

Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in
Architettura

A.A. 2014-2015

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>

Lezione 5 - Analisi limite applicata alle pareti murarie

Sommario

- La schematizzazione delle pareti murarie

- I teoremi del calcolo a rottura:
 - Soluzioni staticamente ammissibili
 - Soluzioni cinematicamente ammissibili
 - Teorema statico
 - Teorema cinematico

- Applicazioni del calcolo a rottura:
 - Il portale in muratura

Schematizzazione delle pareti murarie (1/2)

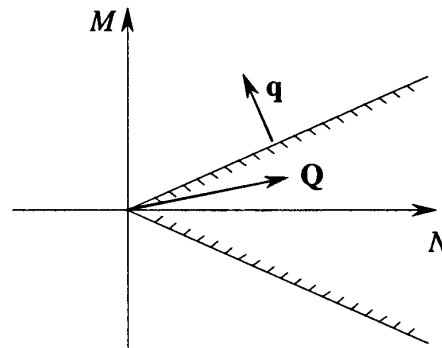
Definite le caratteristiche di comportamento al collasso degli elementi verticali (*maschi murari*) e di quelli orizzontali (*piattabande*) si considera la condizione della parete muraria nel suo complesso.

Si fa uso dei teoremi fondamentali dell'analisi limite (calcolo a rottura).

In particolare si considera che il singolo *maschio murario* è soggetto alle sollecitazioni generalizzate seguenti: N (azione assiale) e M (momento flettente).

Questi definiscono le condizioni limite evidenziate in Figura: \mathbf{Q} denota un vettore aventi le componenti N e M ; \mathbf{q} un vettore contenente le deformazioni generalizzate associate alla condizione di collasso del maschio Θ^f (rotazione della sezione) e Δ^f (spostamento del baricentro).

In condizioni di collasso si osservi che \mathbf{q} risulta sempre perpendicolare al dominio limite.



Dominio limite per un maschio murario.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Schematizzazione delle pareti murarie (2/2)

Per le *piattabande* si adotta come modello di comportamento quello di una trave puramente inflessa: l'azione di taglio, T , è necessaria per garantire l'equilibrio ma non interviene sul comportamento plastico che è completamente definito dal momento flettente.

I carichi applicati sono costituiti da carichi permanenti (tipicamente *verticali*) P_i , e da spinte di piano, λF_i , tipicamente orizzontali, aventi valore base F_i e tutte crescenti secondo il *medesimo* moltiplicatore, λ .

I carichi sono tutti concentrati in corrispondenza dei *nod*i (ideali intersezioni del telaio equivalente formato da maschi e piattabande).

L'analisi che si intende sviluppare è diretta alla determinazione del valore del moltiplicatore di collasso, λ_0 dell'intera parete muraria.

Un *cinematismo* (o *meccanismo*) è una distribuzione di spostamenti e rotazioni della parete muraria prodotta da deformazioni anelastiche concentrate in un numero finito di sezioni dei maschi, per effetto dei distacchi da fessurazione, e delle piattabande, per effetto delle relative curvature plastiche.

Soluzioni staticamente ammissibili

Una situazione è detta staticamente ammissibile (e il corrispondente moltiplicatore dei carichi che vengono amplificati è detto staticamente ammissibile, e denotato con λ_s)

⇒ quando è possibile determinare una qualsiasi distribuzione di sollecitazioni M, N, T che risulti staticamente ammissibile, cioè che

- soddisfi le condizioni di equilibrio in *ogni* sezione di maschi e piattabande sotto i carichi P_i e $\lambda_s F_i$;
- non violi in alcuna sezione di maschi e piattabande le condizioni di resistenza.

Soluzioni cinematicamente ammissibili

Una situazione è detta cinematicamente ammissibile (e il corrispondente moltiplicatore dei carichi che vengono amplificati è detto cinematicamente ammissibile e denotato con λ_c):

- ⇒ quando è possibile determinare un cinematismo della struttura, tale che
- soddisfi la condizione di eguaglianza fra il lavoro dei carichi P_i , e $\lambda_c F_i$; e il lavoro interno associato alle deformazioni del cinematismo.

Condizioni di collasso

Una situazione è detta di collasso (e il corrispondente moltiplicatore dei carichi che vengono amplificati è detto moltiplicatore di collasso e denotato con λ_0)

⇒ quando la spinta $\lambda_0 F_i$ assieme ai carichi permanenti (*non amplificati dal moltiplicatore*) P_i è tale da produrre

- Una distribuzione di sollecitazioni M, N, T che sia ancora staticamente ammissibile;
- Un cinematismo ammissibile, cioè nel quale sia rispettata la condizione di eguaglianza fra il lavoro dei carichi P_i , e $\lambda_0 F_i$; e il lavoro interno compiuto dalle azioni interne per le deformazioni associate al meccanismo.

Teorema statico dell'analisi limite

Ogni moltiplicatore staticamente ammissibile non eccede il valore del moltiplicatore di collasso:

$$\Rightarrow \lambda_s \leq \lambda_o$$

Inoltre il moltiplicatore di collasso è il massimo dei moltiplicatori staticamente ammissibili:

$$\lambda_o = \max (\lambda_s).$$

Pertanto il teorema statico garantisce che, se per una struttura muraria si può trovare una soluzione staticamente ammissibile, allora non si sono ancora superate le condizioni di collasso.

Teorema cinematico dell'analisi limite

Ogni moltiplicatore cinematicamente ammissibile eccede il valore del moltiplicatore di collasso:

$$\Rightarrow \lambda_c \geq \lambda_o$$

Inoltre il moltiplicatore di collasso è il minimo dei moltiplicatori cinematicamente ammissibili:

$$\lambda_o = \min (\lambda_c).$$

Pertanto il teorema cinematico garantisce che, se per una struttura muraria si può trovare una soluzione cinematicamente ammissibile, allora essa si trova oltre le condizioni di collasso.

L'aspetto importante è che il moltiplicatore di collasso effettivo è *contemporaneamente* staticamente ammissibile e cinematicamente ammissibile, essendo l'elemento separatore di 2 classi contigue. Si ha quindi:

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$$

e ciò permette di delimitare sia superiormente che inferiormente il carico di collasso.

Dimostrazione del teorema statico (1/2)

Si consideri una condizione staticamente ammissibile, caratterizzata da queste quantità statiche:

$$P_j, \lambda_s F_i, \mathbf{Q}_m, M_n$$

che rappresentano, rispettivamente: i carichi permanenti, le spinte di piano, i vettori contenenti le azioni interne (M, M) nelle sezioni nodali dei maschi e i momenti flettenti nelle sezioni nodali delle piattabande.

Si consideri poi la condizione di collasso, caratterizzata da queste quantità statiche:

$$P_j, \lambda_o F_i, \mathbf{Q}_{om}, M_{on}$$

e da queste quantità cinematiche:

$$u_{oj}, v_{oi}, \mathbf{q}_{om}, \theta_{on}$$

che rappresentano, rispettivamente: gli spostamenti dei punti d'applicazione dei carichi permanenti, gli spostamenti dei punti d'applicazione delle spinte di piano, i vettori contenenti le deformazioni generalizzate delle sezioni nodali dei maschi e le rotazioni delle sezioni nodali delle piattabande; tutte valutate in condizioni di collasso (dove il pedice "o").

Le due situazioni statiche sono equilibrate e la situazione cinematica corrispondente al collasso è congruente: si può quindi applicare 2 volte il P.L.V. facendo lavorare i due sistemi di forze-sforzi per i corrispondenti spostamenti e deformazioni.

Si ha:

$$\lambda_s \sum F_i v_{oi} + \sum P_j u_{oj} = \sum \mathbf{Q}_m \cdot \mathbf{q}_{om} + \sum M_n \theta_{on} \quad [1]$$

$$\lambda_o \sum F_i v_{oi} + \sum P_j u_{oj} = \sum \mathbf{Q}_{om} \cdot \mathbf{q}_{om} + \sum M_{on} \theta_{on} \quad [2]$$

Dimostrazione del teorema statico (2/2)

Nella [2] si osserva che:

$\Sigma M_{on} \theta_{on} > 0$ poiché esprime la dissipazione plastica nelle piattabande,

$\Sigma \mathbf{Q}_{om} \cdot \mathbf{q}_{om} = 0$ poiché non si ha dissipazione nei maschi murari,

$\lambda_o > 0$ per definizione

sicché deve risultare $\Sigma F_i v_{oi} > 0$, anche se qualche addendo può essere negativo.

Se ora si sottrae la [1] dalla [2] si ottiene:

$$(\lambda_o - \lambda_s) \Sigma F_i v_{oi} = \Sigma (\mathbf{Q}_{om} - \mathbf{Q}_m) \cdot \mathbf{q}_{om} + \Sigma (M_{on} - M_n) \theta_{on} \quad [3]$$

Per le proprietà di convessità del dominio di collasso dei maschi murari e la normalità delle deformazioni \mathbf{q}_{om} si ha: $\Sigma (\mathbf{Q}_{om} - \mathbf{Q}_m) \cdot \mathbf{q}_{om} \geq 0$.

Il termine di dissipazione delle piattabande soddisfa invece la condizione: $\Sigma (M_{on} - M_n) \theta_{on} \geq 0$.

Dalla [3] segue allora necessariamente:

$$\lambda_o - \lambda_s \geq 0 \quad \Rightarrow \lambda_o \geq \lambda_s.$$

In modo analogo si può dimostrare il teorema cinematico, che porta a ottenere:

$$\lambda_c - \lambda_o \geq 0 \quad \Rightarrow \lambda_c \geq \lambda_o.$$

Il portale in muratura

Costituisce la cella resistente elementare di un edificio in muratura.

La geometria e la resistenza della parete si possono esprimere mediante questi parametri adimensionali:

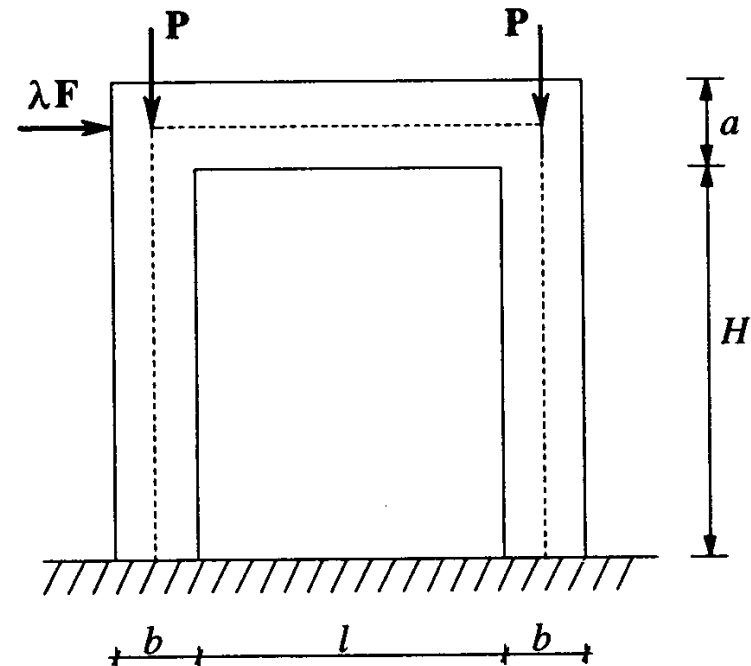
$$k = b/l;$$

$$t = a/(2H);$$

$$X = (T_o I)/(Pb) = (2M_{0\text{piattabanda}})/M_{\text{maschio}}$$

Si osserva che k misura il rapporto fra la base del maschio e la lunghezza dell'apertura; t quello fra la semialtezza della piattabanda e l'altezza dell'apertura; X fornisce una misura della resistenza limite della piattabanda rispetto a quella dei maschi murari.

Al variare di X si valuta la resistenza di collasso del portale e, applicando il teorema statico si individuano i valori per i quali un assegnato meccanismo fornisce il moltiplicatore di collasso.



Schema statico e geometrico di un portale in muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (1/6)

Se la piattabanda è debole il valore di X è basso: il meccanismo di collasso è quello *a telaio*, che vede la formazione di cerniere plastiche alle 2 estremità della piattabanda, in corrispondenza dell'innesto nei maschi murari, e il raggiungimento della condizione limite di ribaltamento al piede dei maschi stessi.

Il cinematismo è caratterizzato dalla rotazione θ di ribaltamento dei maschi; la rotazione della piattabanda è individuata dalla condizione di compatibilità:

$$l\Phi = (l + b)\theta ,$$

che fornisce: $\Phi = (1 + k)\theta$.

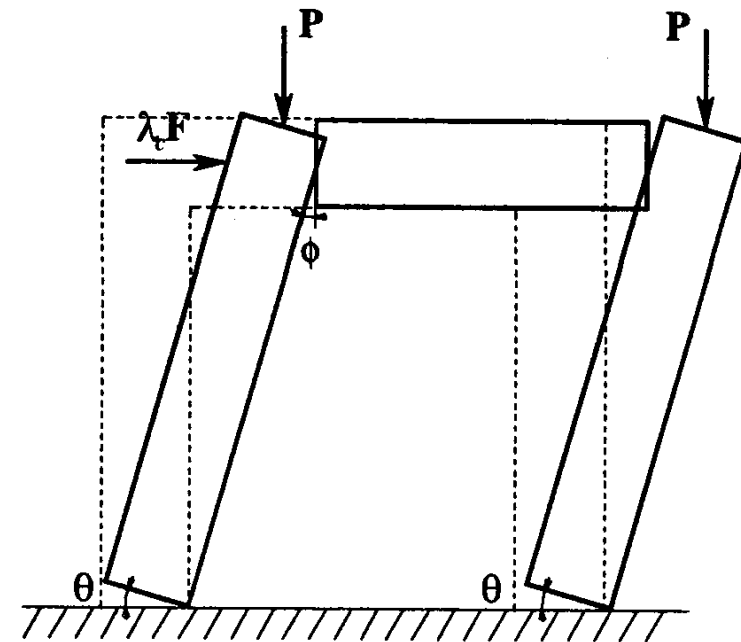
In base al P.L.V. si ottiene:

$$\lambda_c F(H + a/2)\theta - 2P(b/2)\theta = 2M_o\theta$$

ovvero:

$$\lambda_c FH'\theta - 2P(b/2)\theta - 2M_o(1 + k)\theta = 0,$$

dove $H' = H(1 + a/2H) = H(1 + t)$.



Meccanismo a telaio per un portale in muratura.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (2/6)

Ne segue:

$$\lambda_c = [Pb + 2M_o(1 + k)]/FH'$$

e osservando che, per equilibrio, è $2M_o = T_o l = X Pb$

si può scrivere:

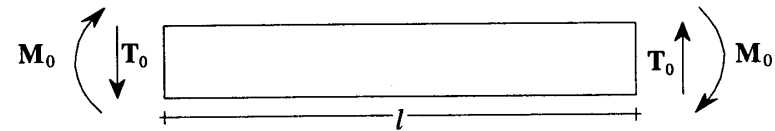
$$\lambda_c = (Pb / FH') [1 + X(1 + k)]$$

ovvero:

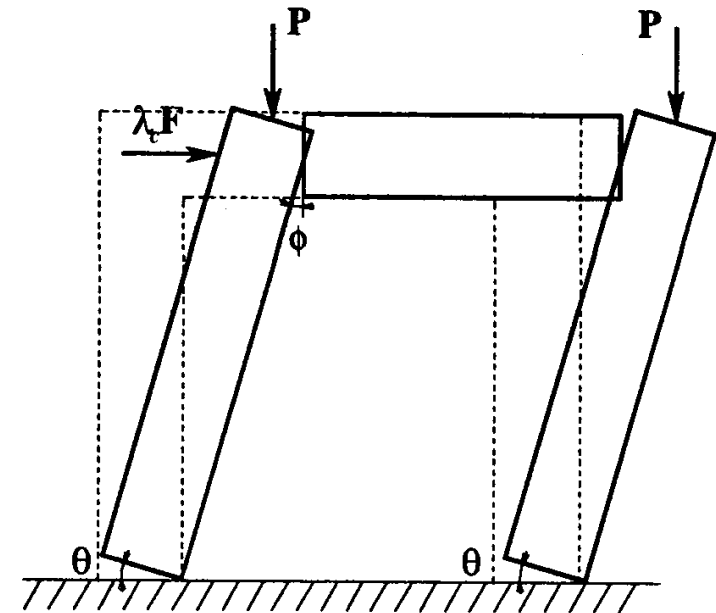
$$\lambda_c = [Pb / FH] 1/(1 + t) [1 + X(1 + k)].$$

Mediante l'applicazione del teorema statico si valuta in quali condizioni al moltiplicatore λ_c si può associare uno stato di sollecitazione staticamente ammissibile; *quando ciò è possibile significa che $\lambda_c = \lambda_s = \lambda_o$* , e si è trovato l'effettivo moltiplicatore di collasso.

Lo stato di sollecitazione è univocamente determinato dalle condizioni di equilibrio e dalla presenza, nelle cerniere, di condizioni di collasso.



Condizioni di equilibrio limite nella piattabanda.



Meccanismo a telaio per un portale in muratura.
(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (3/6)

Sulla testa del maschio murario di destra le sollecitazioni sono:

$$N = P - T_o$$

$$M = M_o + T_o b/2 - (\lambda_c F - N_p)a/2,$$

dove N_p è l'azione assiale presente nella piattabanda, che può essere calcolata imponendo che il maschio murario di destra soddisfi la condizione di equilibrio rispetto alla base (dove avviene ribaltamento):

$$N_p(H + a/2) = M_o + T_o b + Pb/2 \quad [*].$$

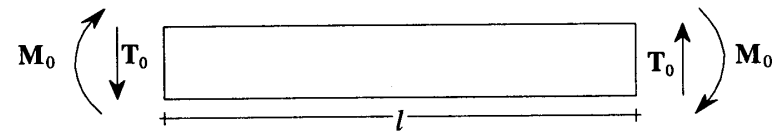
Ne segue:

$$N_p = (1/2)Pb/[H(1 + t)][1 + X(1 + 2k)].$$

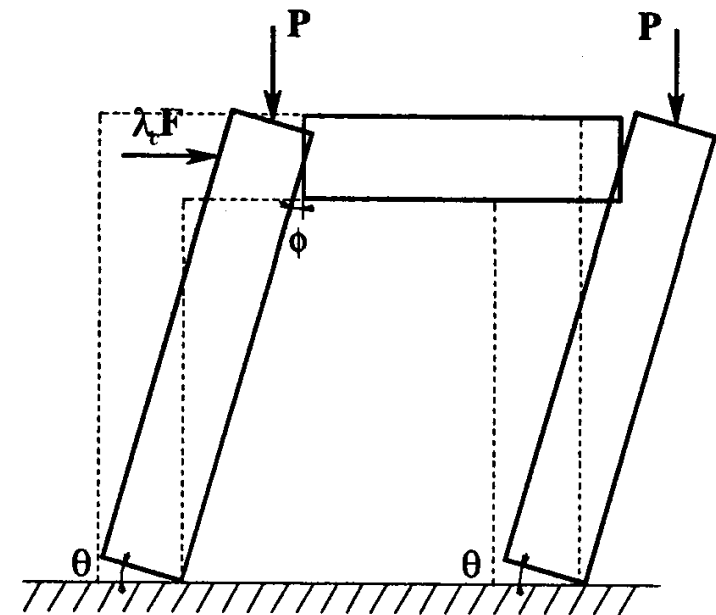
Le condizioni di ammissibilità per i maschi murari sono:

$$N \geq 0 \quad [**] \quad e = M/N \leq b/2 \quad [***]$$

La [******] impone che N sia di compressione; la [*******] che la retta d'azione sia interna al maschio.



Condizioni di equilibrio limite nella piattabanda.



Meccanismo a telaio per un portale in muratura.
(Immagini tratte da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (4/6)

Sostituendo la [*] nelle [**], [***] si trova che la soluzione ottenuta è staticamente ammissibile per i valori di X compresi nell'intervallo seguente:

$$0 \leq X \leq X_1, \quad [+]$$

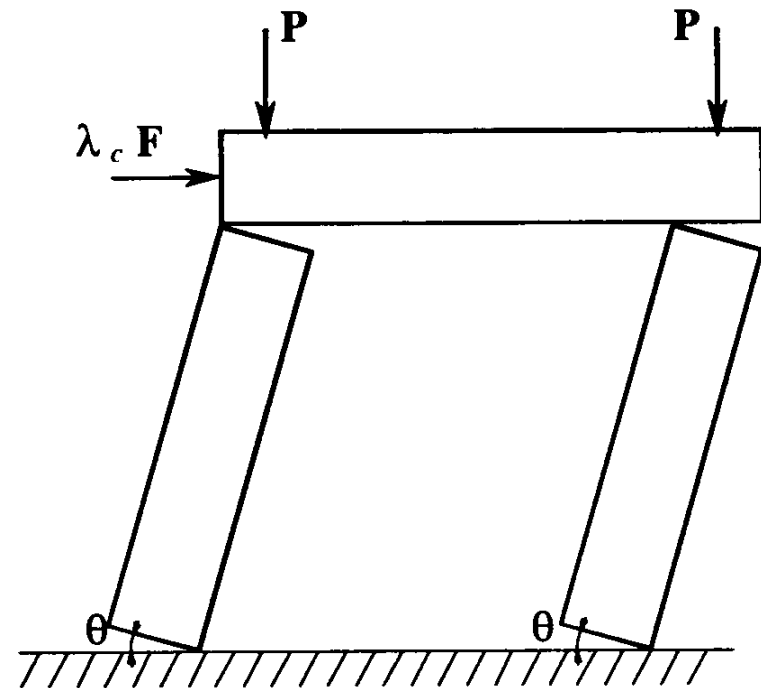
con $X_1 = (1 + 2t)/(1 + 2k(1+t))$,

cioè in dipendenza di soli fattori geometrici.

Pertanto se il valore di X relativo alla piattabanda è compreso nell'intervallo individuato dalla [+] si ha che il meccanismo ipotizzato è l'effettivo meccanismo di collasso.

Per valori di $X > X_1$ (piattabande più resistenti) il meccanismo di collasso non è più quello ipotizzato.

Si considera un altro possibile *meccanismo*, quello *di piano*, nel quale i maschi murari ruotano attorno alla base e producono spostamento rigido della piattabanda, che non viene altrimenti impegnata.



Meccanismo di piano per un portale in muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (5/6)

Applicando il P.L.V. si trova:

$$\lambda_c FH \theta - 2\theta Pb \theta = 0,$$

da cui si ricava il valore:

$$\lambda_c = 2X.$$

Mediante il teorema statico si valuta per quali valori di X la soluzione corrispondente a λ_c risulta anche staticamente ammissibile, cioè tale che λ_c fornisca l'effettivo meccanismo di collasso.

Le reazioni vincolari fra maschi murari e piattabande sono così espresse:

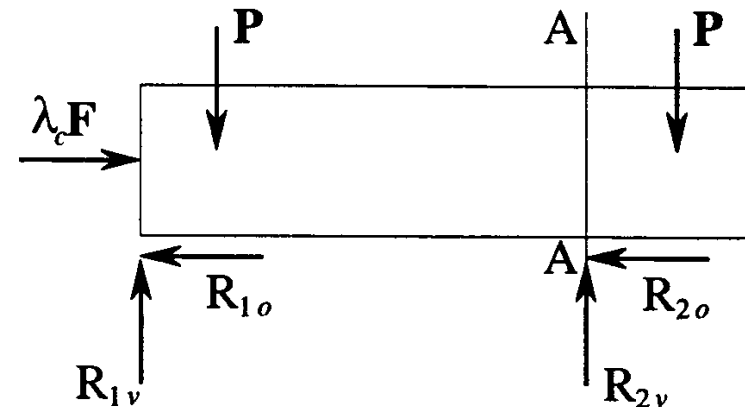
$$R_{1v} = P(1 - 2kt)/(1 + k) \quad ; \quad R_{1o} = R_{1v} b/H$$

$$R_{2v} = P[1 + 2k(1 + t)]/(1 + k); \quad R_{2o} = R_{2v} b/H.$$

La massima sollecitazione flettente nella piattabanda si trova nella sezione A-A:

$$M = Pb/2 + R_{2o} a/2, \text{ ovvero}$$

$$M = Pb/2\{1 + t[1 + 2k(1 + t)]/(1 + k)\} \leq M_o = T_o I / 2$$



Verifica delle condizioni di equilibrio nella piattabanda per il meccanismo di piano.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Calcolo a rottura del portale in muratura (6/6)

Si ricava di qui la condizione:

$$X \geq X_2 = 1 + 2t[1 + 2k(1 + t)]/(1 + k)$$

che definisce i valori per i quali il meccanismo di piano fornisce l'effettivo moltiplicatore di collasso.

Con i due meccanismi esaminati si è potuto valutare il valore della spinta a collasso per i valori del parametro di resistenza X compreso nei seguenti intervalli:

$$0 \leq X \leq X_1 \quad \Rightarrow \quad \text{meccanismo di telaio}$$

$$X \geq X_2 \quad \Rightarrow \quad \text{meccanismo di piano}$$

Si osservi che è sempre $X_1 \leq X_2$; per valori del parametro X compresi nell'intervallo $X_1 \leq X \leq X_2$ il collasso avviene secondo altri meccanismi, più complicati di quelli qui considerati .

Riferimenti bibliografici e iconografici

- R. Baldacci, G. Ceradini, E. Giangreco, *Plasticità*, Italsider: Genova, 1971.
- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- L. Corradi, *Meccanica delle Strutture vol. III – La valutazione delle capacità portante*, McGraw-Hill: Milano, 1994.
- G. Del Piero, *Le costruzioni in Muratura*, CISM: Udine, 1984.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009².