

Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in
Architettura
A.A. 2014-2015

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>

Lezione 8 – La statica dell'arco (Parte 1)

Sommario

- Premessa
 - terminologia degli archi
 - primi approcci razionali al funzionamento statico di un arco

- Le teorie statiche dell'arco fino alla prima metà del XVIII secolo
 - Philippe De la Hire
 - De Belidor

- Le teorie statiche dell'arco dalla seconda metà del XVIII secolo
 - Lorenzo Mascheroni e il modello a rottura dell'arco
 - Moseley e Mery e la verifica degli archi mediante la curva delle pressioni
 - Winkler e la teoria dell'elasticità applicata agli archi

- Le teorie statiche dell'arco alla luce della moderna teoria della plasticità
 - Jacques Heyman e le applicazioni del calcolo a rottura

Terminologia degli archi (1/2)

- *Asse* : linea media dell'arco;
- *Sesto* : la forma dell'asse dell'arco;
- *Imposta* : la sezione in cui l'arco si appoggia alla spalla o al piedritto;
- *Chiave* : il punto più alto dell'arco;
- *Altezza* : la lunghezza del segmento perpendicolare alla tangente all'asse;
- *Luce* : la dimensione orizzontale fra le spalle o i piedritti (per archi di piccola luce coincide con la luce netta della apertura; per archi di grande luce coincide con la distanza presa fra le due intersezioni dell'asse con le imposte);
- *Estradosso* : la linea esterna dell'arco;
- *Intradosso* : la linea interna dell'arco;
- *Concio* : elemento base a forma di cuneo che genera l'arco;

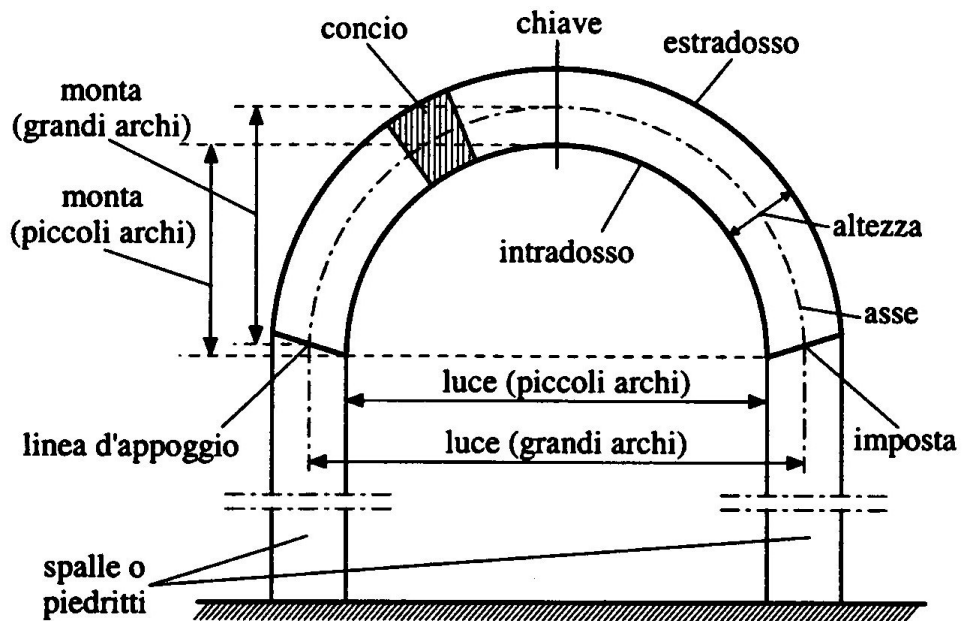


Illustrazione della terminologia in uso per gli archi.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Terminologia degli archi (2/2)

- *Linea d'appoggio* : linea dove il piedritto interseca la sezione d'imposta (per archi di piccola luce); intersezione dell'imposta con l'asse dell'arco (per archi di grande luce);
- *Monta* : la massima altezza della sommità dell'intradosso rispetto alla linea di appoggio (per archi di piccola luce); la massima altezza dell'asse rispetto alla linea d'appoggio (per archi di grande luce).

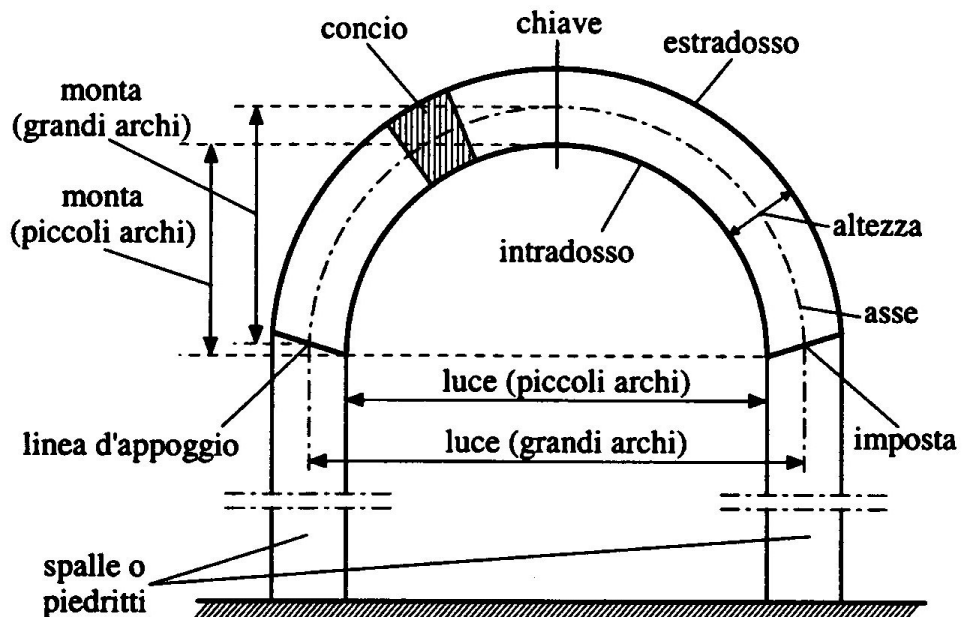


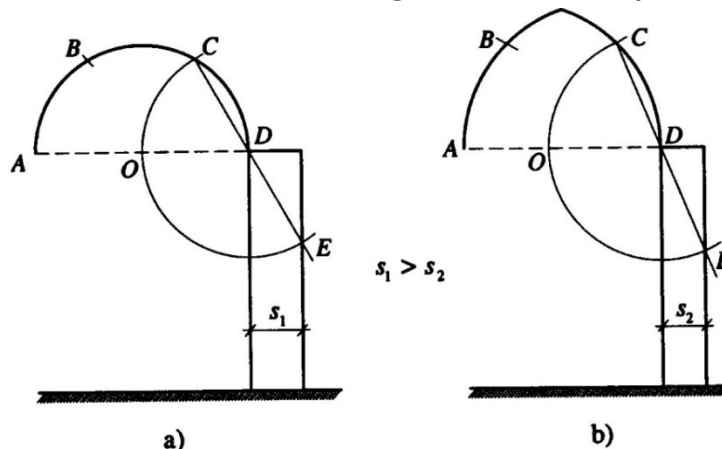
Illustrazione della terminologia in uso per gli archi.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

I primi approcci razionali alla statica dell'arco (1/2)

Una teoria statica dell'arco fu stabilita solo alla fine del XVII secolo; in epoca precedente si ebbero solo alcuni tentativi:

Vitruvio Pollione nel *De architectura libri decem* (libro VI) dimostrò che una volta esercita un effetto spingente sui muri e i pilastri che la sostengono.

Eugène Viollet-le-Duc ne *L'architettura ragionata* (sec. XIX) sostenne che i costruttori medievali erano già a conoscenza, per lo meno a livello intuitivo della curva delle pressioni, tanto è che la forma dell'arco a sesto acuto approssima meglio di ogni altra la curva delle pressioni, se sottoposta a carichi come quelli ricorrenti nell'architettura gotica. Inoltre i costruttori medievali utilizzavano un metodo geometrico empirico per dimensionare i piedritti perché contenessero la



spinta dell'arco:

Dividendo l'arco, sia che fosse a tutto sesto, sia a sesto acuto, in tre parti eguali, AB, BC, CD, con centro in D e raggio CD si descriveva una semicirconferenza. L'estremità opposta a C del diametro, E, apparteneva al filo esterno del piedritto.

La regola conduce ad avere piedritti di spessore maggiore per archi a tutto sesto che per archi a sesto acuto, poiché maggiore è la spinta.

Metodo empirico per il dimensionamento dei piedritti: per arco a tutto sesto (a) e per arco a sesto acuto (b).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

I primi approcci razionali alla statica dell'arco (2/2)

Il dimensionamento in chiave geometrica restò per molto tempo dopo il medioevo il criterio più seguito dagli architetti: Leon Battista Alberti (secolo XV) nel *De Re Aedificatoria* riconosce che ai fini della stabilità dell'arco è di estrema importanza la forma e in particolare afferma che:

Rectum arcum omnium esse firmissimum (ovvero: "l'arco a tutto sesto è il più solido di tutti")

Leonardo da Vinci (secolo XV) fornì i primi spunti di corretta interpretazione meccanica del comportamento di un arco affermando nel manoscritto del *Codice Foster*:

Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze, imperoché l'arco negli edificii è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circoli, ciascuno debolissimo per sé, desidera cadere e oponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in una unica fortezza.

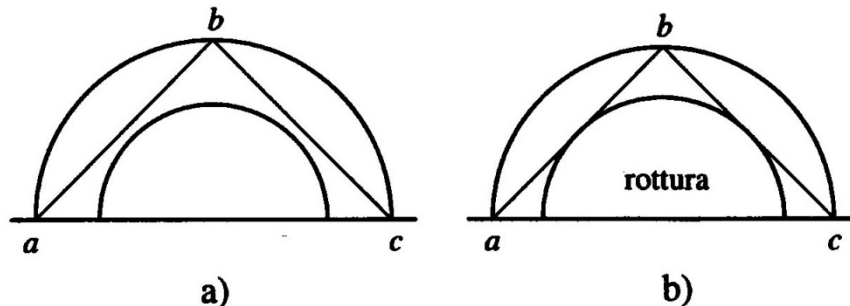


Illustrazione della condizione di stabilità di un arco secondo Leonardo: l'arco a) è in condizioni di sicurezza, l'arco b) è in condizioni di rottura.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Leonardo sperimentò anche un metodo per la verifica al ribaltamento degli archi, stabilendo una condizione secondo la quale le sezioni dell'arco non ruotano: l'arco è assimilato a due barre rettilinee, ab e bc e si afferma che: *L'arco non si romperà se la corda dell'archi di fuori non tocherà l'arco di dentro.*

Ciò dimostra l'intuizione della condizione che la curva delle pressioni risulti interna all'arco.

Le teorie statiche dell'arco: De la Hire (1/4)

I primi contributi significativi alla teoria statica dell'arco sono dovuti a Philippe De la Hire (1640-1718). Nel *Traité de Mécanique* (1699) e nella memoria *Sur la construction de voutes dans les édifices* (1731, postuma) l'arco venne studiato come una macchina semplice in grado di spiegare l'equilibrio, il cuneo.

I conci vengono intesi come porzioni di cunei insistenti su letti di malta.

Il modello non è soddisfacente ma ha il merito di costituire il primo approccio meccanico agli archi e di avere considerato le strutture in muratura come sistemi rigidi, dotati di peso.

L'aspetto insoddisfacente è che la teoria di De la Hire ignora sia la deformabilità (effettivamente trascurabile in prima approssimazione) sia l'effetto dell'attrito, che è, invece, uno degli elementi più importanti da tenere in considerazione.

Questo effetto venne corretto da Charles Augustin Coulomb nel 1773 con il saggio *Essai sur une application de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*.

De la Hire affronta 2 problemi:

1. L'equilibrio di una volta (o di un arco) indipendentemente dai suoi piedritti;
2. La determinazione della larghezza dei piedritti in funzione delle spinte provenienti dalla volta.

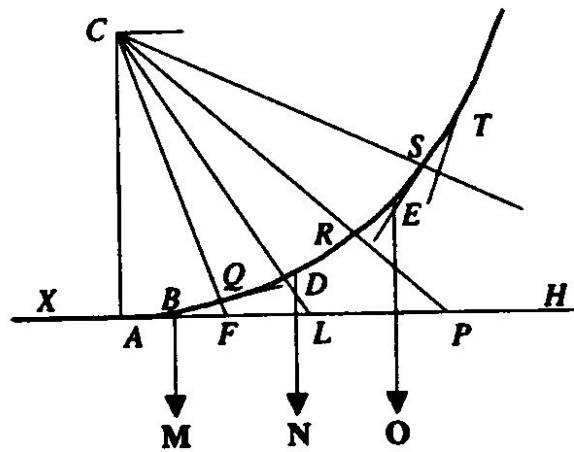
Nell'affrontare il problema 1) si ha il preludio del poligono delle forze per esprimere l'equilibrio di un sistema di forze concorrenti.

Le teorie statiche dell'arco: De la Hire (2/4)

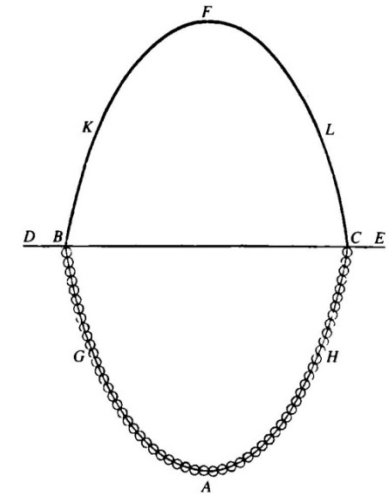
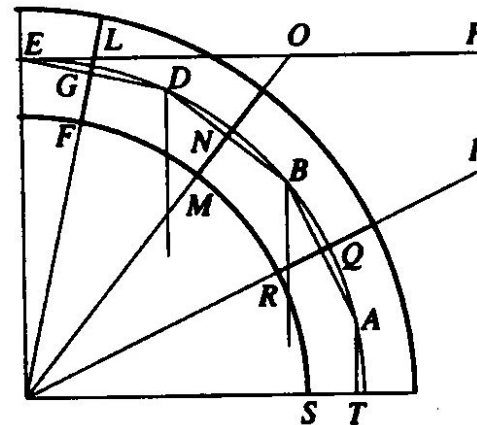
De la Hire tratta l'arco come una fune (come già proposto da Robert Hooke nel 1675): se si rovescia la figura assunta da una fune tesa si ottiene l'arco, i cui elementi sono compressi e non tesi.

Un arco a tutto sesto con conci eguali e senza attrito (sicché la spinta risulta normale alla superficie di contatto fra conci) con i pesi dei singoli conci applicati nei loro baricentri corrisponde a una fune tesa soggetta a carichi verticali.

Si determina quindi *il carico da affidarsi a ogni concio con cui si formano gli archi e le volte* ovvero il peso, o la forma, di ogni concio *prefissando a priori quello in chiave* affinché tutti restino in equilibrio.



Corrispondenza fra fune e arco secondo De la Hire.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



La fune come arco rovesciato secondo Poleni.
(Immagine tratta da Heyman, *op. cit.*)

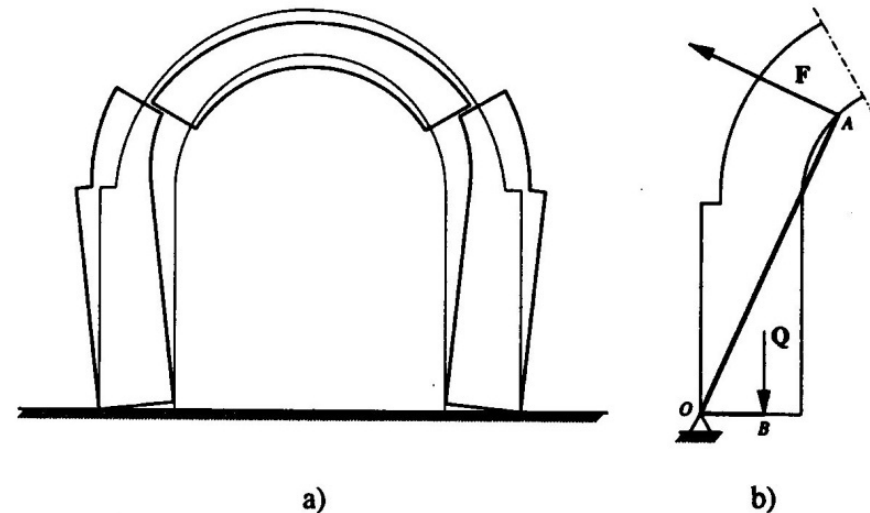
Le teorie statiche dell'arco: De la Hire (3/4)

La costruzione cade in difetto per l'ultimo concio, quello di imposta, che dovrebbe avere un peso infinito: ma qui si sopperisce invocando l'attrito (contraddittoriamente).

Per il problema 2) De la Hire accenna a un primo esempio di calcolo a rottura, proponendo ciò che è un meccanismo di collasso, ed esprimendone l'equilibrio. Le ipotesi di rottura sono le seguenti:

1. La volta si lesiona simmetricamente in una sezione intermedia (a 45°) fra imposta e chiave;
2. Nelle tre zone individuate dalle sconessioni i conci restano uniti a formare 3 corpi rigidi (senza che si abbiano cedimenti delle fondazioni);
3. La spinta è applicata al lembo inferiore del giunto di rottura.

In particolare si ipotizza che il cuneo della parte superiore faccia ruotare il piedritto attorno a O .



Meccanismo di collasso dell'arco secondo de la Hire (a); e leva (AOB) equivalente al piedritto e alla porzione di arco a questo solidale (b).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De la Hire (4/4)

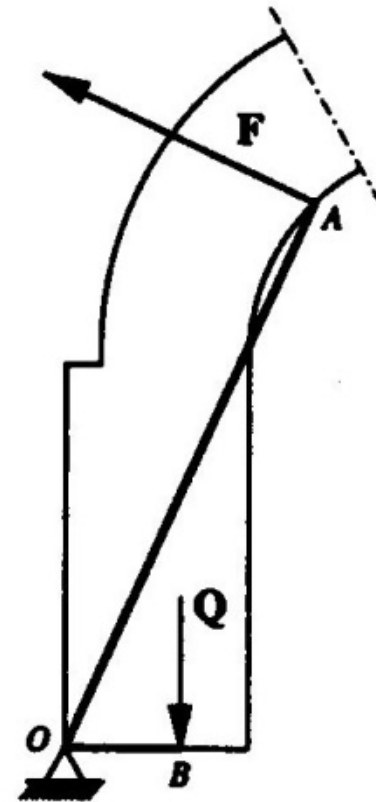
L'equazione di equilibrio limite si ricava ipotizzando che si abbia una leva a gomito con fulcro in O ; le forze, applicate agli estremi, sono le spinte della volta e i pesi del piedritto e della parte inferiore della volta costituenti cuneo inferiore.

Limiti del modello:

1. Il meccanismo considerato (scorrimento verso il basso del cuneo centrale) è possibile ma non molto probabile;
2. La componente F della forza esercitata dal concio centrale risulta perpendicolare alla leva nel punto A ;
3. Il contributo stabilizzante (peso del cuneo inferiore) è applicato all'estremo B della leva.

Il procedimento non è del tutto errato poiché per la condizione di equilibrio il momento ribaltante, pari a $F L_{OA}$ deve eguagliare il momento stabilizzante, dato da $Q L_{OB}$, mentre la componente della spinta del cuneo superiore (che per l'assenza di attrito deve essere normale alla superficie di scorrimento, e per ipotesi è applicata all'intradosso) agente secondo la direzione OA non contribuisce al momento rispetto al punto O .

Il meccanismo a leva assunto da De la Hire



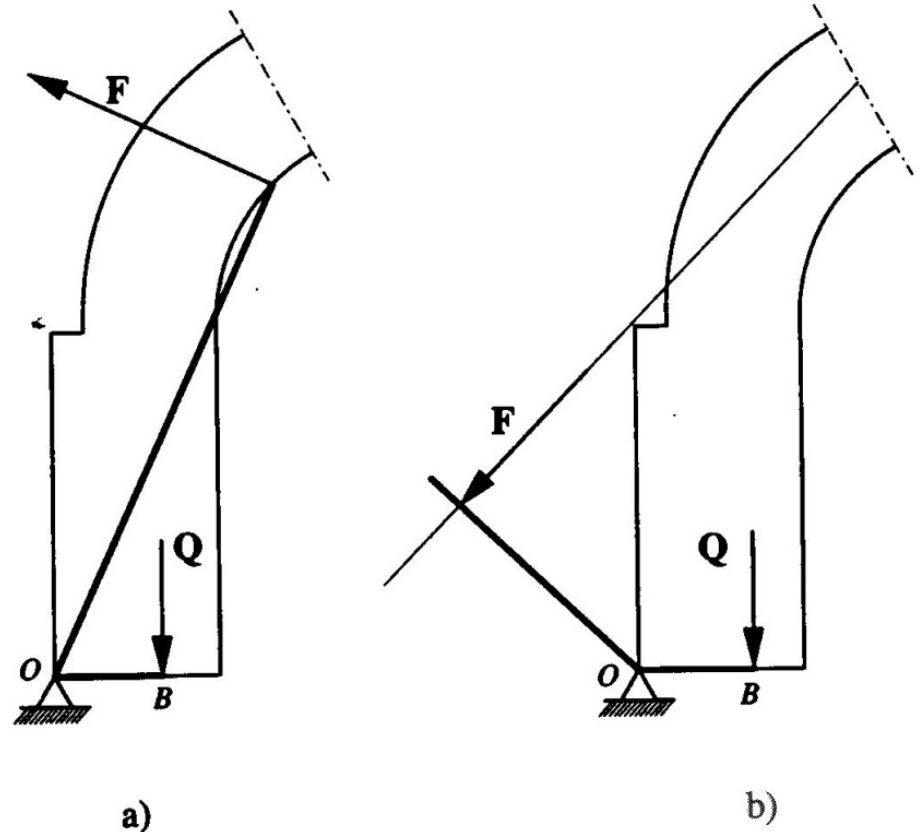
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De Belidor (1/5)

De Belidor riprese la teoria di De la Hire, ma con ipotesi diverse sul punto di applicazione della forza ribaltante e del tipo di leva (che ne modifica la scomposizione).

Ferma restando la posizione della sezione critica (quella posta a 45°), la spinta F del cuneo superiore è applicato in corrispondenza dell'asse dell'arco, e non dell'intradosso.

Inoltre la leva è assunta per la parte relativa al momento ribaltante con il braccio inclinato di 45° rispetto all'orizzontale, così da mettere in evidenza la spinta dell'arco e il peso del piedritto.



Confronto fra il modello di leva di De la Hire (a) e di De Belidor (b).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De Belidor (2/5)

Se Q_c è il peso dell'elemento $aABb$ (pari a metà del cuneo superiore), la spinta esercitata sulla parte sottostante si ottiene scomponendo Q_c secondo le direzioni orizzontale e normale al giunto bB .

Ne risulta che la spinta esercitata sul cuneo inferiore, applicata nel punto L vale $F = \sqrt{2} Q_c$.

Il braccio di leva OO_1 si determina dalla similitudine dei triangoli OO_1N , NYL , LGC

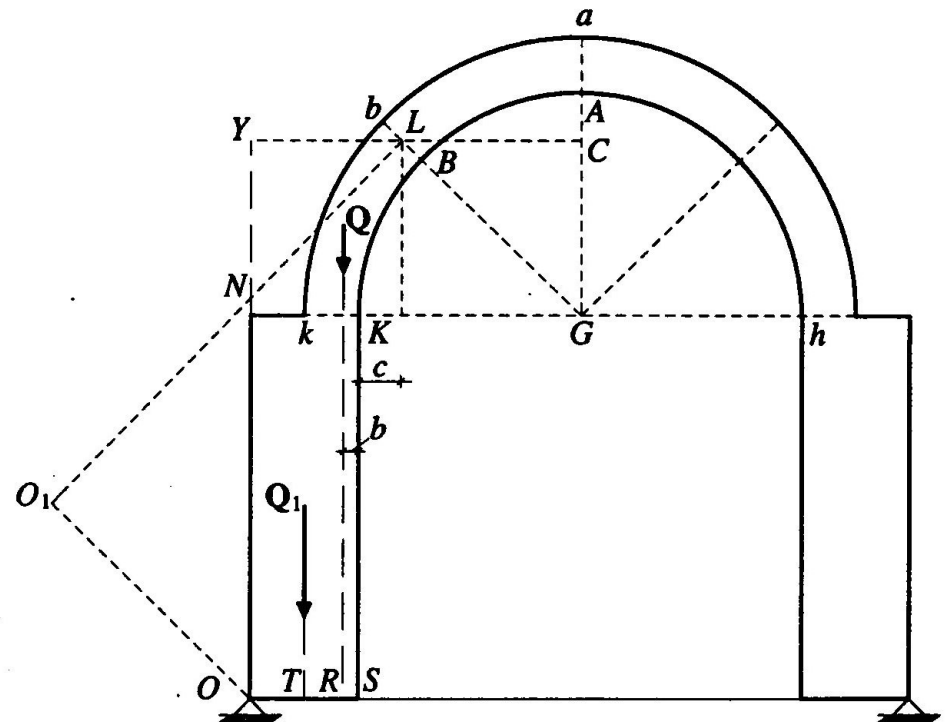
Se si definiscono:

y = larghezza del piedritto (incognita);

h = altezza del piedritto;

b = distanza fra la retta d'azione del peso $Q = Q_c$ del concio $bBkk$ dal filo del piedritto;

c = distanza dal filo del piedritto alla verticale passante per il punto L



Scomposizione della forza Q_c secondo il modello di De Belidor.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De Belidor (3/5)

si trova che

$$d_{YL} = y + c$$

$$d_{OY} = h + d_{OG}$$

pertanto:

$$d_{ON} = d_{OY} - d_{NY} = d_{OY} - d_{YL}$$

quindi

$$d_{ON} = h + d_{GC} - (y + c)$$

Se si pone:

$$f = d_{GC} + h - c$$

si ottiene:

$$d_{ON} = f - y$$

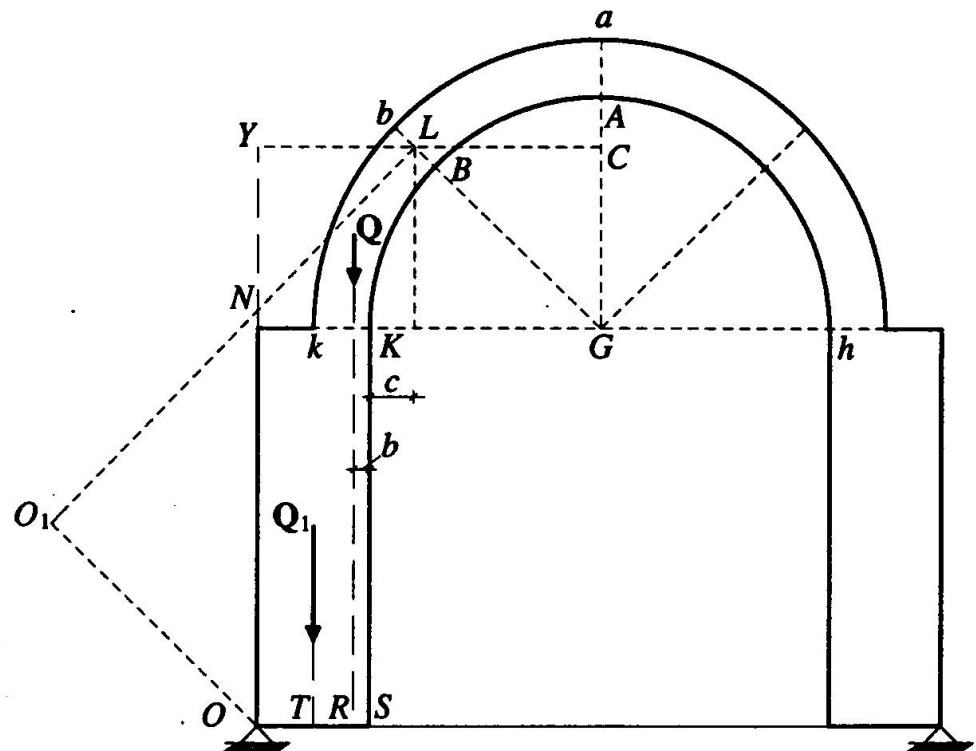
Pertanto il braccio della leva vale:

$$d_{OO'} = (\sqrt{2}/2) (f - y)$$

Si osserva infine che

$$Q_1 = \gamma hy,$$

dove γ è il peso specifico del piedritto.



Condizione di equilibrio limite secondo il modello di De Belidor.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De Belidor (4/5)

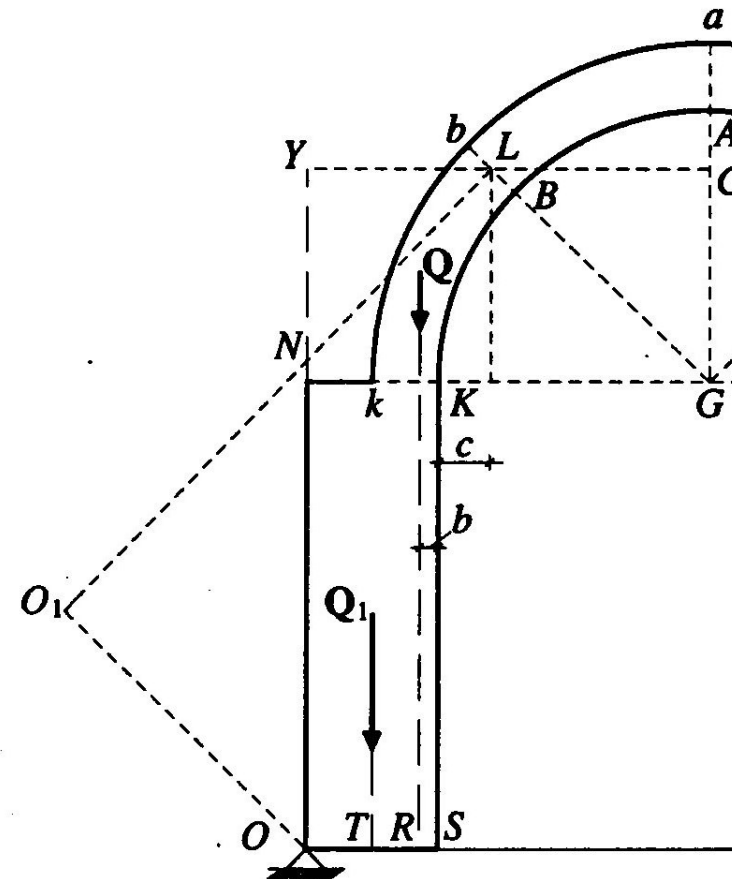
L'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto O fornisce quindi:

$$Q_c (f - y) = \gamma h y^2 / 2 + Q_c (y - b)$$

da cui si ricava il valore della incognita y , larghezza del piedritto:

$$y = 1/(\gamma h) \{-2Q_c + [4Q_c + 2Q_c \gamma h (f + b)]^{1/2}\}.$$

Le formulazioni di De la Hire e di De Belidor sono analoghe dal punto di vista meccanico, ma la seconda è di più semplice interpretazione.



Meccanismo di funzionamento dell'arco secondo De Belidor
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Le teorie statiche dell'arco: De Belidor (5/5)

La teoria di De Belidor può essere generalizzata con facilità al caso in cui la sezione che si lesiona non sia quella a 45° ma corrisponda a un angolo φ misurato a partire dalla direzione orizzontale.

L'azione trasmessa dalla sommità dell'arco, di peso complessivo Q , al cuneo inferiore vale:

$$F = (Q/2)(1/\cos\varphi),$$

mentre il braccio, d_F della forza F sulla leva angolare O_1OD è dato da:

$$d_F = (y_L \tan\varphi - x_L) \cos\varphi$$

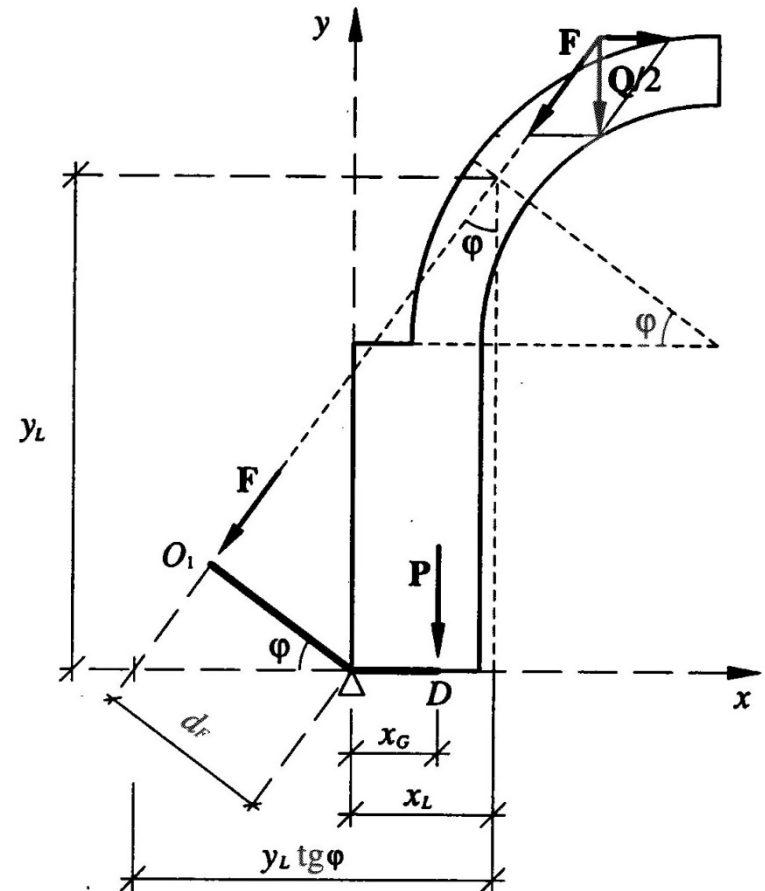
La condizione di equilibrio dei momenti rispetto al polo O permette di ricavare il valore del peso P del piedritto e della parte di arco ad esso aderente:

$$F d_F = P x_G.$$

Ne segue:

$$P = (Q/2) (y_L \tan\varphi - x_L) / x_G. \quad [1]$$

Generalizzazione del meccanismo di De Belidor al caso in cui la sezione lesionata formi con il piano di imposta un angolo $\varphi \neq 45^\circ$



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

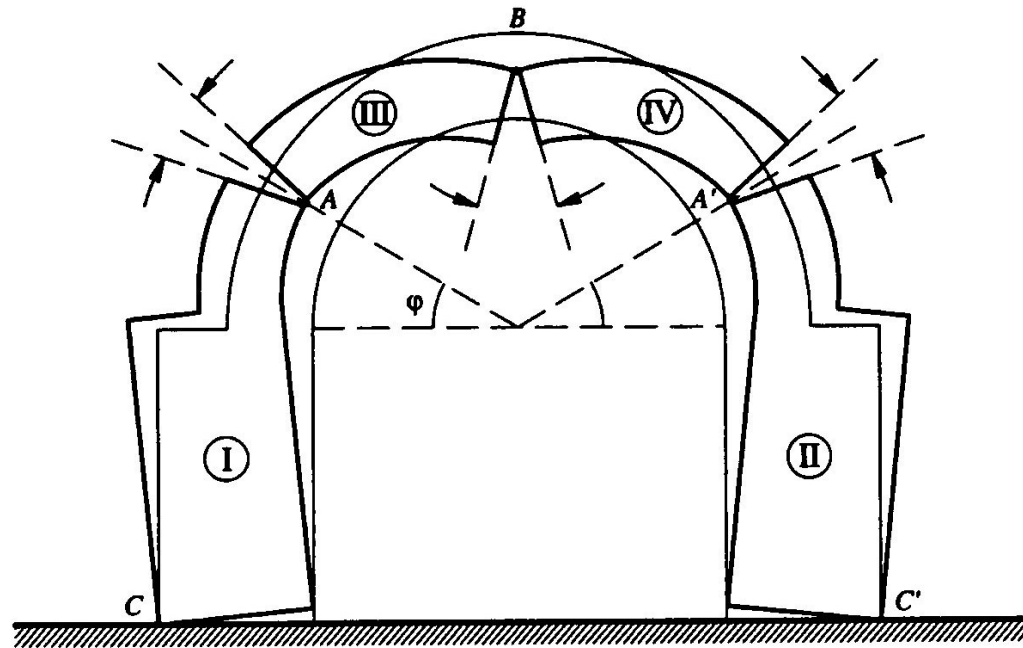
Il meccanismo di rottura di Mascheroni (1/3)

Lorenzo Mascheroni propose nel suo lavoro *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte* (1785) un meccanismo a rottura dell'arco che prevede una rottura multipla e la formazione di lesioni all'intradosso in chiave e all'estradosso alle reni.

Il meccanismo è più realistico di quello di De Belidor poiché prevede una rottura per effetto della rotazione di parti rigide (dovuta alla formazione delle cerniere e non per scivolamento).

Si può vedere la struttura come un sistema articolato di 4 corpi rigidi (I, II, III, IV) vincolati a cerniera esternamente in C e C' , e internamente in A , A' e B .

Il sistema ottenuto è 2 volte labile (12 g.d.l. e 10 g.d.v.), ma possono esistere condizioni di carico per le quali sussiste l'equilibrio.



Meccanismo di rottura di un arco per rotazioni, consentite dalla formazione di cerniere, proposto da Mascheroni.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il meccanismo di rottura di Mascheroni (2/3)

Tenendo sempre conto della simmetria e ipotizzando che la reazione trasmessa dalla cerniera di estradosso B risulti orizzontale si ha che la forza trasmessa dalla cerniera che si forma all'intradosso, A , equilibri il peso del tratto di arco AB , ancora pari a $Q/2$, e la forza orizzontale, H .

Mediante il parallelogramma delle forze si ottiene che per equilibrio la forza che si trasmette al tratto di arco-piedritto AC attraverso la cerniera A ha una componente verticale pari a $Q/2$ e una componente orizzontale di valore:

$$H = (Q/2) \tan \varphi' = (Q/2) (l/f).$$

Per l'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera C delle forze applicate al tratto arco-piedritto si trova:

$$H y_A - (Q/2) x_A - P x_G = 0,$$

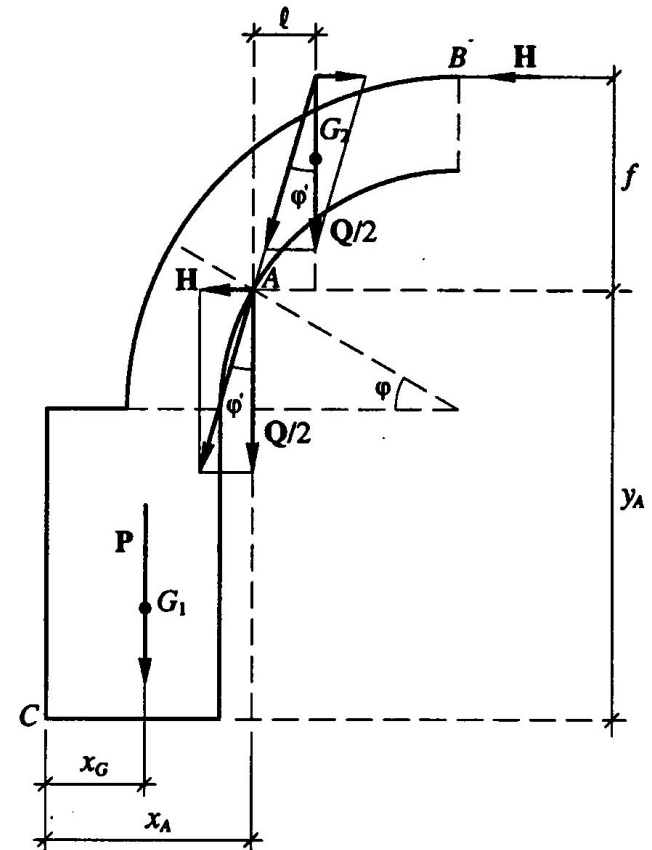
da cui si ricava

$$P x_G = (Q/2)(y_A \tan \varphi' - x_A),$$

e questo fornisce per il carico P il valore:

$$P = (Q/2) (y_A \tan \varphi' - x_A) / x_G. \quad [2]$$

Condizione di equilibrio limite secondo il modello di Mascheroni.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il meccanismo di rottura di Mascheroni (3/3)

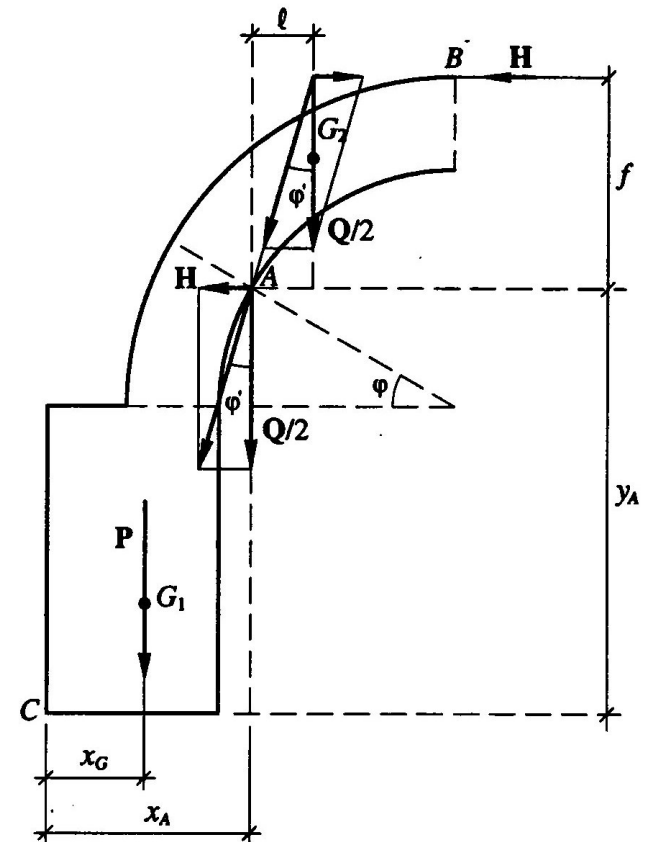
Le espressioni [1] e [2] forniscono le condizioni di equilibrio dell'arco secondo due meccanismi differenti: per la [1] si tratta di rottura per scivolamento a cuneo della parte superiore lungo i giunti alle reni, per la [2] di rottura per rotazioni resa possibili dalla formazione di due cerniere alle reni e una in chiave.

La struttura è identica, ma si hanno diversi valori dell'angolo: φ nel primo caso, φ' nel secondo.

Poiché nella maggior parte dei casi risulta $\varphi > \varphi'$, la rottura dell'arco avverrebbe per scorrimento invece che per la formazione di cerniere.

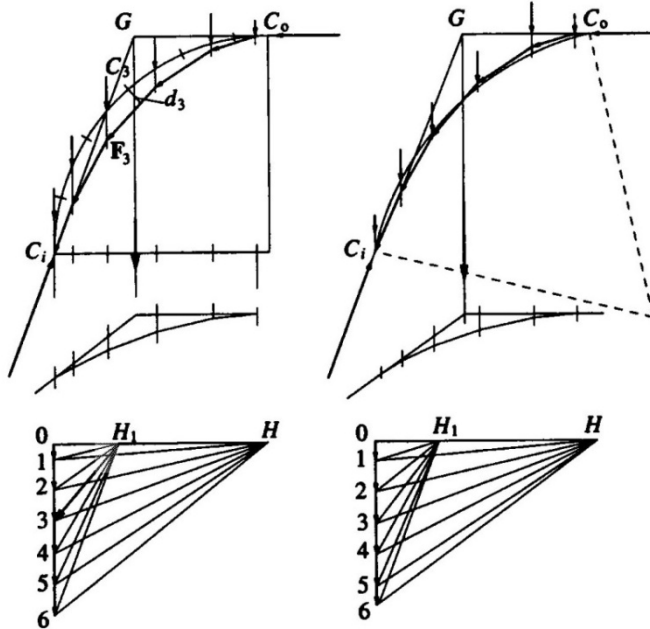
Il risultato contrasta tuttavia con i riscontri sperimentali, visto che le superficie di contatto fra i conci non sono prive di attrito: in questo caso la reazione che la superficie del giunto offre alla porzione superiore di arco che tende a scivolare su di essa non è ortogonale, ma inclinata di un angolo Φ (*angolo di attrito*) nel verso opposto a quello del moto.

Nella [1] si dovrebbe sostituire a φ il valore $\alpha = (\varphi - \Phi) < \varphi'$ e ciò produrrebbe l'effetto che il valore corretto della forza \mathbf{P} sarebbe fornito dalla [2].



Condizione di equilibrio limite secondo Mascheroni.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (1/6)



Linea d'asse, curva delle pressioni, poligono funicolare e poligono delle forze per un arco circolare a tutto sesto (a sinistra) e per un arco circolare a sesto acuto (a destra).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

È il metodo più usato per la verifica di archi e volte, grazie alla sua semplicità e facilità di impiego.

Costruisce il poligono funicolare del sistema di vettori che rappresentano i pesi di tutti i conci, con la condizione che questo poligono passi per punti prefissati.

Il metodo si diffuse intorno alla metà del XIX secolo, fu usato dal Moseley nel 1843 e successivamente divulgato da Mery.

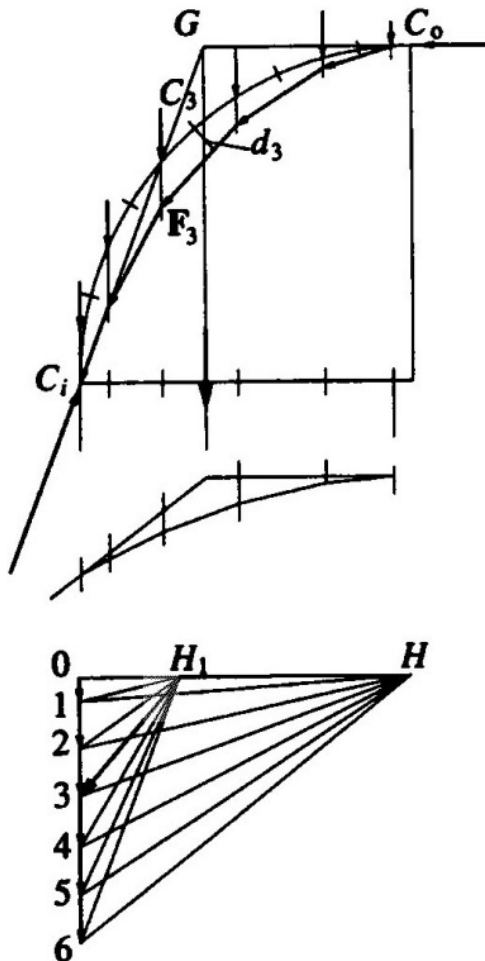
Le ipotesi alla base del metodo sono le seguenti:

- Arco simmetrico;
- Carichi simmetrici;
- Spinta trasmessa in chiave da un semiarco all'altro esclusivamente orizzontale;
- Spessore dell'arco uniforme;
- Massa concentrata lungo la linea d'asse.

I pesi dei singoli conci vengono valutati e descritti come vettori in un'opportuna scala.

Successivamente si procede come segue:

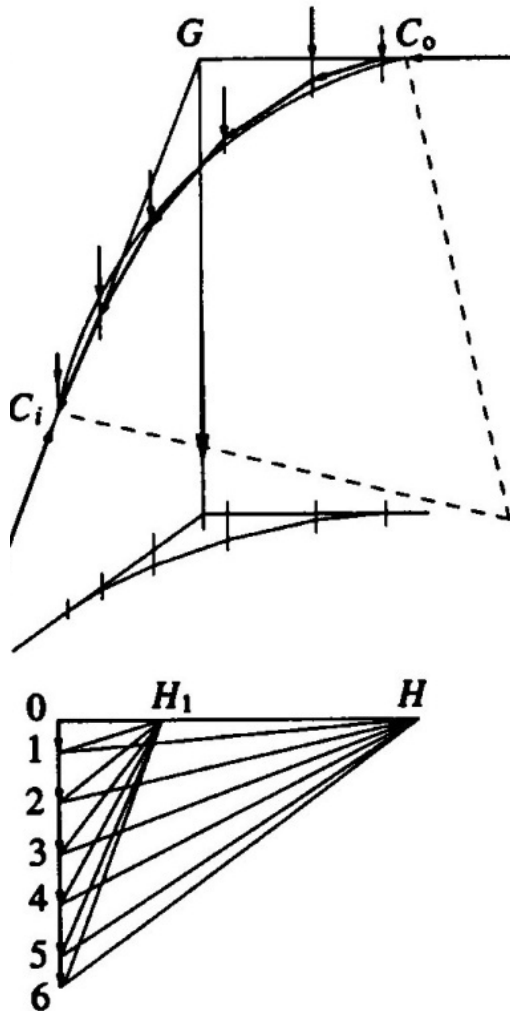
La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (2/6)



1. Si costruisce il poligono delle forze e lo si proietta dal polo H , preso sull'orizzontale passante per O ; il primo lato del poligono funicolare sarà orizzontale: in questo modo si asseconda l'ipotesi che la spinta in chiave agisca in direzione orizzontale.
2. Si costruisce il poligono funicolare del sistema di forze che rappresentano i pesi di tutti i conci; tramite esso si individua la retta d'azione della risultante di tutte le forze, cioè la posizione del baricentro di tutte le forze peso;
3. Si traccia una retta orizzontale in chiave per il punto C_o fino a intersecare, in G , la retta d'azione della risultante del peso dei conci; si congiunge poi G con il punto C_i , all'intersezione dell'asse dell'arco con l'imposta.
4. Si sono così trovati i 1° e l'ultimo lato del poligono funicolare; se ora si riporta sul poligono delle forze una retta parallela a GC_i , questa individua sulla retta orizzontale passante per O il punto H_1 , che è il polo di proiezione del poligono funicolare cercato.

Curva delle pressioni di un arco a tutto sesto.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (3/6)



Se si suddivide l'arco in conci ideali di eguale lunghezza, nei rispettivi baricentri dei conci sono applicate forze eguali. Il polo iniziale, H , è arbitrario, con la sola condizione di stare sull'orizzontale passante per O ; il polo H_1 , che è stato individuato conducendo una retta parallela a GC_i è invece completamente determinato.

Così facendo il secondo poligono funicolare soddisfa 3 condizioni (primo lato orizzontale e passante per C_o , ultimo lato passante per C_i) e satura i 3 g.d.l. della costruzione del poligono funicolare.

Il poligono funicolare è quindi quello delle successive risultanti, nel senso che ciascun lato rappresenta la retta d'azione di tutte le forze che lo precedono, a partire dalla spinta in chiave, OH_1 .

La risultante rappresenta l'azione che una parte dell'arco esercita sulla successiva attraverso il giunto fra due conci, e può essere interpretata come l'azione interna che due conci si scambiano.

Per questo motivo il poligono funicolare ottenuto è la curva delle pressioni.

Curva delle pressioni di un arco a sesto acuto.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (4/6)

La forma della curva delle pressioni fornisce alcune informazioni che hanno diretta attinenza con la stabilità dell'arco, cioè:

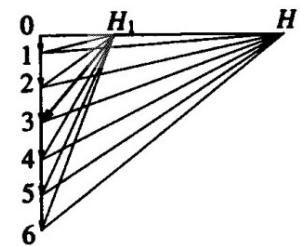
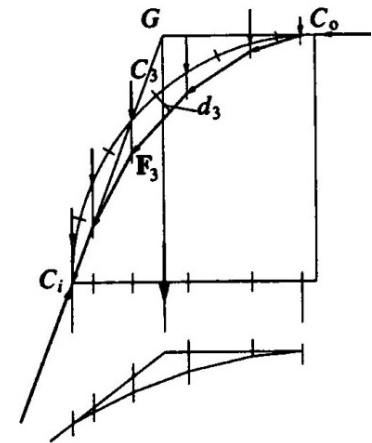
1. L'inclinazione dell'ultimo lato del poligono funicolare rappresenta l'azione trasmessa dall'arco alla struttura di sostegno: è tanto più vicina alla verticale quanto più la risultante dei carichi agenti sul semiarco è prossima all'imposta;
2. La forma della linea delle pressioni deve essere messa in relazione con la forma della linea d'asse dell'arco.

L'azione dell'arco sul sostegno può anche essere valutato senza costruire l'intero poligono funicolare, purché sia però determinata la posizione del baricentro dei pesi.

Ciò equivale a considerare l'arco composto di due soli corpi rigidi incernierati a terra alle imposte e fra loro in chiave (si da formare un arco a tre cerniere). I carichi applicati a ciascun semiarco possono essere sostituiti con le loro risultanti e il problema si riduce a valutare le reazioni vincolari esterne e interne.

Determinazione delle sollecitazioni in una sezione nota la c.d.p. dell'arco.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



Sollecitazione
nella sezione 3

La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (5/6)

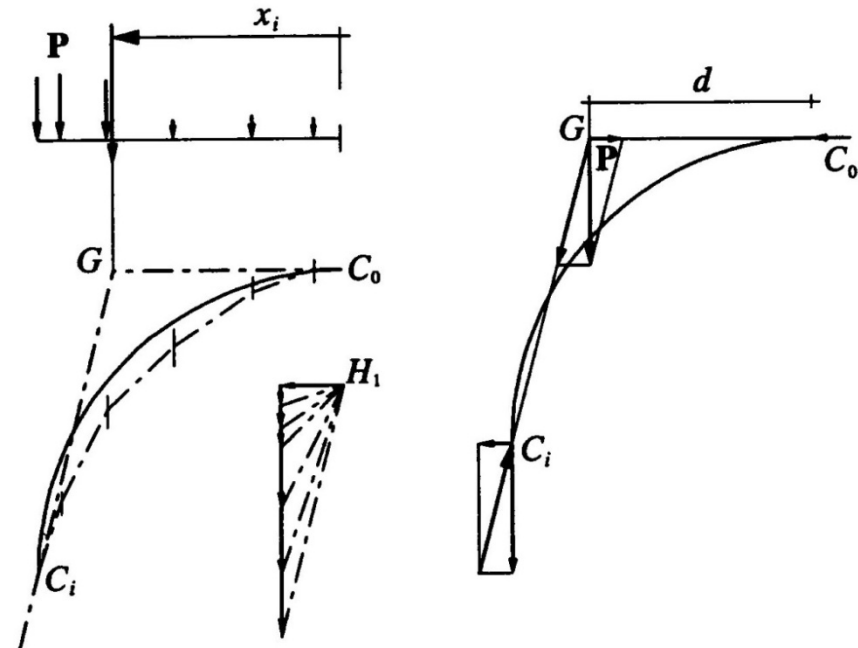
Si può procedere nel modo indicato:

- Determinata la retta d'azione della risultante, si individua il punto G , conducendo la retta orizzontale per il punto C_0 ;
- Successivamente congiungendo G con C_i si individua l'inclinazione dell'ultimo lato del poligono.
- In particolare la posizione del baricentro è fornita dal teorema di Varignon, che permette di scrivere:

$$d = (\sum_i P_i x_i) / \sum P_i .$$

Nel caso indicato in Figura si è ipotizzato che sia presente un rinfianco, il che fa sì che i conci in prossimità della chiave risultino alleggeriti rispetto a quelli più vicini all'imposta.

In questo caso la spinta in chiave è minore e la reazione all'imposta è più prossima alla verticale.



Schema per la valutazione delle spinta in chiave e della reazione all'imposta.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

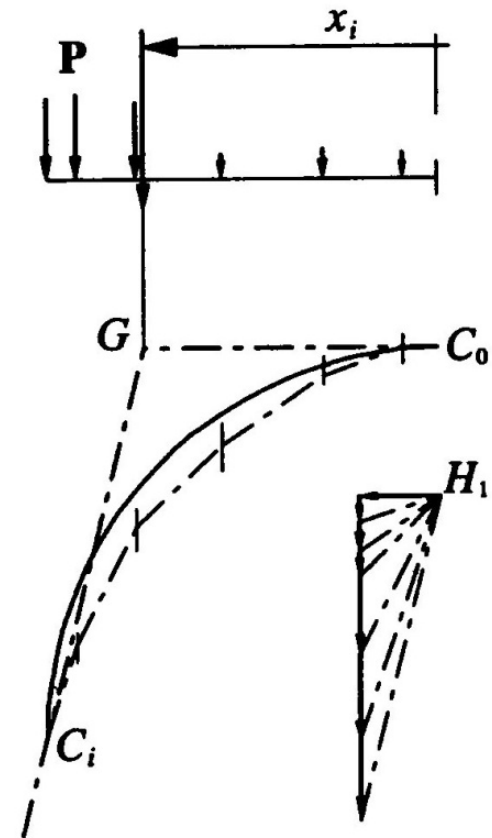
La verifica degli archi mediante la curva delle pressioni (6/6)

Lo spostamento del peso verso l'imposta produce un innalzamento della curva delle pressioni in corrispondenza delle reni.

Nell'arco a tutto sesto ciò si traduce in un avvicinamento della linea delle pressioni all'asse e questo produce un effetto benefico nei confronti della resistenza dell'arco stesso.

L'utilità del rinfiacco, allo scopo di conferire maggior peso in corrispondenza delle reni e di introdurre alleggerimenti in corrispondenza della chiave furono usati già nella costruzione del Pantheon e nelle cupole delle basiliche paleocristiane a Ravenna e altrove.

Innalzamento della curva delle pressioni in prossimità dell'imposta per effetto della presenza del rinfiacco.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica di stabilità di un arco (1/7)

La linea delle pressioni descrive le azioni reciproche che 2 conci adiacenti si scambiano.

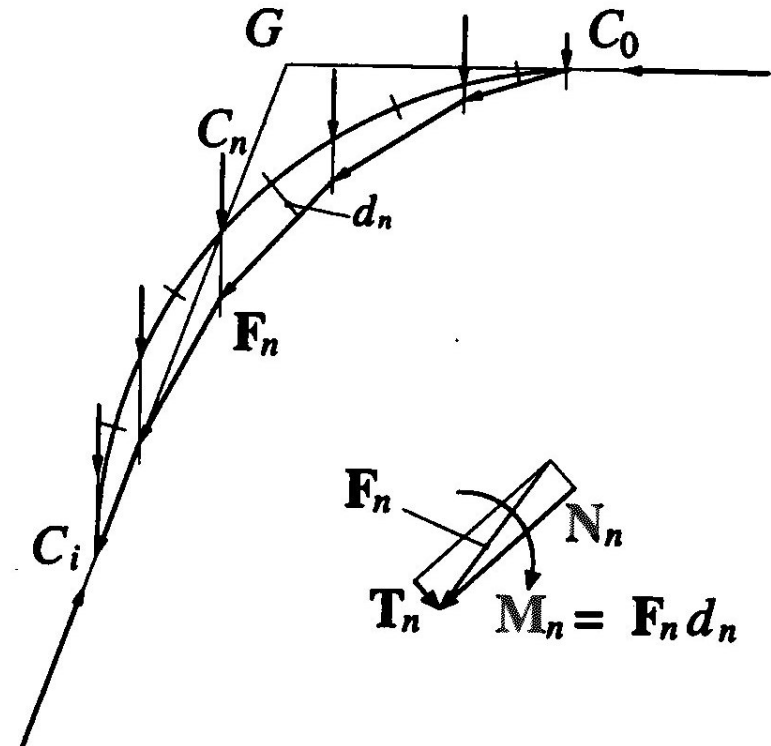
Se si fa riferimento alla n-esima sezione trasversale (S_n), il lato S_{n+1} del poligono funicolare è la risultante \mathbf{F}_n delle $(n+1)$ forze che precedono la sezione considerata.

Questa risultante non passa, in generale, per il baricentro della sezione considerata, che è individuato dalla linea d'asse. Dà pertanto origine a una sollecitazione composta da:

- Azione assiale, \mathbf{N}_n ;
- Azione tagliante, \mathbf{T}_n ;
- Momento flettente, \mathbf{M}_n .

In altri termini si può pensare di riportare la forza \mathbf{F}_n al baricentro, C_n della sezione trasversale S_n pur di aggiungere la coppia di trasporto

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{F}_n d_n$$



Determinazione delle azioni interne nella Sezione S_n a partire dalla c.d.p.

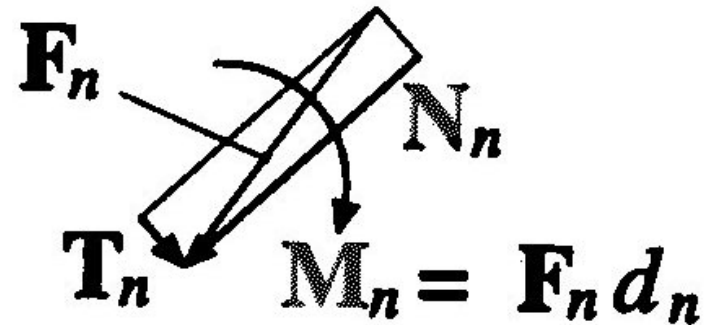
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica di stabilità di un arco (2/7)

La forza \mathbf{F}_n riportata nel baricentro, C_n , della sezione trasversale S_n può essere poi decomposta nella azione (assiale) \mathbf{N}_n normale alla sezione, e nella azione (tagliante) \mathbf{T}_n parallela a questa.

È evidente che:

- l'azione \mathbf{N}_n induce uno stato di compressione fra le facce a contatto dei conci contigui;
- l'azione \mathbf{T}_n tende a fare scivolare la porzione superiore dell'arco verso l'interno, secondo il meccanismo di De la Hire;
- il momento \mathbf{M}_n tende a fare aprire il giunto all'estradosso, secondo il meccanismo di Mascheroni.



Scomposizione della forza \mathbf{F}_n riportata nel baricentro.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La verifica di stabilità di un arco (3/7)

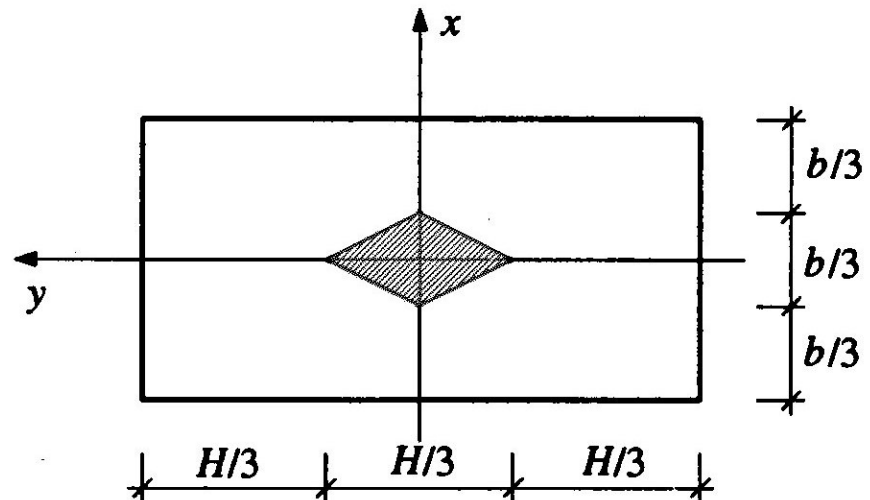
La verifica di stabilità dell'arco è soddisfatta se sono verificate queste due condizioni:

$$\mathbf{T}_n \leq f \mathbf{N}_n \quad [3]$$

$$\mathbf{M}_n / \mathbf{N}_n = e_n \leq H_n / 2 \quad [4]$$

dove $f = \tan \phi$ è il coefficiente d'attrito statico, che dipende dall'angolo d'attrito interno, ϕ , ed e_n è l'eccentricità dell'azione assiale rispetto al baricentro della sezione dell'arco, la cui altezza è pari a H_n .

Se la [3] non è soddisfatta, si avrebbe scorrimento fra i conci, mentre se è violata la [4] non sarebbe più possibile l'equilibrio poiché la risultante cadrebbe fuori dalla sezione.



Sezione trasversale del cono di un arco: la regione indicata a tratteggio costituisce il noccio centrale d'inerzia.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

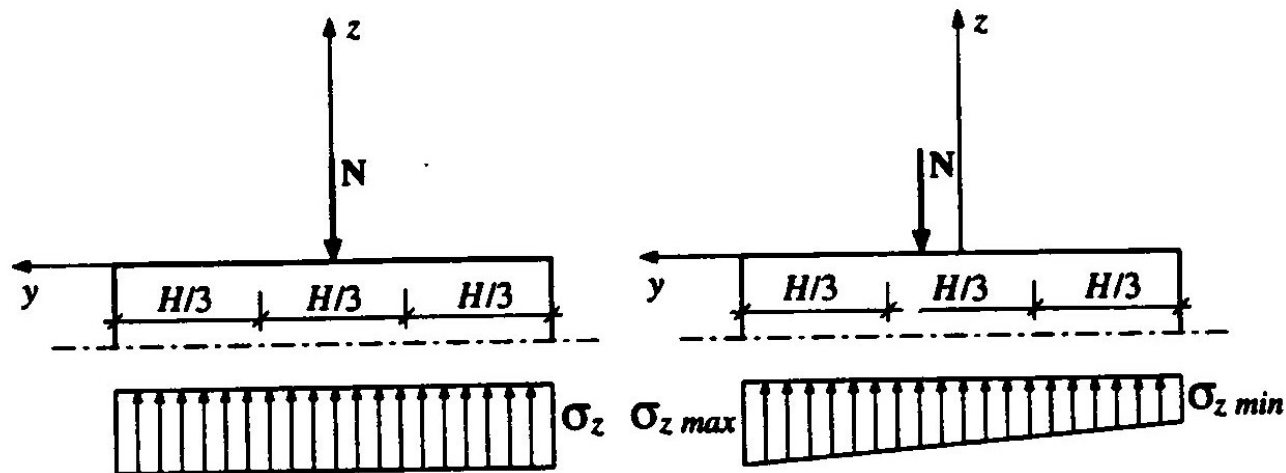
La verifica di stabilità di un arco (4/7)

In particolare, se $e_n = 0$ la azione assiale è centrata e la sezione è soggetta a compressione uniforme, di valore:

$$\sigma_n = \mathbf{N}_n/A.$$

Se l'eccentricità soddisfa la condizione $0 < e_n \leq H_n/6$, la risultante è contenuta entro il terzo medio della sezione (rettangolare), che risulta tutta compressa con una distribuzione di tensioni normali pari a:

$$\sigma_n = \mathbf{N}_n/A - (\mathbf{M}_n/I) y.$$



Distribuzione degli sforzi normali sulla sezione per $e_n = 0$ (azione assiale centrata, a sinistra) e per $0 < e_n \leq H_n/6$ (azione assiale eccentrica con centro di pressione interno al nocciolo, a destra).

(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)

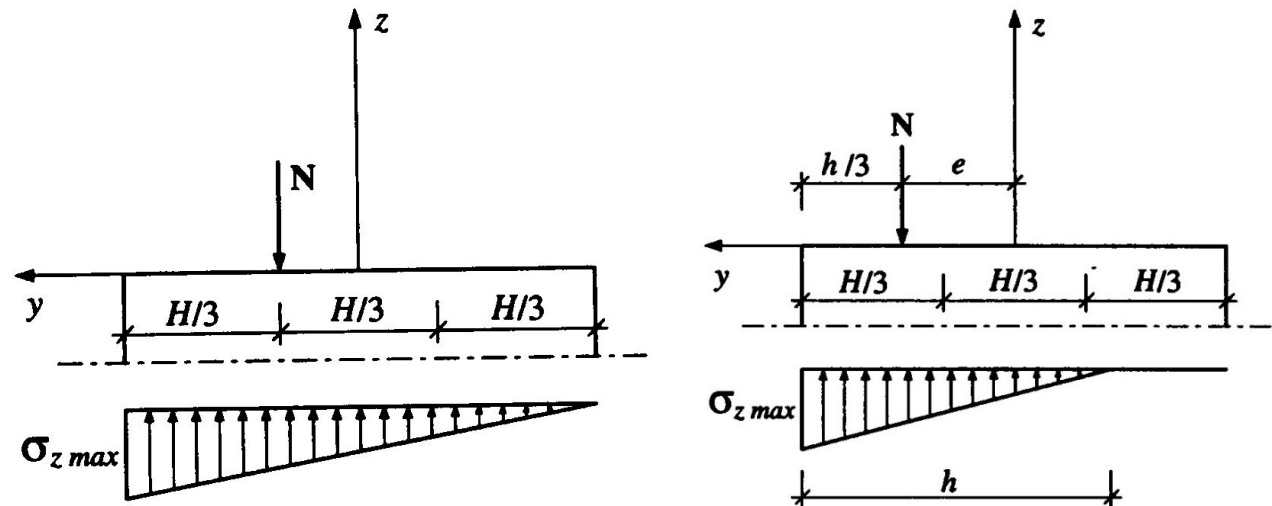
La verifica di stabilità di un arco (5/7)

Quando $e_n = H_n/6$ la risultante è applicata in corrispondenza del contorno del nocciolo centrale d'inerzia e la distribuzione delle tensioni normali sulla sezione è di tipo triangolare.

Al crescere dell'eccentricità, ovvero quando risulta $H_n/6 < e_n < H_n/2$, la sezione si parzializza e solo la porzione compressa reagisce; al lembo teso si ha invece la formazione di una fessura ed è facile verificare che la massima tensione normale vale:

$$\sigma_{n,max} = 2\mathbf{N}_n/(bh) = 2\mathbf{N}_n/(3bu),$$

dove $u = h/3$ rappresenta la distanza della retta d'azione della risultante dal lembo compresso.

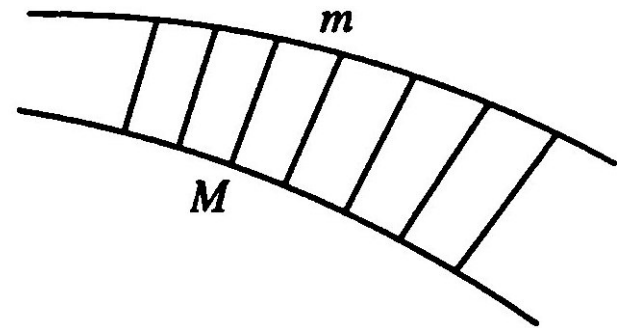


(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)

Distribuzione degli sforzi normali sulla sezione per $e_n = H_n/6$ (centro di pressione sul contorno del nocciolo, a sinistra) e per $H_n/6 < e_n < H_n/2$ (centro di pressione esterno al nocciolo, ma ancora all'interno alla sezione, destra).

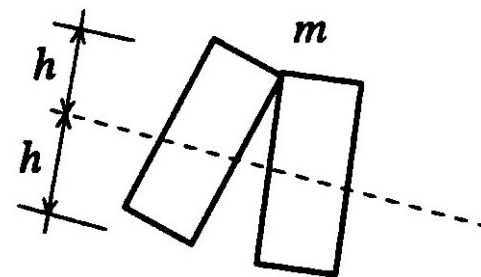
La verifica di stabilità di un arco (6/7)

Nella condizione limite $e_n = H_n/2$, si ha che la risultante passa per il lembo esterno della sezione e la fessurazione interessa tutta l'altezza della sezione: si ha quindi la formazione di una cerniera. Ciò richiede che la resistenza a compressione del materiale sia illimitata.



Completa apertura del giunto fra 2 conci: questa situazione si realizza quando $e_n = H_n/2$, cioè quando il centro di pressione raggiunge l'estremità della sezione trasversale. In queste condizioni lo sforzo che si trasmette nel punto m diventa illimitato.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



La verifica di stabilità di un arco (7/7)

La linea delle pressioni può essere vista come un indice della stabilità di un arco: tanto maggiore è l'eccentricità, tanto maggiore deve essere lo spessore dell'arco affinché la linea rimanga per lo meno all'interno della sezione, anche se sarebbe preferibile che si mantenesse all'interno del terzo medio per evitare la parzializzazione della sezione e il corrispondente aggravio tensionale.

La linea d'asse di un arco a sesto acuto è più vicina alla linea delle pressioni di quella di un arco a tutto sesto: per questa ragione lo spessore di un arco a sesto acuto può risultare minore di quello di un arco a tutto sesto.

La verifica degli archi fra elasticità e plasticità (1/4)

Nello studio di un arco si deve tenere conto dell'effettivo spessore dei conci: ciò porta a comprendere che la costruzione della linea delle pressioni non è comunque univocamente determinata, dal momento che non c'è ragione per assumere che il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare passino per i baricentri delle sezioni di chiave e di imposta.

La condizione di equilibrio, astrazione fatta dalla effettiva resistenza dei materiali, richiede soltanto che la linea delle pressioni risulti ovunque interna alle superficie di contatto fra i conci: e questa condizione può essere soddisfatta da molti poligoni funicolari.

Il principio della minima energia potenziale fu formulato nel 1858 da Menabrea, ma nel 1833 Moseley enunciò nel lavoro *On a new principle in statics, called the principle of least pressure* il principio della minima pressione che, applicato alla teoria degli archi, sostiene che *"fra le infinite curve di pressione, che possono essere tracciate all'interno delle due curve di intradosso e di estradosso, quella vera è quella che rende minima la spinta orizzontale in chiave"*.

Questo principio porta a scegliere come curva delle pressioni quella che passa per l'estradosso nella sezione di chiave, e per l'intradosso alle reni; tuttavia non è questa di necessità la soluzione esatta.

La verifica degli archi fra elasticità e plasticità (2/4)

Nel 1867 Winkler ne *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit* sostenne che la vera curva delle pressioni, sulla base della teoria dell'elasticità, è quella che meno si scosta dalla linea d'asse dell'arco. La applicazione della teoria dell'elasticità alle strutture murarie non è però giustificata in un ambito di calcolo a rottura per il quale si prescinde dalla deformabilità, e si considerano rigidi i conci.

Il problema è stato ricondotto da Jacques Heyman in *The masonry arch* (1982) a una formulazione coerente con i metodi del calcolo a rottura mediante un teorema che riguarda la sicurezza nella stabilità degli archi ("safe theorem").

Ci si basa sulle ipotesi seguenti:

- a. Non può avvenire rottura a scorrimento: due conci non possono scorrere relativamente nel piano di contatto;
- b. La muratura non ha resistenza a trazione: non può esservi trasmissione di forze di trazione all'interno della muratura. Di conseguenza si possono considerare giunti realizzati a secco o con malta molto debole;
- c. La muratura ha peraltro illimitata resistenza a compressione.

La verifica degli archi fra elasticità e plasticità (3/4)

Le assunzioni a. e b. comportano che sia rispettato un criterio di sicurezza in quanto impongono delle limitazioni alle modalità di trasmissione degli sforzi all'interno della muratura.

L'ipotesi c. non è invece a favore di sicurezza e va verificata a posteriori per garantire che gli sforzi di compressione all'interno della muratura siano sufficientemente bassi da evitare rotture localizzate per schiacciamento.

Il teorema di Heyman, che fornisce una delimitazione inferiore del carico di collasso di un arco afferma che:

"se esiste una linea di pressioni per l'arco completo, che sia in equilibrio con i carichi applicati, incluso il peso proprio, e che risulti ovunque e in ogni sezione interna allo spessore dell'arco, allora l'arco può considerarsi in condizioni di sicurezza."

Non ha dunque interesse determinare l'effettiva curva delle pressioni, mentre è sufficiente mostrare che esiste almeno un sistema di forze interne equilibrato e che soddisfi le condizioni imposte del teorema. Le condizioni sono alquanto restrittive rispetto alla resistenza delle strutture ad arco, per le quali sono frequenti le modifiche della linea delle pressioni dovute i.) a variazioni dell'entità dei carichi e/o della posizione dei carichi; ii.) variazioni della configurazione strutturale a causa di spostamenti o cedimenti di valore anche piccolo.

La differente posizione della curva di pressione sulla sezione può produrre la formazione di fessure localizzate, corrispondenti, in termini cinematici, alla formazione di cerniere interne che possono coalizzarsi a formare un meccanismo.

La verifica degli archi fra elasticità e plasticità (4/4)

La presenza di rinfiando ha invece l'effetto di produrre un innalzamento della curva delle pressioni, con la conseguenza di consentire una riduzione dello spessore dell'arco.

L'effetto di innalzamento è maggiore quanto più leggero risulta il materiale di riempimento.

L'innalzamento della curva delle pressioni è accompagnata da un aumento dello sforzo di compressione nell'arco, ma questo risulta in genere abbastanza limitato da non avere conseguenze in termini di resistenza dei materiali.

Riferimenti bibliografici e iconografici

- A. Becchi, F. Foce, *Degli archi e delle volte – Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio: Venezia, 2002.
- E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni nel suo Sviluppo Storico*, Sansoni: Firenze, 1981.
- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- G. Del Piero, *Le costruzioni in Muratura*, CISM: Udine, 1984.
- J. Heyman, *The Masonry Arch*, Ellis Horwood: Chichester, 1982.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009².
- R. Pozzi, *La Statica Grafica in Architettura – Equilibrio e forma degli archi*, Progetto Leonardo: Bologna, 1991.
- J. Rondelet, *Trattato Teorico e Pratico dell'Arte di Edificare* (trad. B. Soresina sulla 6° ed. francese), Caranenti: Mantova, 1831.