

# Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari  
Corso di Laurea Magistrale in  
Architettura

A.A. 2014-2015

*Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino*

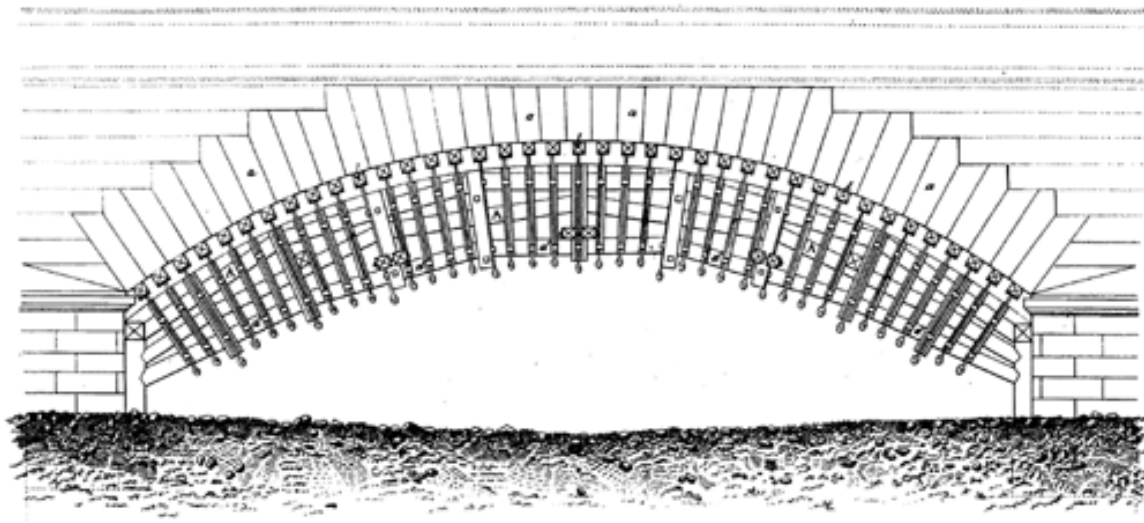
antonio.cazzani@unica.it

*<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>*

*Lezione 1 - Introduzione e richiami di statica*

# Obiettivi

- Il corso si prefigge lo scopo di fornire gli elementi metodologici di base per affrontare lo studio del comportamento statico di edifici di nuova costruzione e dell'edilizia storica. Si presentano modelli meccanici adatti a interpretare il comportamento in esercizio del materiale muratura e in grado di fornire utili indicazioni nei progetti di recupero e di restauro statico.



(Immagine tratta da Rondelet, *op. cit.*)

# Programma (1/3)

1. Fondamenti di statica: sistemi di forze (4 ore)  
Le forze. Sistemi di forze. Operazioni invariantive della Statica. Postulati della Statica. Condizioni di equilibrio. Ricerca grafica del momento. La curva delle pressioni.
2. Comportamento meccanico della muratura (6 ore)  
Il materiale muratura. Comportamento a rottura per compressione assiale. Comportamento a rottura per stati di tensione biassiale. La prova di compressione e trazione sulla muratura. Modellazione del comportamento a compressione della muratura. Il legame costitutivo della muratura.
3. Pareti murarie (4 ore)  
Pareti murarie soggette a carichi verticali: soluzioni in campo elastico. Comportamento a rottura di un blocco murario. Meccanismi di collasso di pareti murarie soggette a spinta orizzontale. Meccanismi di collasso di una parete muraria multipiano. Determinazione della spinta di collasso mediante i teoremi dell'analisi limite. Il portale in muratura.
4. Instabilità dell'equilibrio di strutture murarie (4 ore)  
Collasso per instabilità dovuta a parzializzazione della sezione. Ipotesi di limitata resistenza a compressione. Il caso del pilastro in muratura. Collasso del pilastro in muratura per rottura a compressione.

# Programma (2/3)

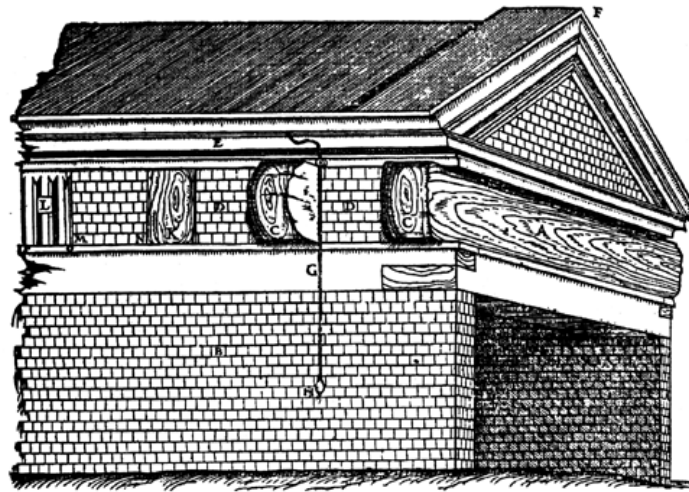
5. Statica dell'arco (8 ore)  
Prime teorie statiche dell'arco. Il modello a rottura di Mascheroni. La verifica degli archi mediante l'uso del poligono delle successive risultanti. Verifica di stabilità dell'arco. Il criterio di sicurezza di Heyman. Il metodo di Mery.
6. Le volte in muratura (8 ore)  
La volta a botte. La volta a botte soggetta a carichi verticali. Forme di direttrici più comuni. La volta a crociera. La volta a padiglione.
7. Le cupole in muratura (4 ore)  
Le membrane curve. Le cupole sottili.
8. Comportamento sismico degli edifici in muratura (4 ore)  
Il meccanismo resistente. Le forze agenti. Comportamento sismico dei maschi murari. Cenni di analisi dinamica delle torri snelle.

# Programma (3/3)

9. I dissesti statici nelle costruzioni murarie (3 ore)  
I dissesti statici. Dissesti del piano di fondazione. Costruzioni murarie con fondazione continua: cedimento centrale. Costruzioni murarie con fondazione continua: cedimento periferico. Costruzioni murarie con fondazione continua: cedimento centrale e periferico. Dissesti per rotazione. Dissesti per schiacciamento. Dissesti statici da sisma. Dissesti per degrado dei materiali. Demolizioni.
10. Sperimentazione sulla muratura (3 ore)  
Prove sui componenti. Prove sulla muratura. Prove su microelementi. Prove su macroelementi. Metodi non distruttivi.
11. Risanamento di solai e murature (3 ore)  
Solai con travi in legno. Strutture reticolari di copertura. Impiego di tiranti metallici.

# Modalità di svolgimento dell'esame

- Le esercitazioni consistono nella analisi statica di elementi strutturali in muratura inseriti in edifici storici mediante modelli di calcolo grafico ed analitico e in una relazione di approfondimento su un argomento concordato con il docente.
- L'esame consiste in una prova orale corredata da una presentazione e discussione degli elaborati delle esercitazioni.



(Immagine tratta da Rondelet, *op. cit.*)

# Bibliografia (1/2)

- a. **Riferimenti diretti:**  
R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 20092. (O)  
I.V. Carbone, A. Fiore, G. Pistone, *Le costruzioni in muratura*, Hoepli: Milano, 2001. (CFP)  
A.W.Hendry, P.B. Sinha, S.R. Davies *Progetto di strutture in muratura (II ed.)*, Pitagora: Bologna, 2002. (HSD)
- b. **Approfondimenti:**  
R. Pozzi, *La Statica grafica in architettura – Equilibrio e forma degli archi*, Progetto Leonardo: Bologna, 1991. [6]  
J. Heyman, *The stone skeleton*, CUP: Cambridge, 1995. [6,7,8]  
A. Becchi, F. Foce, *Degli archi e delle volte – Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio: Venezia, 2002. [6, 7]  
F. Iacobelli, *Progetto e verifica delle costruzioni in muratura in zona sismica (IV ed.)*, EPC Libri: Roma, 2006. [9]  
M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.

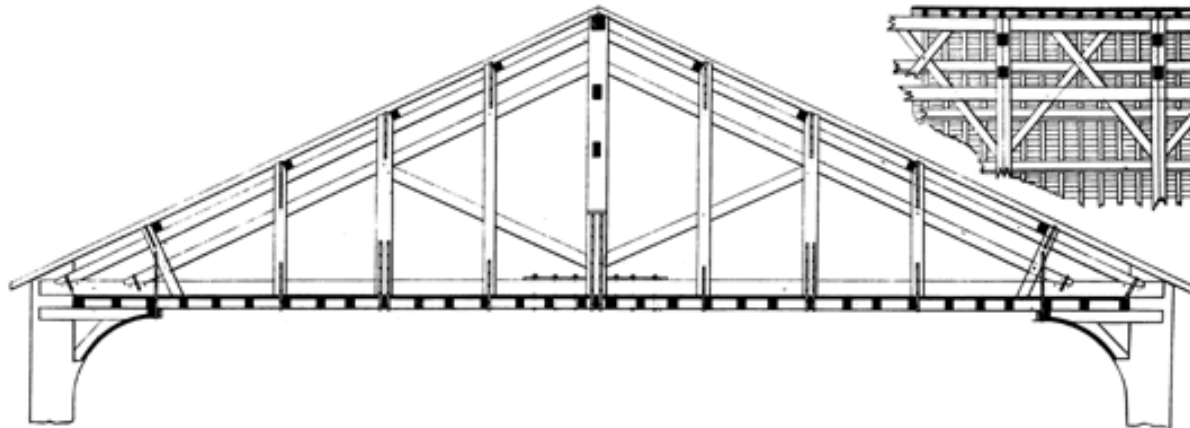
# Bibliografia (2/2)

b. Approfondimenti:

L. Boscotrecase, F. Piccarreta, Edifici in muratura in zona sismica, Flaccovio: Palermo, 2006. [9, 10, 12]

N. Tubi, M.P. Silva, Gli edifici in pietra, Esselibri: Napoli, 2003. [10, 11, 12]

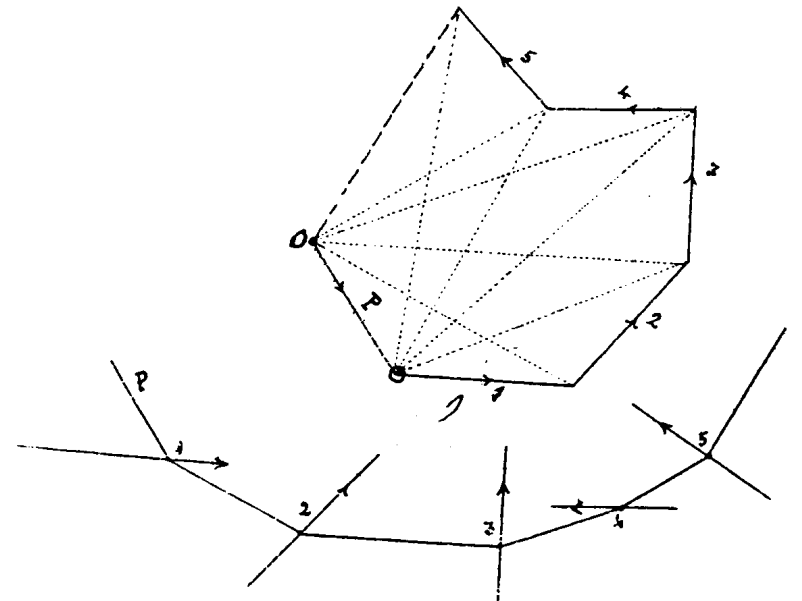
F. Cucco, T. Panzeca, M.G. Salerno, S. Terravecchia, Strutture in muratura – Le catene nel consolidamento, Grafill: Palermo, 2003. [10,12]



(Immagine tratta da Rondelet, *op. cit.*)

# Richiami di statica grafica

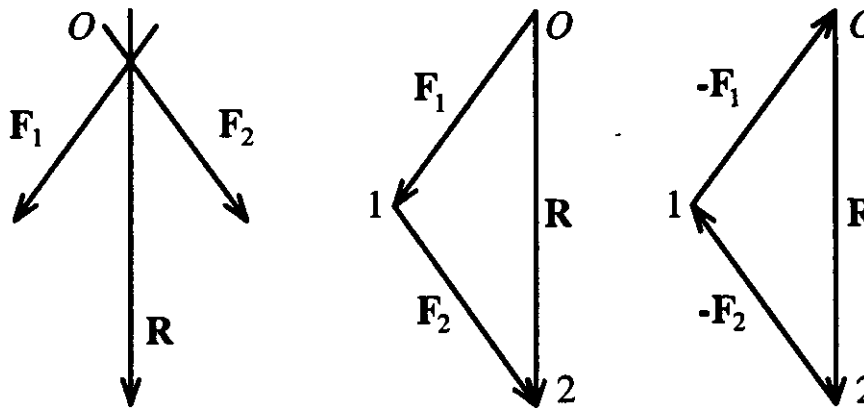
- Sistemi di forze e loro riduzione alla risultante
- Operazioni invariantive e sistemi di forze equivalenti
- Postulati della statica del corpo rigido
- Condizioni di equilibrio: le equazioni cardinali
- Poligono delle forze e poligono funicolare
- Ricerca grafica del momento
- La curva delle pressioni
- Esempi



Poligono funicolare e poligono delle forze.  
(Immagine tratta da Cremona, *op. cit.*)

# Sistemi di forze e loro riduzione alla risultante (1/2)

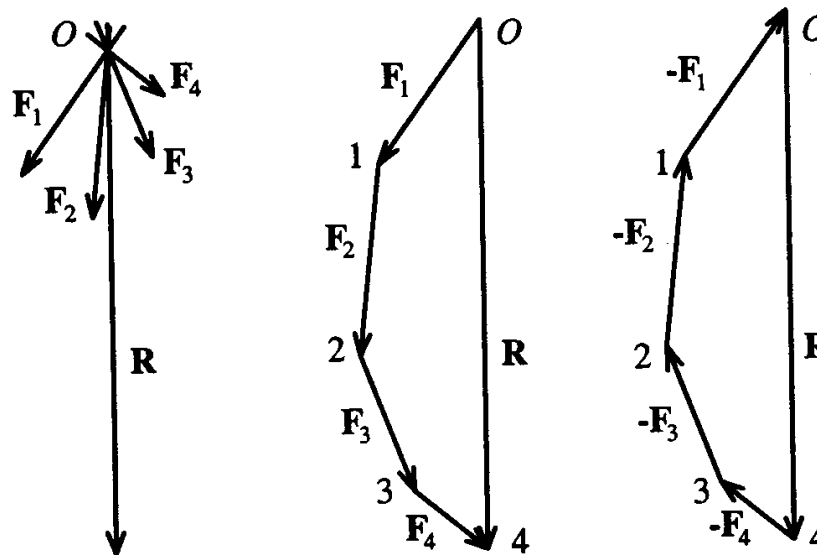
- Un sistema piano di forze  $S$  ( $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ ) applicato a un corpo rigido ammette sempre una risultante  $\mathbf{R}$  che, applicata al corpo rigido, produce gli stessi effetti prodotti dal sistema  $S$ .
- Se al sistema di forze  $S$  si aggiunge una forza eguale e opposta alla risultante,  $\mathbf{R}$ , si ottiene un sistema equilibrato, cioè in equilibrio.



Risultante, equivalenza ed equilibrio di un sistema di due forze.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Sistemi di forze e loro riduzione alla risultante (2/2)

- Tre forze,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  sono in equilibrio se e solo se:
  - Le rette d'azione sono complanari;
  - Le rette d'azione passano per uno stesso punto;
  - Il triangolo delle forze è chiuso.



Risultante, equivalenza ed equilibrio di un sistema di più forze concorrenti e complanari.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Operazioni invariantive e sistemi di forze equivalenti

- I operazione invariantiva: non si altera la condizione statica globale di un sistema di forze  $S$  se si sostituisce a una forza  $\mathbf{F}$  applicata in un punto  $P$  due o più forze ivi applicate tali che la loro somma valga  $\mathbf{F}$  (*scomposizione di una forza in un punto  $P$* ); sostituiscono più forze, tutte applicate in uno stesso punto  $P$  con la loro risultante,  $\mathbf{R}$  (*composizione di più forze in un punto  $P$* ).
- II operazione invariantiva: non si altera la condizione statica globale di un sistema di forze  $S$  se si trasporta una forza  $\mathbf{F}$  lungo la propria retta d'azione.
- Due sistemi di forze applicate,  $S_1$  ed  $S_2$  si dicono *equivalenti* se sono *ricducibili l'uno all'altro mediante sole operazioni invariantive*.
- Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi di forze  $S_1$  ed  $S_2$  siano *equivalenti* è che *abbiano la stessa risultante,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ , e lo stesso momento risultante,  $\mathbf{M}_{1(O)} = \mathbf{M}_{2(O)}$ , rispetto al medesimo polo  $O$  (arbitrariamente scelto).*

# Postulati della statica del corpo rigido

- I postulato: Non si altera l'equilibrio di un sistema di forze  $S$  sostituendo a più forze agenti in un punto la loro risultante applicata nello stesso punto  $o$ , al contrario, non si altera l'equilibrio se a una forza applicata in un punto viene sostituito un sistema equipollente alla forza data.  
*Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale libero è che la risultante di tutte le forze a esso applicata sia nulla:  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ .*
- II postulato: Non si altera l'equilibrio di un corpo rigido se si trasporta il punto di applicazione di qualsiasi forza  $\mathbf{F}$  lungo la retta d'azione della forza stessa.  
*Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi di forze  $S_1$  ed  $S_2$  siano ottenibili l'uno dall'altro con sole operazioni invariantive è che abbiano la stessa risultante,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ , e lo stesso momento risultante,  $\mathbf{M}_{1(O)} = \mathbf{M}_{2(O)}$ , rispetto al medesimo polo  $O$  (arbitrariamente scelto).*
- III postulato: Se su un corpo rigido in quiete non agisce alcuna forza, il corpo permane nello stato di quiete.
- IV postulato: Se su un corpo rigido in quiete agisce una sola forza, il corpo *non* permane nello stato di quiete.
- V postulato: Se su un corpo rigido in quiete agiscono due forze, che non siano opposte e allineate, il corpo *non* permane nello stato di quiete.

# Condizioni di equilibrio: le equazioni cardinali

- *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido libero è che siano nulli la risultante,  $\mathbf{R}$ , e il momento risultante,  $\mathbf{M}_{(O)}$  (rispetto a un arbitrario polo  $O$ ) del sistema di forze  $S$  applicate al corpo rigido:*

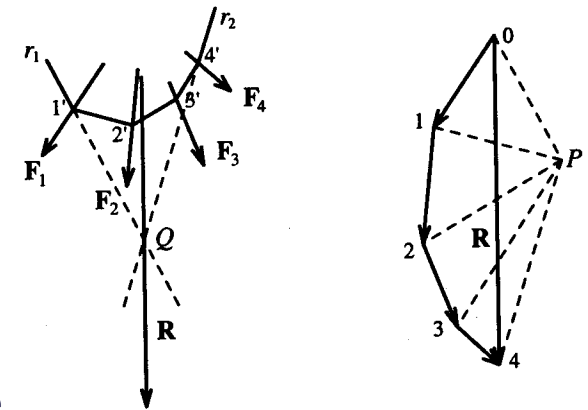
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_{(O)} = \mathbf{0}$$

- *Un sistema di forze applicato a un corpo rigido in equilibrio è equivalente al sistema nullo.*

# Poligono delle forze e poligono funicolare (1/9)

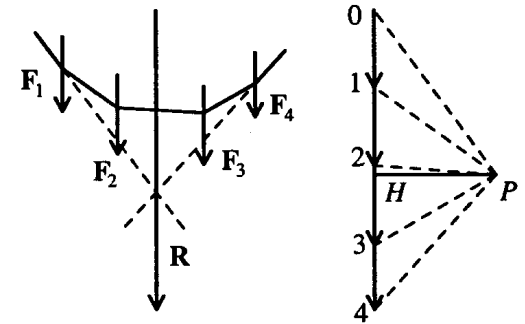
- Dato un sistema di forze  $S$ , se le si dispone in sequenza con un ordine qualsiasi si ottiene una poligonale, generalmente aperta, comunemente nota come *poligono delle forze*.
- Il lato di chiusura del poligono delle forze rappresenta la risultante  $\mathbf{R}$  del sistema di forze in modulo, direzione e verso; non permette però di individuarne la retta d'azione.
- Costruito il poligono delle forze **01234** e preso un punto  $P$  qualsiasi, si proiettano da  $P$  (polo) i vertici del poligono delle forze.
- Si traccia da un punto qualsiasi la retta parallela al raggio vettore (P-O) fino a incontrare la retta d'azione di  $\mathbf{F}_1$  in  $1'$ ; da qui si manda la parallela al raggio vettore (P-1) fino a incontrare la retta d'azione di  $\mathbf{F}_2$  in  $2'$ , e così via fino alla parallela al raggio vettore (P-4) tracciata da  $4'$ . La spezzata parallela ai raggi proiettanti è il *poligono funicolare*.
- Si prolungano i lati estremi (il primo e l'ultimo) della poligonale  $1'2'3'4'$  fino a farli incontrare: per l'intersezione passa la risultante del sistema di forze individuata dal poligono delle forze.



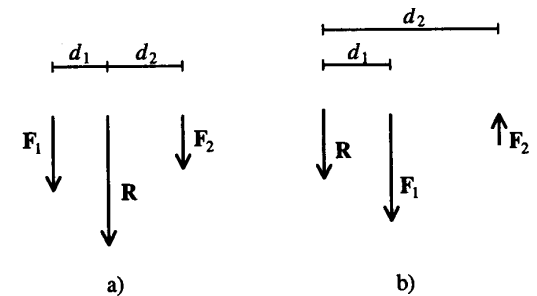
Poligono funicolare e poligono delle forze.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Poligono delle forze e poligono funicolare (2/9)

- Il poligono funicolare rappresenta la forma di una fune ideale (priva di peso, perfettamente flessibile e inestensibile) soggetta all'azione delle forze date e vincolata a due punti posti sui lati estremi del poligono stesso.
- La costruzione si basa sulla regola del parallelogramma: la forza  $\mathbf{F}_1$  viene scomposta nelle forze (P-O) e (1-P); allo stesso modo  $\mathbf{F}_2$  viene scomposta nelle forze (P-1) e (2-P); in modo analogo  $\mathbf{F}_3$  è la risultante di (P-2) e (3-P) e  $\mathbf{F}_4$  è la risultante di (P-3) e (4-P).
- Le forze (1-P) e (P-1); (2-P) e (P-2); (3-P) e (P-3) sono a due a due eguali, opposte e allineate: il sistema di forze è dunque equivalente alle sole forze (P-O) e (4-P) che, composte, danno luogo alla forza (4-O) ovvero  $\mathbf{R}$ .
- D'altra parte (P-O) e (4-P) sono rispettivamente applicate ai lati estremi del poligono funicolare e devono fornire come risultante  $\mathbf{R}$ .
- Composte queste forze nel punto di intersezione delle loro rette d'azione si ottiene la forza  $\mathbf{R}$  con modulo, direzione e verso individuati da (4-O).



Poligono funicolare e poligono delle forze.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)



Forze parallele: risultante interna (forze equiverse, caso a) ed esterna (forze controverse, caso b).

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Poligono delle forze e poligono funicolare (3/9)

- Nella costruzione del poligono funicolare che connette un sistema  $S$  costituito da  $n$  forze si possono scegliere liberamente:
  - l'ordine con il quale si considerano le forze;
  - la posizione dell'origine,  $O$ , del poligono delle forze;
  - la posizione del primo vertice del poligono funicolare;
  - la posizione del polo,  $P$ .
- Valgono le seguenti proprietà:
  - L'ordine con il quale si considerano le forze è ininfluenza nella determinazione della risultante.
  - La posizione dell'origine del poligono delle forze non influisce sul risultato.
  - La posizione del primo vertice del poligono funicolare è ininfluenza nella determinazione del risultato.
  - La posizione del polo  $P$  è ininfluenza ai fini del risultato: il teorema di Culmann assicura che *"I lati corrispondenti di due poligoni funicolari relativi a due poli distinti,  $P'$  e  $P''$  si incontrano su una retta parallela alla congiungente i poli, la retta di Culmann"*.
- Per un assegnato sistema di forze  $S$ , fissato l'ordine delle forze e la posizione dell'origine del poligono delle forze esistono  $\infty^3$  poligoni funicolari. (corrispondenti alla scelta del polo e alla posizione del primo vertice).

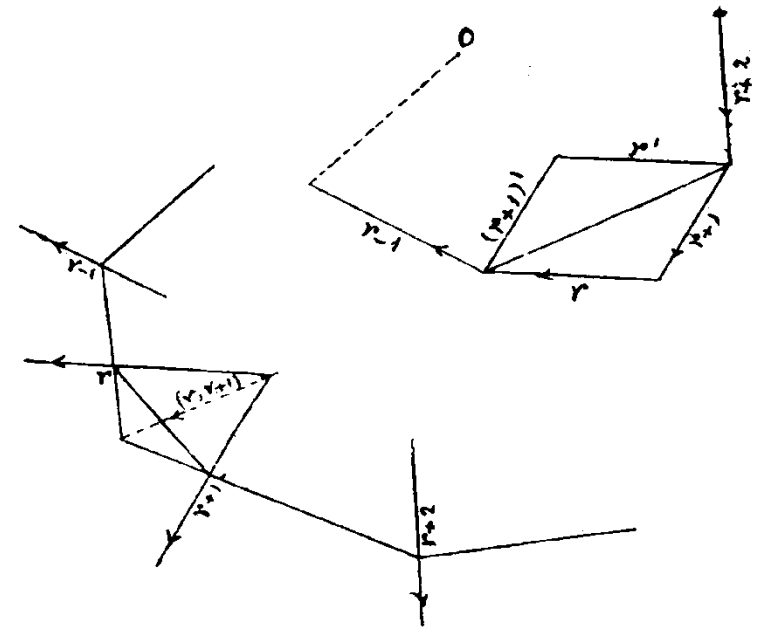
# Poligono delle forze e poligono funicolare (4/9)

Dimostrazione delle proprietà 1 (dalla trattazione di L. Cremona e K. Culmann)

"Se nel poligono delle forze si scambiano fra loro due forze successive,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}+1$ , i due contorni  $(\mathbf{r}-1)(\mathbf{r})(\mathbf{r}+1)$  e  $(\mathbf{r}-1)(\mathbf{r}+1)(\mathbf{r})'$  conducono ad uno stesso punto, dove inizia il lato  $\mathbf{r}+2$ : dunque ciò resta senza influenza sulla grandezza e direzione della risultante di un numero qualunque di forze consecutive, fra le quali si trovino  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}+1$ .

Ma anche le posizioni di queste risultanti non vengono alterate, infatti il lato  $(\mathbf{r}+1)(\mathbf{r}+2)$  del poligono funicolare deve passare per il punto in cui il lato  $(\mathbf{r}-1)(\mathbf{r})$  incontra la risultante  $(\mathbf{r})(\mathbf{r}+1)$ ; dunque lo scambio delle forze  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}+1$  non modifica la situazione dei lati successivi del poligono funicolare e siccome la posizione della risultante di un numero qualunque di forze consecutive è individuata dal punto comune ai lati esteriori del poligono funicolare, così la detta posizione non verrà alterata.

Ma dopo avere scambiato  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{r}+1$ , potremo similmente scambiare  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{r}+2$ , poi  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{r}+3$ , ecc.; cioè potremo prendere le forze in un ordine qualsivoglia senza che ne venga modificato il risultato finale (posizione, grandezza e direzione della risultante); dunque: *La risultante di più forze in un piano è del tutto indipendente dall'ordine di composizione di dette forze.*"



Poligono funicolare e poligono delle forze.

(Immagine tratta da Cremona, *op. cit.*)

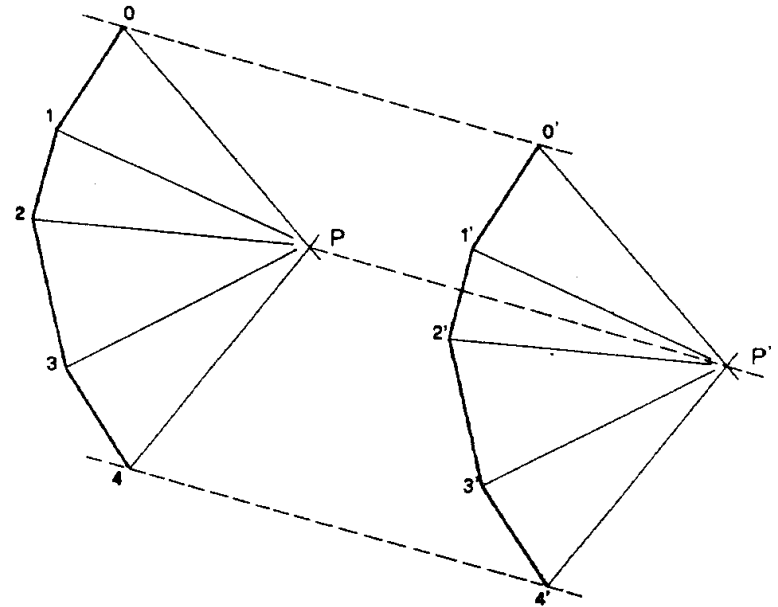
# Poligono delle forze e poligono funicolare (5/9)

Dimostrazione della proprietà 2 (dalla trattazione di L. Cremona e K. Culmann)

“Siano  $O$  e  $O'$  due origini distinte della poligonale delle forze; poiché variano solamente le origini, questo cambiamento equivale a una traslazione della poligonale in direzione parallela alla congiungente le due origini di ampiezza  $OO'$ .”

Di conseguenza il poligono resta modificato come lo sarebbe stato se lo si fosse costruito secondo il polo  $P'$  che si ottiene facendo subire a  $P$  la traslazione  $OO'$  in senso inverso, per cui il caso è ricondotto al precedente.”

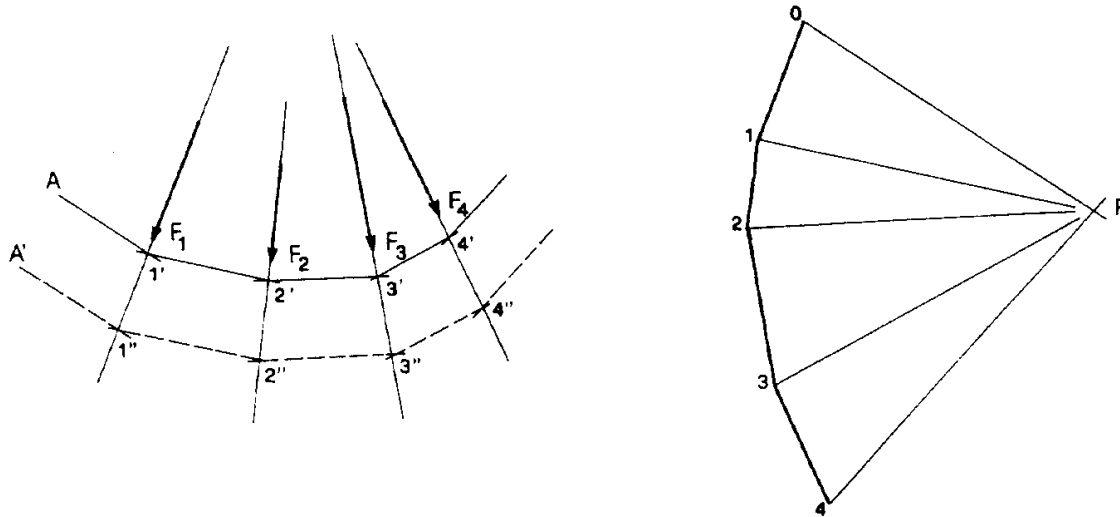
Due poligoni delle forze equivalenti.  
(Immagine tratta da Pozzi, *op. cit.*)



# Poligono delle forze e poligono funicolare (6/9)

Dimostrazione della proprietà 3 (dalla trattazione di L. Cremona e K. Culmann).

“Il passaggio da un punto **A** come origine del poligono a un nuovo punto **A'** da esso distinto e non appartenente alla parallela per **A** al raggio **PO** del fascio di connessione, ovvero da un vertice **1'** a un nuovo vertice **1''** su **P'**, ha per conseguenza che i due poligoni hanno i lati ordinatamente paralleli, trovandosi i vertici corrispondenti sempre sulle linee d'azione delle rispettive forze.”



Due poligoni funicolari equivalenti.

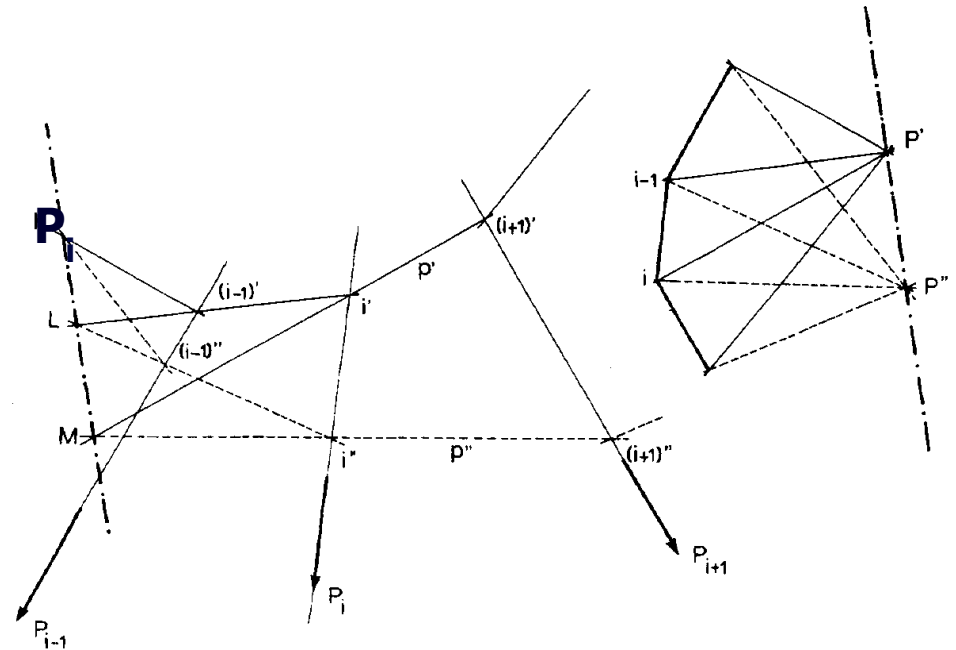
(Immagine tratta da Pozzi, *op. cit.*)

# Poligono delle forze e poligono funicolare (7/9)

Dimostrazione della proprietà 4 (dalla trattazione di L. Cremona e K. Culmann).

“Se  $p'$ :  $A'1'2' \dots n'B'$  e  $p''$ :  $A''1''2'' \dots n''B''$  sono i due poligoni funicolari relativi ai poli  $P'$  e  $P''$ , si considerino le due coppie di lati corrispondenti  $(i-1)'(i)'$  e  $(i-1)''(i)''$ ;  $(i)'(i+1)'$  e  $(i)''(i+1)''$  uscenti dai loro vertici  $i'$  e  $i''$  a partire dalla linea d'azione della forza generica  $P_i$ ; detti  $L$  e  $M$  i punti in cui concorrono i prolungamenti di queste due coppie di lati, i due quadrangoli piani completi  $LMi'i'$  e  $P'P''(i)(i-1)$  hanno, per costruzione, cinque coppie di lati/diagonali ordinatamente paralleli: per conseguenza risultano tali anche i lati  $LM$  e  $P'P''$  della sesta coppia.

Per l'arbitrarietà della scelta della forza  $P_i$ , la dimostrazione ha validità generale.”



Due poligoni funicolari equivalenti.  
(Immagine tratta da Pozzi, *op. cit.*)

# Poligono delle forze e poligono funicolare (8/9)

Il poligono funicolare di un assegnato sistema di forze  $S$ , che passi per tre punti fissati  $A, B, C$  è unico (dalla trattazione di L. Cremona e K. Culmann)

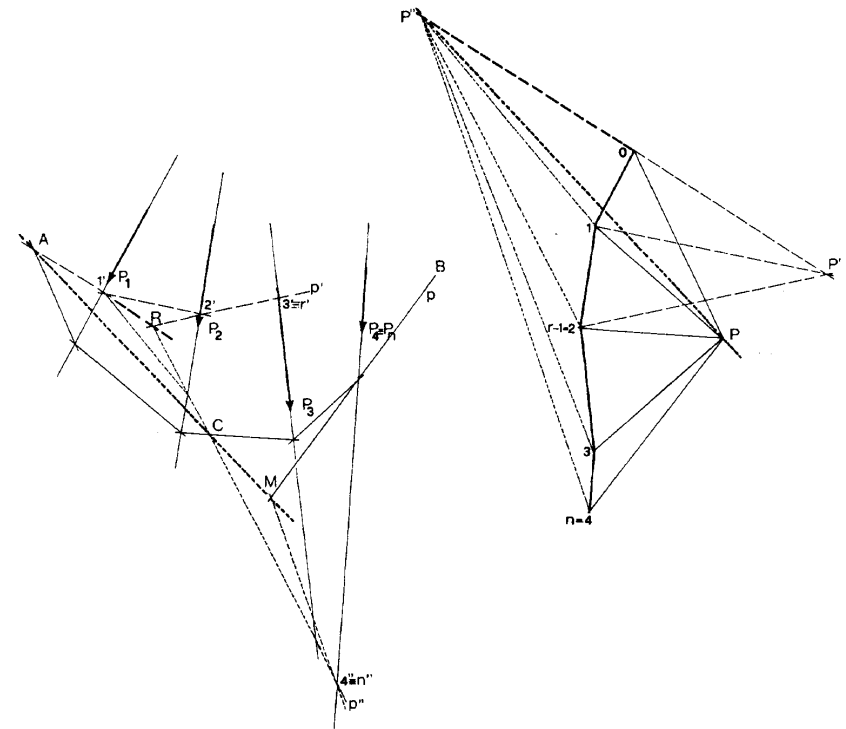
“Sia dato un sistema di forze  $S = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  tre punti,  $A, C, B$  fissati; s'imponga poi, per esempio, il passaggio del primo, dell' $r$ -esimo e dell'ultimo lato, rispettivamente, per i tre punti assegnati.

Si costruisca, relativamente a un polo  $P'$  arbitrario un primo poligono funicolare  $p' : A1'2' \dots r'$ , il cui primo lato passa per  $A$ .

Poiché, in generale, il suo lato  $r$ -esimo non passerà per  $C$ , si può arrestarne la costruzione a questo lato.

Si osservi ora che che potendo  $P'$  assumere qualunque posizione nel piano del sistema, vi sono  $\infty^2$  poligoni passanti con il primo lato per  $A$ ; di questi  $\infty^1$  passano con il lato  $r$ -esimo per  $C$ , ed è ovvio che i relativi poli stanno sulle rette del fascio di centro  $P'$  e che, considerati uno ad uno in coppia con  $p'$  hanno per rette di Culmann corrispondenti le rette del fascio di centro  $A$ .

Per costruire uno qualsiasi di questi poligoni basta riferirsi alla retta di Culmann, che coinciderà con il primo lato di  $p'$ ; se  $R$  è allora il punto di concorso della retta di Culmann e dell' $r$ -esimo lato di  $p'$ , punto che notoriamente



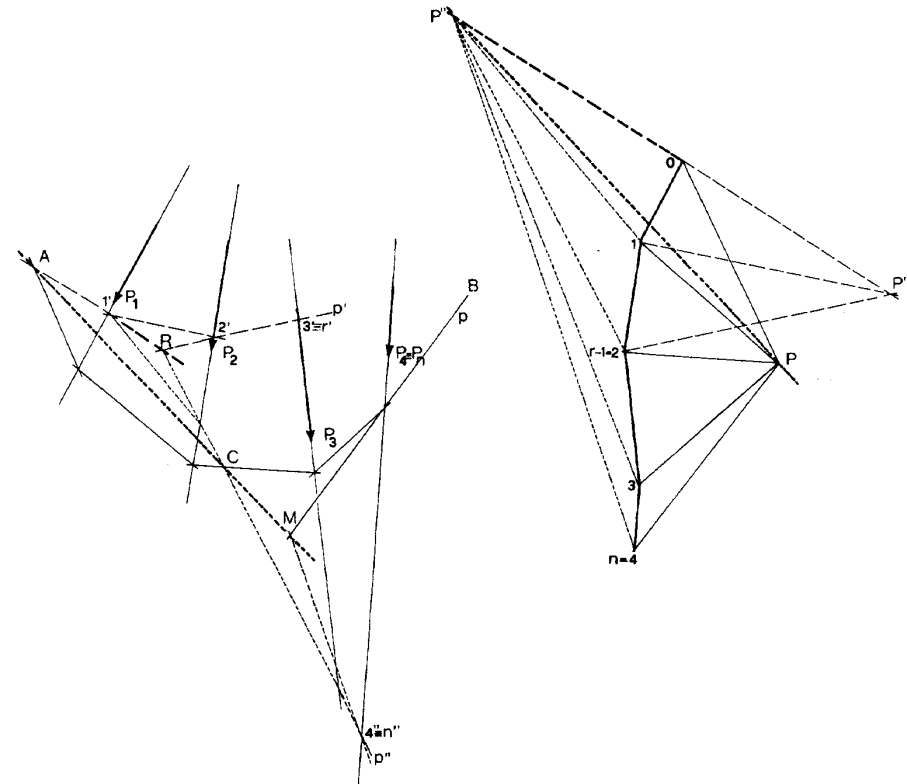
Costruzione del poligono funicolare passante per 3 punti.  
(Immagine tratta da Pozzi, *op. cit.*)

# Poligono delle forze e poligono funicolare (9/9)

appartiene alla linea d'azione della risultante delle prime  $(r-1)$  forze del sistema, la congiungente  $CR$  è il lato  $r$ -esimo di un nuovo poligono  $p''$ , il cui polo è, per il teorema di Culmann, il punto d'incontro  $P''$  del raggio proiettante  $P'O$  con la parallela a  $CR$  per il vertice  $(r-1)$  della poligonale delle forze.

Proseguendo la costruzione di  $p''$ , l'ultimo suo lato, in generale, non passerà per  $B$ ; detto allora  $p$  il poligono che ora si vuole costruire (soddisfacente tutte le condizioni assegnate), poiché come  $p''$  dovrà passare con il primo lato per  $A$  e con l' $r$ -esimo per  $C$ , esso ammette come retta di Culmann relativamente a  $p''$  la congiungente  $AC$ ; se perciò  $M$  è il punto in cui l'ultimo lato di  $p''$  incontra la  $AC$ , il lato corrispondente di  $p$  dovrà essere  $MB$ , e il relativo polo  $P$  resta determinato come intersezione delle parallele per il vertice  $n$  e per  $P''$ , rispettivamente a questo lato e alla retta di Culmann.

Grazie a  $P$  si può così tracciare il terzo poligono funicolare,  $p$ , che passerà per i tre punti  $A, B, C$ .



Costruzione del poligono funicolare passante per 3 punti.  
(Immagine tratta da Pozzi, *op. cit.*)

# Ricerca grafica del momento

Assegnato un sistema  $S$  costituito da  $n$  forze si può determinare così il momento rispetto a un polo  $O$ :

Costruito il poligono delle forze 01234, si fissa un polo  $P$  a distanza  $H$  dal vettore (4-0) che individua la risultante  $\mathbf{R}$  e si costruisce il poligono funicolare.

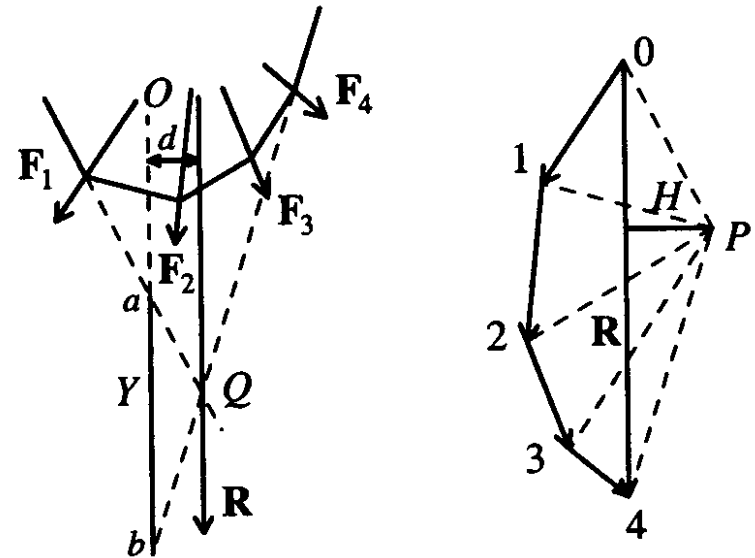
Si traccia per  $O$  la parallela alla retta d'azione di  $\mathbf{R}$  (che passa per  $Q$ , a distanza  $d$  da  $O$ ) e si determina la lunghezza del segmento  $Y$ , intercettato sulla retta dalle intersezioni con il primo e ultimo lato del poligono funicolare.

Il momento  $M$  risulta dato da  $M = HY$ .

Si ha infatti  $M = Rd$ , ma per eguaglianza dei triangoli simili  $abQ$  e  $04P$  si ha:

$$R : Y = H : d$$

e dunque  $M = Rd = HY$ .



Ricerca grafica del momento.  
(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# La curva delle pressioni

Sia data una trave ad asse curvilineo, vincolata alle estremità A e B e sollecitata da un sistema di forze S. Siano  $R_A$  e  $R_B$  le reazioni d'imposta.

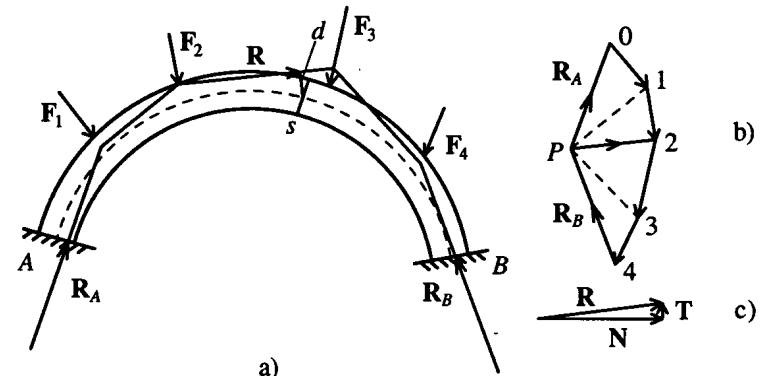
Degli  $\infty^3$  poligoni funicolari ne esiste 1 e 1 solo che:

1. Ha il primo lato parallelo alla retta d'azione di  $R_A$ ;
2. Ha il primo lato coincidente con la retta d'azione di  $R_A$ ;
3. Ha l'ultimo lato parallelo alla retta d'azione di  $R_B$ .

Le condizioni 1. e 3. fissano la posizione del polo  $P$ , la 2. impone il passaggio del poligono funicolare per un punto prefissato.

Il poligono funicolare cosiffatto, *curva delle pressioni*, è poligono delle successive risultanti (il generico lato  $R$  è retta d'azione del risultante di tutte le forze che precedono il lato, compresa  $R_A$ ) mentre l'intensità di  $R$  è data dalla corrispondente proiettante del poligono delle forze.

Il generico lato  $R$  è equivalente alle forze che nella sezione  $s$  definiscono le caratteristiche ( $N$ ,  $T$ ) della sollecitazione.

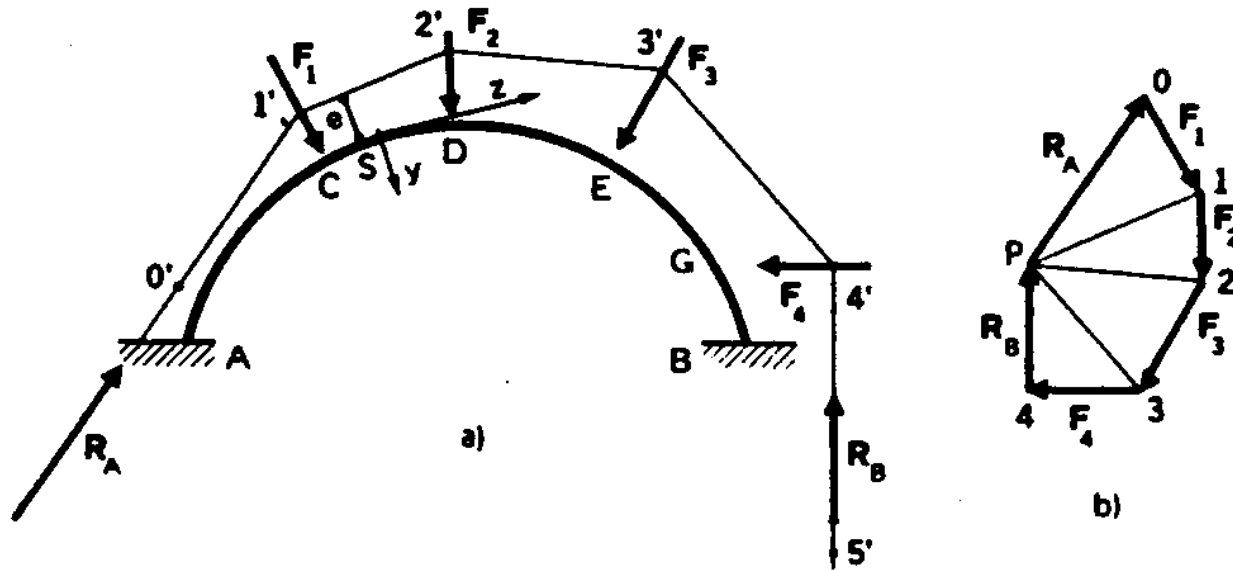


Curva delle pressioni, poligono delle forze e caratteristiche della sollecitazione.

(Immagine tratta da Olivito, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (1/10)

Il generico lato della curva delle pressioni è la retta di applicazione di tutte le forze che precedono il suddetto lato: per esempio nella sezione S del lato CD si ha che le forze applicate a sinistra di S sono la reazione vincolare  $R_A$  e la forza  $F_1$ , la cui risultante,  $R$ , rappresentata dal vettore (1-P) è applicata al lato del poligono funicolare compreso fra  $F_1$  e  $F_2$ .  
Le componenti della risultante  $R$  secondo la tangente e la normale all'asse della trave forniscono l'azione assiale,  $N$ , e tagliante,  $T$ , in S; il momento flettente,  $M$ , è invece pari al prodotto  $R \cdot e$  della risultante per l'eccentricità.  
La curva delle pressioni fornisce così una rappresentazione grafica sintetica delle condizioni statiche di una struttura.



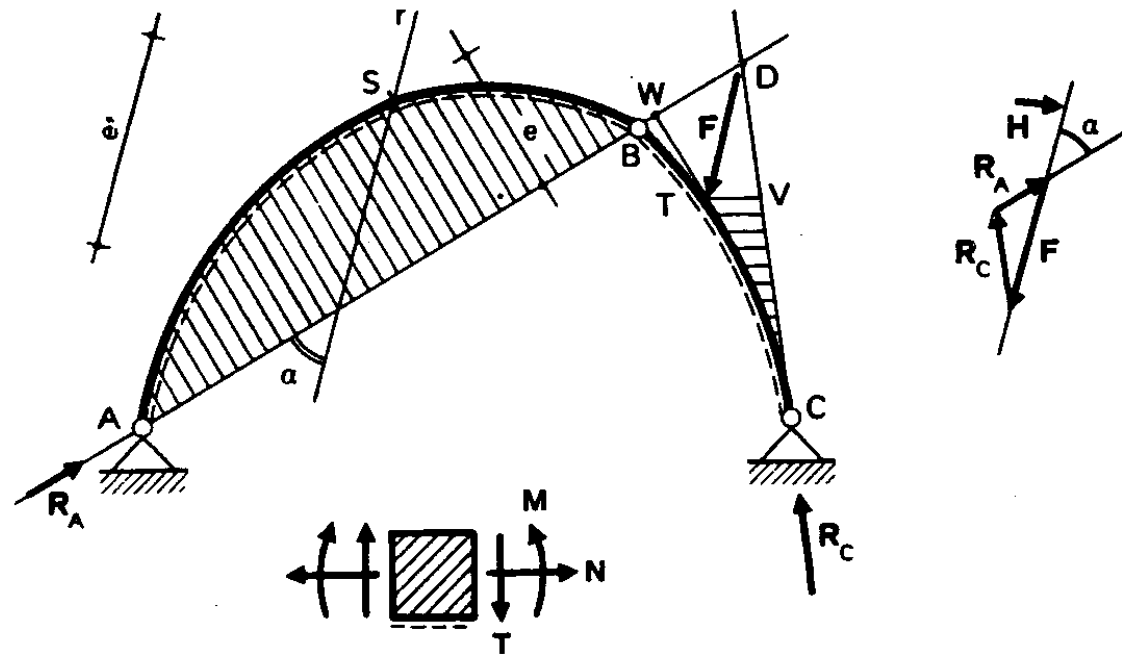
Curva delle pressioni come poligono funicolare delle successive risultanti.

(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (2/10)

Per garantire l'equilibrio del corpo rigido, le tre forze  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_C$  e  $\mathbf{F}$  devono essere convergenti in un unico punto, D; inoltre per rispettare la condizione di momento nullo nelle tre cerniere A, B, C si deve avere che la reazione  $\mathbf{R}_A$  passa per i punti A e B, e la reazione  $\mathbf{R}_C$  passa per il punto C. Essendo così noti il modulo, la direzione e il verso di una forza ( $\mathbf{F}$ ) e le direzioni delle restanti due forze ( $\mathbf{R}_A$  e  $\mathbf{R}_C$ ), la condizione che il poligono delle forze sia chiuso permette di determinare completamente le due reazioni.

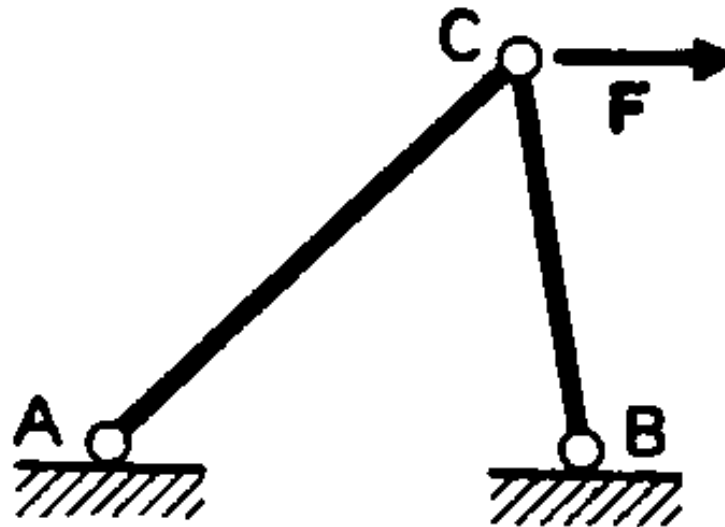
Si riconosce così che la curva delle pressioni è costituita dalla bilatera ADC. Nella generica sezione S del lato AB, la risultante delle forze applicate a sinistra di S coincide con la reazione vincolare  $\mathbf{R}_A$  e dunque le componenti della risultante  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_A$  secondo la tangente e la normale all'asse della trave forniscono l'azione assiale, N, e tagliante, T, in S; il momento flettente, M, è invece pari al prodotto  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}$  della risultante per l'eccentricità. Si nota che, a mano a mano che la curva delle pressioni si avvicina all'asse geometrico della struttura, la caratteristica flettente (indicata a tratteggio sul tratto AB) diminuisce.



Curva delle pressioni di un arco a 3 cerniere soggetto a un carico concentrato.  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

## Curva delle pressioni: esempi (3/10)

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel precedente esempio, si conclude che le tre forze  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_B$  (cioè le 2 reazioni dei vincoli A e B) e  $\mathbf{F}$  devono passare tutte per uno stesso punto (il punto C), per garantire l'equilibrio del corpo rigido. Inoltre per rispettare la condizione di momento nullo nelle tre cerniere A, B, C si deve avere che la reazione  $\mathbf{R}_A$  passa per i punti A e C, e la reazione  $\mathbf{R}_B$  passa per i punti B e C. La curva delle pressioni risulta così costituita dai due tratti AC e CB: coincide pertanto con l'asse geometrico della struttura. Ciò indica che l'azione tagliante è nulla, e non vi è azione flettente: la struttura risponde ai carichi solo mediante azione assiale.



Curva delle pressioni di una struttura reticolare soggetta a un carico concentrato.

(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

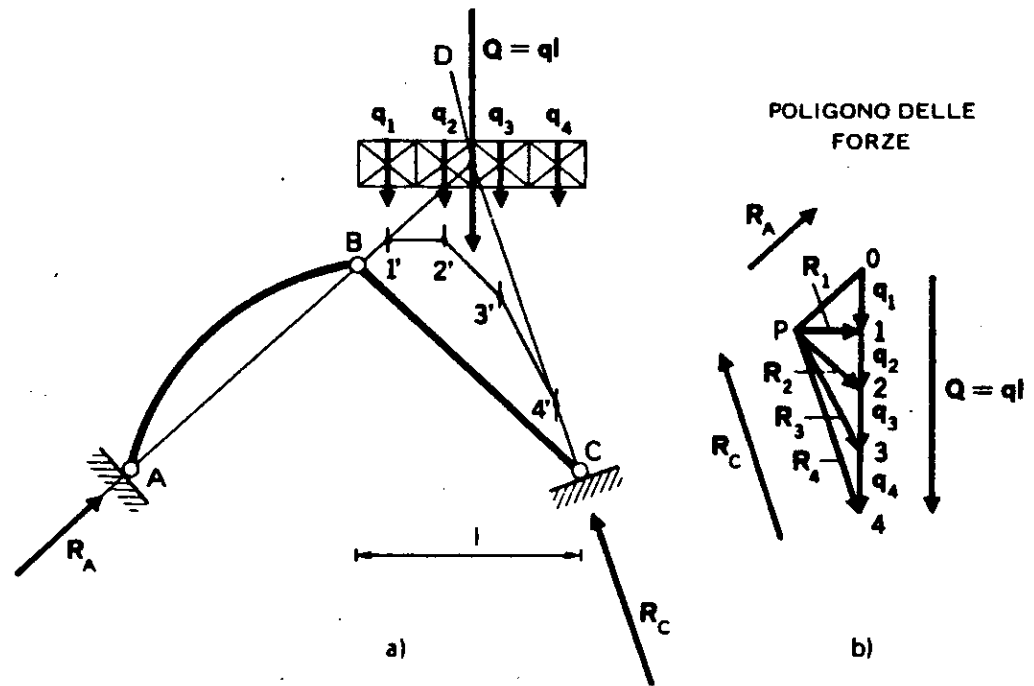
# Curva delle pressioni: esempi (4/10)

Se in luogo del carico distribuito  $q$  agisse il carico concentrato  $Q = q \cdot l$  si concluderebbe, con considerazioni analoghe a quelle svolte nei precedenti esempi, che la curva delle pressioni sarebbe costituita dalla spezzata ABDC.

Tuttavia, poiché sulla trave BC agisce il carico distribuito  $q$ , occorre tenerne conto con una opportuna modifica della parte BDC della spezzata.

Se si suddivide il carico distribuito in quattro parti e si valutano le corrispondenti risultanti parziali  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , si giunge a costruire la corrispondente poligonale A1'2'3'4'C. Si trova così che la risultante di  $R_A$  e  $q_1$  è  $R_1 = (1-P)$  ed è applicata nel loro punto di intersezione, 1'; analogamente la risultante  $R_2$  di  $R_1$  e di  $q_2$  è data da  $(2-P)$  ed è applicata in 2', mentre le successive risultanti,  $R_3$  e  $R_4$  sono date da  $(3-P)$  e  $(4-P)$  e sono applicate ai punti 3' e 4' rispettivamente.

Il poligono delle successive risultanti così ottenuto è quindi individuato dalla spezzata AB1'2'3'4'C.



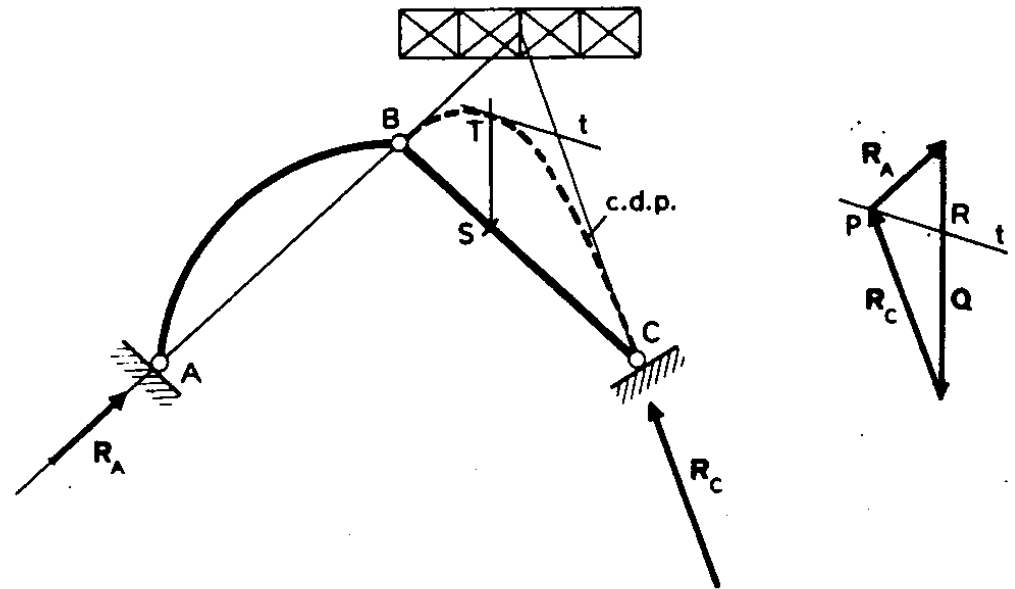
Curva delle pressioni di una struttura soggetta a un carico distribuito.  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (5/10)

Se si aumenta il numero di suddivisioni in cui si scompone il carico distribuito, aumento in corrispondenza il numero dei lati del poligono delle successive risultanti e, in corrispondenza di un numero infinitamente grandi delle suddivisioni il poligono tende al limite a una curva (in questo caso una parabola).

Questa parabola risulta tangente in B e in C alle rette di azione delle reazioni vincolari  $R_A$  e  $R_C$ .

La curva delle pressioni in presenza di carichi distribuiti può essere intesa come l'involuppo delle tangenti rappresentate dai lati del poligono funicolare (delle successive risultanti) che connettono le forze infinitesime in cui si può pensare suddiviso il carico distribuito.



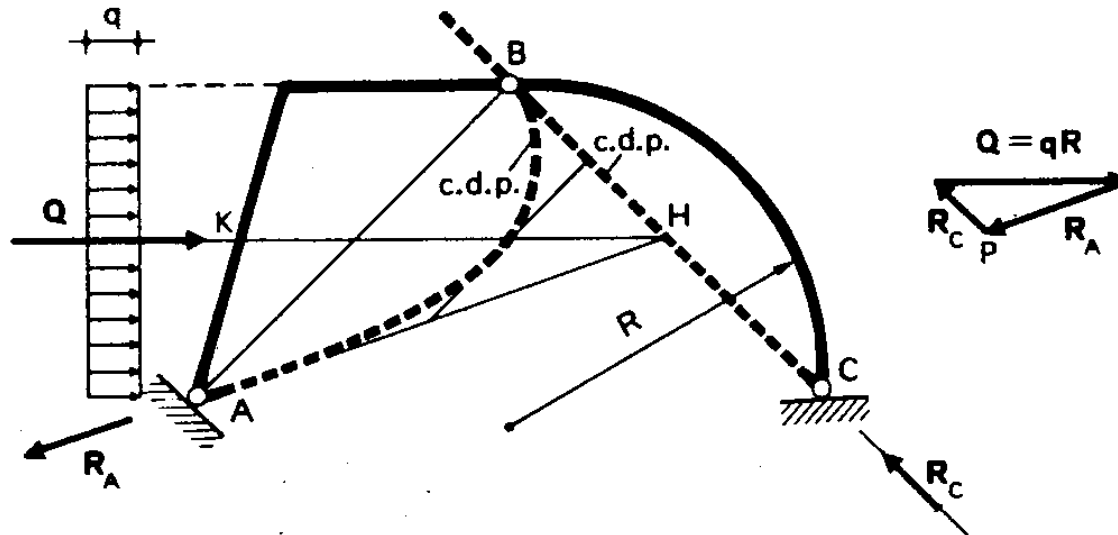
Curva delle pressioni di una struttura soggetta a un carico distribuito.  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (6/10)

La curva delle pressioni relativa alla trave curva BC coincide con il segmento BC in quanto la reazione e  $R_C$  deve passare per la congiungente le 2 cerniere. Se sulla trave piegata AKB si sostituisce il carico distribuito  $q$  con la sua risultante  $Q$  (applicata in K) si ottiene che la curva delle pressioni è data dalla spezzata AH (relativa al tratto AK) e HB (relativa al tratto KB), in quanto le tre forze  $R_A$ ,  $R_C$  e  $Q$  devono passare, per equilibrio, per lo stesso punto (H).

L'effettiva distribuzione di carico comporta che la curva delle pressioni relativa alla trave AKB sia un ramo di parabola le cui tangenti nei punti A e B sono rispettivamente AH e BH.

Il tratto parabolico della curva delle pressioni risulta quindi completamente definito da queste due tangenti.



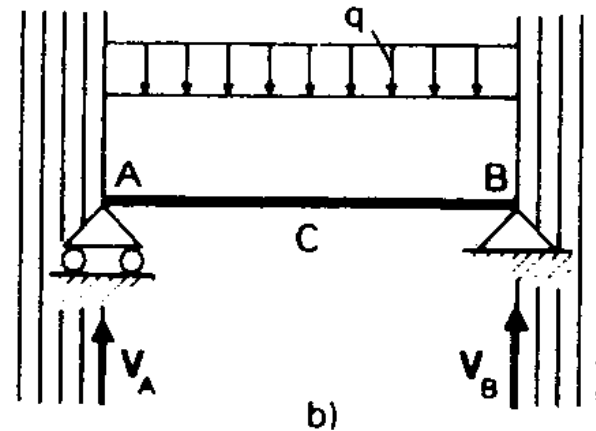
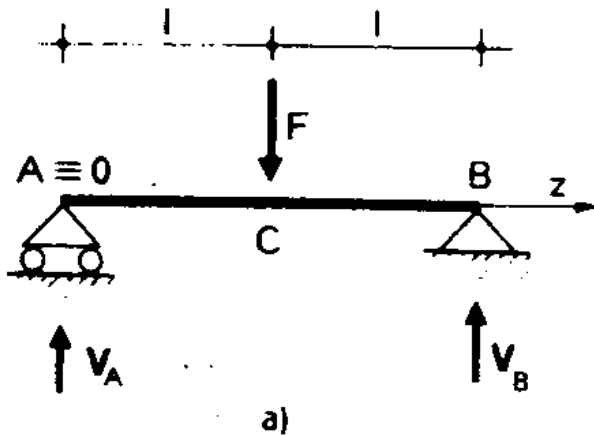
Curva delle pressioni di un arco a 3 cerniere soggetto a un carico distribuito.  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (7/10)

Nel caso (a) la curva delle pressioni (intesa come poligono funicolare delle successive risultanti) degenera nelle due rette d'azione delle forze  $\mathbf{V}_A$  e  $\mathbf{V}_B$ .

Nel caso (b) la curva delle pressioni comprende tutte le rette del piano parallele a  $\mathbf{V}_A$  e  $\mathbf{V}_B$  ed esterne al segmento AB (area indicata a tratteggio). Se si percorre la trave ad A verso C si ha infatti che la risultante delle due forze parallele e discordi  $\mathbf{V}_A$  e  $\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}$  è esterna al segmento AC e disposta dalla parte della forza di modulo maggiore (cioè di  $\mathbf{V}_A$ ); considerazioni analoghe valgono se si percorre la trave da B verso C: in questo caso fra le forze parallele e discordi  $\mathbf{V}_B$  e  $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{2l}-\mathbf{z})$  prevale  $\mathbf{V}_B$  e la risultante si trova all'esterno del segmento CB e dalla parte di B. Raggiunta la mezzeria C (sia da A che da B) si ha che la risultante è una coppia avente come retta d'azione la retta impropria.

Nei casi, come questi, in cui la curva delle pressioni degenera perde il suo significato e non dà conto immediato delle condizioni statiche della struttura; si osservi, peraltro che in entrambi i casi l'azione assiale N risulta identicamente nulla.



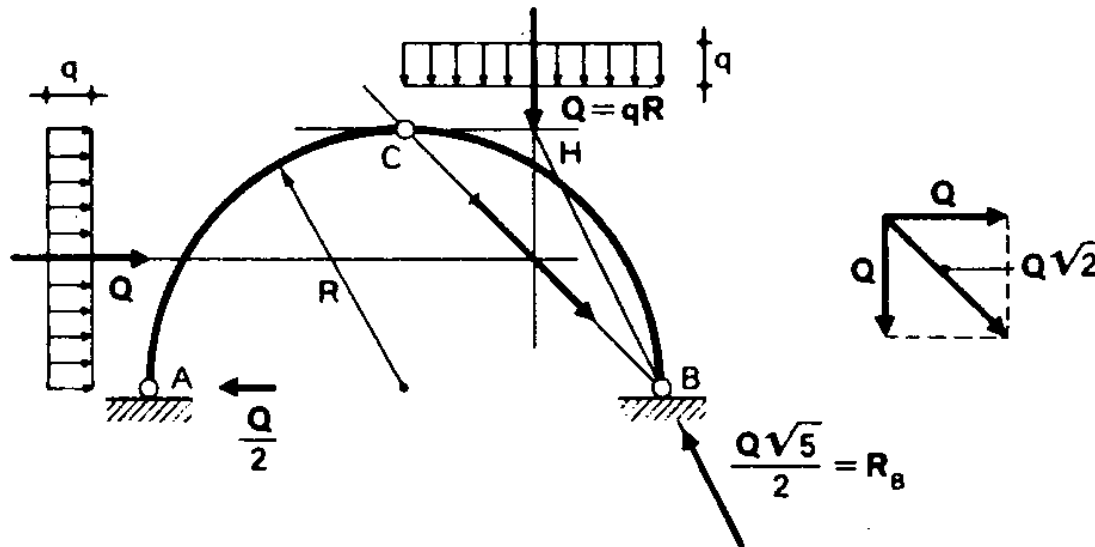
Curva delle pressioni di una trave appoggiata soggetta a carico concentrato in mezzeria (a) e a carico distribuito (b).  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (8/10)

Si osserva con considerazioni di equivalenza statica e di equilibrio che la risultante dei due carichi esterni vale  $\sqrt{2}Q$  e che la sua retta d'azione passa per la cerniera C.

Si passa poi a calcolare le reazioni vincolari, riportate in Figura:  $R_A$  è una forza orizzontale e vale  $Q/2$ ;  $R_B$  ha invece sia una componente orizzontale, pari a  $Q/2$ , sia una verticale pari a  $Q$ .

La curva delle pressioni della trave curva AC degenera in un sistema di forze orizzontali (come nel caso di una trave appoggiata soggetta a carico distribuito); quella della trave curva CB è invece costituita da un ramo di parabola avente tangente orizzontale in C e tangente diretta come  $R_B$  in B.

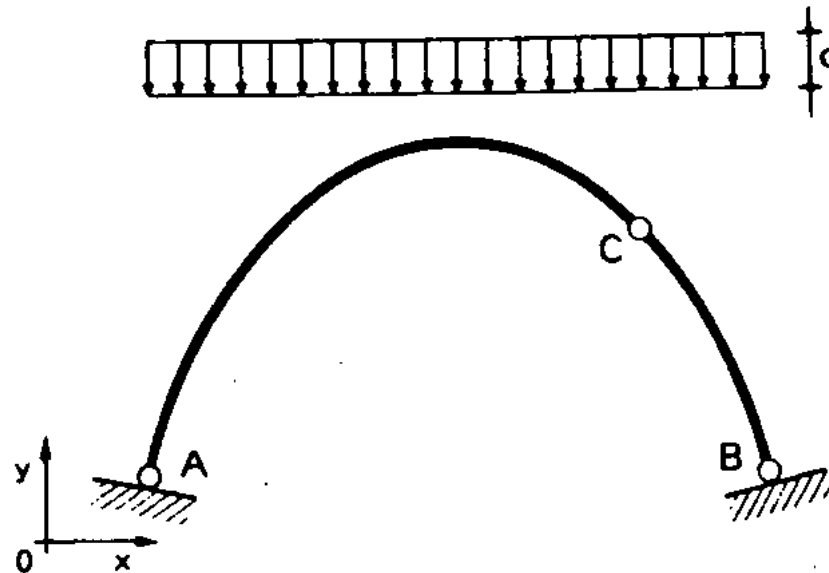


Curva delle pressioni di un arco circolare a 3 cerniere soggetto a 2 carichi distribuiti.

(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (9/10)

Poiché il carico è uniformemente distribuito, si riconosce, in base a quanto visto in precedenza, che il poligono funicolare delle successive risultanti è una parabola.  
D'altra parte la curva delle pressioni deve passare per le 3 cerniere A, B, C per garantire l'equilibrio, soddisfacendo la condizione di assenza di momento nelle cerniere.  
Per l'unicità della parabola passante per 3 punti, si riconosce che la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'arco parabolico.  
Si conclude che l'arco a 3 cerniere parabolico è la funicolare del carico uniformemente distribuito: una struttura avente tale forma sostiene il carico mediante sola azione assiale, N: il taglio (T) e il momento flettente (M) risultano in questo caso ovunque nulli.



Curva delle pressioni di un arco parabolico a 3 cerniere soggetto a carico distribuito.  
(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Curva delle pressioni: esempi (10/10)

Per ragioni di simmetria si ha che la risultante del carico esterno,  $Q = q \cdot \pi R$  è verticale e passa per il centro dell'arco.

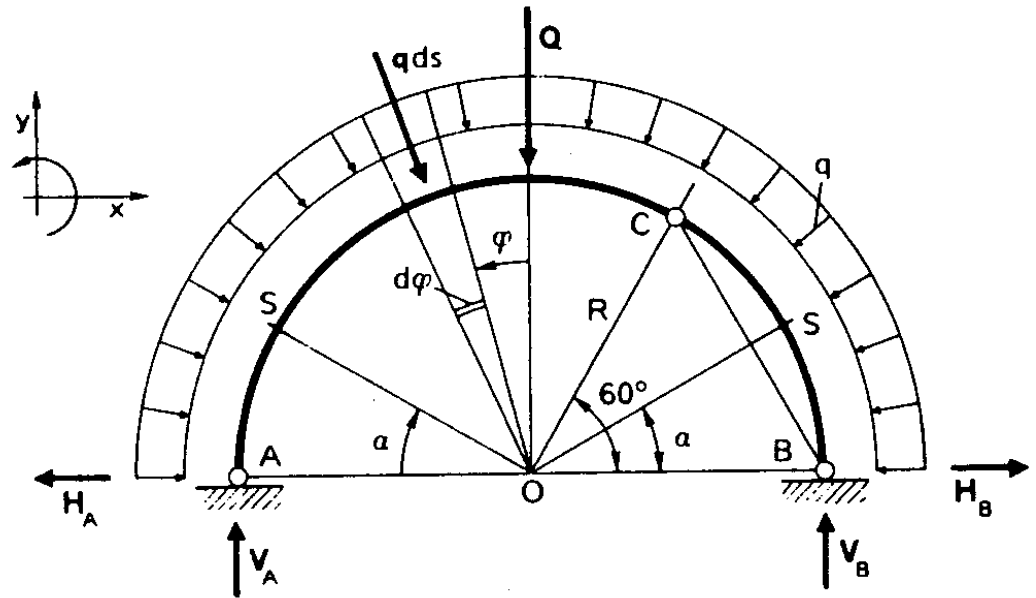
Le reazioni vincolari valgono quindi:

$$H_A = 0; H_B = 0; V_A = V_B = Q/2.$$

Se si calcolano di qui le azioni interne si trova:  $N(\alpha) = -q \cdot R$ ,  $T(\alpha) = 0$ ;  $M(\alpha) = 0$ .

Pertanto si hanno solo azioni assiali e la curva delle pressioni coincide con la linea d'asse dell'arco.

Si conclude che l'arco a 3 cerniere circolare è la funicolare del carico radiale uniformemente distribuito: una struttura avente tale forma sostiene il carico mediante sola azione assiale,  $N$ : il taglio ( $T$ ) e il momento flettente ( $M$ ) risultano in questo caso ovunque nulli.



Curva delle pressioni di un arco circolare a 3 cerniere soggetto a carico radiale uniformemente distribuito.

(Immagine tratta da Viola, *op. cit.*)

# Riferimenti bibliografici e iconografici

- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- L. Cremona, *Corso di Statica Grafica*, Ronchi: Milano, 1868-1869.
- R. S. Olivito, *Statica e Stabilità delle Costruzioni Murarie*, Pitagora: Bologna, 2009<sup>2</sup>.
- R. Pozzi, *La Statica Grafica in Architettura – Equilibrio e forma degli archi*, Progetto Leonardo: Bologna, 1991.
- J. Rondelet, *Trattato Teorico e Pratico dell'Arte di Edificare* (trad. B. Soresina sulla 6° ed. francese), Caranenti: Mantova, 1831.
- E. Viola, *Esercitazioni di Scienza delle costruzioni /1*, Pitagora: Bologna, 1993<sup>3</sup>.
- M. Como, *Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.