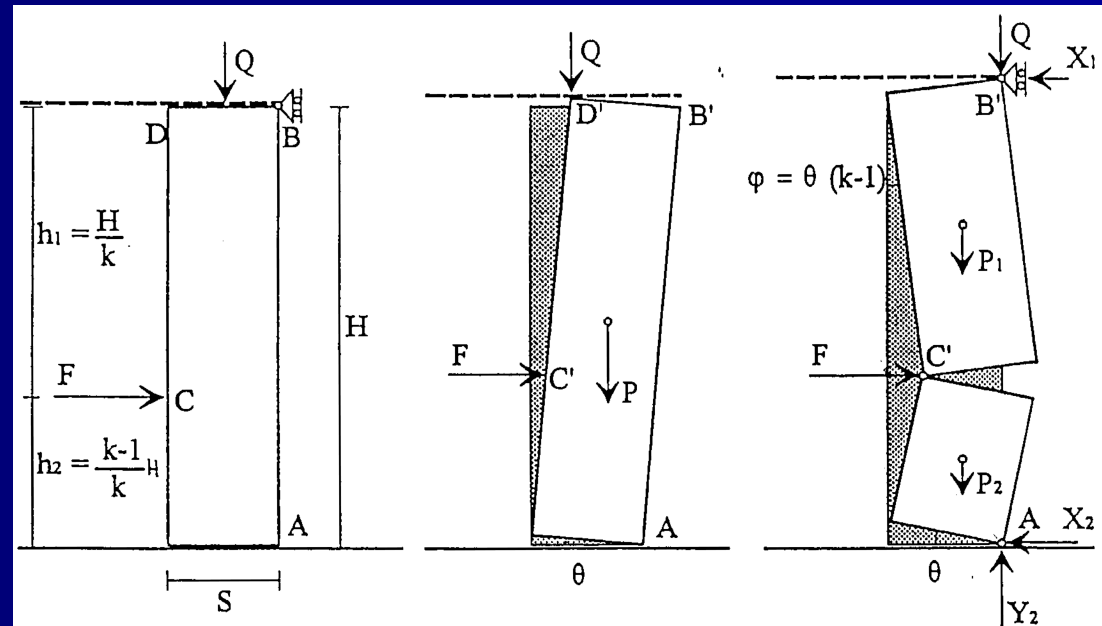
Ad esempio questo modello potrebbe rappresentare una parete alta qualche metro composta da mattoni spessi qualche cm.

Gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze sono i seguenti:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \delta_{Cx} = \theta h_2 \\ Q &\rightarrow \delta_{Dy} = \theta S \\ P &\rightarrow \delta_{Gy} = \theta S/2 \end{aligned}$$

$$L = \theta (F h_2 - Q S - P S/2)$$

$$F = (Q + P/2) S / h_2$$



La parete vincolata alla base ed in sommità, soggetta ad una forza orizzontale concentrata: a) in assenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di ribaltamento b) in presenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di rottura.

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (7/10)

Se poniamo:

$$h_1 = H/k \text{ e } h_2 = H - H/k = H(k-1)/k$$

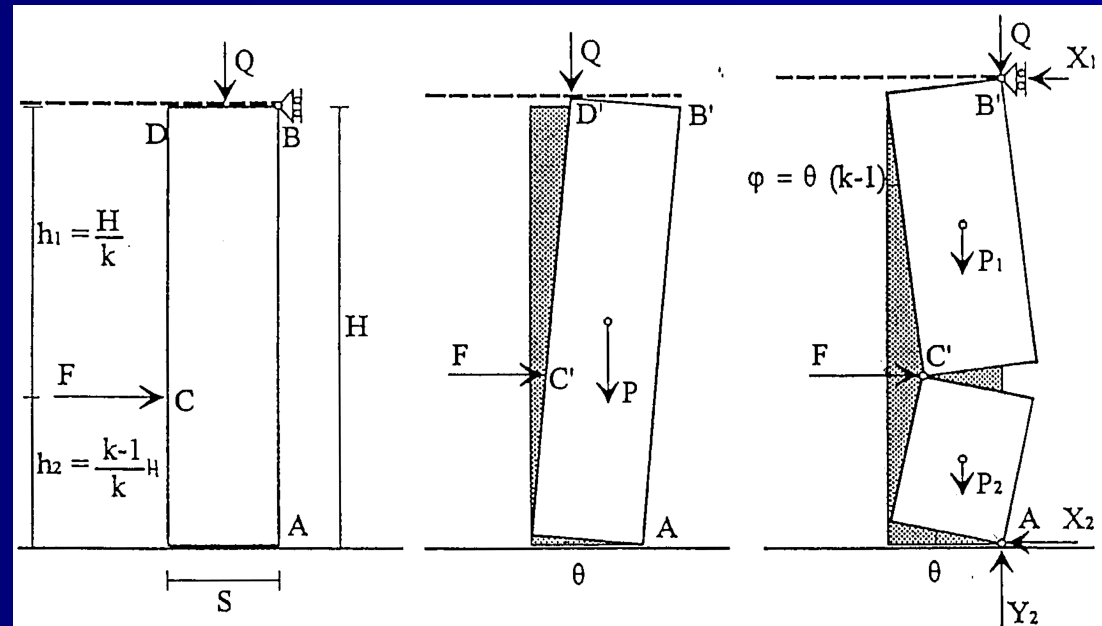
$$F = (1/2)(S/H)(P+2Q)k/(k-1)$$

Se adesso esprimiamo tutte le forze applicate in funzione della forza peso  $P$  mediante i parametri:

$$\lambda = F/P \quad \beta = Q/P$$

Il carico limite è definito da:

$$\lambda = (1/2)(S/H)(1+2\beta)k/(k-1)$$



La parete vincolata alla base ed in sommità, soggetta ad una forza orizzontale concentrata: a) in assenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di ribaltamento b) in presenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di rottura.

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (8/10)

Ora ammettiamo che il vincolo in B sia attivo e impedisca il ribaltamento globale, ma l'azione della forza F può provocare un ribaltamento parziale, suddividendo la parete in due parti che ruotano attorno al punto C.

Per determinare il lavoro virtuale assumiamo:

$$h_1 = H/k; \quad h_2 = H - H/k = H(k-1)/k;$$

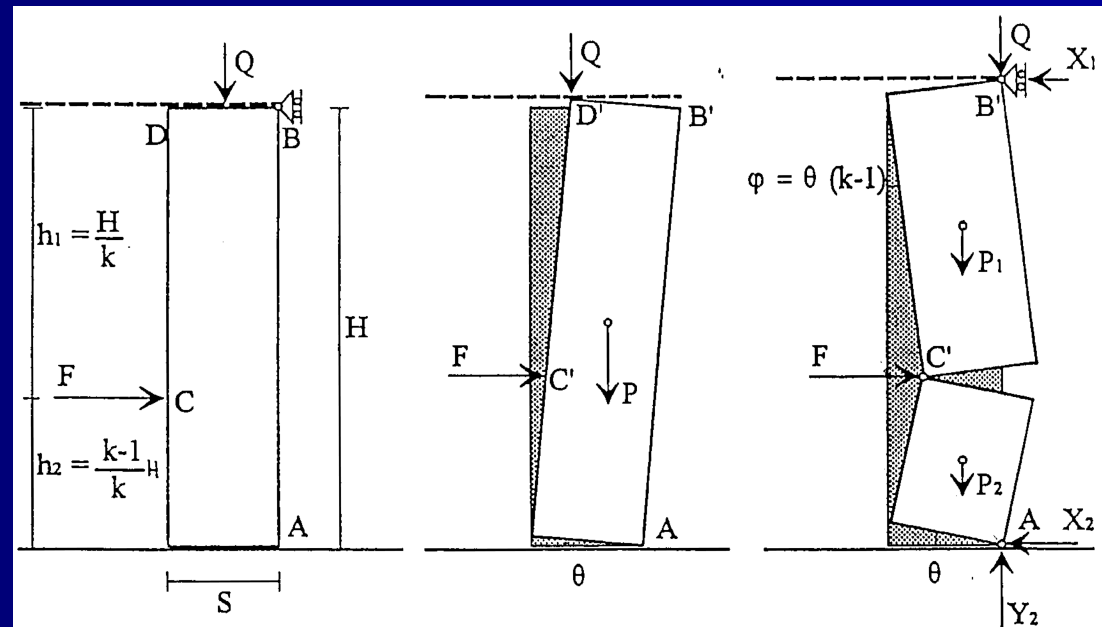
$$\varphi = \theta \quad h_2/h_1 = \theta(k-1); \quad P_1 = P/k; \\ P_2 = P(k-1)/k;$$

$$P_1 \rightarrow \delta G_{1y} = \theta S + \varphi S/2 = \theta(k+1)S/2$$

$$P_2 \rightarrow \delta G_{2y} = \theta S/2$$

$$Q \rightarrow \delta_{By} = \theta S + \varphi S = \theta k S$$

$$F \rightarrow \delta_{Cx} = \theta h_2 = \theta H(k-1)/k$$



La parete vincolata alla base ed in sommità, soggetta ad una forza orizzontale concentrata: a) in assenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di ribaltamento b) in presenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di rottura.

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Parete composta da più blocchi sovrapposti (9/10)

Il lavoro complessivo sarà:

$$L = F \delta_{cx} - P_1 \delta_{cx} - P_2 \delta G_{2y} - Q \delta_{By}$$

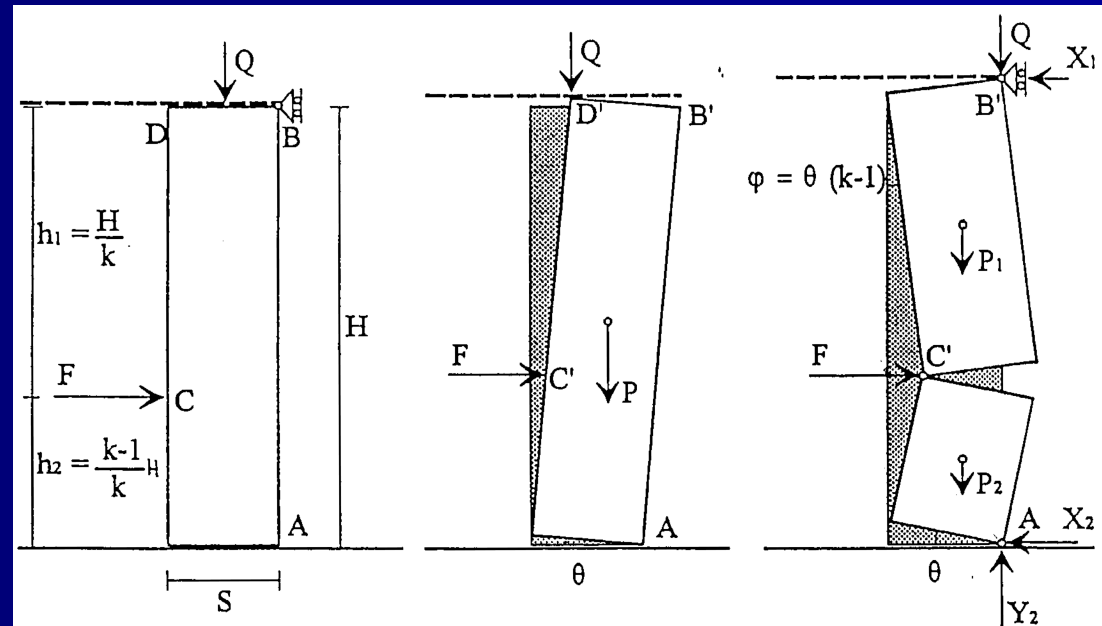
$$L = F \theta H (k-1)/k - P_1 \theta (k+1) S/2 - P_2 \theta S/2 - Q \theta k S;$$

$$F = (S/H) (P+kQ) k/(k-1)$$

Ancora una volta esprimendo tutte le forze in funzione di P si ottiene:

$$\lambda = (S/H) (1+\beta k) (k-1)/k$$

A partire da questa espressione si può dimostrare che il vincolo in sommità aumenta la resistenza della parete alla forza laterale e che il valore di quest'ultima dipende dal punto di applicazione



La parete vincolata alla base ed in sommità, soggetta ad una forza orizzontale concentrata: a) in assenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di ribaltamento b) in presenza del vincolo di sommità si verifica un meccanismo di rottura.

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)



# Parete composta da più blocchi sovrapposti (10/10)

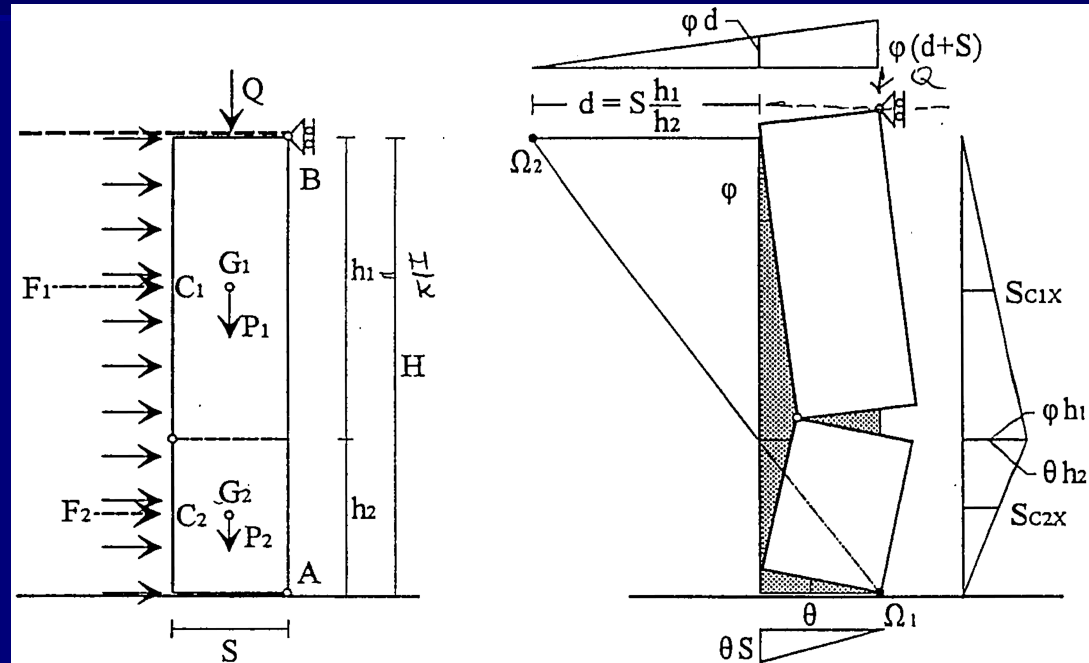
$$\lambda = 2(S/H)(1 + k\beta) k / (k-1);$$

Per calcolare il valore del carico minimo facciamo la derivata rispetto al parametro che individua la posizione:  $k$ .

$$\frac{d\lambda}{dk} = \frac{2(S/H)[(1 + 2\beta k)(k-1) - (k + \beta k^2)]}{(k-1)^2} = 0;$$

$$B k^2 - 2\beta k - 1 = 0$$

$$k = 1 + (1 + 1/\beta)^{1/2}$$



Forza orizzontale distribuita.

(Immagine tratta da Giuffr , *op. cit.*)

)

# Trilite soggetto a ribaltamento (1/2)

Consideriamo una struttura trilitica soggetta a forze orizzontali proporzionali ai pesi.

Di seguito riportiamo spostamenti dei punti di applicazione delle forze e l'espressione del lavoro virtuale:

$$P_1 \rightarrow \delta_{1y} = \theta S/2$$

$$P_2 \rightarrow \delta_{2y} = \theta S$$

$$F_1 \rightarrow \delta_{1x} = \theta(H/2)$$

$$F_2 \rightarrow \delta_{2x} = \theta H$$

$$L = 2F_1 \delta_{1y} + F_2 \delta_{2x} - 2P_1 \delta_{1y} - P_2 \delta_{2y}$$

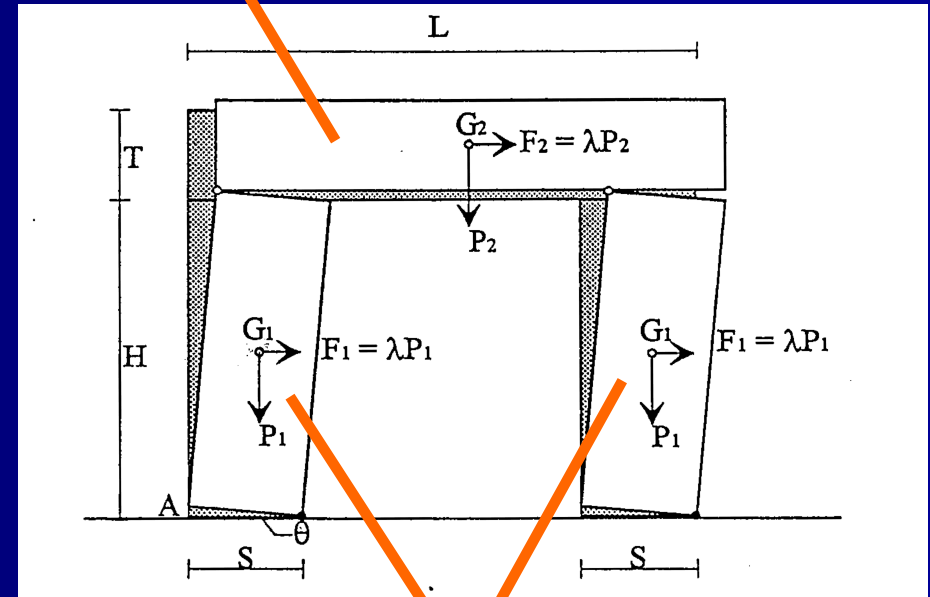
$$2\lambda P_1 \theta H/2 + \lambda P_2 \theta H - 2P_1 \theta S/2 - P_2 \theta S = 0$$

$$\lambda H(P_1 + P_2) - S(P_1 + P_2) = 0 \rightarrow \lambda = S/H$$

Si osservi che il valore è lo stesso che corrisponde ad un piedritto isolato di spessore  $S$  ed altezza  $H$  indipendentemente dal peso della piattabanda.

$S/H$  è una misura della resistenza ai carichi orizzontali del sistema.

*Piattabanda o architrave*



*piedritti*

Meccanismo di ribaltamento del trilite soggetto a forze orizzontali proporzionali ai pesi

(Immagine tratta da Giuffré, *op. cit.*)

## Trilite soggetto a ribaltamento (2/2)

Se la piattabanda è lunga quanto l'interasse tra i piedritti essa subisce una traslazione ed una rotazione.

$$\delta_{By} = \theta S / 2$$

$$\delta_{Cy} = \theta S$$

$$\varphi = (\delta_{By} - \delta_{Cy}) / (L - S/2) = \theta S (1/2 - 1) / (L - S/2) = -\theta (S/2) / (L - S/2) = -\theta / (2L/S - 1)$$

$$P_1 \rightarrow \delta_{1y} = \theta S / 2$$

$$P_2 \rightarrow \delta_{2y} = \theta S / 2 - \varphi L / 2 = \theta (S/2) (1 + (L/2) / (L - S/2)) = \theta (S/2) (3L/S - 1) / (2L/S - 1)$$

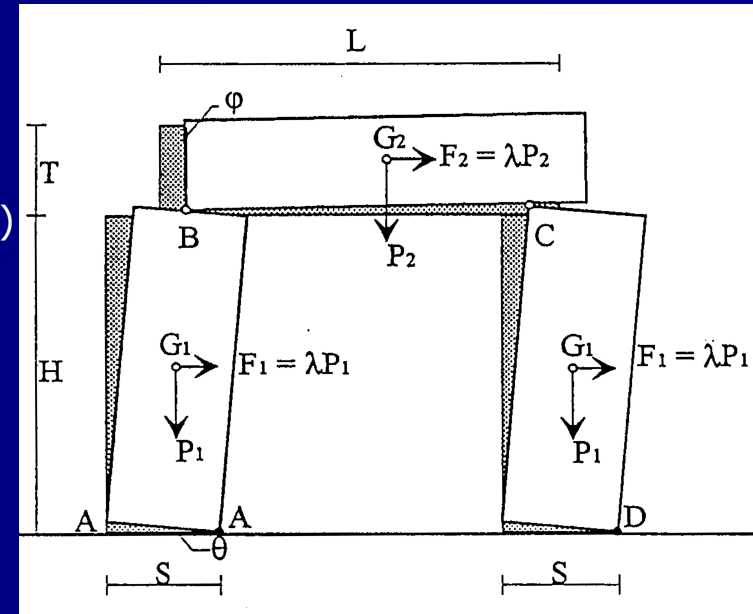
$$F_1 \rightarrow \delta_{1x} = \theta H / 2$$

$$F_2 \rightarrow \delta_{2x} = \theta H + \varphi T / 2 = \theta (H - T) / (4L/S - 2)$$

$$L = 2F_1 \delta_{1x} + F_2 \delta_{2x} - 2P_1 \delta_{1y} - P_2 \delta_{2y}$$

$$\lambda = (S/H) (P_1 + P_2 (3L/S - 1) / (4L/S - 2)) / (P_1 + P_2 (1 - (T/H) / (4L/S - 2)))$$

Il valore che moltiplica  $S/H$  è di poco diverso da uno. La resistenza alla forza orizzontale desce leggermente.



Altro caso di trilite con piattabanda lunga quanto l'interasse

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Trilite con piattabanda spezzata (ribaltamento 1/3)

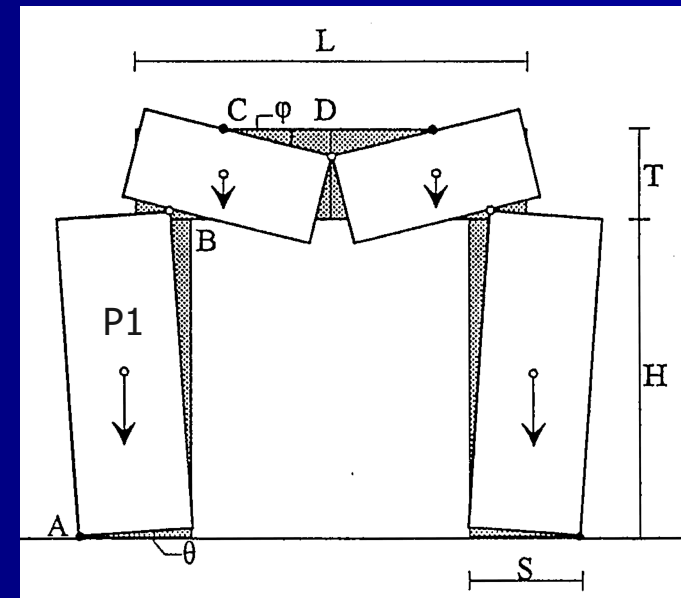
Se la piattabanda è spezzata a metà della luce può avvenire il collasso secondo il meccanismo indicato in figura.

Il collasso può avvenire solo se il peso della piattabanda compie nel cinematisimo un lavoro positivo maggiore di quello negativo compiuto dal piedritto.

Per calcolare il carico di rottura è necessario esaminare lo spostamento dei baricentri dei due corpi (piedritto e metà piattabanda).

Per quanto riguarda il piedritto:

$$P1 \rightarrow \delta_{1y} - \theta S/2$$



Meccanismo di collasso del trilite con piattabanda spezzata.

(Immagine tratta da Giuffré, *op. cit.*  
)

# Trilite con piattabanda spezzata (ribaltamento 2/3)

Il centro di rotazione del corpo 2 si determina considerando che deve stare sulla retta passante per D ortogonale al moto permesso dal carrello e sulla retta passante per B ortogonale al moto di tale punto. Questo appartenendo anche al corpo 1 dovrà muoversi in direzione ortogonale al raggio AB. Di conseguenza C si troverà sulla prosecuzione di AB nel punto in cui incontra la retta ortogonale al carrello in D.

La rotazione  $\varphi$  del corpo 2 attorno C si determina uguagliando gli spostamenti orizzontali di B che appartiene ad entrambi i corpi:

$$\delta_{B1x} = \delta_{B2x} \rightarrow \theta H = \varphi T \rightarrow \varphi = \theta H / T$$

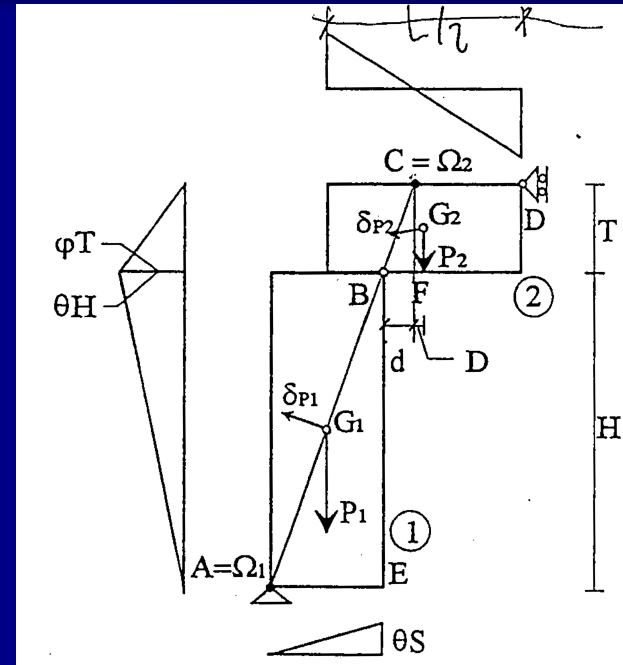
Si osservi i due versi di rotazione sono opposti. Per valutare lo spostamento verticale di G2 serve la componente orizzontale della sua distanza da C.

Considerando la similitudine tra i triangoli AEB e BFC:  
 $d/T = S/H \rightarrow d = ST/H$

Segue che la distanza tra G2 e C sarà:

Lo spostamento verticale di G2 rispetto C sarà:  $D = L/4 - S/2 - d = L/4 - S(1/2 + T/H)$

$$\delta_{2y} = -\varphi D = -\theta H / T (L/4 - S(1/2 + T/H)) = -\theta (HL/4T - HS/2T - S)$$



Modello meccanico del trilite con la piattabanda spezzata.

(Immagine tratta da Giuffré, *op. cit.*)

# Trilite con piattabanda spezzata (ribaltamento 3/3)

Il lavoro complessivo sarà:

$$L = -P_1 \delta_{1y} + P_2 \delta_{2y} = -P_1 \theta S / 2 + P_2 \theta (HL / 4T - HS / 2T - S)$$

$$P_1 S / 2 = P_2 (HL / 4T - HS / 2T - S)$$

Ponendo  $P_1 = \gamma S H$  e  $P_2 = \gamma L T / 2$  si ottiene:

$$S^2 H / 2 = L^2 H / 8 - L H S / 4 - L T S / 2$$

$$L^2 H / 8 - L S (H / 4 + T / 2) - S^2 H / 2 = 0$$

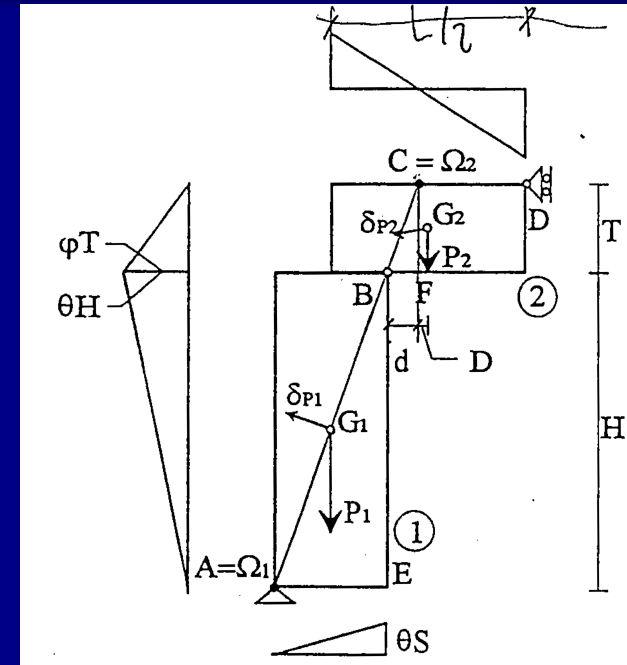
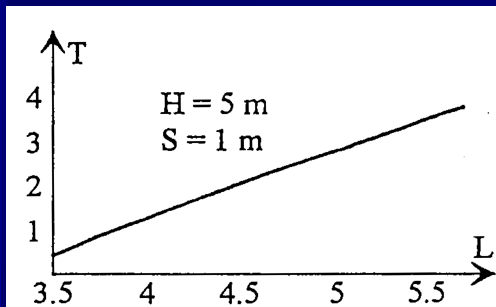
$$L^2 / 8 - L S (1 / 4 + T / 2H) - S^2 / 2 = 0$$

Da questa ultima espressione è possibile ricavare la luce  $L$  o lo spessore  $T$  della piattabanda in condizione di equilibrio limite.

a)  $L^2 - L S (2 + 4T/H) - 4S^2 = 0$

b)  $T = H(L/4S - 1/2 - S/L)$

In sostanza lo spessore della piattabanda dipende dalla luce dei piedritti con legge quasi lineare:



Modello meccanico del trilite con la piattabanda spezzata.

(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Trilite con piattabanda spezzata (scorrimento 1/2)

Un altro possibile meccanismo di collasso è quello che prevede lo scorrimento della piattabanda dovuto al superamento dell'attrito in B.

Per capire se il meccanismo si attiva o meno è necessario calcolare le reazioni vincolari e verificare se  $X_B < f_{YB}$ :

$$XT - P_2(D+d) = 0 \rightarrow X = P_2(D+d)/T = \gamma T(L/2)$$

$$Y = \gamma TL/2$$

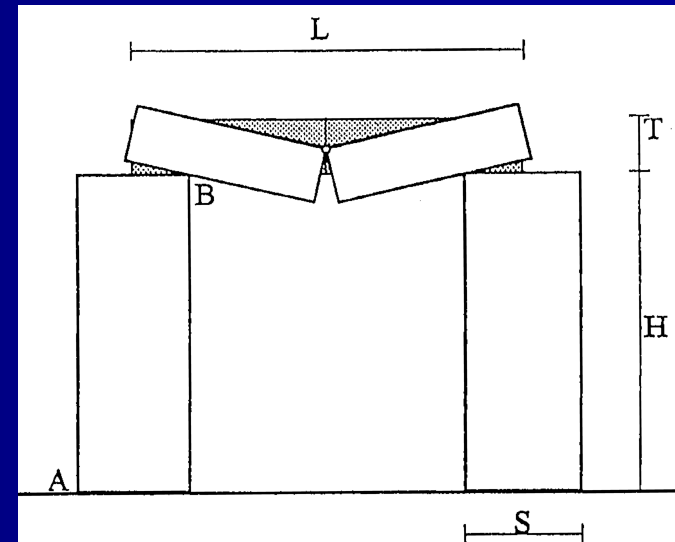
$$X/Y = (L-2S)/4T \leq f$$

Pertanto un altro valore limite della luce è:

$$L_s \leq 4fT + 2S$$

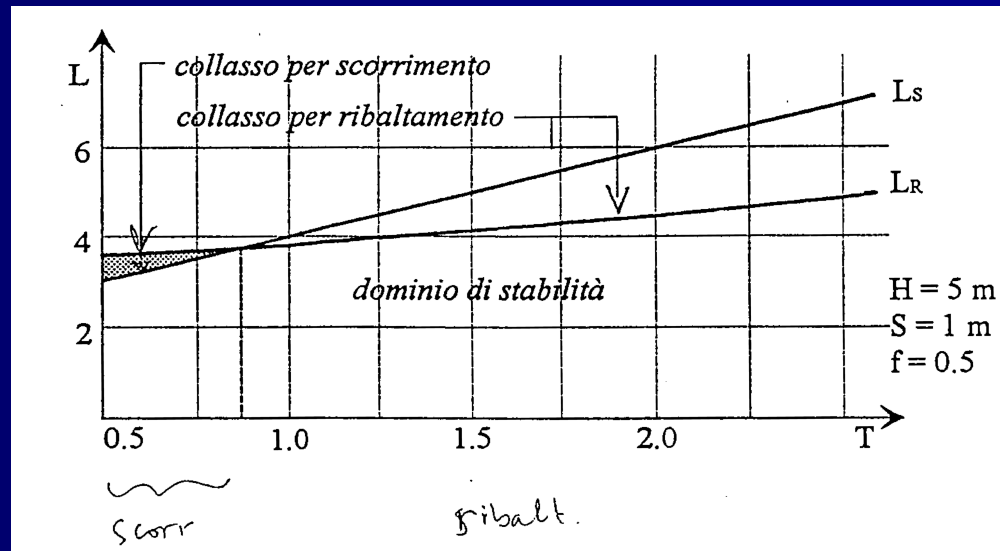
Si può dimostrare che per T piccolo il valore di luce limite rispetto al collasso per scorrimento è minore del valore della luce limite per collasso per ribaltamento.

Ne segue che per  $L > L_s$  la piattabanda collassa scivolando sugli appoggi senza muovere i piedritti.



Meccanismo di collasso per scivolamento  
(Immagine tratta da Giuffrè, *op. cit.*)

# Trilite con piattabanda spezzata (ribaltamento 2/2)

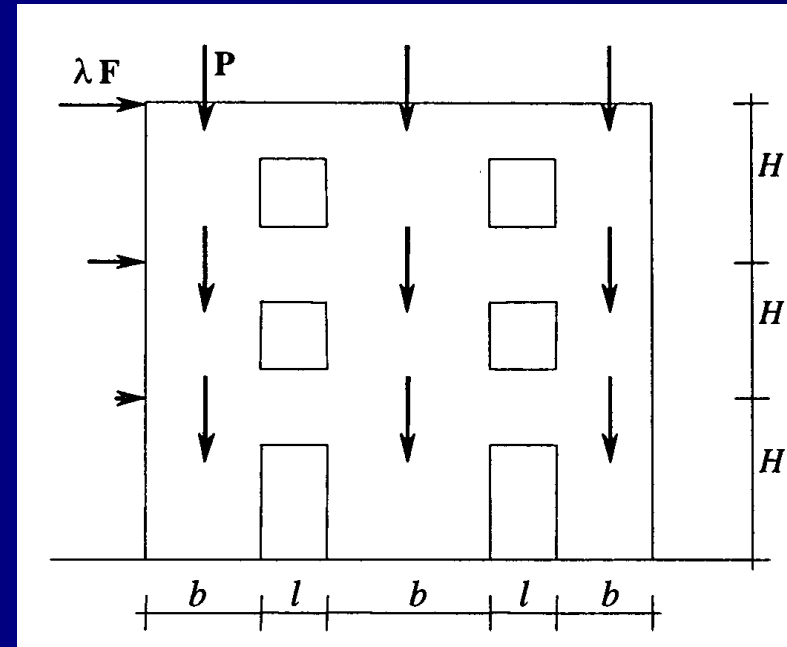


# Meccanismi di rottura per una parete multipiano (1/2)

Una tipica parete muraria è costituita da maschi murari e piattabande (le porzioni che delimitano superiormente e inferiormente le aperture) a più campate e a più piani, soggetta a carichi verticali fissi e a carichi orizzontali crescenti.

Per il calcolo della spinta limite che produce collasso si tiene conto di queste circostanze:

- Il comportamento dei maschi murari si studia come visto in precedenza;
- Le piattabande sono sollecitate a flessione, taglio e sforzo normale (quest'ultimo, in genere, di lieve entità);
- La resistenza a flessione è trascurabile in virtù della limitata resistenza a trazione: sotto spinta il comportamento è riconducibile a quello di maschi murari isolati;
- Ci può essere un considerevole effetto irrigidente delle piattabande sulla resistenza a collasso, se queste sono opportunamente rinforzate (con cordoli in c.a., putrelle in acciaio, tiranti, ecc.);

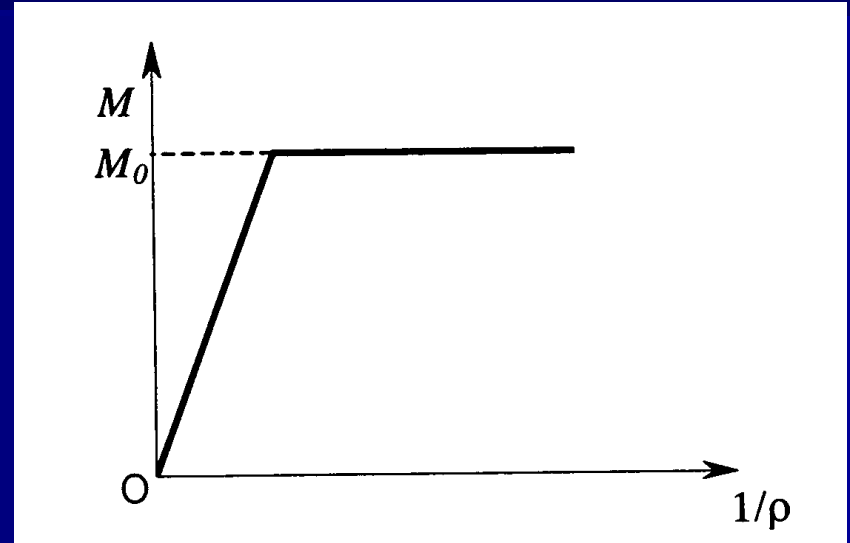


Tipica parete muraria costituita da maschi murari e piattabande.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

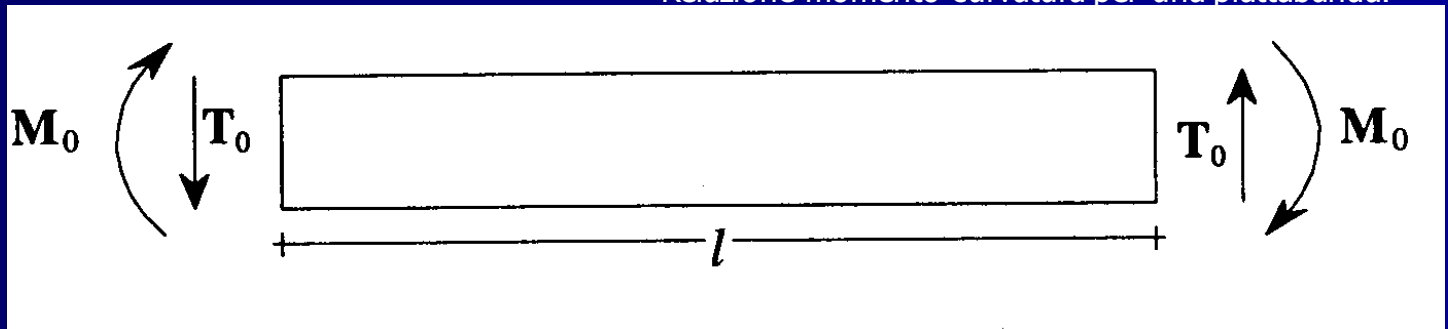
# Meccanismi di rottura per una parete multipiano (2/2)

- Se le piattabande sono irrigidite, si può assumere un comportamento duttile, schematizzabile con una relazione momento-curvatura di tipo elastico perfettamente plastico;
- In condizioni limite (al raggiungimento del momento  $M_0$ ) lo stato di equilibrio della piattabanda è quello indicato; in particolare la singola piattabanda può trasmettere un'azione di taglio massimo di valore pari a:

$$T_0 = 2 M_0 / l.$$



Relazione momento-curvatura per una piattabanda.



Distribuzione delle azioni interne in condizioni limite in una piattabanda.

(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.* )

# Riferimenti bibliografici e iconografici

- R. Baldacci, G. Ceradini, E. Giangreco, *Plasticità*, Italsider: Genova, 1971.
- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- L. Corradi, *Meccanica delle Strutture vol. III – La valutazione delle capacità portante*, McGraw-Hill: Milano, 1994.
- G. Del Piero, *Le costruzioni in Muratura*, CISM: Udine, 1984.
- A. Giuffré, C. Tocci, C. Carocci, *La struttura muraria dell'edilizia storica – modelli meccanici elementari*, Appunti del corso di Teorie e Tecniche costruttive nel loro sviluppo storico.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009<sup>2</sup>.