

Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in
Architettura

A.A. 2014-2015

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>

Lezione 3 - Il comportamento meccanico della muratura

Sommario

- Cenni storici
- Il materiale muratura:
 - Risultanze sperimentali
 - Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali
- Comportamento a rottura per compressione monoassiale:
 - Modello teorico
 - Schema di calcolo di Hilsdorf
 - Esempi
- Comportamento a rottura per stati di sforzo biassiale:
 - Ipotesi semplificatrici
 - Il criterio di Capurso-Sacchi
- Prove di compressione e trazione della muratura:
 - Modellazione del comportamento
 - Il legame costitutivo della muratura

Cenni storici

Una costruzione muraria è un assemblaggio, mediante sovrapposizione ordinata, di elementi lapidei e/o in laterizio disposti in modo da ottenere un complesso dotato di una certa stabilità.

Costruzioni murarie *senza materiale cementante* (a secco) affidano la loro stabilità solo all'equilibrio statico (e all'attrito) dei blocchi che le compongono.

Nelle costruzioni murarie con elemento cementante la stabilità è aumentata dalla forza di coesione che il legante esercita fra gli elementi costituenti, consentendo una maggiore libertà costruttiva.

Storicamente si ebbero dapprima muri con blocchi lapidei informi e irregolari, poi con massi regolari (di grandi dimensioni) sovrapposti.

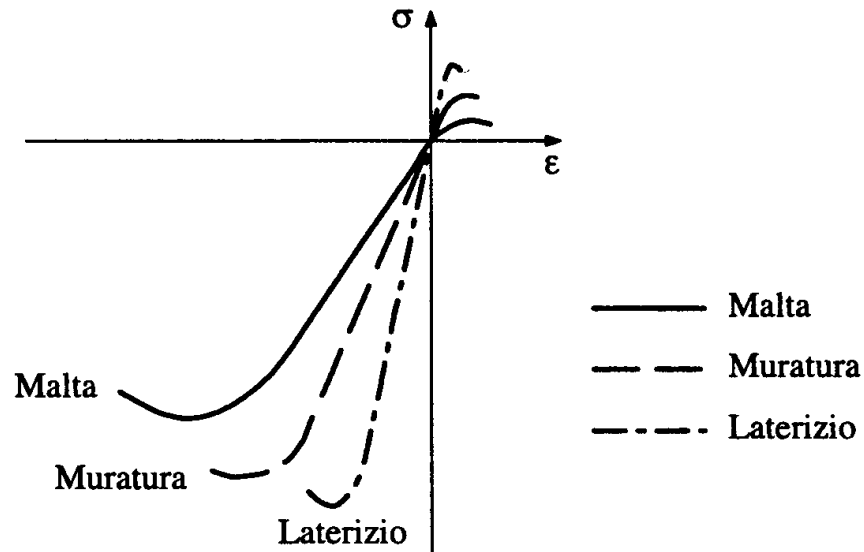
I mattoni (crudi ed essiccati al sole, rinforzati con paglia per ridurre gli effetti del ritiro) si diffusero in Egitto e Mesopotamia.

Alla fine del IV secolo a.C. appare come legante la calce: il sistema di costruzione ne viene rivoluzionato: blocchi più piccoli, facili da maneggiare potevano essere cementati in modo da formare una massa muraria solida e compatta, che consentiva maggiore libertà costruttiva.

Il materiale muratura (1/3)

È un materiale composito i cui elementi costituenti (malta e laterizio o pietrame) hanno caratteristiche meccaniche molto diverse tra loro.

È ragionevole attendersi che le caratteristiche della muratura siano intermedie fra quelle dei suoi costituenti.



Legame sforzo-deformazione per laterizio, malta e muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il materiale muratura (2/3)

È un materiale fortemente *anisotropo* in cui la resistenza dipende non solo dai carichi applicati ma anche dalla loro direzione.

La diversa deformabilità di malta e laterizio (o pietra) è causa dell'instaurarsi di auto-tensioni, a volte benefiche ai fini della resistenza globale.

Le risultanze di una prova sperimentale a trazione-compressione monoassiale sono le seguenti:

1. Entrambi i costituenti presentano resistenza a trazione molto ridotta rispetto a quella a compressione;
2. Il laterizio presenta valori di tensione di rottura e di modulo di elasticità longitudinale più elevati della malta;
3. La malta ha campo di deformazione più ampio rispetto al laterizio: presenta quindi un comportamento a rottura duttile, a differenza del laterizio che ha rottura di tipo fragile.

Materiale	Resistenza a compressione σ_{rc} (MPa)	Resistenza a trazione σ_{rt} (MPa)	Modulo di elasticità E (MPa)	Coefficiente di Poisson ν
Malta	3 – 30	0.2 – 0.8	$(8 - 20) \times 10^3$	0.10 – 0.35
Laterizio	6 - 80	1.5 – 9	$(15-25) \times 10^3$	0.10 – 0.25

Caratteristiche meccaniche della malta e del laterizio.

(Tabella tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il materiale muratura (3/3)

Comportamento meccanico della malta al variare della sua composizione.

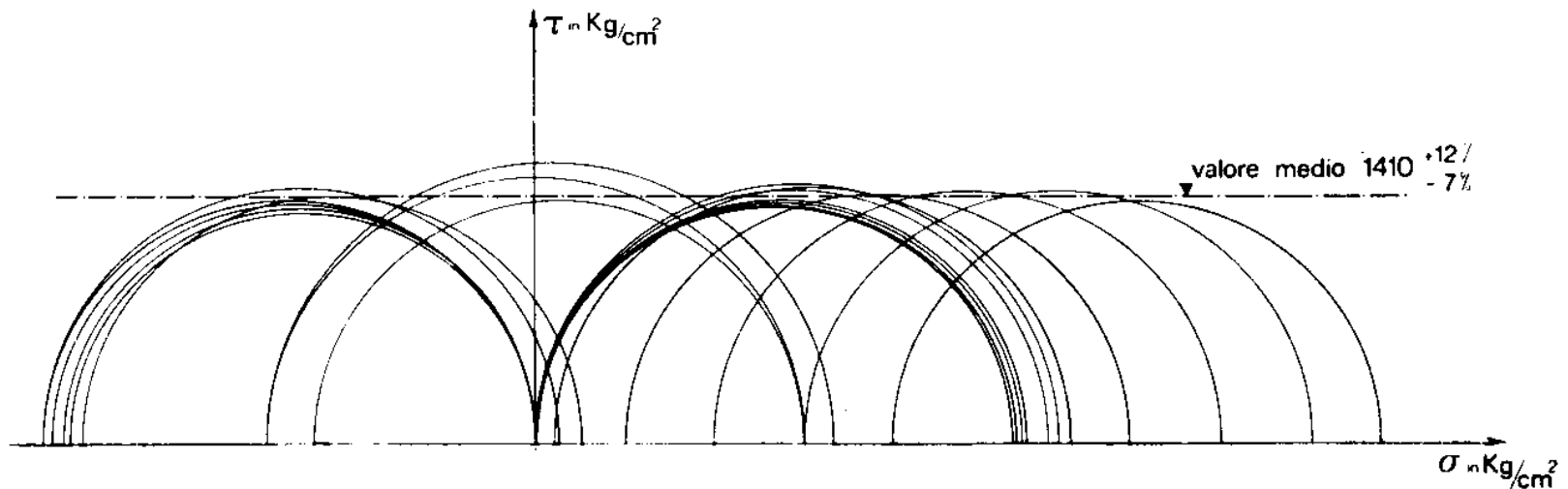
Classe	Composizione in volume			Resistenza a compressione σ_{rc} (MPa)
	Cemento 325	Calce Idraulica	Sabbia	
M1	1	0	3	20
M2	1	0.5	4	10
M3	1	1	5	5
M4	1	2	9	-

Composizione e caratteristiche meccaniche della malte di classe M₁, M₂, M₃, M₄.
(Tabella tratta da Olivito, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (1/6)

Il comportamento della muratura per stati di sollecitazione pluriassiali richiede che si introduca un criterio di resistenza.

Un criterio adottato è quello di Mohr, che porta dapprima a tracciare tutti i cerchi di Mohr corrispondenti a condizioni di crisi per il materiale, come indicato in Figura.



Acciaio in getti. Cerchi di Mohr relativi allo stato limite inferiore di snervamento.

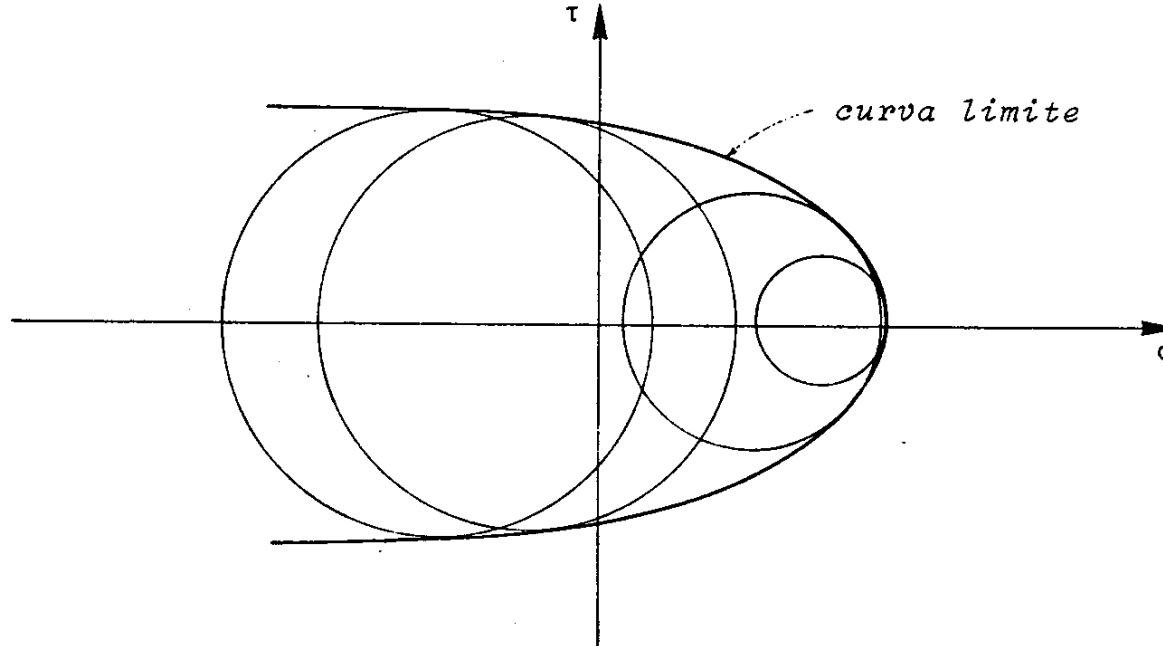
(Roš - Eichinger)

Cerchi di Mohr relativi a stati di crisi per un materiale (nel caso in esame, il materiale è acciaio e la crisi avviene per snervamento).

(Immagine tratta da Baldacci *et al.*, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (2/6)

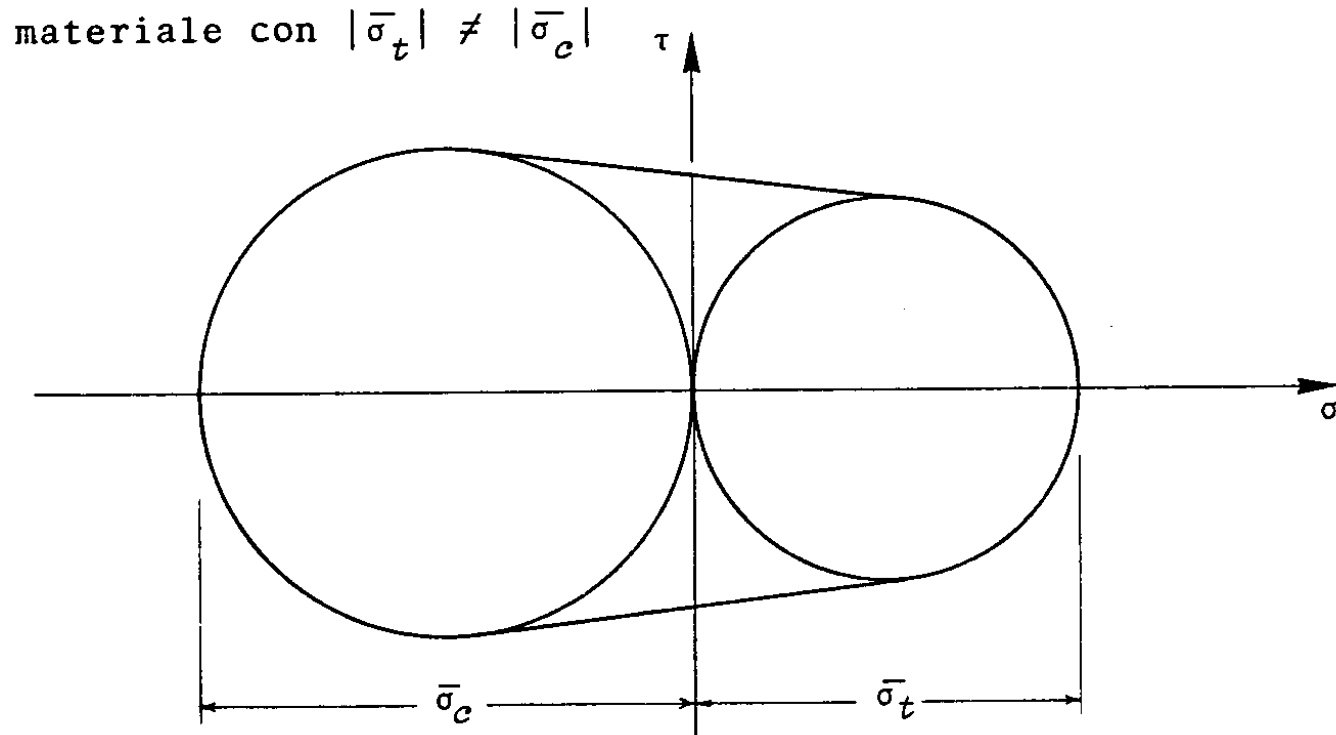
Successivamente si procede a costruire l'involuppo dei cerchi di Mohr corrispondenti alle condizioni di crisi: ciò permette di tracciare una curva limite che racchiude le combinazioni di sforzo che il materiale può sopportare in sicurezza.



Curva limite nel piano $\sigma - \tau$ per un tipico materiale lapideo.
(Immagine tratta da Finzi *et al.*, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (3/6)

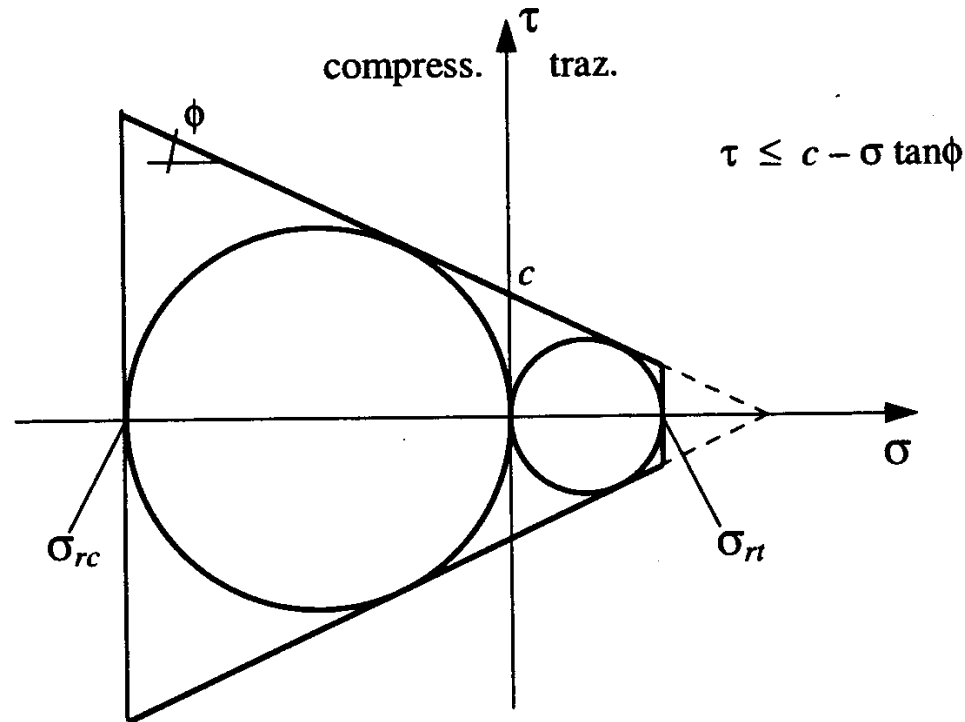
Se per semplicità ci si limita a considerare i soli 2 cerchi di Mohr che delimitano gli stati di crisi per trazione monoassiale e compressione monoassiale l'inviluppo risulta costituito da 2 rette.



Curva limite nel piano $\sigma - \tau$ (semplificata) per un tipico materiale a comportamento non simmetrico a trazione e a compressione.
(Immagine tratta da Finzi *et al.*, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (4/6)

Se a questo punto si prolungano le due rette limite e le si tronca all'intersezione con le rette di equazione $\sigma - \sigma_{rt} = 0$ e $\sigma + \sigma_{rc} = 0$ si ottiene il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb.



Il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb nel piano σ - τ .

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Statika per l'edilizia storica - A. Cazzani , F. Stochino - Lezione 3

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (5/6)

Gli stati di sollecitazione ai quali il materiale può resistere sono quelli definiti dalle disequazioni seguenti:

- $\sigma - \sigma_{rt} \leq 0$
- $\sigma + \sigma_{rc} \geq 0$
- $|\tau| \leq c + \sigma \tan\varphi$

Dove σ è la componente normale del vettore tensione;
 τ è la componente tangenziale del vettore tensione;
 c è la costante di coesione del materiale;
 φ è l'angolo di attrito interno del materiale.

I punti che soddisfano il criterio di rottura di Mohr-Coulomb occupano la regione del piano σ, τ delimitata dalle 4 rette indicate in Figura.

I parametri di rottura σ_{rt} e σ_{rc} sono espressi in funzione di c, φ come segue:

$$\sigma_{rc} = 2c \cos\varphi / (1 - \sin\varphi) \qquad \sigma_{rt} = 2c \cos\varphi / (1 + \sin\varphi)$$

Se si considera il generico cerchio di Mohr, di equazione $[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_2)/2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2]^2$, dove σ_1 e σ_2 sono la massima e la minima tensione principale si ottiene la seguente espressione:

$$\sigma_1/\sigma_{rt} - \sigma_2/\sigma_{rc} \leq 1,$$

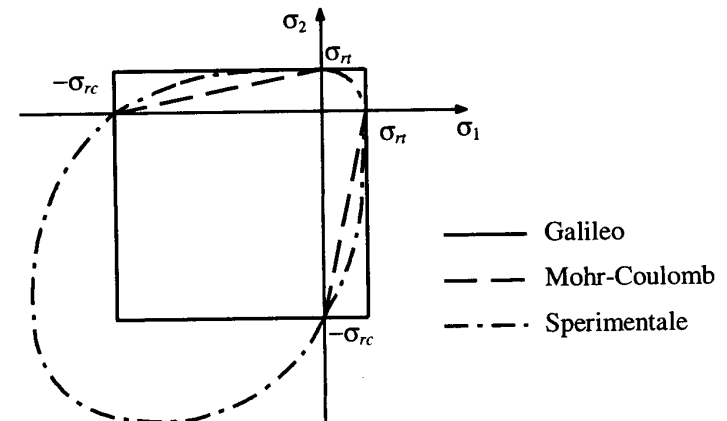
che rappresenta, nel piano delle tensioni principali (σ_1, σ_2) , un esagono irregolare.

Comportamento a rottura per stati di sollecitazione pluriassiali (6/6)

I sei lati dell'esagono rappresentano sei possibili situazioni che si verificano quando ciascuna delle tre tensioni principali coincide con la massima o la minima tensione principale.

Il criterio di rottura di Galileo pone un limite solo alle tensioni principali massime e minime.

Il criterio di Mohr-Coulomb può essere considerato derivato dal criterio di Tresca applicato a materiali fragili, che presentano valori di resistenza diversi a trazione e a compressione: invece di considerare una tensione tangenziale di crisi costante e indipendente dallo stato tensionale, pone un limite alla tensione tangenziale che dipende dalla corrispondente tensione normale: la resistenza aumenta al crescere della tensione di compressione normale, cosicché il dominio di resistenza nel piano di Mohr si allarga nel senso delle tensioni negative. Se si taglia il dominio con due rette verticali corrispondenti a stati di crisi di trazione o compressione uniassiale, si ottiene un trapezio che riproduce in modo soddisfacente gli stati di crisi nei materiali fragili.



Il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb nel piano delle tensioni principali $\sigma_1 - \sigma_2$.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per compressione uniassiale (1/2)

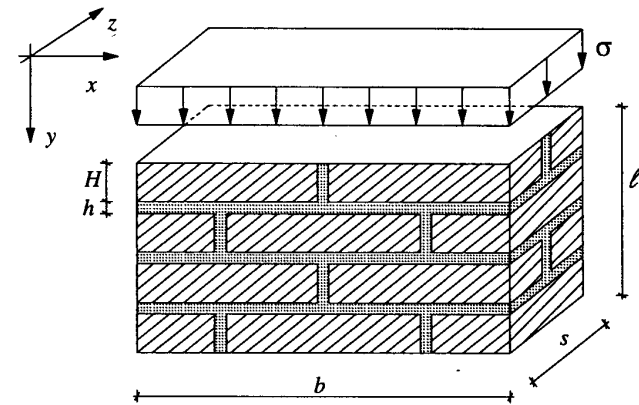
Si considera un macro-elemento di muratura in mattoni pieni (costituito da almeno 4 corsi di mattoni e 3 letti di malta), soggetto a un carico di compressione σ normale ai letti di malta.

Se lo spessore s del blocco è piccolo rispetto alle altre dimensioni si può considerare il problema piano negli sforzi, cioè tale che $\sigma_z^L = \sigma_z^M = 0$. (L e M si riferiscono a laterizio e malta rispettivamente.)

Supponendo costante la distribuzione delle tensioni nella direzione y , $\sigma_y^L = \sigma_y^M = -\sigma$ e considerando l'equilibrio delle forze in direzione x , si ottiene:

$$\gamma\sigma_x^L + \sigma_x^M = 0$$

dove $\gamma = H/h$ è il rapporto fra l'altezza del laterizio e quella del letto di malta.



Blocco di muratura soggetto a uno stato di compressione monoassiale.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per compressione uniassiale (2/2)

Nell'ipotesi di materiali omogenei a comportamento elastico lineare e isotropo i valori delle tensioni nel laterizio e nella malta si possono ricavare eguagliando, per congruenza, gli allungamenti specifici (cioè le deformazioni) secondo la direzione x :

$$\varepsilon_x^L = 1/E^L (\sigma_x^L - \nu^L \sigma_y^L) = 1/E^M (\sigma_x^M - \nu^M \sigma_y^M) = \varepsilon_x^M.$$

Se si introducono le quantità adimensionali:

$$\alpha = (E^L/E^M)(\nu^M/\nu^L); \quad \beta = E^L/E^M$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x^L &= -\nu^L(1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma \\ \sigma_x^M &= \gamma \nu^L (1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma \end{aligned}$$

dove $\gamma = H/h$ è il rapporto fra l'altezza del laterizio e quella del letto di malta.

Se, per esempio, è $\gamma = 5$; $\alpha = 2.40$; $\beta = 1.80$; $\nu^L = 0.20$ si trova:

$$\sigma_x^L = -\nu^L(1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma = 0.03 \sigma; \quad \sigma_x^M = \gamma \nu^L (1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma = -0.14 \sigma.$$

Pertanto nel laterizio si ha una *trazione* pari al 3% del carico applicato σ , mentre nella malta si trova una *compressione* pari al 14% del medesimo carico applicato.

Lo schema di calcolo di Hilsdorf (1/4)

Si considera di studiare mediante il calcolo a rottura la muratura assumendo valide le seguenti ipotesi:

- ciascuno dei materiali costituenti la muratura obbedisca al criterio di Mohr-Coulomb;
- la malta sia soggetta a uno stato di sforzo triassiale con $\sigma_z^M = \sigma_x^M$.

Il criterio di Mohr-Coulomb per i due costituenti può essere riscritto come segue:

$$(\sigma_x^L / \sigma_{rt}^L - \sigma / \sigma_{rc}^L) = 1 ;$$

$$(\sigma_z^M / \sigma_{rt}^M - \sigma / \sigma_{rc}^M) = 1$$

e tenendo conto della relazione $\sigma_z^M = \sigma_x^M$ si ottengono due equazioni che, nel piano (σ_x^L, σ) , sono rappresentate da due rette, r_L e r_M , che intersecano gli assi coordinati nei quattro punti $P_1 = (\sigma_{rt}^L, 0)$; $P_2 = (0, -\sigma_{rc}^L)$; $P_3 = (-\sigma_{rt}^M / \gamma, 0)$; $P_4 = (0, -\sigma_{rc}^M)$ e individuano le condizioni di crisi del laterizio e della malta rispettivamente.

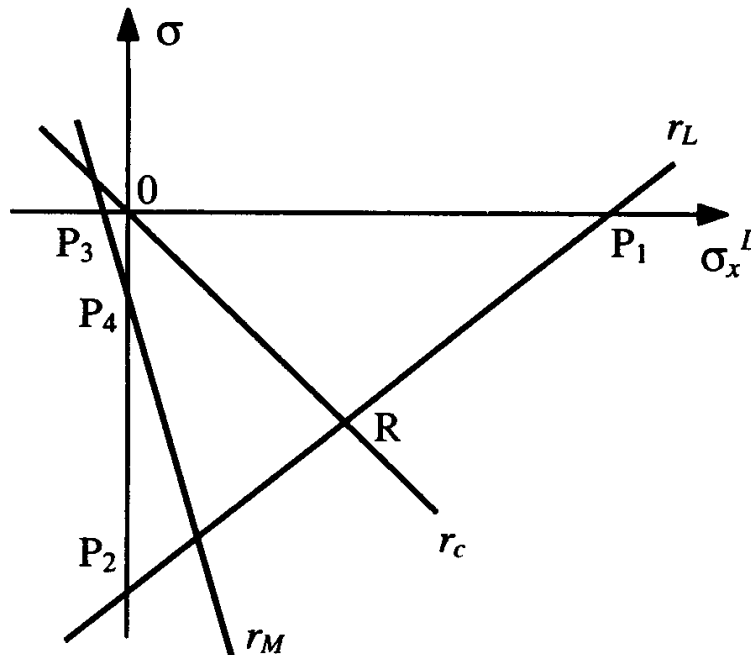
La retta r_c rappresenta la retta di carico, di equazione:

$$\sigma_x^L = -v^L (1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma$$

e l'intersezione di r_c con una delle due rette relative alla malta o al laterizio determina la tensione di rottura della muratura.

Lo schema di calcolo di Hilsdorf (2/4)

La rappresentazione del criterio di rottura nel piano (σ_x^L, σ) è la seguente.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Illustrazione dello schema di calcolo di Hilsdorf che giustifica il raggiungimento della crisi in un blocco di muratura.

Lo schema di calcolo di Hilsdorf (3/4)

Siano noti i seguenti valori delle tensioni di rottura nel laterizio e nella malta:

$$\sigma_{rc}^L = 50 \text{ MPa}; \sigma_{rt}^L = 3 \text{ MPa}; \quad \sigma_{rc}^M = 10 \text{ MPa}; \sigma_{rt}^M = 1 \text{ MPa}.$$

Partendo dall'espressione relativa al laterizio: $(\sigma_x^L / \sigma_{rt}^L - \sigma / \sigma_{rc}^L) = 1$ e sostituendo in essa il valore $\sigma_x^L = -\nu^L (1 - \alpha) / (1 + \beta \gamma) \sigma$, si ottiene:

$$\sigma = -15.0 \text{ MPa}.$$

Partendo invece dall'espressione relativa alla malta: $(\sigma_z^M / \sigma_{rt}^M - \sigma / \sigma_{rc}^M) = 1$ e tenendo conto che $\sigma_z^M = -\gamma \sigma_x^L$ si ottiene:

$$\sigma = 1.67 \text{ MPa}.$$

La rottura avviene per crisi a trazione del laterizio e per una tensione superiore alla resistenza a compressione della malta.

Per avere rottura per schiacciamento della malta occorre che la retta di carico r_c abbia una pendenza molto forte, cioè che le tensioni σ_x siano molto ridotte.

Nella realtà l'ipotesi sulla distribuzione delle tensioni nella malta non è del tutto verificata dal punto di vista sperimentale: si ha infatti un effetto di compressione trasversale nella malta in direzione z e ciò fa sì che la rottura della malta non preceda quella del laterizio.

Lo schema di calcolo di Hilsdorf (4/4)

Il modello presentato legittima dal punto di vista teorico questi aspetti qualitativi del comportamento a rottura della muratura:

1. Il collasso avviene per rottura a trazione del complesso malta-laterizio e non per schiacciamento dei giunti di malta;
2. Un miglioramento delle caratteristiche della malta non consente di aumentare sensibilmente il carico di collasso della muratura (che risulta, in certo senso, indipendente dalle caratteristiche della malta);
3. Uno spessore eccessivo dei giunti di malta riduce la resistenza della muratura poiché produce una riduzione del coefficiente adimensionale γ , che regola la pendenza della retta di carico r_c .

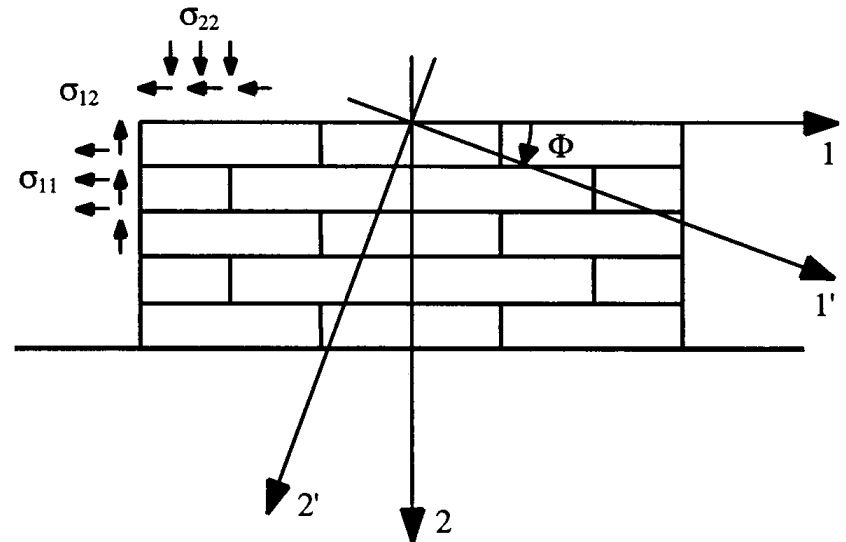
Comportamento a rottura per stati di sforzo biassiale (1/3)

Nella muratura per uno stato di sforzo biassiale il comportamento a rottura dipende dalle direzioni principali e dalle rispettive tensioni principali.

Si adotta come criterio di rottura quello di Capurso-Sacchi che rappresenta una variante, sotto descritta, di quello di Galileo (delle massime e minime tensioni principali)

Indicate con 1 e 2 le direzioni parallele e perpendicolari ai letti di malta, sia σ lo stato di sforzo applicato all'elemento murario, di componenti σ_{11} , $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, σ_{22} .

Dette σ_{r1} e σ_{r2} le resistenze della muratura a compressione (o a trazione) secondo le direzioni 1 e 2, esse individuano un tensore delle resistenze, espresso da \mathbf{T}_r avente come componenti principali proprio σ_{r1} e σ_{r2} .



Blocco di muratura soggetta a un assegnato stato di sforzo rispetto agli assi 1 e 2; 1' e 2' sono gli assi principali di sforzo, ruotati rispetto ai precedenti di un angolo Φ .

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Comportamento a rottura per stati di sforzo biassiale (2/3)

Il criterio di Capurso-Sacchi afferma che lo stato di tensione σ è sicuro se la matrice associata al tensore $(\sigma + \mathbf{T}_r)$ è definita positiva, cioè se risulta $\mathbf{u}^T \cdot (\sigma + \mathbf{T}_r) \cdot \mathbf{u} > 0$ per ogni vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Se quindi si amplificano i carichi a partire dal valore nullo, si raggiunge la condizione di rottura quando la matrice cessa di essere definita positiva, cioè quando il determinante si annulla:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{r1})(\sigma_{22} - \sigma_{r2}) - \sigma_{12}^2 = 0. \quad [*]$$

Indicate con 1' e 2' le direzioni principali di tensione, che formano un angolo Φ con le direzioni 1 e 2 della base di riferimento iniziale, le corrispondenti tensioni principali sono $\sigma_{1'}$, $\sigma_{2'}$.

Se si considerano le relazioni che permettono di esprimere le componenti Cartesiane σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} in funzione delle componenti principali si ha:

$$\sigma_{11} = \sigma_{1'} \cos^2 \Phi + \sigma_{2'} \sin^2 \Phi; \quad \sigma_{22} = \sigma_{1'} \sin^2 \Phi + \sigma_{2'} \cos^2 \Phi; \quad \sigma_{12} = (\sigma_{1'} - \sigma_{2'}) \sin \Phi \cos \Phi. \quad [**]$$

Esplicitando la [*], sostituendo in essa le [**] si trova:

$$(\sigma_{1'} \cos^2 \Phi + \sigma_{2'} \sin^2 \Phi - \sigma_{r1})(\sigma_{1'} \sin^2 \Phi + \sigma_{2'} \cos^2 \Phi - \sigma_{r2}) = (\sigma_{1'} - \sigma_{2'})^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi. \quad [***]$$

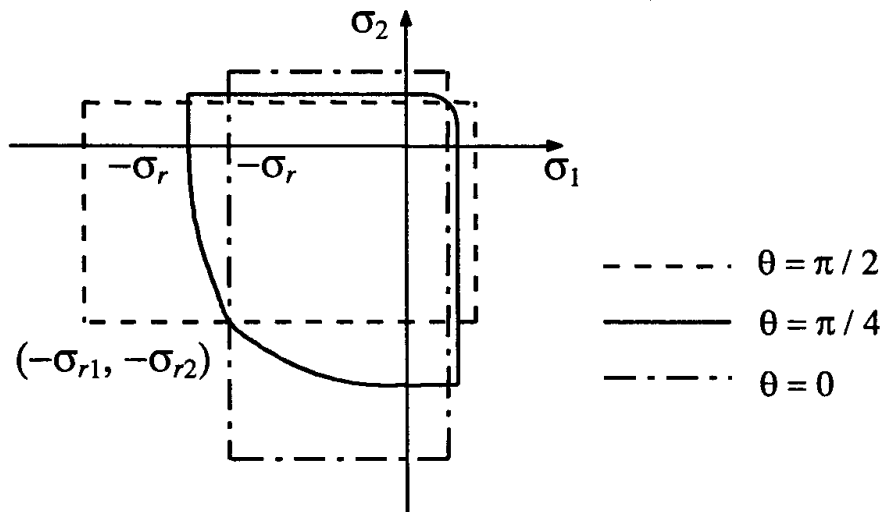
Fissato il valore di ϕ , la [***] rappresenta, nel piano delle tensioni principali, $\sigma_{1'}$, $\sigma_{2'}$, un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati.

Per $\Phi = 0$ e $\Phi = \pi/2$ l'iperbole degenera in una coppia di rette, mentre per tutti gli altri valori di ϕ essa passa per il punto $P_c = (-\sigma_{r1} = -\sigma_{rc1}, -\sigma_{r2} = -\sigma_{rc2})$. Comportamento analogo si riscontra nel quadrante delle trazioni, dove l'iperbole passa per il punto $P_t = (\sigma_{r1} = \sigma_{rt1}, \sigma_{r2} = \sigma_{rt2})$.

Comportamento a rottura per stati di sforzo biassiale (3/3)

La applicazione del criterio presuppone che si idealizzi la muratura in modo da potere applicare i metodi della meccanica del continuo. Ciò presuppone che si proceda in questo modo:

1. La muratura viene considerata un unico materiale omogeneizzato (e non disomogeneo);
2. In ogni punto siano rispettate le condizioni di equilibrio e congruenza (non si abbiano lacerazioni o compenetrazioni di materia)
3. Il legame costitutivo adottato venga ottenuto da risultati sperimentali.



Rappresentazione grafica del criterio di rottura di Capurso-Sacchi.
L'angolo Φ fra gli assi 1 e 2 e gli assi principali di sforzo $1'$ e $2'$ è qui denotato con il simbolo θ .

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La prova a trazione e compressione della muratura (1/3)

- La curva caratteristica di una prova a trazione e compressione della muratura presenta le seguenti peculiarità:
- Nel quadrante delle compressioni:
 - Un tratto OA lineare, di modesta estensione;
 - Un tratto AB non lineare dovuto alla formazione di fessure;
 - Il punto B, che fornisce la massima tensione per schiacciamento, cioè la tensione di rottura a compressione, σ_{rc} ;
 - Un tratto BC, caratterizzato da sforzi decrescenti prodotti da un'ampia fessurazione;
 - Il punto C, in corrispondenza del quale si ha la rottura della muratura per frantumazione.

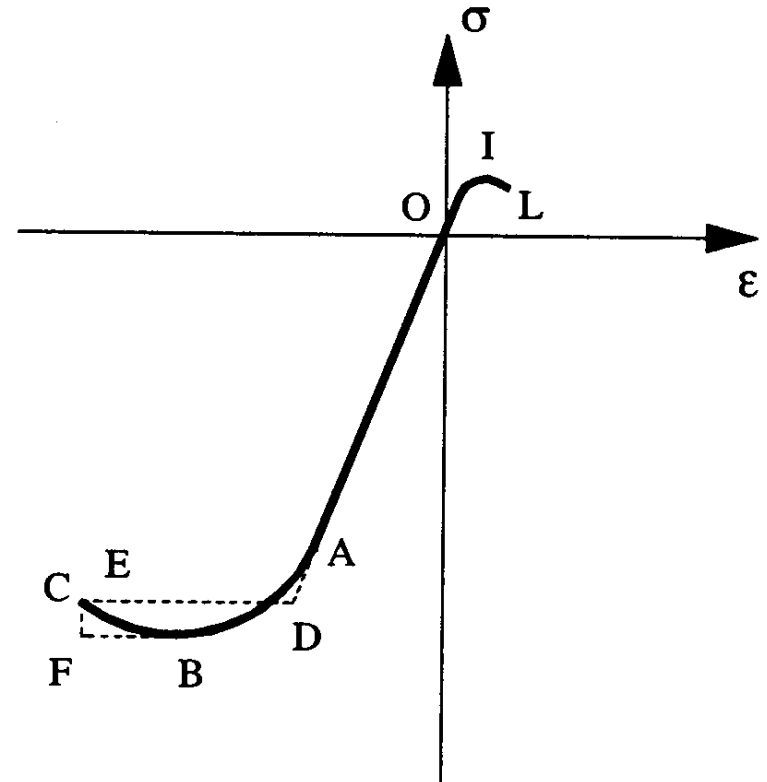
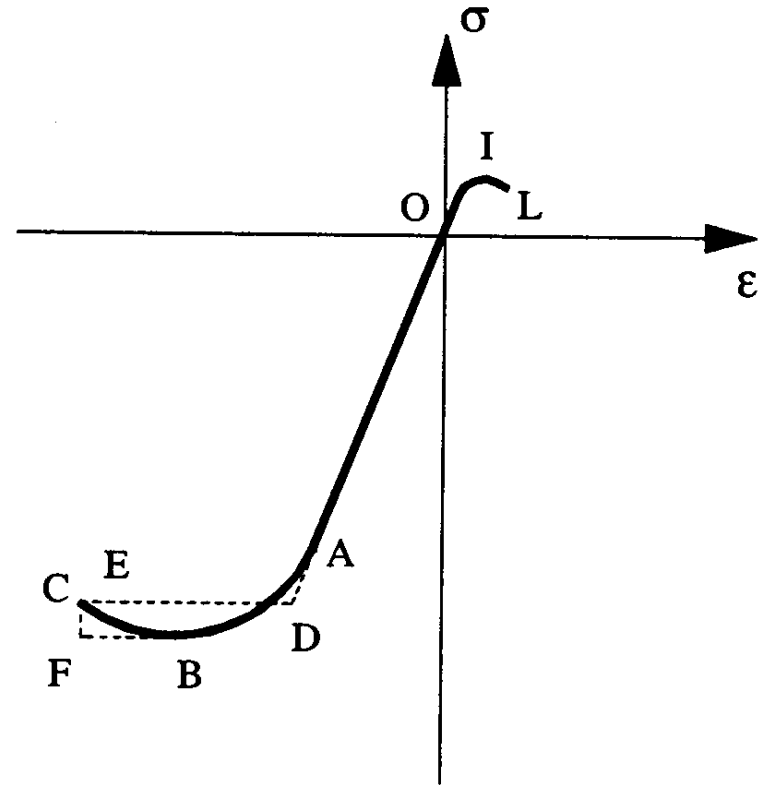


Diagramma sperimentale sforzo-deformazione per una muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

La prova a trazione e compressione della muratura (2/3)

- Nel quadrante delle trazioni:
 - Un breve tratto OI lineare;
 - Il punto I, che fornisce la massima tensione per fratture, cioè la tensione di rottura a trazione, σ_{rt} ;
 - Un tratto IL appena accennato, con sforzi decrescenti.

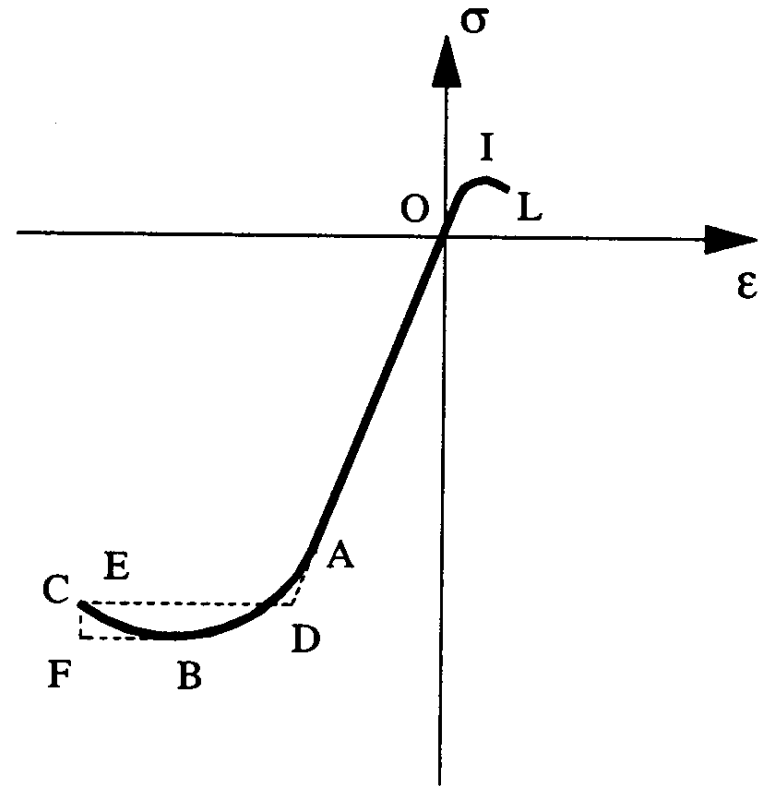
Diagramma sperimentale sforzo-deformazione per una muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



La prova a trazione e compressione della muratura (3/3)

- In termini di deformazioni:
 - Un tratto OA con deformazioni elastiche reversibili;
 - Un tratto AC con deformazioni anelastiche irreversibili ;
 - Il punto C dove si ha la massima deformazione (cioè la deformazione a rottura).

Diagramma sperimentale sforzo-deformazione per una muratura.
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



Modellazione del comportamento a compressione della muratura (1/4)

È difficile rappresentare globalmente il comportamento della muratura: nella pratica ingegneristica, trascurando il comportamento a trazione, ci si limita a rappresentare in modo semplificato con uno dei modelli seguenti il comportamento compressione:

Modello elastico lineare

È il modello più semplice e utilizzato: si ipotizza che lo stato di sforzo nella muratura segua il tratto OA. Risulta troppo rigido e a sfavore di sicurezza poiché non tiene conto né di una tensione massima (punto B), né di una limitata capacità di deformazione (punto C).

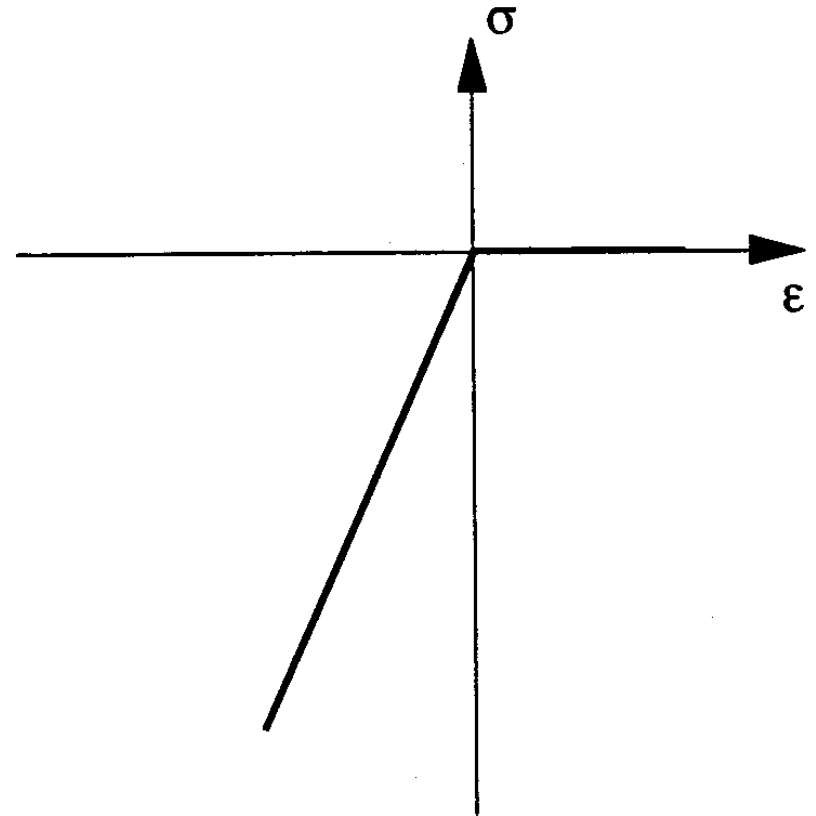


Diagramma sforzo-deformazione elastico lineare riferito a un materiale ideale non resistente a trazione.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Modellazione del comportamento a compressione della muratura (2/4)

Modello elastico non lineare

È un modello più accurato del precedente poiché approssima il comportamento della muratura nel tratto OAB mediante un'opportuna funzione non-lineare che interpola i punti sperimentali.

Risulta preferibile rispetto al modello lineare sia perché meglio approssima il comportamento rilevato, sia perché rimuove alcune difficoltà nelle analisi numeriche (può tenere conto anche della limitata resistenza a trazione). Presenta lo svantaggio di non tenere conto di deformazioni irreversibili e non può quindi essere utilizzato per modellare gli effetti di carichi ciclici.

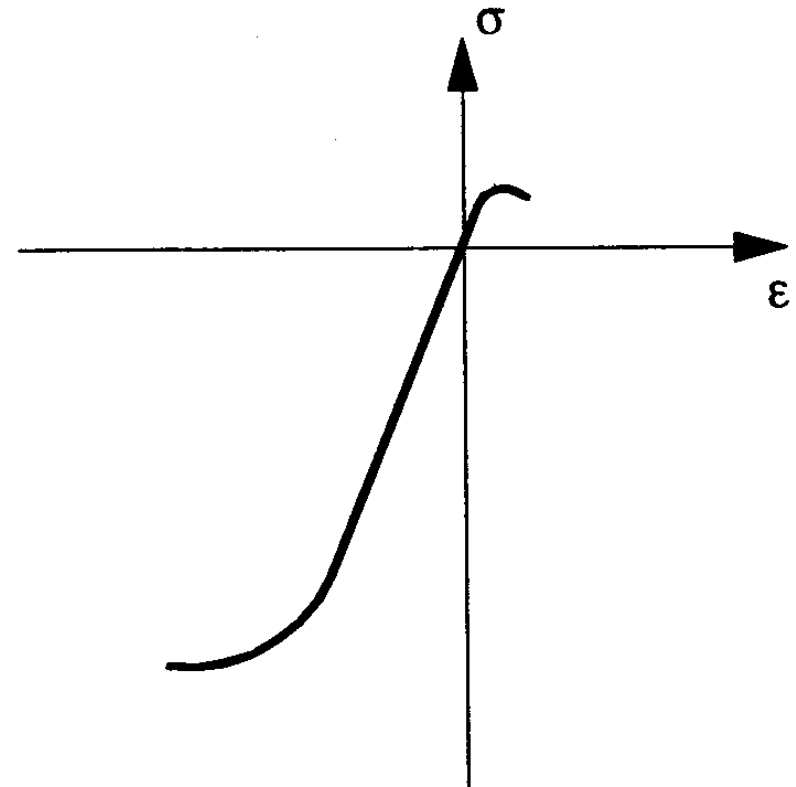


Diagramma sforzo-deformazione elastico non lineare riferito a un materiale ideale con resistenze a trazione e a compressione differenti. I percorsi di carico e di scarico coincidono.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Modellazione del comportamento a compressione della muratura (3/4)

Modello elastico perfettamente plastico

È un modello in grado di tenere conto delle deformazioni irreversibili e della limitata resistenza a compressione: prevede che un primo tratto elastico OD sia seguito da un tratto a sforzo costante DE nel quale si sviluppano deformazioni irreversibili (eventuali scarichi avvengono su un ramo parallelo a OD).

L'aspetto delicato consiste nel calibrare il punto D così da non sottostimare troppo la capacità portante della muratura e da non allontanarsi però troppo dal punto C (resistenza ultima) per non trovarsi con un modello a sfavore di sicurezza. Presenta il vantaggio di definire le condizioni di collasso della muratura e di tenere conto di deformazioni irreversibili: può quindi essere utilizzato per studiare gli effetti di carichi ciclici.

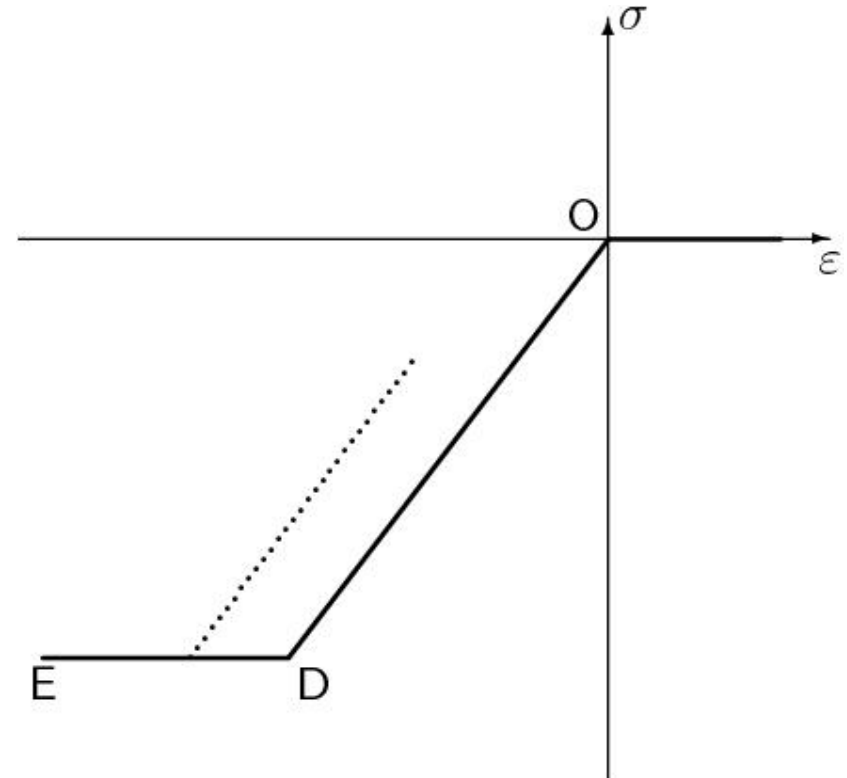


Diagramma sforzo-deformazione elastico-perfettamente plastico riferito a un materiale ideale non resistente a trazione. Il percorso di scarico, se si supera il punto D, differisce da quello di carico.

Modellazione del comportamento a compressione della muratura (4/4)

Modello elasto-plastico incrudente
perfettamente plastico

È un modello che rappresenta il legame sforzi-deformazioni mediante la spezzata OABF.

Rappresenta un'estensione del modello elastico perfettamente plastico con l'inserimento del tratto AB dove si ha sviluppo di deformazioni irreversibili a sforzi ancora crescenti.

Il modello è accettabile e fornisce risultati in accordo con la realtà sperimentale solo se il tratto BF è orizzontale o *poco* discendente; diversamente nel caso di *softening* ("rammollimento") si incontrano difficoltà numeriche e risultati poco realistici.

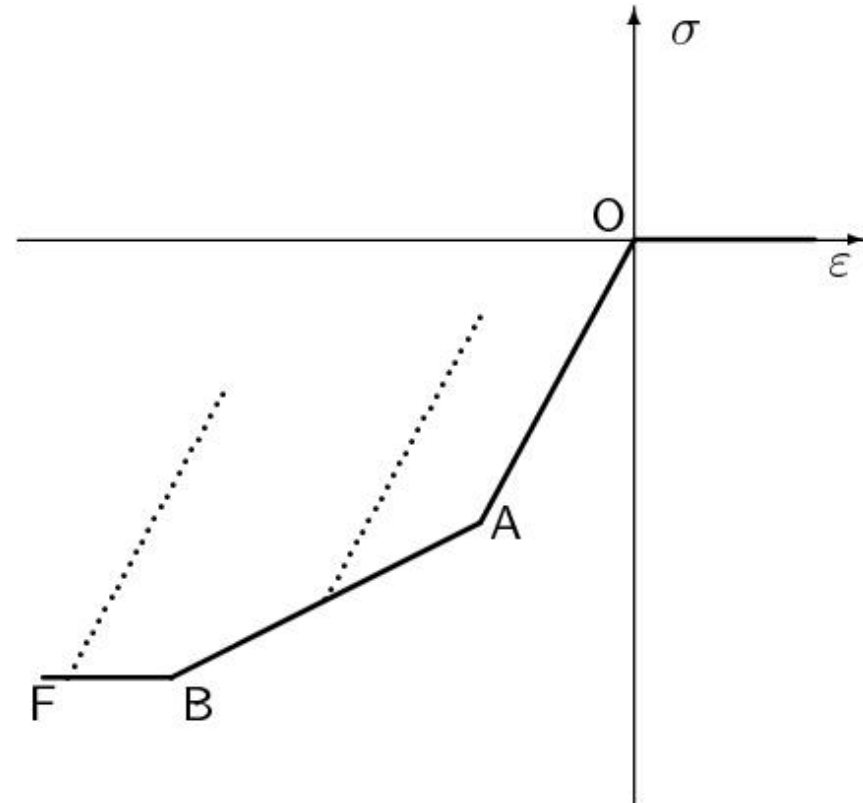


Diagramma sforzo-deformazione elasto-plastico incrudente riferito a un materiale ideale non resistente a trazione. Il percorso di scarico, se si supera il punto A, differisce da quello di carico.

Il legame costitutivo della muratura (1/6)

In condizioni di carico *monoassiale* la muratura presenta un diagramma $\sigma - \varepsilon$ di tipo fragile, caratterizzato da un valore di tensione di rottura a compressione più elevato rispetto a quello di rottura a trazione.

La tensione di rottura a trazione è non solo più bassa, ma è anche caratterizzata da un'elevata incertezza.

Per problemi nei quali il collasso è dovuto principalmente all'assenza o all'insufficienza della resistenza a trazione, si può ammettere per semplicità un diagramma elastico indefinito dal lato delle compressioni e caratterizzato invece da tensione nulla a trazione.

L'assenza di resistenza a trazione può essere individuata da una condizione di ammissibilità per le tensioni rappresentata da $\sigma \preceq \mathbf{0}$ (tensore semidefinito negativo).

La condizione $\sigma = \mathbf{0}$ è la condizione limite (o di *collasso*) del materiale: corrisponde a una situazione nella quale sono possibili deformazioni di dilatazione di ampiezza indefinita in presenza di una tensione nulla.

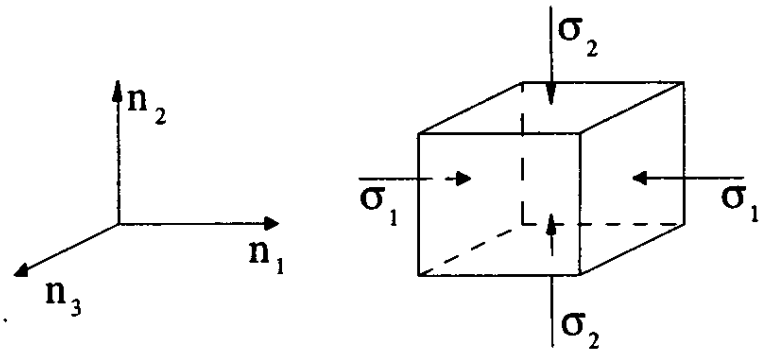
Il legame costitutivo della muratura (2/6)

In condizioni di carico *biassiale* il comportamento della muratura può essere rappresentato come un'estensione della teoria precedente, basata su queste considerazioni:

L'estensione della condizione $\sigma \leq \mathbf{0}$ richiede che sia *non positiva* la massima tensione principale;

Sia un elemento cubico di muratura (omogeneizzata) soggetto sulle facce di normale \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 alle tensioni principali di compressione σ_1 e σ_2 . Se una delle due tensioni principali è nulla (per esempio, $\sigma_1 = 0$), l'ipotesi di materiale Non Resistente a Trazione (NRT) comporta che si verifichino deformazioni di fessurazione, ε_1^f , di ampiezza indefinita secondo la direzione \mathbf{n}_1 . Similmente, se $\sigma_2 = 0$ si avranno deformazioni di fessurazione, ε_2^f , di ampiezza indefinita secondo la direzione \mathbf{n}_2 . Si ammette quindi che si abbiano dilatazioni di fessurazione ε_i^f lungo la direzione \mathbf{n}_i tutte le volte che si ha $\sigma_i = 0$.

Sforzi e direzioni principali per un materiale in condizioni di sforzo biassiale o piano.



(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il legame costitutivo della muratura (3/6)

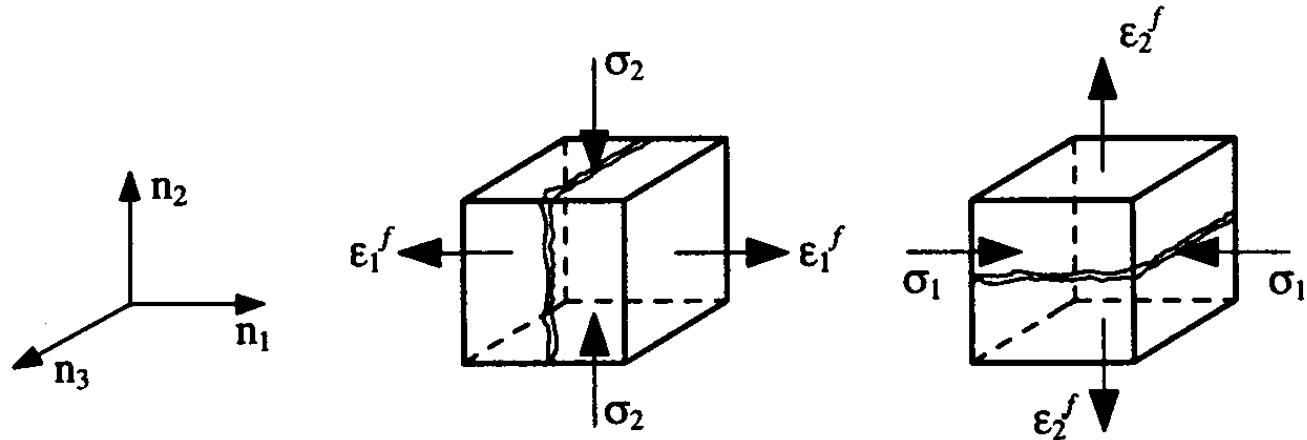
Si escludono scorrimenti di fessurazione γ_{12}^f in quanto le direzioni \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 sono direzioni principali.

Lo stato di fessurazione ε^f ha le stesse direzioni principali dello stato di tensione σ nelle condizioni limite.

Le deformazioni principali di fessurazione e le tensioni principali sono legate da una condizione di ortogonalità:

$$\sigma \cdot \varepsilon^f = 0$$

Ciò significa che se la tensione principale è nulla si ha corrispondente dilatazione di fessurazione, mentre se la tensione principale è negativa, la dilatazione di fessurazione deve essere nulla.

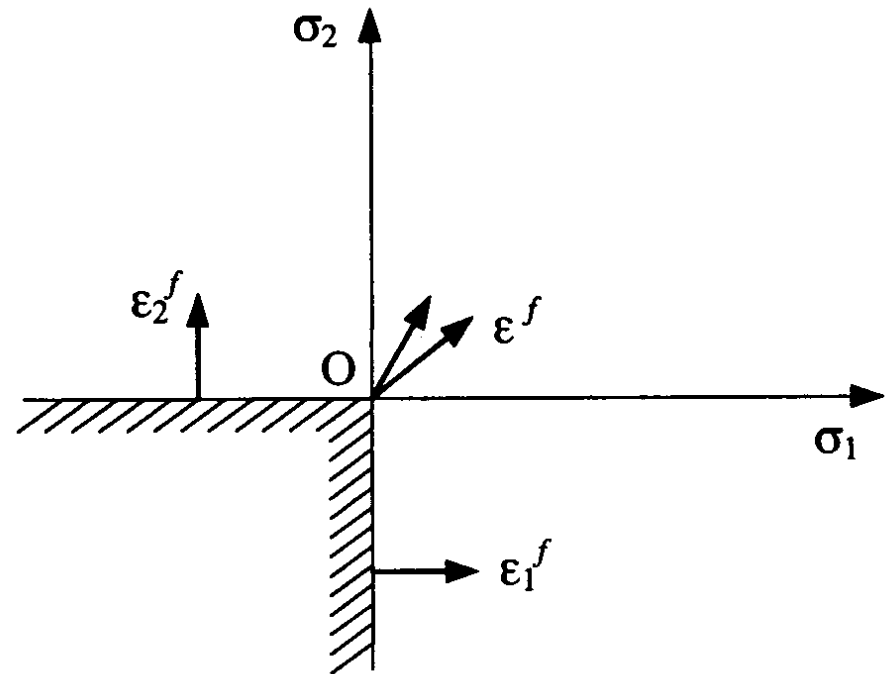


Relazioni fra sforzi principali e deformazioni di fessurazione in un materiale NRT.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il legame costitutivo della muratura (4/6)

Nel piano $(\sigma_1 - \sigma_2)$ il vettore ε^f è sempre normale alla frontiera limite $\sigma_1 = 0$ ovvero $\sigma_2 = 0$: la condizione di ortogonalità mostra l'assenza di dissipazione interna connessa alla comparsa di deformazioni di fessurazione.



Deformazioni di fessurazione riportate sulla frontiera della superficie limite nello spazio delle tensioni principali.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

Il legame costitutivo della muratura (5/6)

Il legame costitutivo per un materiale NRT come la muratura può essere definito come segue:

➤ $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^f$

➤ $\boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{0}$

➤ $\boldsymbol{\varepsilon}^f \geq \mathbf{0}$

➤ $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^f = 0$

dove \mathbf{D} è il tensore costitutivo.

Le due disequazioni sono intese nel senso che i valori principali di $\boldsymbol{\sigma}$ e di $\boldsymbol{\varepsilon}^f$ sono ristretti in segno.

Il legame costitutivo della muratura (6/6)

Per un materiale che segue il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb il rapporto fra le tensioni di rottura monoassiali a trazione e a compressione è pari a:

$$\sigma_{rc} / \sigma_{rt} = (1 + \sin\varphi) / (1 - \sin\varphi).$$

Se la resistenza a trazione $\sigma_{rt} = 0$ e la resistenza a compressione $\sigma_{rc} \Rightarrow \infty$, il valore dell'angolo di attrito interno risulta:

$$\varphi = \pi/2.$$

Si ritrova così, come caso particolare del criterio di Mohr-Coulomb il criterio di resistenza della massima tensione principale nulla.

Riferimenti bibliografici e iconografici

- R. Baldacci, G. Ceradini, E. Giangreco, *Plasticità*, Italsider: Genova, 1971.
- M. Capurso, G.A. Sacchi, "Una condizione di plasticità per solidi anisotropi", Rapporto Tecnico 512, Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Politecnico di Milano, 1970.
- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- G. Del Piero, *Le costruzioni in Muratura*, CISM: Udine, 1984.
- L. Finzi, G. Grandori, P. Locatelli, *Lezioni di Scienza delle Costruzioni*, Tamburini: Milano, 1971.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009².