

Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in
Architettura

A.A. 2014-2015

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

<http://people.unica.it/antoniocazzani/sdm/>

Lezione 6 – Instabilità dell'equilibrio di pareti murarie

Sommario

- Premessa: il collasso per instabilità
- Il collasso per instabilità dovuta a parzializzazione della sezione (modello discreto con illimitata resistenza a compressione)
 - Effetti dell'eccentricità di carico
 - Discussione delle curve di carico $P-v$
- Il collasso per instabilità dovuta a parzializzazione della sezione (modello discreto con limitata resistenza a compressione)
 - Le equazioni governanti
 - Diagramma del carico di collasso in funzione della snellezza
- Il collasso per instabilità di un pilastro in muratura (modello continuo con parzializzazione della sezione e illimitata resistenza a compressione)
- Il collasso per instabilità di un pilastro in muratura (modello continuo con parzializzazione della sezione e limitata resistenza a compressione)

Premessa

La resistenza a trazione della muratura è trascurabile rispetto a quella a compressione, e ciò rende la muratura incapace di resistere a forti momenti flettenti.

Le azioni esterne che possono indurre momenti flettenti sulle pareti sono sia i carichi orizzontali (vento e sisma) sia, soprattutto, le eccentricità.

Queste eccentricità sono ricorrenti e frequenti (per esempio quelle legate alla trasmissione dei carichi provenienti dagli impalcati orizzontali) e inducono nella muratura un regime di pressoflessione che può condurre alla crisi.

La pressoflessione, abbinata alla scarsa resistenza a trazione della muratura, produce parzializzazione della sezione reagente con conseguente riduzione della parte "attiva" e un corrispondente incremento dello stato di sollecitazione, che può portare al collasso per instabilità della parete muraria anche sotto valori di carico inferiore a quelli previsti se si trascura questo fenomeno.

Il problema delle eccentricità è particolarmente rilevante nel caso di pilastri in muratura, presenti in quasi tutte le costruzioni murarie storiche.

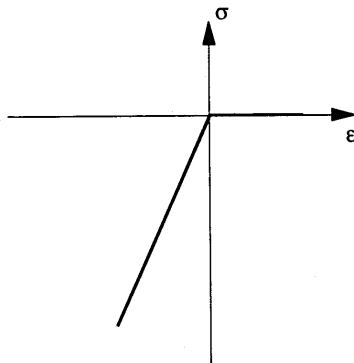
Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (1/8)

Modello discreto (1 g.d.l.) costituito da:

Elemento rigido di lunghezza l ;

Concio deformabile di altezza $a = \alpha l$ ($\alpha < 1$), sezione rettangolare $b \times t$ (con $t = 1$);

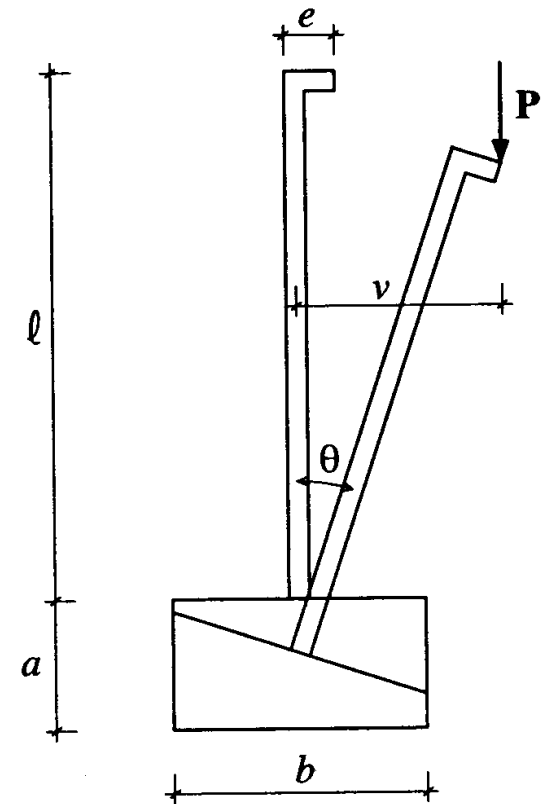
Materiale Non Resistente a Trazione (NRT), ma con *illimitata* resistenza a compressione;



Legame sforzo – deformazione per un materiale elastico NRT dotato di illimitata resistenza a compressione.

Elemento rigido è verticale, e su esso agisce la forza \mathbf{P} con eccentricità e ;

Si vuole determinare la curva carico- spostamento, $\mathbf{P} - v$



Modello a 1 g.d.l. di un pilastro in materiale NRT: il concio di base è l'unico elemento deformabile.
(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (2/8)

Caso 1: $v/b \leq 1/6 \Rightarrow$ sezione del concio interamente reagente (non parzializzata)

La retta d'azione del carico \mathbf{P} è *interna al nocciolo centrale d'inerzia* della sezione del concio deformabile e tutta la sezione risulta sollecitata a compressione.

Deformazioni e tensioni nel concio sono quelle indicate.

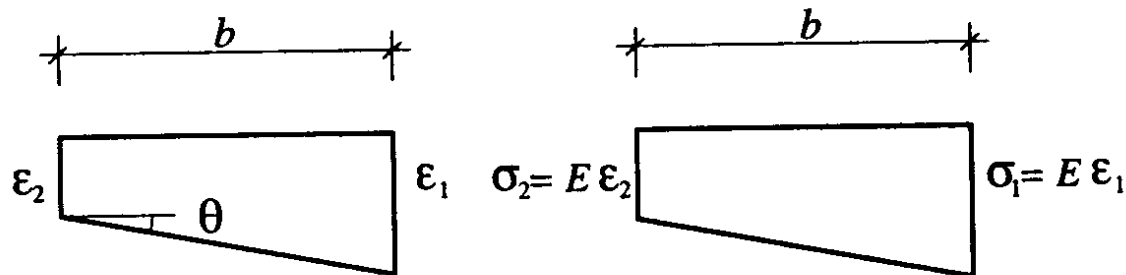


Diagramma delle deformazioni e degli sforzi per un concio con sezione interamente reagente.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Per piccoli spostamenti si assume $\tan \theta \cong \sin \theta \cong \theta$; $\cos \theta \cong 1$, come segue da uno sviluppo in serie troncato ai termini del primo ordine in θ .

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (3/8)

Da considerazioni geometriche si ricava:

$$\theta = a (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / b = 1/E (\sigma_1 - \sigma_2) \alpha / b$$

e tenendo conto degli spostamenti piccoli si trova:

$$v = e \cos \theta + l \sin \theta = e + l \theta = e + (\alpha / E)(l^2 / b)(\sigma_1 - \sigma_2).$$

L'equilibrio nella configurazione deformata dell'elemento rigido richiede che il momento instabilizzante dovuto al carico \mathbf{P} e quello stabilizzante prodotto dal concio deformabile si bilancino; ne segue:

$$\mathbf{P}v = (\sigma_1 - \sigma_2)(b^2 t / 12)$$

e se si elimina il termine $(\sigma_1 - \sigma_2)$ si perviene all'equazione:

$$\mathbf{P}v = (v - e)[b^3 E / (12 \alpha l^2)]. \quad [1]$$

Per eccentricità nulla, la [1] può essere scritta nella forma equivalente:

$$[\mathbf{P} - (b^3 E / (12 \alpha l^2))]v = 0,$$

dove, se si definisce

$$\mathbf{P}_E = b^3 E / (12 \alpha l^2), \quad [*]$$

si ottiene:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}_E)v = 0,$$

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (4/8)

Cioè P_E risulta essere il carico critico di Eulero della struttura: per $P < P_E$ deve essere $v = 0$, mentre quando si ha $P = P_E$ lo spostamento v diviene illimitato.

In presenza di eccentricità e non nulla, la [1] fornisce:

$$Pv = P_E(v - e),$$

da cui si ottiene:

$$P/P_E = 1 - e/v \quad [2]$$

significativa solo quando $v/b \leq 1/6$.

La [2] fornisce la riduzione della capacità portante nei confronti del carico critico al variare della eccentricità iniziale e e quando il concio deformabile è interamente reagente.

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (5/8)

Caso 2: $v/b \geq 1/6 \Rightarrow$ sezione del concio non interamente reagente (parzializzata)

La retta d'azione del carico \mathbf{P} è *esterna* al nocciolo centrale d'inerzia della sezione del concio deformabile e per un materiale NRT la sezione si parzializza: a deformazioni di dilatazione corrispondono sforzi nulli, mentre a deformazioni di contrazione corrispondono sforzi di compressione.

Deformazioni e tensioni nel concio sono quelle indicate.

Le condizioni di equilibrio delle forze verticali e dei momenti permettono di valutare l'ampiezza η della sezione reagente:

$$\eta = 3 (b/2 - v).$$

Con considerazioni di tipo geometrico si ottiene:

$$\theta = a\varepsilon_1/\eta = \alpha l \varepsilon_1/\eta = (\alpha/E) \sigma_1 l/[3(b/2 - v)]$$

e tenendo conto degli spostamenti piccoli si trova:

$$v = e \cos \theta + l \sin \theta = e + l\theta = e + (\alpha/E) \sigma_1 l^2/[3(b/2 - v)].$$

mentre per equilibrio si ricava:

$$\mathbf{P} = (3/2)\sigma_1(b/2 - v). \quad [3]$$

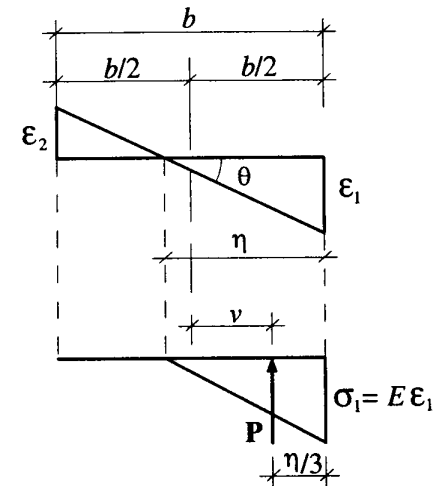


Diagramma delle deformazioni e degli sforzi per un concio con sezione parzializzata.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (6/8)

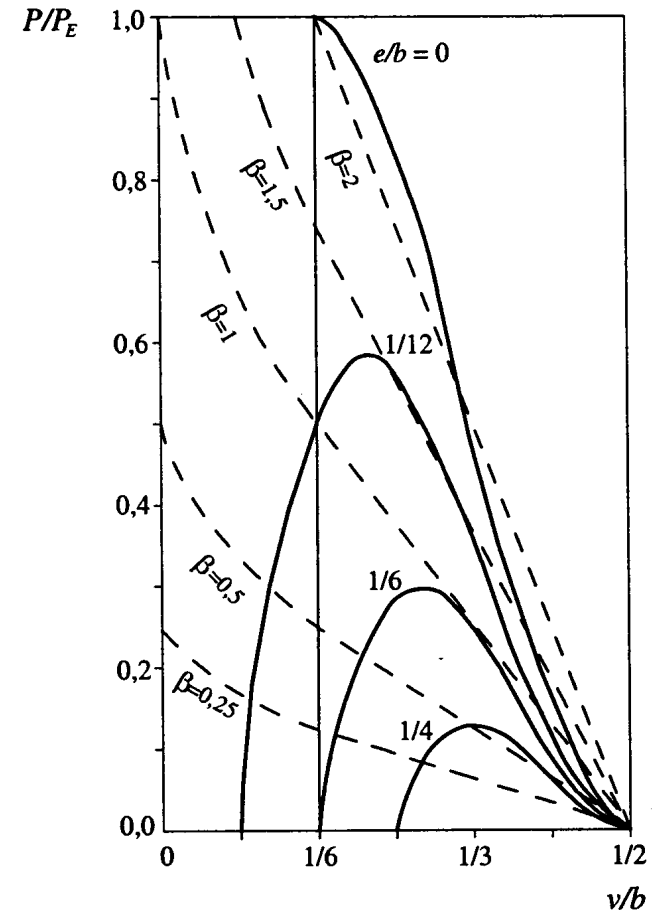
Dall'equazione [3], se si tiene conto della definizione [*], si può ottenere:

$$\mathbf{P} / \mathbf{P}_E = (27/2) (v/b - e/b)[1 - (2v/b)]^2 \quad [4]$$

che fornisce la riduzione della capacità portante della struttura nei confronti del carico critico al variare della eccentricità iniziale e quando il concio deformabile è parzializzato: vale pertanto nell'intervallo di valori $v/b \geq 1/6$.

La [2] e la [4] consentono di tracciare le curve carico spostamento $\mathbf{P} - v$ (che conviene tracciare in una forma adimensionale, $\mathbf{P}/\mathbf{P}_E - v/b$) per diversi valori della eccentricità iniziale, e , a sua volta adimensionalizzata nella forma e/b .

Curve carico-spostamento (in forma adimensionalizzata) per il modello a 1 g.d.l. del pilastro in muratura.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)₉

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (7/8)

Osservazioni:

Se $e/b \leq 1/6$, la [2] e la [4] si raccordano con regolarità (funzione continua con la derivata prima) per $v/b = 1/6$.

Se $e/b \geq 1/6$ vale sempre e solo la [4].

In ogni caso il valore di v non può mai superare il valore $b/2$, in corrispondenza del quale $\mathbf{P} = 0$, in quanto, diversamente, non sussisterebbe più l'equilibrio.

Se $e = 0$ si è in presenza di *carico centrato* e il modello resta inizialmente indeformato; però per $\mathbf{P} = \mathbf{P}_E$ si ha sbandamento laterale a carico costante di ampiezza qualsiasi (ma non superiore al valore $v = b/6$, raggiunto il quale si ha parzializzazione della sezione e conseguente riduzione del carico massimo sopportabile).

Se $e \neq 0$ le curve presentano un massimo (sempre laddove vale la [4]) in corrispondenza del valore:

$$v/b = 1/6[1 + 4(e/b)],$$

che fornisce questo valore di carico critico "effettivo":

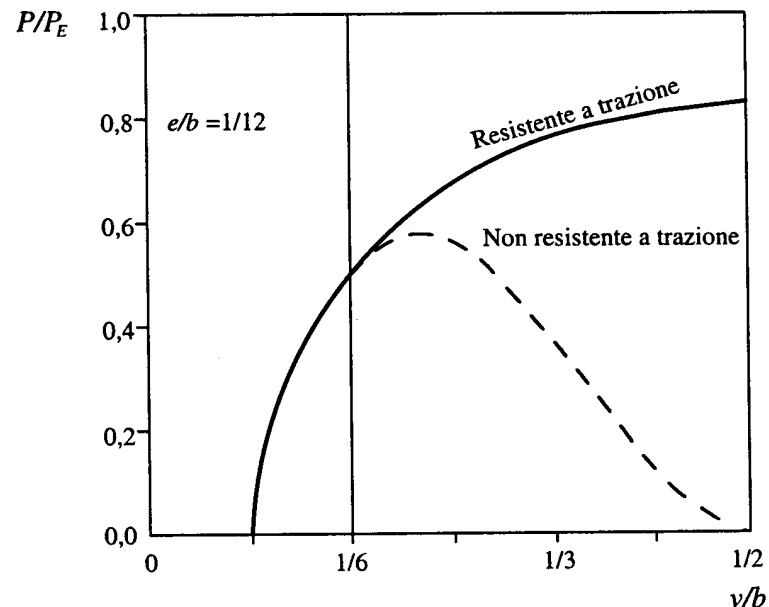
$$\mathbf{P}_{cr}/\mathbf{P}_E = [1 - 2(e/b)]^3,$$

corrispondente al carico critico del modello, tanto minore di \mathbf{P}_E quanto maggiore è l'eccentricità iniziale del carico.

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con illimitata resistenza a compressione (8/8)

- Se il materiale possedesse anche resistenza a trazione non si avrebbe mai parzializzazione della sezione, la risposta sarebbe sempre fornita dalla [2], che varrebbe anche per valori di $v > b/2$. Le curve non presenterebbero un massimo ma tenderebbero asintoticamente al valore P_E . L'occorrenza del fenomeno dell'instabilità per valori inferiori al carico critico è originato dalla parzializzazione della sezione dovuta al fatto che si è adottata l'ipotesi di materiale NRT.

Curve carico-spostamento (in forma adimensionalizzata) per il modello a 1 g.d.l. del pilastro in muratura: confronto fra il caso di materiale NRT e il caso di materiale resistente a trazione. (Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (1/6)

L'ipotesi di materiale con illimitata resistenza a compressione non è realistica.

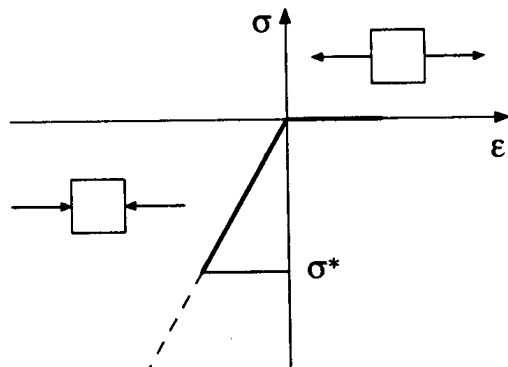
Si considera quindi che il materiale abbia una resistenza a compressione *limitata*, individuata dalla tensione σ^* che corrisponde alla rottura fragile del materiale.

Si può allora definire un carico di schiacciamento, P^* come:

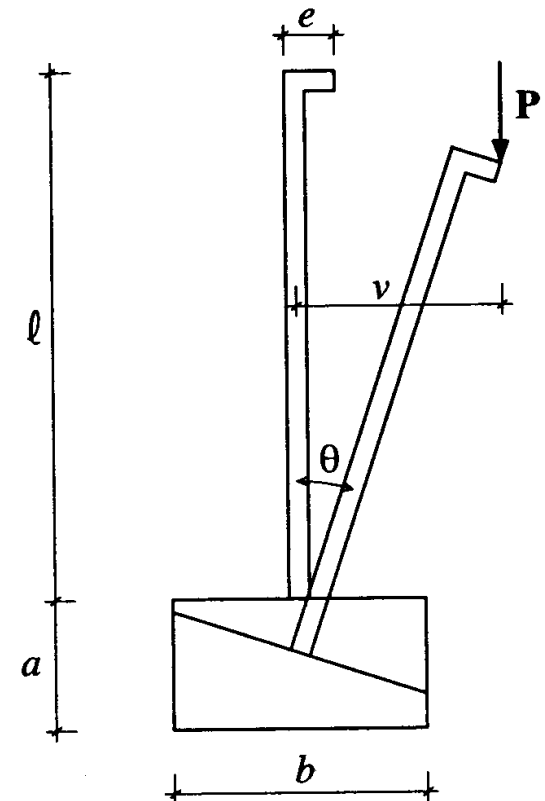
$$P^* = \sigma^* b t = \sigma^* b$$

e introdurre il rapporto adimensionale fra azione assiale di schiacciamento e carico critico euleriano:

$$\beta = P^*/P_E.$$



Legame sforzo-deformazione per un materiale elastico NRT dotato di *limitata* resistenza a compressione.
(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)



Modello a 1 g.d.l. di un pilastro in materiale NRT: il conico di base è l'unico elemento deformabile.

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (2/6)

La rottura per compressione del concio deformabile può in alcuni casi precedere il collasso per instabilità.

Occorre distinguere ancora i due casi di sezione interamente reagente a compressione e di sezione parzializzata.

Nel primo caso, $v \leq b/6$, tenendo conto che al lembo più sollecitato risulta $\sigma_1 = \sigma^*$ e facendo uso delle condizione

$$v = M/N,$$

dove $M = (1/2)(\sigma^* - \sigma_2)(b^2/6)$; $N = (1/2)(\sigma^* + \sigma_2)b$.

Si può così eliminare il valore di σ_2 , ottenendo in condizioni di collasso:

$$P = P^*/[1+(6v/b)]$$

ovvero

$$P/P_E = \beta / [1+(6v/b)] \quad [5]$$

L'equazione [5] individua la condizione di rottura a compressione con sezione interamente reagente, laddove la [2] ne definisce la condizione di collasso per instabilità.

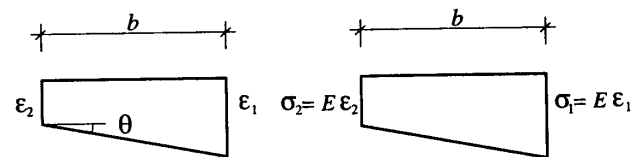


Diagramma delle deformazioni e degli sforzi per un concio con sezione non parzializzata (interamente reagente).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (3/6)

Nel secondo caso, $v \geq b/6$, tenendo conto che al lembo più sollecitato risulta $\sigma_1 = \sigma^*$ e facendo uso delle condizione

$$v = M/N,$$

dove $M = (1/2)\sigma^*\eta(3b - 2\eta)/6$; $N = (1/2)\sigma^*\eta$.

Si può così eliminare il valore di η , ottenendo in condizioni di collasso:

$$P = (3/4) P^*[1-(2v/b)]$$

ovvero

$$P/P_E = (3/4)\beta [1-(2v/b)] \quad [6]$$

L'equazione [6] individua la condizione di rottura a compressione con sezione parzializzata, laddove la [4] definisce la condizione di collasso per instabilità.

Si osserva che $\beta = P^*/P_E = \sigma^*b / [b^3E/(12\alpha l^2)]$ ovvero che

$$\beta = 12\alpha (\sigma^*/E)(l/b)^2$$

pertanto questo parametro può essere interpretato come una definizione della snellezza del modello.

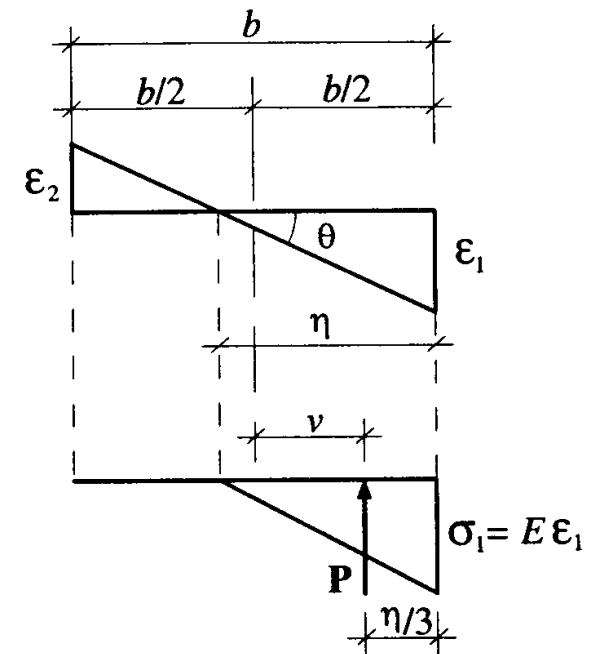


Diagramma delle deformazioni e degli sforzi per un concio con sezione parzializzata.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (4/6)

Per vari valori dell'eccentricità iniziale si possono costruire diagrammi che forniscono il carico di collasso, P_c (nella forma adimensionale P_c/P^*), in funzione della snellezza, β .

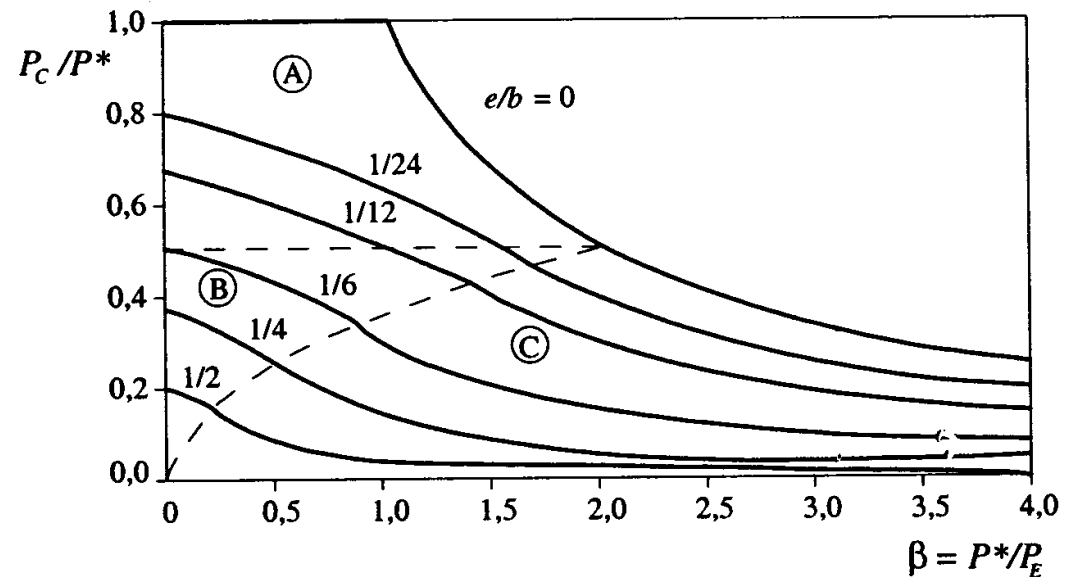
La zona A corrisponde a rottura per compressione con la sezione interamente reagente ($v \leq b/6$);

la zona B corrisponde a rottura per compressione con la sezione parzializzata ($v \geq b/6$);

la zona C corrisponde alla crisi per instabilità senza raggiungimento dello sforzo limite di compressione.

Curve adimensionali carico di collasso - snellezza per il modello a 1 g.d.l. del pilastro in muratura: caso di materiale NRT avente limitata resistenza a compressione.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (5/6)

Il carico di collasso, P_{cr} , può corrispondere a P^* , ovvero a P_{cr} , a seconda che il collasso avvenga per rottura a compressione o per instabilità.

In quest'ultimo caso si trova, come già visto, che

$$P_{cr}/P_E = [1 - 2(e/b)]^3.$$

In termini di snellezza si possono avere questi casi:

a. $\beta \leq 2[1 - 6(e/b)]:$

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{2}{\left[\left(1 + \beta + 6\frac{e}{b}\right) + \sqrt{\left(1 + \beta + 6\frac{e}{b}\right)^2 - 4\beta} \right]}$$

b. $2[1 - 6(e/b)] \leq \beta \leq 2[1 - 2(e/b)]^2:$

$$\frac{P_c}{P^*} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \left[\left(3 + 6\frac{e}{b}\right) - \sqrt{\left(3 - 6\frac{e}{t}\right)^2 - 4\beta} \right]$$

Il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione: un modello discreto con resistenza a compressione limitata (6/6)

$$\beta \geq 2 [1 - 2(e/b)]^2:$$

$$\frac{P_c}{P^*} = \frac{1}{\beta} \left(1 - 2 \frac{e}{\beta} \right)^3$$

Nel caso a.) si ha collasso per rottura a compressione quando la sezione è interamente reagente; nel caso b.) il collasso per instabilità si verifica per un valore della tensione $\sigma < \sigma^*$.

Le curve $P_c/P^* - \beta$ hanno lo stesso significato delle curve di stabilità di aste (metalliche o di c.a.) compresse; il rapporto P_c/P^* misura la riduzione della capacità portante dovuta agli effetti instabilizzanti associati all'eccentricità di carico.

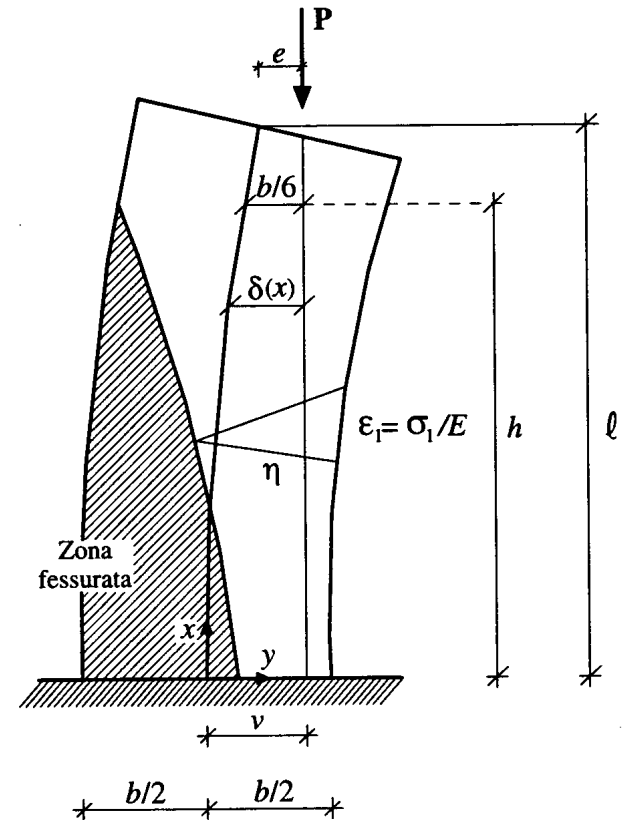
Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (1/10)

L'approccio discreto fin qui seguito ha consentito di determinare in modo semplice il valore numerico del carico di collasso e di altre quantità di interesse come lo sbandamento in sommità di un modello di muratura incastrato al piede.

Per avere un modello più realistico della muratura non è però sufficiente trattarla come un elemento rigido sostenuto da un concio deformabile, ma occorre prendere in esame un elemento continuo nel quale *tutte* le sezioni si possono deformare e parzializzare.

Il problema è concettualmente analogo, ma è ora governato da equazioni differenziali (e non più algebriche) e presenta maggiori difficoltà analitiche.

Il modello è costituito da una colonna incastrata al piede, di luce l , sezione trasversale rettangolare $b \times t$, costituito da un materiale elastico NRT e *illimitatamente* resistente a compressione, soggetto a un carico \mathbf{P} che agisce con un'eccentricità iniziale e .



Modello continuo di un pilastro in materiale NRT, nel quale tutti i conci sono deformabili.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (2/10)

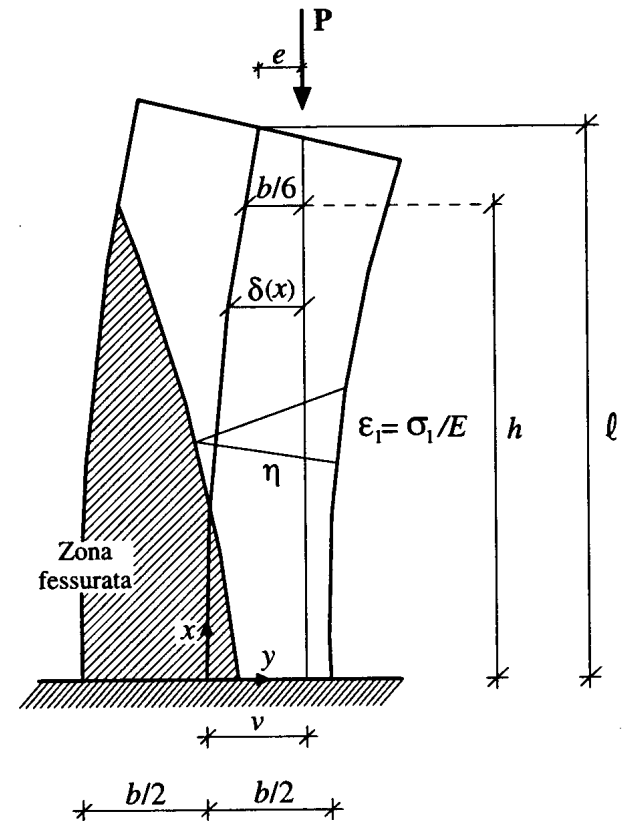
Considerando la configurazione deformata (inflexa) del pilastro, si possono distinguere due zone:

- una zona (*inferiore*) parzialmente reagente, nella quale le sezioni sono fessurate, di altezza h , con $0 \leq x \leq h$;
- una zona (*superiore*) interamente reagente, nella quale le sezioni sono integre, caratterizzata dalla condizione $h \leq x \leq l$. In questa zona l'effettiva eccentricità del carico, $\delta(x)$, deve fornire $\delta \leq b/6$ per garantire che la sezione sia interamente reagente.

Nella zona b.) lo spostamento $\delta(x)$ deve soddisfare la equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine:

$$EI(d^2\delta/dx^2) + P\delta = 0 \quad [7]$$

dove EI è la rigidezza flessionale della colonna ($I = b^3t/12$) e il termine $(d^2\delta/dx^2)$ rappresenta la curvatura della linea d'asse del pilastro.



Modello continuo di un pilastro in materiale NRT, nel quale tutti i conci sono deformabili.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (3/10)

Per ottenere l'equazione differenziale che governa il comportamento della zona a.) si osserva che, nella zona fessurata, la curvatura può essere così espressa:

$$(d^2\delta/dx^2) = \varepsilon_1/\eta,$$

dove η è la larghezza della parte reagente della sezione.

In base al legame elastico $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ e per l'equilibrio delle forze verticali agenti lungo l'asse della trave si trova che $\sigma_1 \eta t/2 = \mathbf{P}$.

L'equilibrio dei momenti fornisce invece $\eta = 3(b/2 - \delta)$.

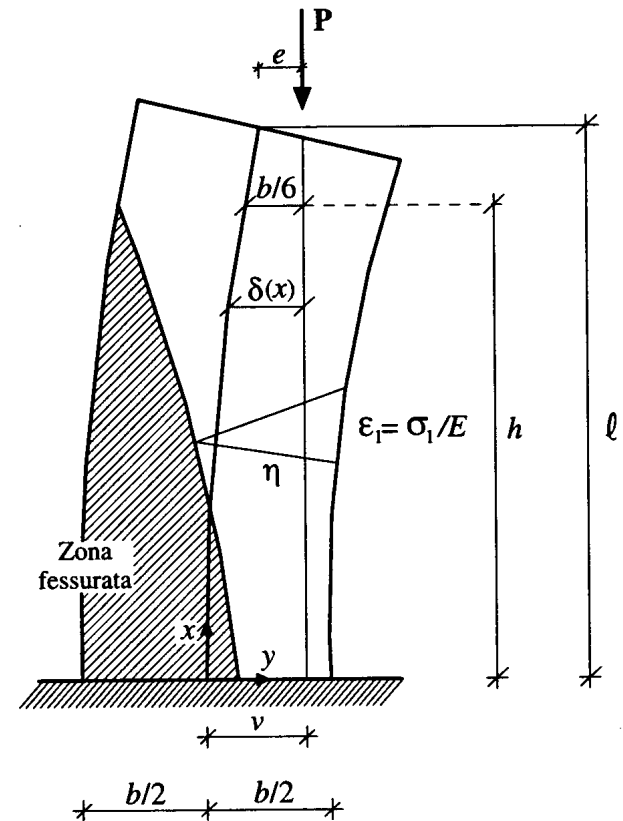
Il momento d'inerzia della sezione effettivamente reagente vale dunque:

$$I' = \eta^3 t/12 = I(\eta/b)^3 = I[3(b/2 - \delta)/b]^3.$$

Il momento flettente riferito all'asse neutro della sezione reagente vale $M = \mathbf{P}\eta/6 = \mathbf{P}(b/2 - \delta)/2$.

Nella zona a.) lo spostamento $\delta(x)$ deve soddisfare la equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine così modificata:

$$EI' (d^2\delta/dx^2) + \mathbf{P}\eta/6 = 0.$$



Modello continuo di un pilastro in materiale NRT, nel quale tutti i conci sono deformabili. (Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (4/10)

Sostituendo si trova:

$$EI(d^2\delta/dx^2) + Pb^3/[54(b/2 - \delta)^2] = 0. \quad [8]$$

Per ogni valore del carico la deformata del pilastro, che è completamente individuata dalla funzione $\delta(x)$ si ottiene integrando le equazioni differenziali [7] e [8], ognuna nel suo campo di validità, soggetta alle condizioni al contorno

$$\delta(l) = e;$$

$$(d\delta/dx)|_{x=0} = 0;$$

$$\delta(0) = v.$$

e alle condizioni di continuità, su δ e su $(d\delta/dx)$ al confine fra la zona fessurata e la zona integra.

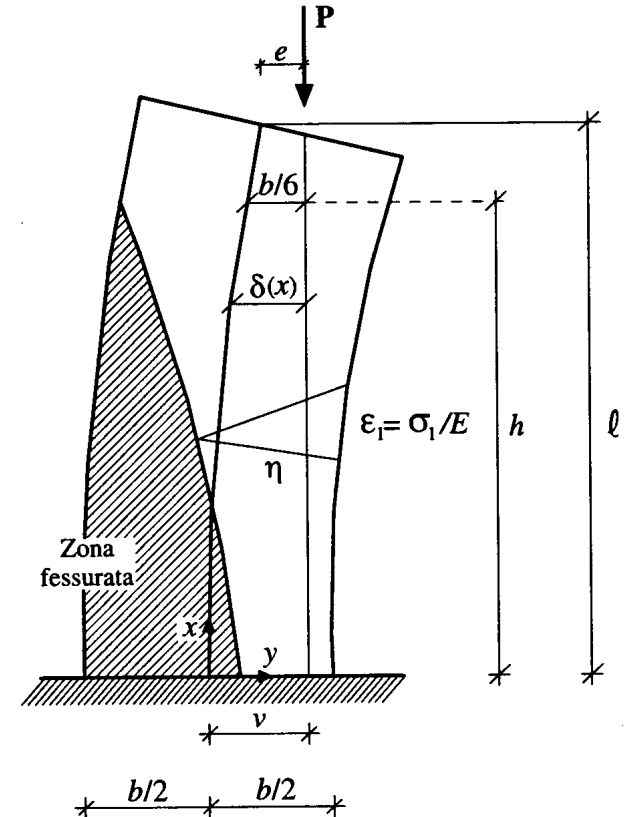
Se si introducono le quantità adimensionali:

$$p = 3(v/b) - 1/2 \quad (\text{spostamento massimo per } x = 0);$$

$$m = 6(e/b) \quad (\text{eccentricità iniziale});$$

$$\alpha l = [(Pl^2)/(EI)]^{1/2} \quad (\text{intensità del carico}),$$

e tenendo conto che, poiché $e \leq v \leq b/2$ deve sempre essere verificata l'eguaglianza $(m - 1)/2 \leq p \leq 1$, si ottengono i tre casi seguenti.



Modello continuo di un pilastro in materiale NRT, nel quale tutti i conci sono deformabili.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (5/10)

- $1 \leq m \leq 3$, cioè $b/6 \leq e \leq b/2$

la retta d'azione del carico P è esterna al nocciolo centrale d'inerzia della sezione di sommità: anche per valori di carico piccoli, tutte le sezioni risultano fessurate e vale sempre la [8].

In queste condizioni integrando l'equazione differenziale e imponendo tutte le condizioni al contorno la soluzione è del tipo:

$$\alpha l = f_1(p, m) = \frac{1}{2} [(1-p)(3-m)(1+2p-m)]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-p)^{\frac{3}{2}} \cdot \ln \frac{2-m+p + [(3-m)(1+2p-m)]^{\frac{1}{2}}}{1-p} \quad [9]$$

- $0 \leq m \leq 1$, cioè $0 \leq e \leq b/6$

la retta d'azione del carico è interna al nocciolo centrale d'inerzia della sezione di sommità e vi è un tratto (*superiore*) di pilastro interamente reagente. Per piccoli valori del carico si avrà $v \leq b/6$ e tutto il pilastro sarà reagente; al crescere del carico le fessurazioni si diffondono a partire dalla base del pilastro.

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (6/10)

Si distinguono due fasi:

1. $(m-1)/2 \leq p \leq 0$, cioè $e \leq v \leq b/6$

In queste condizioni si hanno piccoli valori del carico e la colonna risulta interamente reagente: l'equazione differenziale [7] vale per $0 \leq x \leq l$ e se la si integra con le condizioni al contorno si trova la soluzione:

$$\alpha l = f_3(p, m) = \arccos \frac{m}{1-2p} \quad [10]$$

2. $0 \leq p \leq 1$, cioè $b/6 \leq v \leq b/2$

In queste condizioni si hanno valori del carico che producono fino a una quota h dalla base la parzializzazione della sezione reagente.

Pertanto per $0 \leq x \leq h$ vale l'equazione differenziale [8] e per $h \leq x \leq l$ vale la [7]. Il valore della quota h è incognito e lo si determina imponendo le condizioni al contorno e quelle di continuità su δ e su $(d\delta/dx)$ in corrispondenza di $x = h$.

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (7/10)

La soluzione è allora data dall'espressione seguente:

$$\alpha l = f_2(p, m) = \left[p(1-p)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-p)^{\frac{3}{2}} \cdot \ln \frac{1+\sqrt{p}}{1-\sqrt{p}} + \right. \\ \left. + \arcsin\left(\frac{1-p}{1+3p}\right)^{\frac{1}{2}} - \arcsin m \left(\frac{1-p}{1+3p}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad [11]$$

Le equazioni [9], [10], [11] possono essere riassunte in un'unica relazione del tipo:

$$\alpha l = f(p, m) \quad [12]$$

dove f si identifica con f_1, f_2, f_3 a seconda dei valori delle variabili m e p .

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (8/10)

Le equazioni [9], [10], [11] possono essere riportate in grafico fornendo, in forma adimensionalizzata, il valore del carico (αl) in funzione della massima freccia (p) al variare dell'eccentricità iniziale (m).

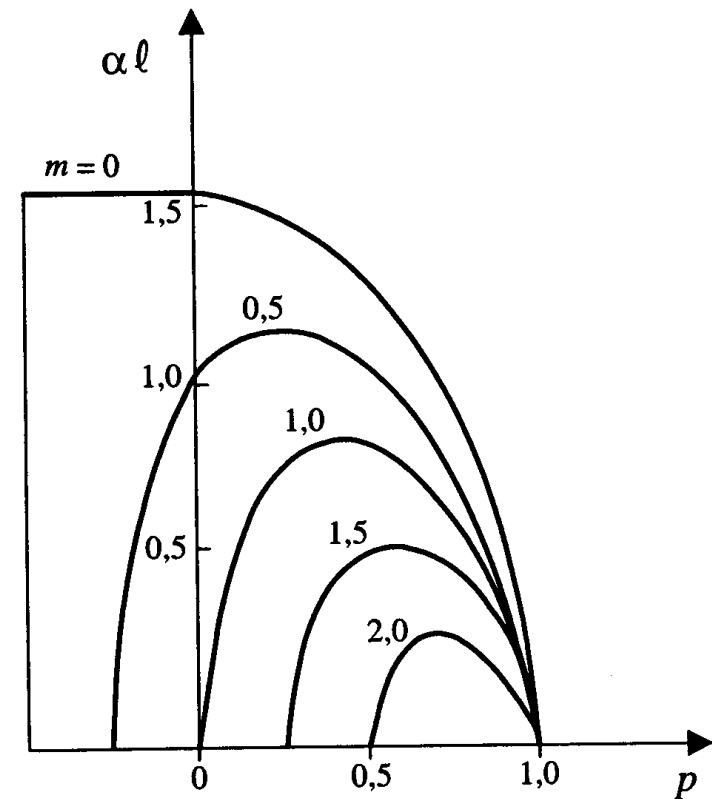
Le curve sono simili a quelle (a tratto pieno) ottenute per il modello discreto e hanno lo stesso significato.

Infatti il termine αl si può scrivere come segue:

$$\alpha l = (\pi/2)(P/P_E)^{1/2}$$

dove appare il valore $P_E = (\pi^2/4)(EI/l^2)$.

Questo rappresenta il carico critico Euleriano del pilastro soggetto a carico perfettamente centrato, e dunque con le sezioni trasversali interamente reagenti per $0 \leq x \leq l$.



Curve carico-spostamento (in forma adimensionalizzata) per il modello continuo del pilastro in muratura NRT.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (9/10)

Conviene a volte utilizzare come parametro della deformazione del pilastro non la freccia massima adimensionalizzata (p) ma la rotazione della sezione libera, definita come:

$$\varphi = (d\delta/dx)|_{x=l}.$$

Se si valuta φ derivando le appropriate soluzioni delle equazioni differenziali [7] e [8] si ricavano, in luogo delle [9], [10], [11], le seguenti espressioni:

$1 \leq m \leq 3$, cioè $b/6 \leq e \leq b/2$:

$$\varphi \frac{l}{b} = \frac{\alpha l}{3} \left[\frac{1+2p-m}{(1-p)(3-m)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } \frac{m-1}{2} \leq p \leq 1 \quad [13]$$

$0 \leq m \leq 1$, cioè $0 \leq e \leq b/6$:

$$\varphi \frac{l}{b} = \frac{\alpha l}{6} \left[(1+2p)^2 - m \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } \frac{m-1}{2} \leq p \leq 0 \quad [14]$$

$$\varphi \frac{l}{b} = \frac{\alpha l}{6} \left[\frac{1+3p}{1-p} - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } 0 \leq p \leq 1 \quad [15]$$

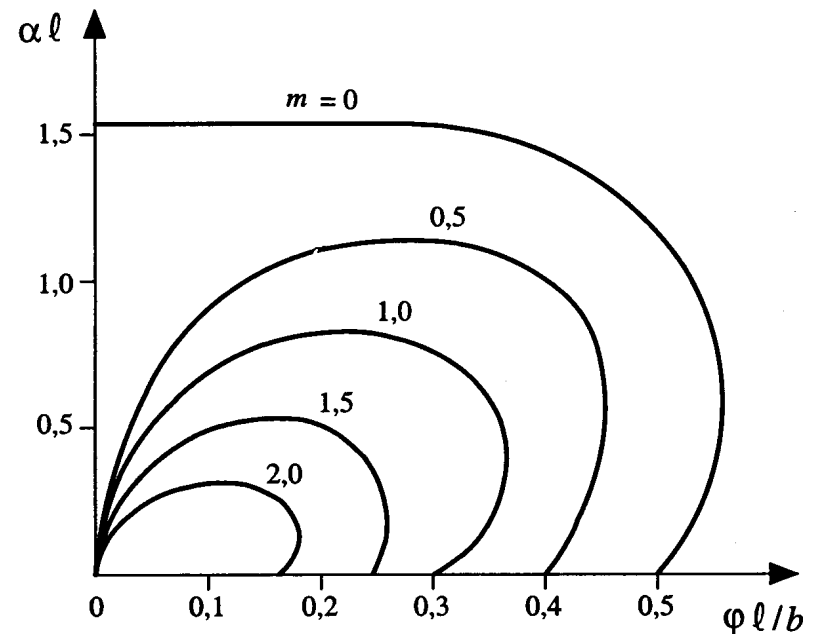
Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con illimitata resistenza a compressione (10/10)

Le equazioni [13], [14], [15], analogamente alle [9], [10], [11] possono essere riportate in grafico fornendo, in forma adimensionalizzata, il valore del carico (αl) in funzione della rotazione dell'estremo libero (φ) al variare dell'eccentricità iniziale (m).

Il valore del carico di collasso per instabilità del pilastro è dato dai valori di αl per i quali le curve raggiungono un massimo.

Per condizioni di vincolo alle estremità differenti da quelli qui considerati, i risultati ottenuti possono essere ancora utilizzati pur di riferirsi a un'opportuna lunghezza l_i (di *libera inflessione*) in corrispondenza della quale la deformata del pilastro si identifica con quella del caso considerato.

Identificata la lunghezza l_i corrispondente al caso da studiare, gli angoli di rotazione alle estremità sono poi ottenibili dalle equazioni [13], [14], [15].



Curve adimensionali carico-rotazione in sommità per il modello continuo del pilastro in muratura NRT.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con resistenza a compressione limitata (1/2)

Se la resistenza a compressione della muratura è limitata, in analogia con quanto visto nel caso del modello discreto, occorre tenere conto che il collasso per instabilità dovuto a parzializzazione della sezione può essere preceduto da una rottura fragile, quando la fibra più sollecitata a compressione raggiunge il valore di sforzo σ^* .

Il collasso per rottura a compressione può essere studiato valutando lo sforzo massimo nella muratura nella generica configurazione *deformata*, individuata dalla massima freccia v oppure dalla rotazione φ a un estremo.

Se si eguaglia lo sforzo massimo al valore della resistenza a compressione, σ^* , si ottengono delle curve, esprimibili in funzione di un parametro di snellezza β definito, in analogia con il caso discreto, come

$$\beta = \mathbf{P}^*/\mathbf{P}_E = \sigma^*bt / (\pi^2 EI / l_i^2) = (12/\pi^2) (\sigma^*/E) (l_i/b)^2,$$

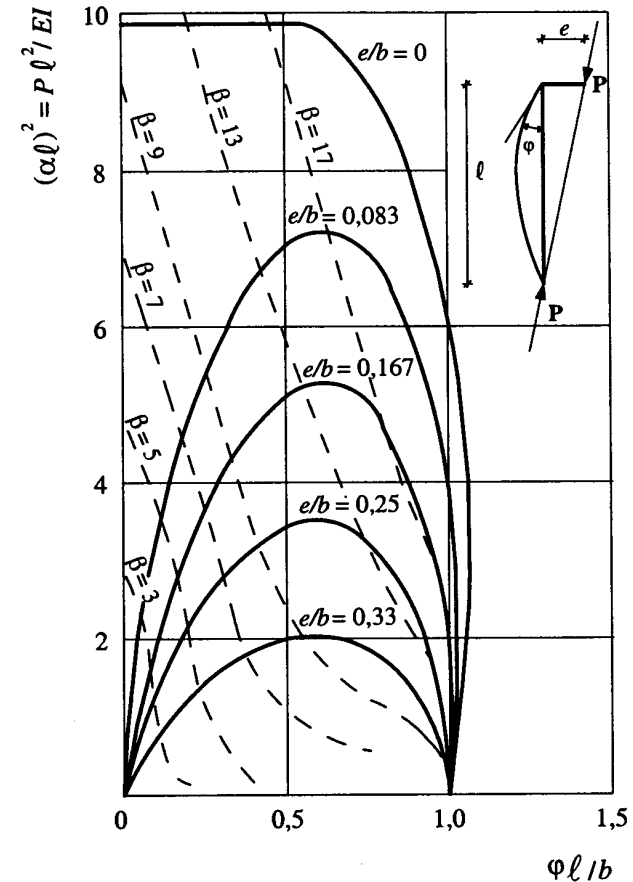
dove $\mathbf{P}^* = \sigma^*b \cdot t$ è il carico di rottura a compressione della muratura soggetta a un carico centrato e $\mathbf{P}_E = \pi^2 EI / l_i^2 = (\pi^2/12) E b^3 t / l_i^2$ è il carico critico Euleriano di un'asta equivalente avente lunghezza di libera inflessione l_i .

Il parametro β è proporzionale al quadrato della snellezza l_i/b e dipende dalle proprietà meccaniche del materiale attraverso il fattore σ^*/E .

Il collasso per instabilità di un pilastro dovuto alla parzializzazione della sezione: un modello continuo con resistenza a compressione limitata (2/2)

- Se le curve tratteggiate intercettano le curve a tratto pieno prima che queste raggiungano il massimo, il collasso per rottura a compressione precede quello per instabilità. Non è peraltro agevole, a differenza del caso discreto, ottenere espressioni esplicite di $\mathbf{P}_c(\beta)$.
- Le curve di stabilità presentate consentono di determinare in modo agevole il carico di collasso \mathbf{P}_c nelle varie situazioni, ma le ipotesi sulle quali si basano (linearità del materiale, per esempio, o la schematizzazione dei vincoli), sono solo approssimativamente soddisfatte nelle situazioni reali.
- La trattazione rigorosa qui sviluppata consente comunque di sviluppare per casi reali curve di stabilità opportunamente modificate per tenere conto dei fenomeni non lineari sopra accennati.

Curve adimensionali carico-rotazione in sommità per il modello continuo del pilastro in muratura NRT, nel caso di resistenza a compressione limitata.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Riferimenti bibliografici e iconografici

- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- L. Corradi, "Problemi di stabilità dell'equilibrio in strutture in muratura", in *Comportamento Statico e Sismico delle Strutture Murarie*, CLUP: Milano, 1982.
- L. Corradi, *Meccanica delle Strutture vol. III – La valutazione delle capacità portante*, McGraw-Hill: Milano, 1994.
- G. Del Piero, *Le costruzioni in Muratura*, CISM: Udine, 1984.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009².