Statica per l’edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in Architettura

A.A. 2016-2017

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/

Lezione 15 – Richiami di dinamica delle strutture a 1 g.d.l.

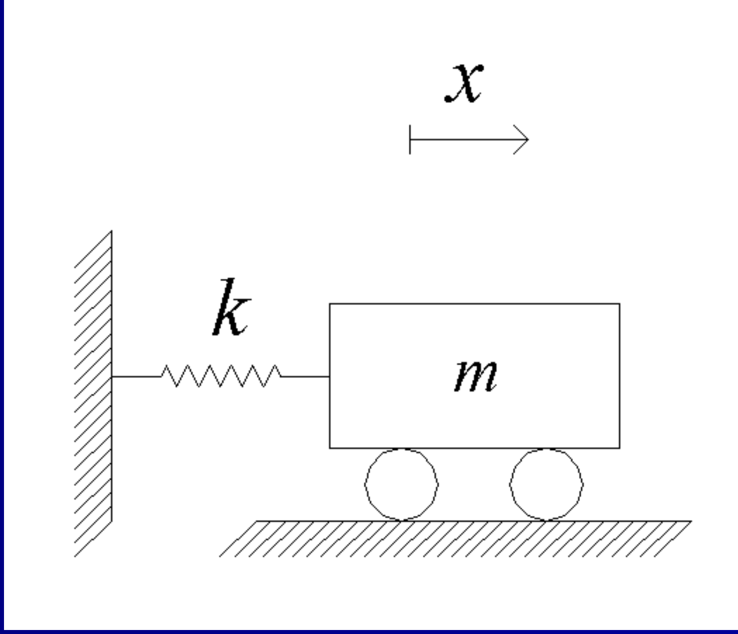
Sommario

Introduzione

- Il comportamento dei sistemi meccanici aventi un solo grado di libertà, cioè quelli per i quali è sufficiente una coordinata per descrivere completamente il moto, sono governati da una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine.
- Attraverso lo studio dei modi principali di oscillazione in alcuni casi è possibile ridurre lo studio dei sistemi a più gradi di libertà e persino quello dei continui (a ∞ gradi di libertà), allo studio di sistemi a un solo grado di libertà.
- Il modello matematico fornito dall'oscillatore a un solo grado di libertà consente una descrizione sufficientemente accurata della dinamica di strutture abbastanza semplici; può tuttavia essere utilizzato nella dinamica sismica degli edifici se i periodi delle oscillazioni naturali superiori al primo sono inferiori a 0,1 s: in questi casi può fornire indicazioni, spesso soltanto orientative, ma non per questo inutili per le applicazioni tecniche.

Oscillazioni libere non smorzate (1/2)

In figura è rappresentato il modello idealizzato del sistema oscillante a un solo grado di libertà e privo di smorzamento; è costituito da una massa *m* , che si suppone indeformabile, libera di muoversi lungo un asse ideale *x* e soggetta nel suo moto all'azione di richiamo di una molla di costante elastica *k* e priva di massa. La molla esercita sulla massa una forza elastica proporzionale alla distanza del baricentro della massa dalla sua posizione di equilibrio statico, assunto nella posizione $x = 0$.



L'equazione del moto del sistema si scrive:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

O anche, introducendo la *pulsazione naturale*, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \ .$$

La soluzione generale è:

$$x(t) = A \cdot \cos\omega_1 t + B \cdot \sin\omega_1 t \ ,$$

a cui corrisponde

$$\dot{x}(t) = -A\omega_1 \cdot \sin\omega_1 t + B\omega_1 \cdot \cos\omega_1 t \ .$$

Si osservi che la pulsazione naturale ω_1 (espressa in rad/s) è una caratteristica del sistema e ne definisce completamente le proprietà oscillanti.

Oscillazioni libere non smorzate (2/2)

Per ottenere la soluzione di un problema particolare, occorre assegnare le *condizioni iniziali* del moto, cioè specificare quali sono la posizione, x, e la velocità, $\dot{x}$, del sistema all'istante iniziale (convenzionalmente, senza ledere la generalità, si assume l'istante $t = 0$):

$$x(0) = x_0 \rightarrow x_0 = A \; ; \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x}_0 = \omega_1 B \; .$$

quindi la soluzione del problema in esame, per assegnate condizioni iniziali è:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos\omega_1 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} \cdot \sin\omega_1 t \; .$$

Si introducono alcune quantità che verranno richiamate nel seguito:

Il *periodo proprio* del sistema, T_1, espresso in s, corrispondente alla durata di un'oscillazione completa:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1},$$

la *frequenza propria* del sistema, f_1, reciproco del periodo, $f_1 = 1/T_1$, ed espressa in Hz; esprime il numero di oscillazioni complete che vengono compiute nell'unità di tempo;

l'*energia elastica*, $E = 1/2 \cdot kx^2$ e l'energia cinetica, $T = 1/2 \cdot m\dot{x}^2$.

Sostituendo l'espressione di x e di $\dot{x}$ nelle espressioni dell'energia elastica e cinetica è facile verificare che l'energia totale $E_t = E + T$ si mantiene costante; questo perché il sistema non possiede nessun elemento dissipativo.

Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (1/6)

Il sistema è soggetto all'azione di una forza F (t), variabile nel tempo secondo la legge:

$$F(t) = F \sin \omega\, t \;;$$

si tratta quindi di una forza pulsante (cioè oscillante), che è caratterizzata da una intensità massima F e da una *pulsazione*, ω , indipendente dalle proprietà del sistema e quindi della sua pulsazione naturale, ω_1.

Se una forza variabile con legge armonica agisce sul sistema l'equazione del moto vale:

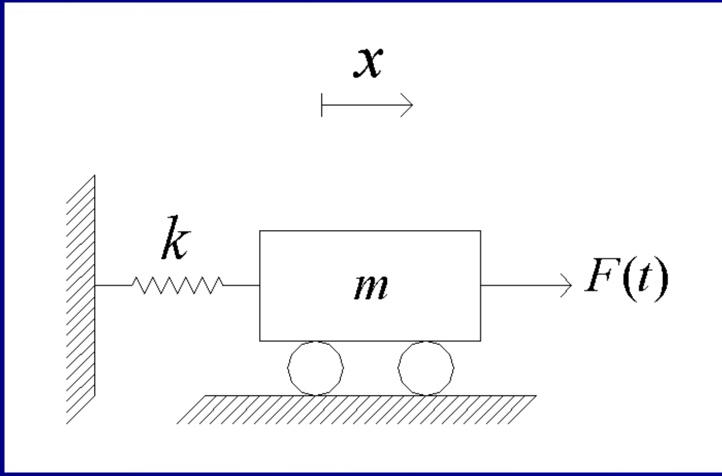
$$m\ddot{x} + kx = F \sin \omega\, t \;,$$

ovvero, in forma equivalente:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \omega_1^2 x_{st} \sin \omega\, t \;,$$

dove la quantità

$$x_{st} = \frac{F}{k}$$



ha le dimensioni di una lunghezza e può essere interpretato come il valore di spostamento che il sistema subirebbe se una forza di intensità F gli venisse applicata in modo statico.

Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (2/6)

In definitiva l'equazione del moto vale: $\ddot{x} + \omega_1^2 x = \omega_1^2 x_{st} \sin \omega t.$

La soluzione di questa equazione è data dalla soluzione dell'omogenea associata più una soluzione particolare: $x(t) = x(t)_{om} + x(t)_{part}$

La prima rappresenta l'oscillazione libera che si risente nel transitorio mentre la seconda l'oscillazione forzata a regime, l'unica presente se le condizioni iniziali del moto fossero tali da rendere nulla l'oscillazione libera o l'unica persistente se fossero presenti quegli effetti dissipativi, che verranno considerati nel seguito, che portano a una progressiva riduzione dell'ampiezza dell'oscillazione propria del sistema.

La soluzione dell'equazione omogenea associata è già nota e vale: $x(t)_{om} = A \cdot \cos \omega_1 t + B \cdot \sin \omega_1 t;$
la soluzione particolare deve soddisfare l'equazione completa e risulta (se $\omega_1 \neq \omega$):

$$x(t)_{part} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cdot x_{st} \cdot \sin \omega t$$

Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (3/6)

La soluzione dell'equazione del moto è dunque:

$$x(t) = A \cdot \cos\omega_1 t + B \cdot \sin\omega_1 t + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cdot x_{st} \cdot \sin\omega t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_1 \cdot A \cdot \sin\omega_1 t + \omega_1 \cdot B \cdot \cos\omega_1 t + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \cdot x_{st} \cdot \sin\omega t$$

Le costanti A e B possono essere determinate imponendo le condizioni al contorno e risentono della presenza della forzante:

$$x(0) = x_0 -> A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 -> B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} - \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$$

Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (4/6)

La soluzione particolare dell'equazione del moto può essere espressa in un'altra forma:

$$x(t)_{part} = N \cdot x_{st} \sin\left(\omega t - \varsigma\right)$$

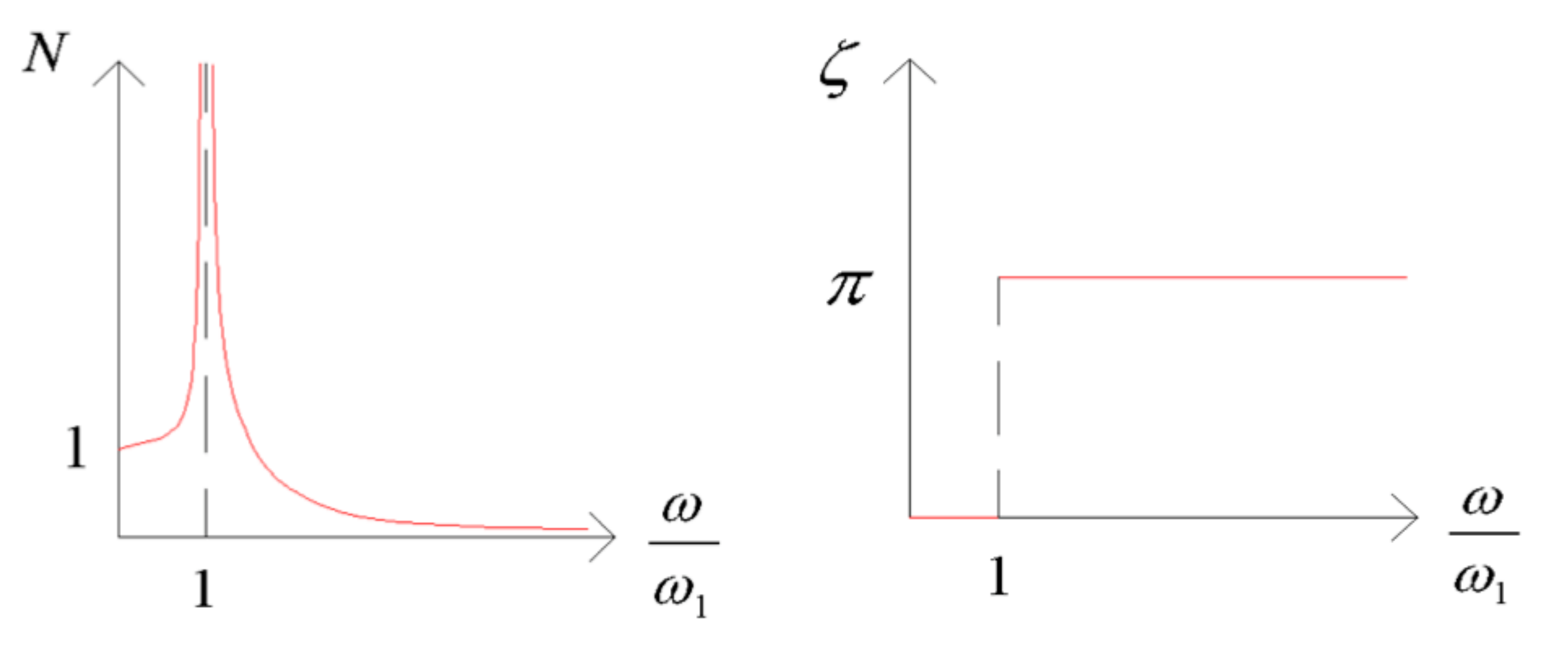
dove N rappresenta il fattore di amplificazione dinamico:

$$N = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right|}$$

ζ rappresenta la costante di fase: vale 0 per $0 < \omega/\omega_1 < 1$ e vale π per $\omega/\omega_1 > 1$
Nei due successivi grafici sono rappresentati gli andamenti dei parametri e in funzione del rapporto dal quale unicamente dipendono:

Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (5/6)

Nei due successivi grafici sono rappresentati gli andamenti dei parametri e in funzione del rapporto dal quale unicamente dipendono:



Oscillazioni forzate armonicamente in assenza di smorzamento (6/6)

Si ha che N=1 per i seguenti valori di ω/ω_1 come si può facilmente ricavare dalla sua definizione:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} = 1 -> \frac{\omega}{\omega_1} = 0$$

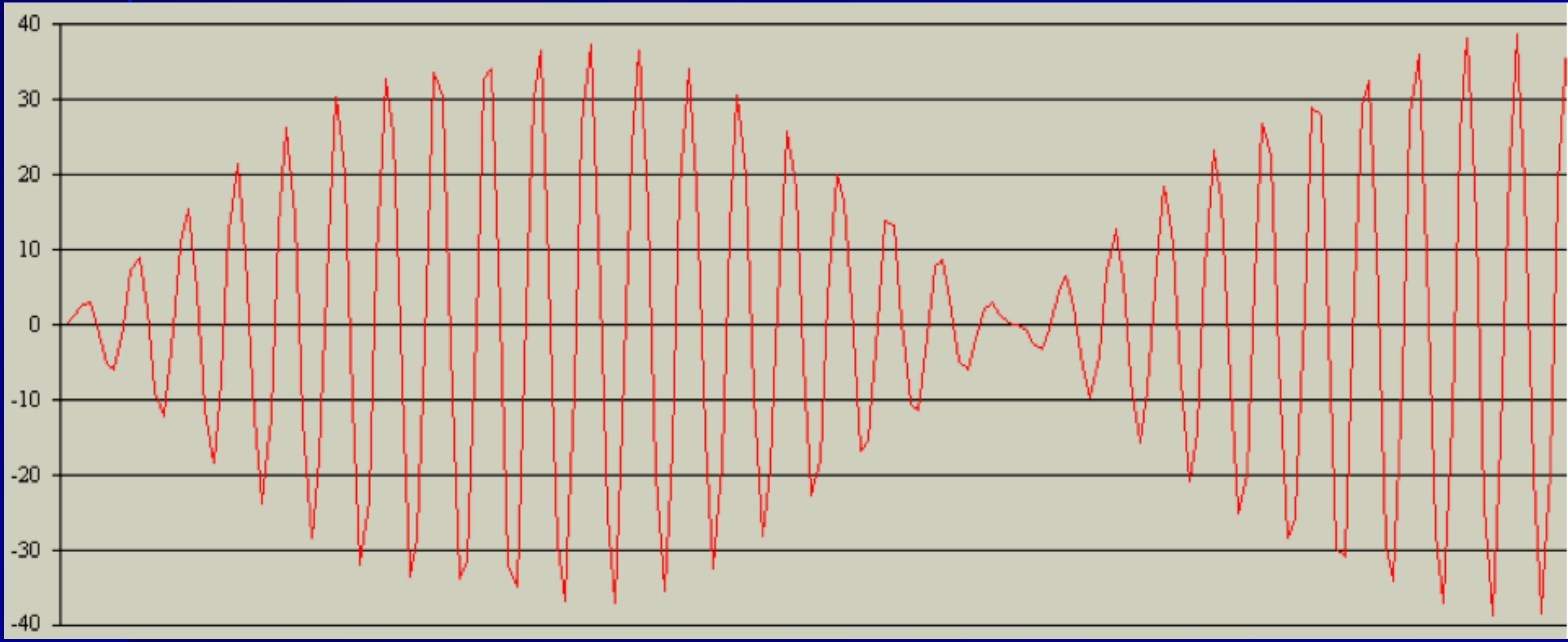
$$\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} = -1 -> \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{2}$$

Nel caso in cui la forzante abbia una frequenza simile a quella propria del sistema si hanno battimenti:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 1$$

Battimenti

Partendo da condizioni iniziali di quiete, in presenza di battimenti si ottiene un andamento simile a quello mostrato in figura:



Condizioni di risonanza (1/2)

Si può osservare che per $\omega=\omega_1$ le formule ottenute presentano una discontinuità in quanto N→∞.
Questa condizione viene detta di risonanza del sistema perché per essa, qualunque sia il valore della forza, la risposta del sistema diviene infinita cioè compie oscillazioni di ampiezza infinitamente crescente.
La soluzione in condizione di risonanza può essere calcolata partendo dalla soluzione generale:

$$\ddot{x}+x\omega_1^2=x_{st}\omega_1^2\sin\omega_1 t$$

$$x_{part}=X\,t\cos\omega_1 t$$

$$\dot{x}_{part}=X\left(\cos\omega_1 t-\omega_1 t\sin\omega_1 t\right)$$

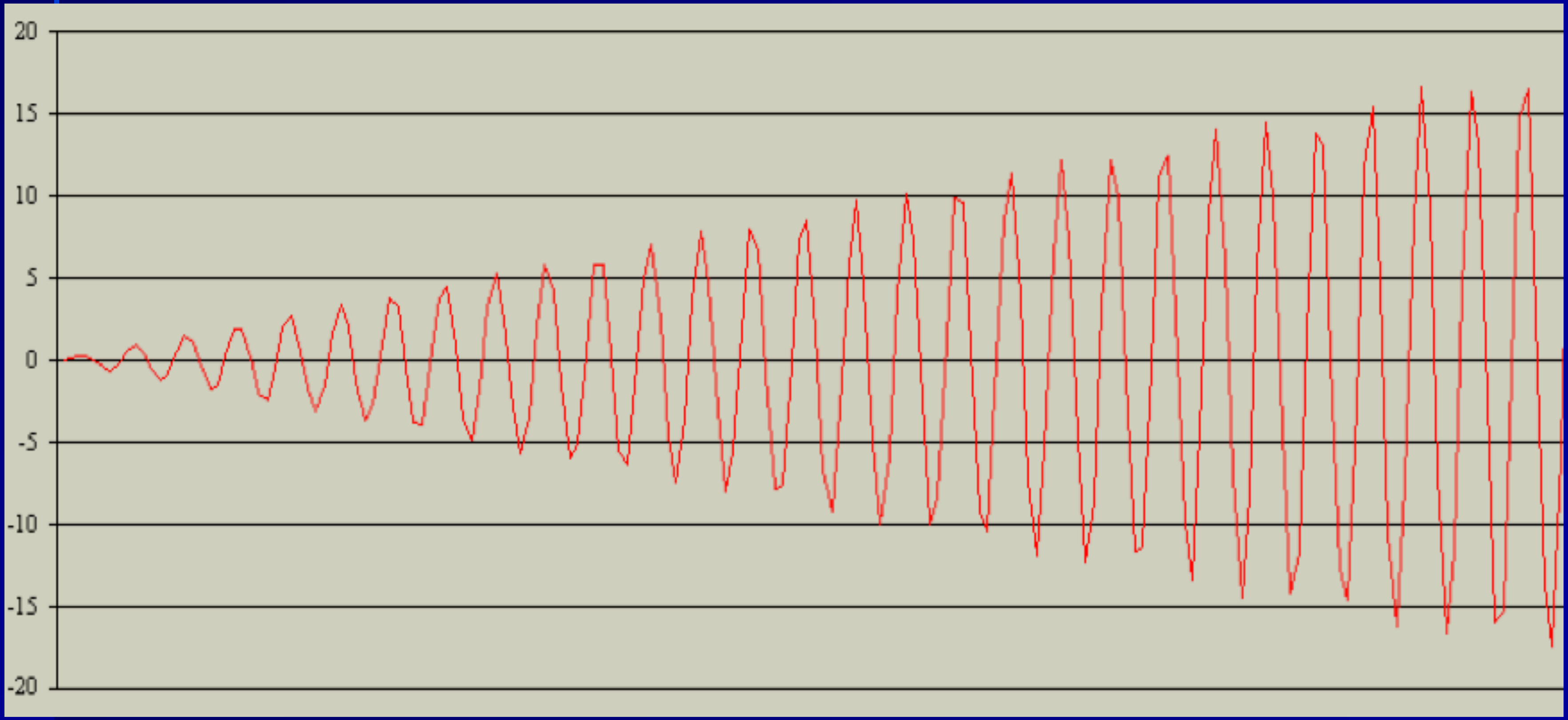
$$\ddot{x}_{part}=X\left(-2\omega_1\sin\omega_1 t-\omega_1^2 t\cos\omega_1 t\right)$$

Sostituendo nella soluzione generale si ottiene:

$$\begin{cases} X\left(-2\omega_1\sin\omega_1 t-\omega_1^2 t\cos\omega_1 t\right)+X\,t\cos\omega_1 t\,\omega_1^2=x_{st}\omega_1^2\sin\omega_1 t \\ X=-\dfrac{\omega_1}{2}x_{st} \end{cases} \rightarrow x_{part}(t)=-\frac{\omega_1}{2}x_{st}\,t\cos\omega_1 t$$

Condizioni di risonanza (2/2)

Il grafico della condizione di risonanza è riportato di seguito:



Considerazioni energetiche (1/2)

In generale il moto del sistema risulta dalla composizione di due moti armonici, rispettivamente di pulsazione ω e ω_1.
Se si parte da condizioni iniziali di quiete la risposta del sistema vale:

$$x(t)_{part} = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} X_{st} \cdot \left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_1} \sin \ \omega_1 t \right)$$

$$\dot{x}(t)_{part} = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} X_{st}\omega \cdot \left(\cos\omega t - \cos\omega_1 t \right)$$

L'energia elastica del sistema è espressa da:

$$E = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}} X_{st} \cdot \left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_1} \sin\omega_1 t \right) \right)^2$$

Considerazioni energetiche (2/2)

Mentre l'energia cinetica è rappresentata da:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}\frac{k}{\omega_1}\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}X_{st}\omega\cdot\left(\cos\omega t-\cos\omega_1 t\right)\right)^2$$

Con pochi passaggi è possibile mostrare che la potenza della forza esterna è pari alla variazione dell'energia del sistema:

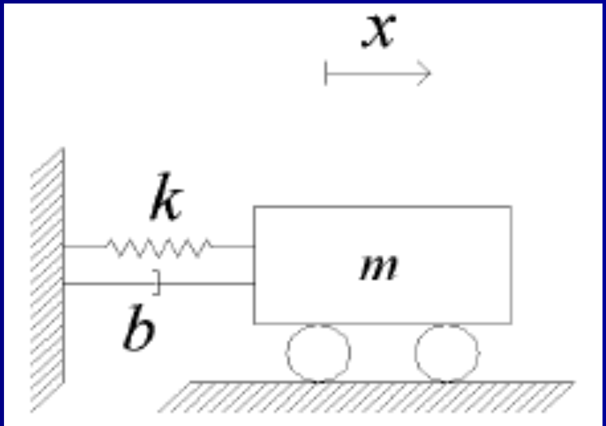
$$\frac{d}{dt}\left(T+E\right)=F\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)=\Pi$$

I sistemi ad un grado di libertà finora visti sono sistemi conservativi: se privati delle forze esterne applicate l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica, rimane costante durante il moto. Una volta in movimento, se abbandonati, compiono oscillazioni di ampiezza costante, durante le quali l'energia si trasforma continuamente da cinetica a potenziale elastica e viceversa.

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (1/9)

Nelle oscillazione delle strutture reali si hanno sempre dissipazioni di energia (es:attrito tra terreno e fondazione): non si possono avere oscillazioni di ampiezza costante senza fornire continuamente energia al sistema. Se a partire da un dato istante viene a mancare l'azione delle forze esterne applicate, le strutture compiono oscillazioni di ampiezza sempre più decrescente fino all'arresto del moto.

Nei sistemi a un grado di libertà si tiene conto di queste azioni dissipative introducendo, nel modello dinamico che li rappresenta, una resistenza al moto. Questa resistenza agisce sulla massa con verso opposto rispetto a quello della velocità e con intensità proporzionale, secondo un coefficiente di smorzamento , al modulo della velocità.



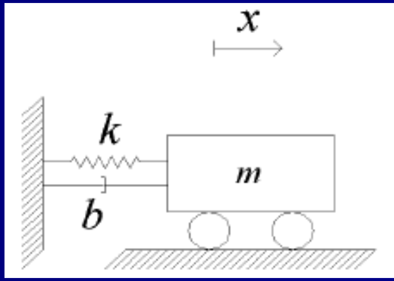
Nel modello idealizzato di figura accanto alla molla è stato introdotto uno smorzatore ideale che agisce sulla massa applicando appunto una resistenza pari a .

Lo smorzatore è spesso realizzato mediante un cilindro pieno d'olio entro cui scorre un pistone dotato di una serie di forellini. Mentre il pistone scorre nel cilindro, l'olio è forzato a passare attraverso i forellini; ovviamente, a causa della viscosità, l'olio offre una certa resistenza a passare, dipendente dalla velocità del pistone.

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (2/9)

Si può dunque esprimere la variazione di energia come segue e ricavare da essa l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt}\left(T+E\right)=F\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)-b\dot{x}\left(t\right)$$



Dove è facile distinguere tra la potenza delle forze attive e la potenza dissipata per effetto dello smorzamento. Sviluppando il calcolo si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=F\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)-b\dot{x}\left(t\right)$$

$$2\frac{1}{2}m\dot{x}\ddot{x}+\frac{1}{2}k2x\dot{x}=F\left(t\right)\dot{x}\left(t\right)-b\dot{x}\left(t\right)$$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F\left(t\right)$$

Questa equazione esprime l'equazione del moto per il sistema lineare smorzato, ad un solo grado di libertà. Essa può essere espressa in un altro modo dividendo per m:

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (3/9)

$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

Ricordando che:

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}; \quad x_{st}=\frac{F(t)}{k}$$

Si ottiene la seguente equazione del moto:

$$\ddot{x}+2\nu\omega_1\dot{x}+\omega_1^2x=\omega_1^2x_{st}$$

In cui ν rappresenta il fattore di smorzamento ed è legato al coefficiente di smorzamento dalla relazione:

$$2\nu\omega_1=b/m$$
$$\nu=\frac{b}{2\omega_1 m}=\frac{b}{2\sqrt{km}}=\frac{b}{b_{cr}}$$

Mentre b_{cr} è il valore del coefficiente di smorzamento critico.

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (4/9)

È facile mostrare che il coefficiente di smorzamento ha le dimensioni di massa su tempo mentre il fattore di smorzamento è un numero adimensionale:

$$[b][\dot{x}]=[F]=[M][L]/[T]$$

$$[b]=\left[\frac{M}{T}\right]$$

$$[\nu]=\frac{\left[\frac{M}{T}\right]}{\left[\frac{M}{T}\right]}=[-]$$

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (5/9)

Si osservi che, indicativamente per strutture in cemento armato si può assumere ν =5%;
per strutture metalliche saldate ν =4%;
per strutture metalliche imbullonate e per strutture in cemento armato precompresso ν =7%;

Il fattore di smorzamento ν ha un ruolo molto importante per il moto dell'oscillatore. Questo è facilmente dimostrabile in pochi passaggi. Consideriamo l'equazione del moto e l'omogenea associata:

$$\ddot{x}+2\nu\omega_1\dot{x}+\omega_1^2x=\omega_1^2x_{st}$$
$$\ddot{x}+2\nu\omega_1\dot{x}+\omega_1^2x=0$$

La soluzione generale è:

$$x(t)=e^{\lambda t}$$
$$\lambda_{1,2}=-\nu\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{\nu^2-1}$$

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (6/9)

In base al segno del discriminante possono essere distinti 3 casi differenti:

- $\nu^2-1>0$ smorzamento supercritico
- $\nu^2-1=0$ smorzamento critico
- $\nu^2-1<0$ smorzamento subrcritico

Per ognuno dei tre casi possono essere calcolate le radici del polinomio caratteristico e valutati i diversi comportamenti nei confronti dello smorzamento considerando la soluzione generale:

$$x(t)=C_1 e^{\lambda_1 t}+C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (7/9)

1. **SMORZAMENTO SUPERCRITICO** ν^2**>1**

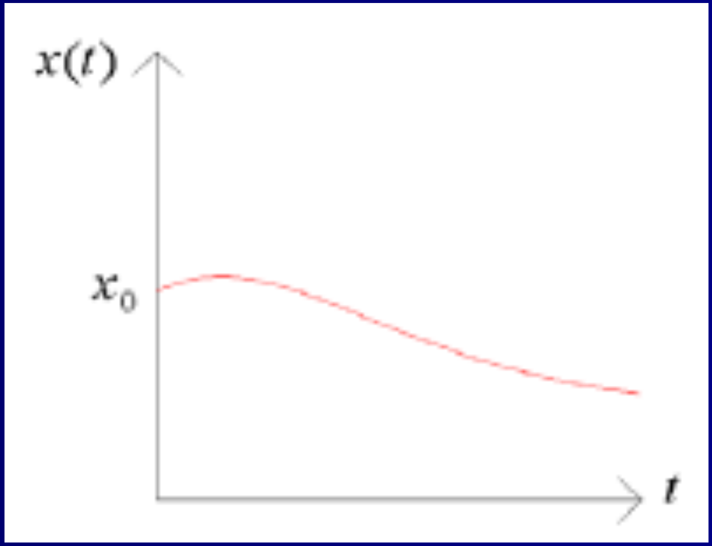
Otteniamo due radici reali e distinte:

$$\lambda_1=\omega_1\left(-\nu+\sqrt{\nu^2-1}\right)$$

$$\lambda_2=-\omega_1\left(\nu+\sqrt{\nu^2-1}\right)$$

$$x(t)=C_1e^{\omega_1\left(-\nu+\sqrt{\nu^2-1}\right)t}+C_2e^{-\omega_1\left(\nu+\sqrt{\nu^2-1}\right)t}$$

Il moto risultante non è né oscillante né periodico; descrive un sistema che decade con legge esponenziale.



Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (8/9)

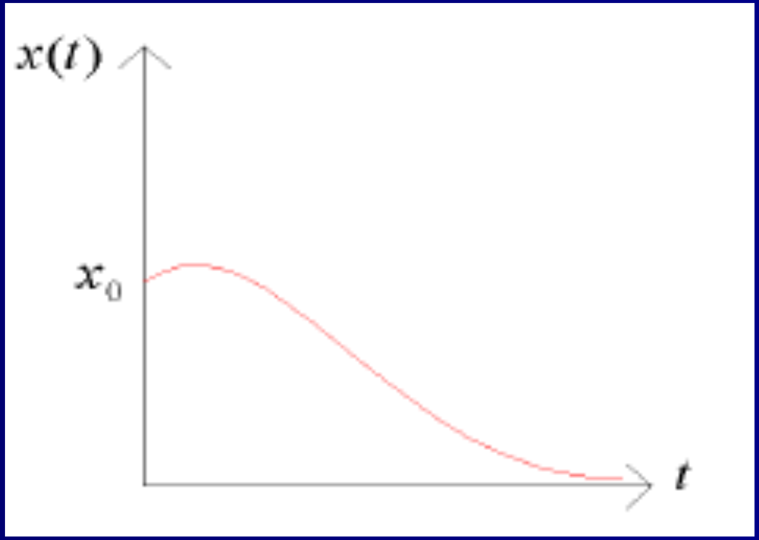
2. **SMORZAMENTO CRITICO** ν**=1**

Otteniamo due radici reali e coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\nu\omega_1$$

Il moto risultante non è oscillante, converge più velocemente dello smorzamento super critico al valore 0:

$$x(t) = C_1 t e^{-\nu\omega_1 t} + C_2 e^{-\nu\omega_1 t}$$



Oscillazioni di sistemi soggetti a smorzamento (9/9)

3. **SMORZAMENTO SUBCRITICO** ν**<1**

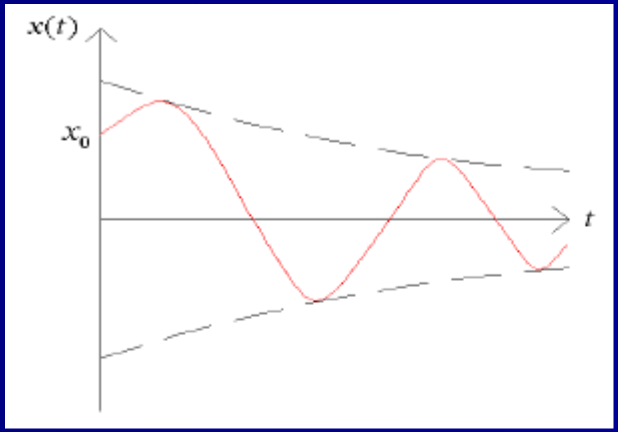
Otteniamo due radici complesse e coniugate:

$$\lambda_1 = -\nu\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}$$

$$\lambda_2 = -\left(\nu\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\right)$$

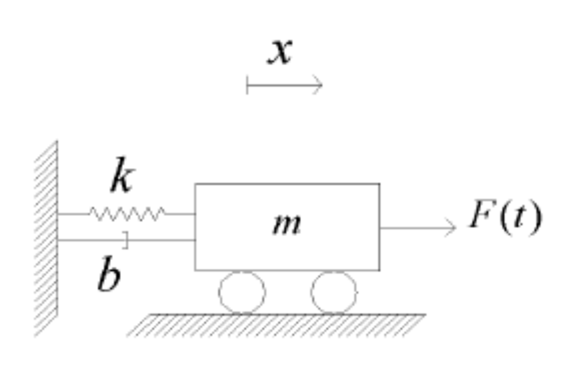
$$x(t) = C_1 e^{\left(-\nu\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\nu\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\right)t} = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

Quando lo smorzamento è inferiore al valore critico, l'oscillatore smorzato compie attorno alla posizione di equilibrio oscillazioni di ampiezza decrescente, tendente asintoticamente a zero con legge esponenziale. La funzione possiede infiniti massimi e minimi, alternativamente positivi e negativi. Tra due massimi, o minimi successivi intercorre un intervallo di tempo pari a $T=2\pi/\Omega$.
Il calcolo delle costanti di integrazione si effettua semplicemente tenendo conto delle condizioni iniziali.



Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (1/12)

Il sistema in figura è soggetto a una forza con legge di variazione armonica applicata alla massa che è soggetta all'azione di una molla e uno smorzatore viscoso.



L'equazione del moto può essere scritta in funzione del fattore di smorzamento:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\bar{F}\sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}+2\nu\omega_1\dot{x}+\omega_1^2 x=\omega_1^2 x_{st}\sin(\omega t)$$

L'integrale generale di questa equazione si può ottenere sommando all'integrale generale dell'omogenea associata una soluzione particolare. La soluzione dell'equazione omogenea associata è stata calcolata precedentemente:

$$x(t)=C_1 e^{\left(-\nu\omega_1+i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\right)t}+C_2 e^{-\left(\nu\omega_1+i\omega_1\sqrt{1-\nu^2}\right)t}=e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right)$$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (2/12)

Per ottenere la soluzione particolare è conveniente introdurre un procedimento che trova largo impiego nello studio delle oscillazioni armoniche forzate dei sistemi lineari smorzati. Si introduce quindi la variabile complessa:

$$z = y + i \cdot x$$

$$\dot{z} = \dot{y} + i \cdot \ddot{x}$$

$$\ddot{z} = \ddot{y} + i \cdot \ddot{x}$$

Ora riscriviamo l'equazione del moto in funzione della coordinata z, soggetta alla forzante: $\frac{F}{k} e^{i\omega t}$

$$\ddot{z} + 2\nu\omega_1 \dot{z} + \omega_1^2 z = \omega_1^2 \frac{F}{k} e^{i\omega t}$$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (3/12)

Risulta comodo dividere l'equazione del moto in una parte reale ed una immaginaria:

$$\ddot{x}+2\nu\omega_1\dot{x}+\omega_1^2 x=\omega_1^2\frac{F}{k}\sin(\omega t)\Rightarrow x_{part}(t)$$

$$\ddot{y}+2\nu\omega_1\dot{y}+\omega_1^2 y=\omega_1^2\frac{F}{k}\cos(\omega t)\Rightarrow y_{part}(t)$$

Se imponiamo che la soluzione particolare cercata abbia una certa forma: $z_{part}(t)=Ze^{i\omega t}$

Sostituendo nell'equazione del moto è possibile ricavare l'espressione di tale soluzione:

$$z_{part}(t)=\frac{F}{k}\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\cos(\omega t)+2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\sin(\omega t)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}+i\frac{F}{k}\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\sin(\omega t)-2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\cos(\omega t)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (4/12)

L'espressione della soluzione particolare può essere espressa tramite il fattore di amplificazione dinamico N e la costante di fase ζ.

Se al sistema è applicata una forzante di tipo sinusoidale: $F(t) = F\sin(\omega t)$

la risposta sarà:

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + x_{st}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}\sin(\omega t - \zeta)$$

Se al sistema è applicata una forzante di tipo cosinusoidale: $F(t) = F\cos(\omega t)$

la risposta sarà:

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + x_{st}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}\cos(\omega t - \zeta)$$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (5/12)

Nelle precedenti equazioni è chiaro che:

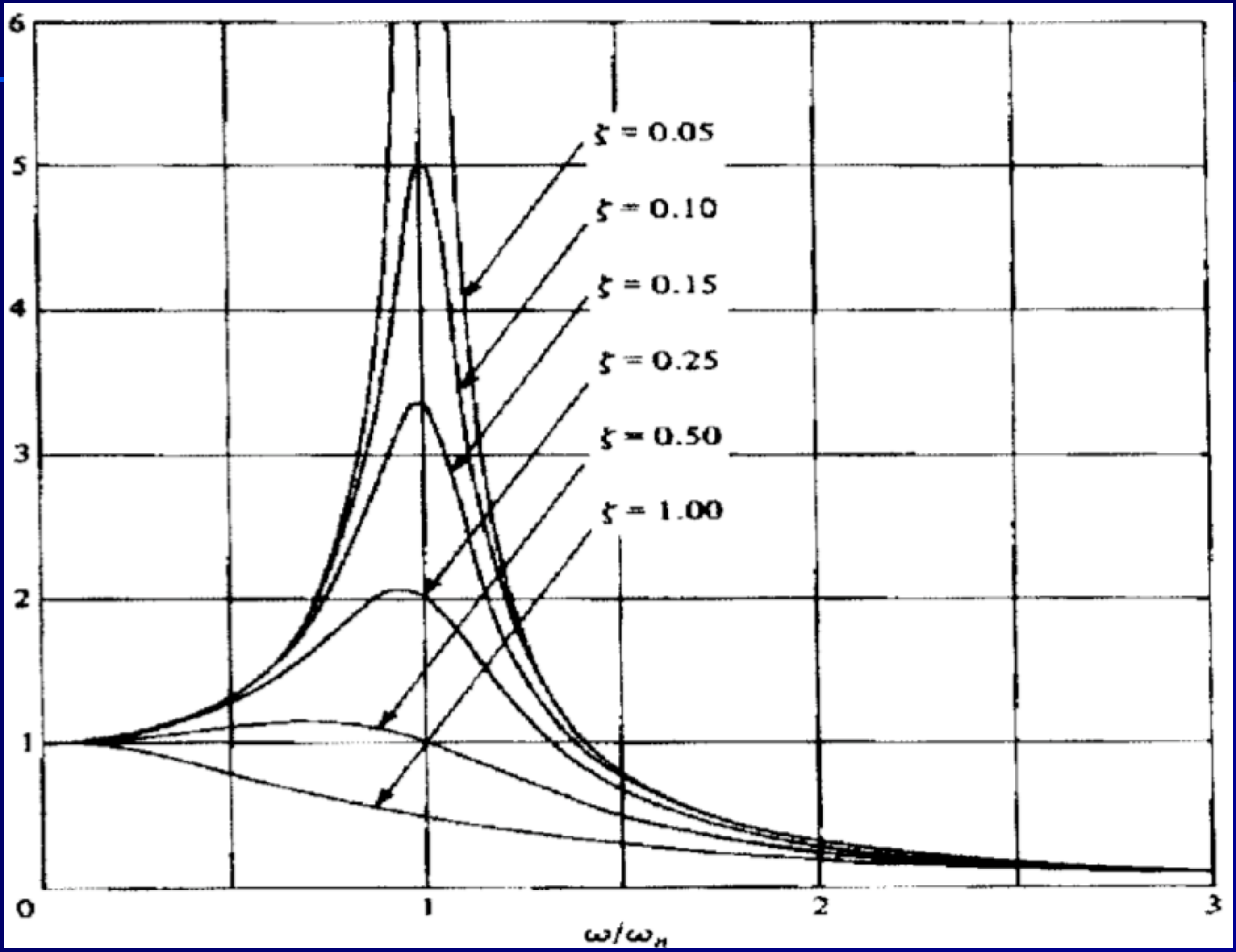
$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\zeta = \arctan\left(\frac{2\nu \frac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}\right) \qquad 0 < \zeta < \pi$$

Nei due grafici successivi sono rappresentati i due parametri N e ζ in funzione del rapporto ω/ω_1 e per alcuni valori del fattore di smorzamento ν.

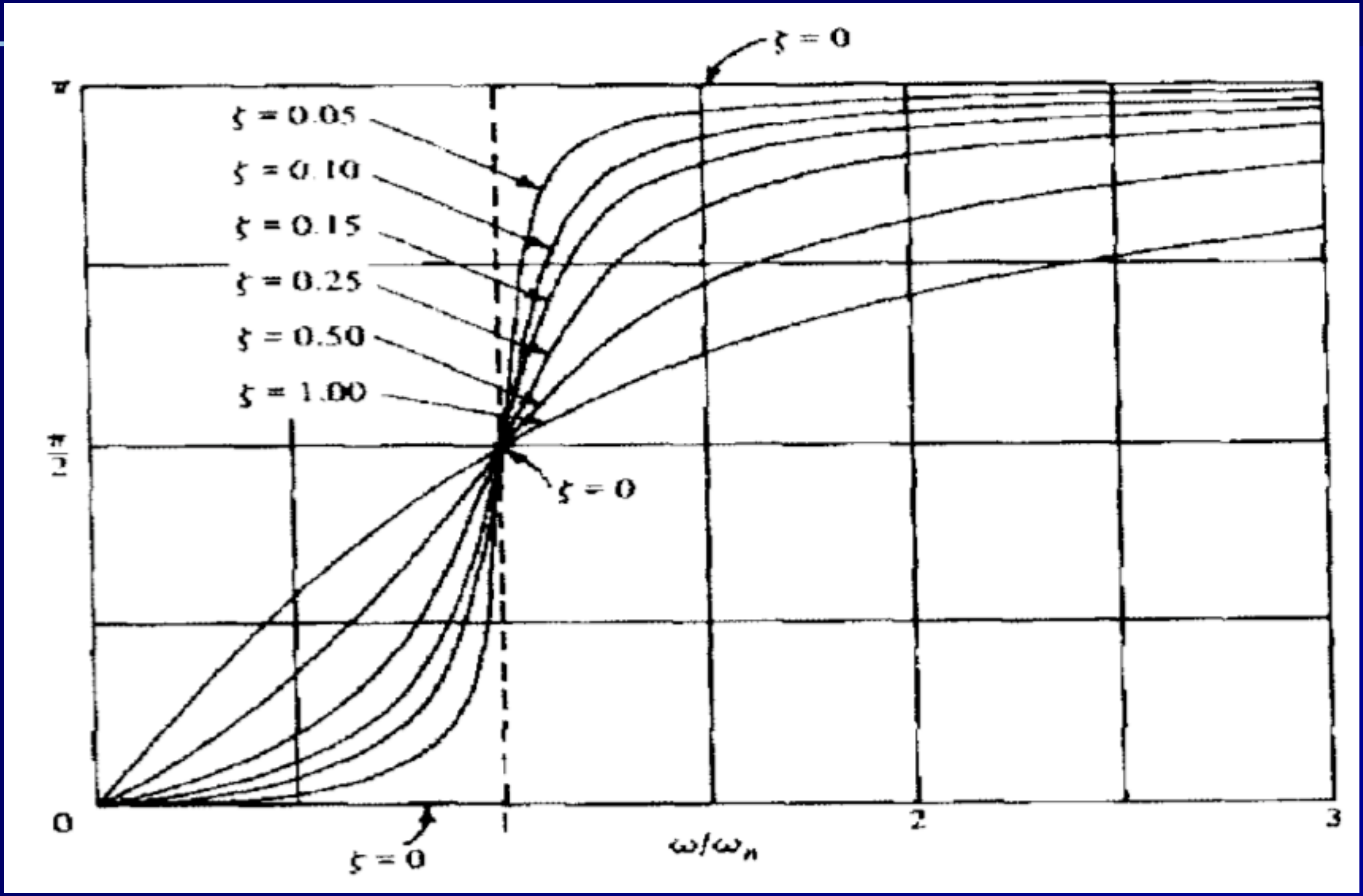
Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (6/12)

N



ξ=ν

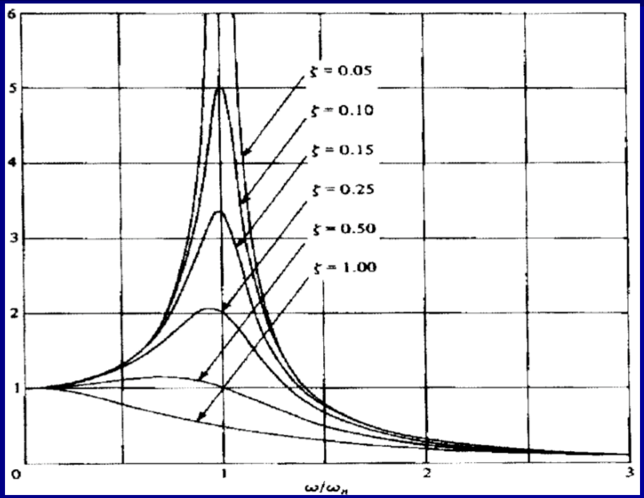
Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (7/12)



$\xi = \nu$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (8/12)

La curva di risonanza, rappresentazione grafica della funzione N , dipende dal fattore di smorzamento ν.
Questo parametro può essere determinato quando tale curva sia conosciuta; ad esempio perché è stata determinata sperimentalmente.
Cerchiamo di determinare in quali condizioni ci sia un punto di massimo:



$$\begin{cases} N = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \\ r = \dfrac{\omega}{\omega_1} \end{cases} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\nu r\right)^2}}$$

$$\frac{dN}{dr} = 0 \Rightarrow r\left(r^2 + 2\nu r - 1\right) = 0$$

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (9/12)

Si ottengono tre soluzioni per cui N è massimo (delle quali quella negativa va scartata):

$$r_1 = 0$$

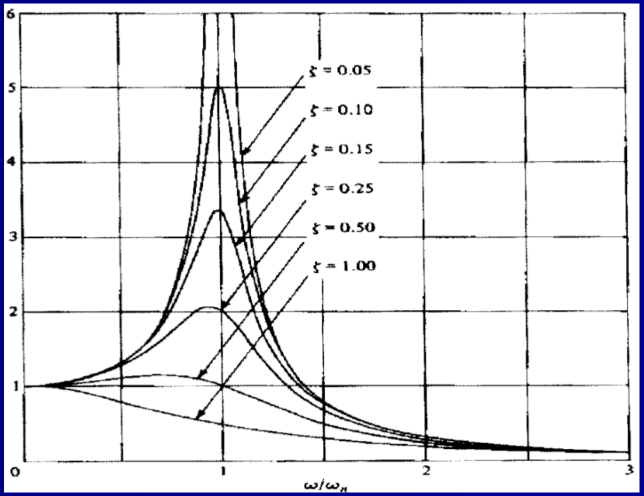
$$r_{1,2} = \pm\sqrt{1-2^2}$$

Nel caso non banale il valore massimo di N è:

$$N = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}$$

Invece nel caso di risonanza, r=1, il valore di N è:

$$N = \frac{1}{2\nu}$$



Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (10/12)

Un modo interessante di scrivere la soluzione consiste nel distinguere tra la componente in fase e la componente in quadratura:

$$x_{part}(t) = \frac{F}{k}\left(\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\sin(\omega t) - \frac{2\nu\frac{\omega}{\omega_1}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\cos(\omega t)\right)$$

$$x_{part}(t) = \frac{F}{k}\left(N_R \sin(\omega t) - N_I \cos(\omega t)\right)$$

In cui N_R rappresenta il fattore di amplificazione dinamica della componente in fase mentre N_I è quello della componente in quadratura (in ritardo di fase pari a $\pi/2$).
Procediamo ora con alcune considerazioni energetiche:

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (11/12)

Il lavoro esterno della forzante è esprimibile come l'integrale nel tempo della sua potenza:

$$L_e = \int_0^T \Pi_e \, dt = \int_0^T F(t)\,\dot{x}_{part}(t)\,dt$$

Tenendo presente l'ortogonalità delle funzioni seno e coseno nel periodo si può ottenere con facili passaggi:

$$L_e = \frac{F^2}{k^2} \frac{2\nu \dfrac{\omega}{\omega_1} k\pi}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\nu \dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

È importante osservare che il lavoro della forzante esterna è nullo se il fattore di smorzamento ν è pari a 0.

Oscillazioni forzate armonicamente in presenza di smorzamento (12/12)

Se indichiamo con X il valore dell'ampiezza massima della soluzione particolare è possibile esprimere il lavoro della forza esterna in maniera più compatta:

$$L_e = X^2 2\nu \frac{\omega}{\omega_1} k\pi$$

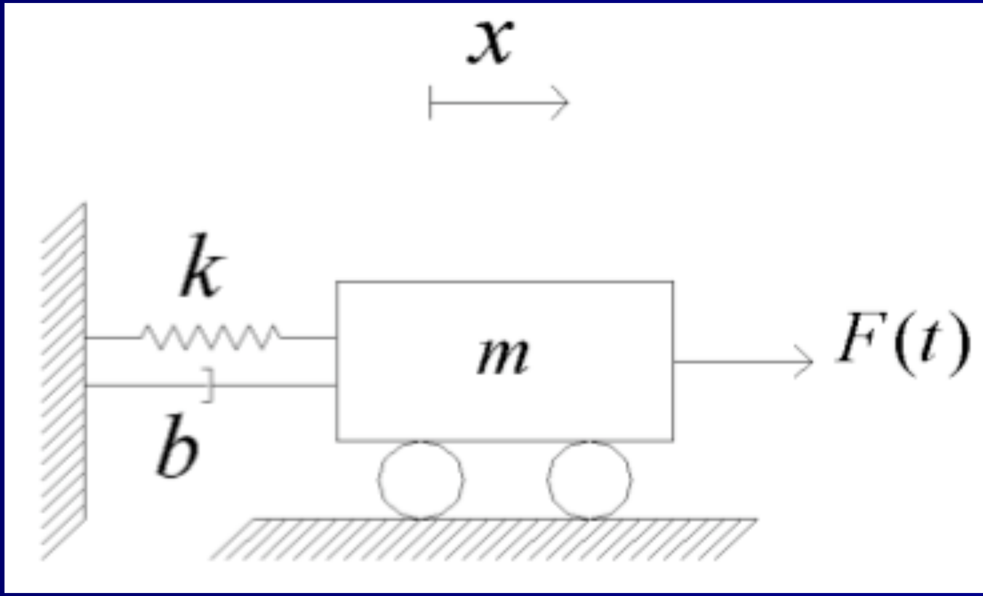
In maniera analoga è possibile calcolare l'espressione della potenza dissipata:

$$L_d = \int_0^T \Pi_d \, dt = \int_0^T b\dot{x}_{part}(t) \, dt = X^2 2\nu \frac{\omega}{\omega_1} k\pi = L_e$$

Questo significa che l'energia trasferita dalla forzante esterna al sistema in un periodo viene completamente dissipata.

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (1/5)

Supponiamo che l'oscillatore a un grado di libertà sia eccitato da una forza periodica, ma non armonica, cioè una forza avente andamento temporale che si ripete identicamente ogni periodo T. Per studiare la risposta si terrà conto del principio di sovrapposizione degli effetti e della possibilità di sviluppare funzioni periodiche in serie di Fourier.



Ogni funzione periodica di periodo T può essere sviluppata in serie di funzioni trigonometriche, cioè in serie di Fourier. Tale serie è convergente sotto opportune condizioni di regolarità della funzione.

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (2/5)

Sia F(t) la funzione periodica, lo sviluppo in serie è dato da:

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right]$$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t)\,dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega$$

I coefficienti di Fourier rappresentano il peso della rispettiva funzione trigonometrica associata alla funzione F(t) , in particolare il termine F_0 rappresenta il valore medio della funzione stessa.

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (3/5)

Le condizioni di esistenza della serie di Fourier sono le condizioni di Dirichlet:

- la funzione deve essere continua o avere un numero finito di discontinuità nel periodo
- la funzione deve avere un numero finito di massimi e minimi nel periodo
- la funzione deve essere sommabile nel periodo $\int F(t)dt < \infty$

Se le condizioni precedenti sono rispettate allora la serie converge punto per punto alla funzione, mentre se la funzione presenta discontinuità allora la serie converge in media e in corrispondenza dei punti di discontinuità fornisce il valore medio del salto.
L'equazione del moto del sistema viene espressa nel seguente modo:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx = F(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(\omega nt) + B_n \sin(\omega nt)\right]$$

Il moto dell'oscillatore risulta quindi come la sovrapposizione di una oscillazione smorzata e di una periodica dello stesso periodo della forza esterna.

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (4/5)

La risposta del sistema è data dalla soluzione omogenea associata che rappresenta il termine di oscillazione libera più una soluzione particolare che rappresenta il termine di oscillazione forzata.

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + x_{part} \qquad \Omega = \omega_1\sqrt{1-\nu^2}$$

La soluzione particolare è composta da una componente in fase e una in quadratura:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx = F(t)$$

$$x_{part}(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a'_n\cos(\omega n t) + b'_n\sin(\omega n t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b''_n\sin(\omega n t) - a''_n\cos(\omega n t)\right]$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (5/5)

Se si definisce $\beta_n = n\omega_1/\omega$ i singoli termini sono esprimibili come:

$$a'_n = \frac{1-\beta_n^2}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\nu\beta_n\right)^2}\frac{A_n}{k} \qquad b''_n = \frac{1-\beta_n^2}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\nu\beta_n\right)^2}\frac{B_n}{k}$$

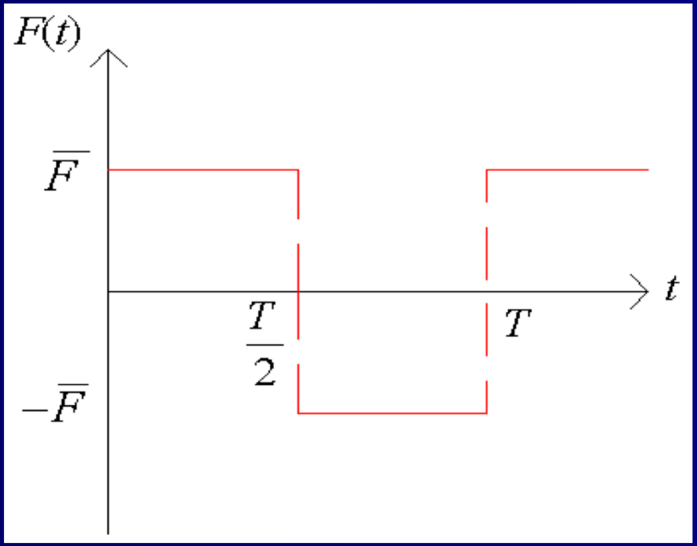
$$a''_n = \frac{2\nu\beta_n}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\nu\beta_n\right)^2}\frac{B_n}{k} \qquad b'_n = \frac{2\nu\beta_n}{\left(1-\beta_n^2\right)^2+\left(2\nu\beta_n\right)^2}\frac{A_n}{k}$$

La soluzione particolare può essere comodamente espressa nella seguente forma:

$$x_{part}\left(t\right) = \frac{F_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a'_n - a''_n\right)\cos\left(\omega nt\right) + \left(b'_n + b''_n\right)\sin\left(\omega nt\right)\right]$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento – Esempio (1/2)

Si determini l'oscillazione (supponendo condizioni iniziali di quiete) dovuta a una forza F(t) ad onda quadra di questo tipo:



$$\begin{cases} F(t) = \bar{F} & 0 < t < T/2 \\ F(t) = -\bar{F} & -T/2 < t < 0 \end{cases}$$

Notiamo dal disegno che la funzione è dispari quindi tutti i termini in coseno saranno nulli   Lo sviluppo in serie quindi si riduce ai soli termini sinusoidali:

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento – Esempio (2/2)

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]$$

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\,dt = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = 0$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{2\bar{F}}{\pi n}\left[-\cos(\pi n) + 1\right] \Rightarrow \text{n dispari}: B_n = \frac{4\bar{F}}{\pi n}$$

$$\text{n pari}: \quad B_n = 0$$

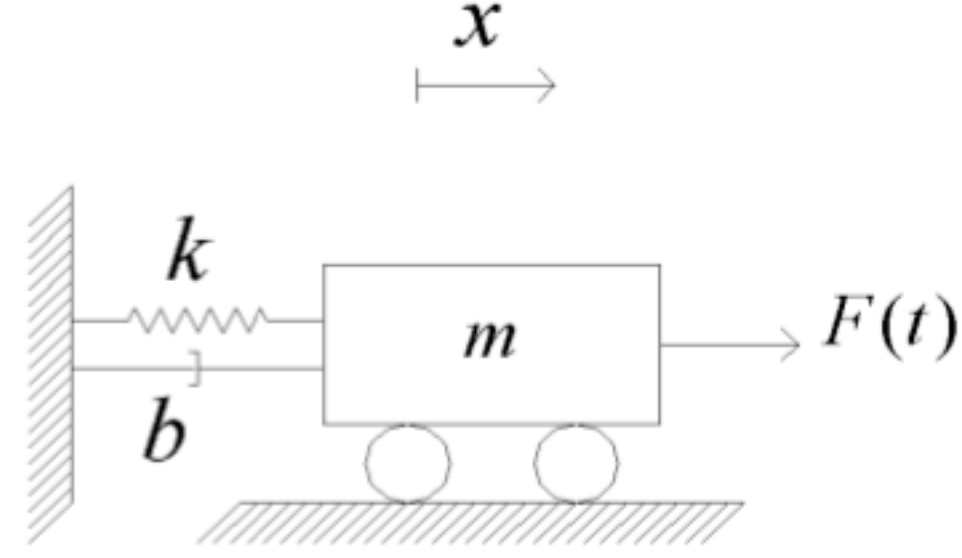
La risposta del sistema sarà composta dalla componente in fase e in quadratura di sin(nωt) mentre quelle in coseno saranno nulle:

$$x_{part}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-a''_n\right)\cos(\omega n t) + \left(b''_n\right)\sin(\omega n t)\right]$$

Oscillazioni forzate in modo qualsiasi in presenza di smorzamento (1/7)

Per valutare la risposta dell'oscillatore semplice a una forza con legge di variazione qualsiasi è utile conoscere la risposta del sistema, supposto inizialmente in quiete, ad una forza a gradino o impulsiva.

Una forza si dice a gradino quando mantiene valore nullo negli istanti che precedono un certo istante t e valore costante F negli istanti successivi.



Una forza si dice impulsiva se mantiene costante il suo valore per un intervallo di tempo breve Δt.

La risposta del sistema a una forza impulsiva sarà l'espressione limite della risposta del sistema a un impulso di durata finita quando Δt tende a zero.

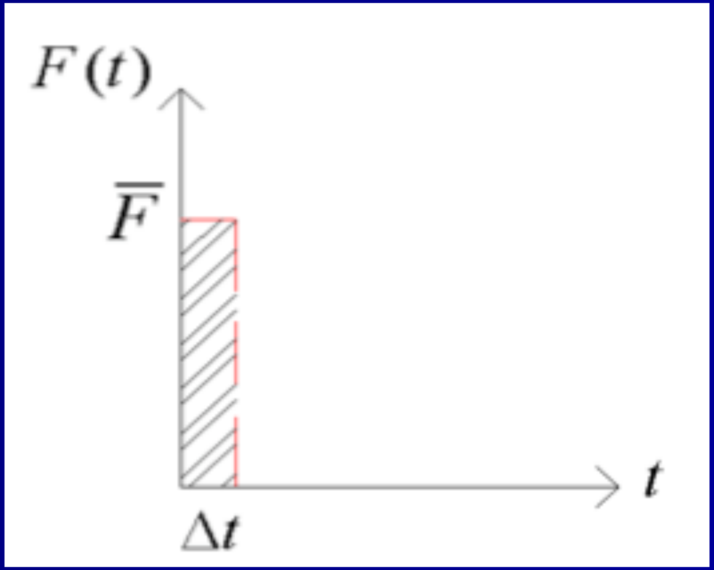
Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (2/7)

Si consideri quindi il caso di una forza impulsiva F(t) che vale F per un tempo Δt e poi si annulla (supponendo condizioni iniziali di quiete).

L'impulso può essere espresso come:

$$I = \bar{F} \cdot \Delta t$$

$$I = m\left(\dot{x}(\Delta t) - \dot{x}(0)\right) = m \cdot \dot{x}(\Delta t)$$



Se ci si riferisce all'equazione del moto:

$$m\dot{x}(\Delta t) = \int_0^{\Delta T} F(t)\,dt - \int_0^{\Delta T} kx(t)\,dt - \int_0^{\Delta T} b\dot{x}(t)\,dt$$

Se l'impulso è finito anche spostamento e velocità devono mantenersi limitati:

$$|x(t)| < M_1 < +\infty \qquad \int_0^{\Delta T} kx(t)\,dt \le k\int_0^{\Delta T} |x(t)|\,dt \le kM_1\Delta T$$

$$|\dot{x}(t)| < M_2 < +\infty \qquad \int_0^{\Delta T} b\dot{x}(t)\,dt \le b\int_0^{\Delta T} |\dot{x}(t)|\,dt \le bM_2\Delta T$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (3/7)

Per t > Δt si hanno oscillazioni libere di un sistema smorzato:

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(x_0 \cos(\Omega t) + \dot{x}_0 + \frac{\nu\omega t}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)$$

$$t < 0 \quad x(t) = 0$$

$$t > 0 \quad x(t) = \frac{I}{m\Omega}e^{-\nu\omega_1 t}\sin(\Omega t)$$

Si definisce la risposta a un impulso unitario h(t) nel seguente modo:

$$h(t) = \frac{I}{m\Omega}e^{-\nu\omega_1 t}\sin(\Omega t)$$

$$t < 0 \quad x(t) = 0$$

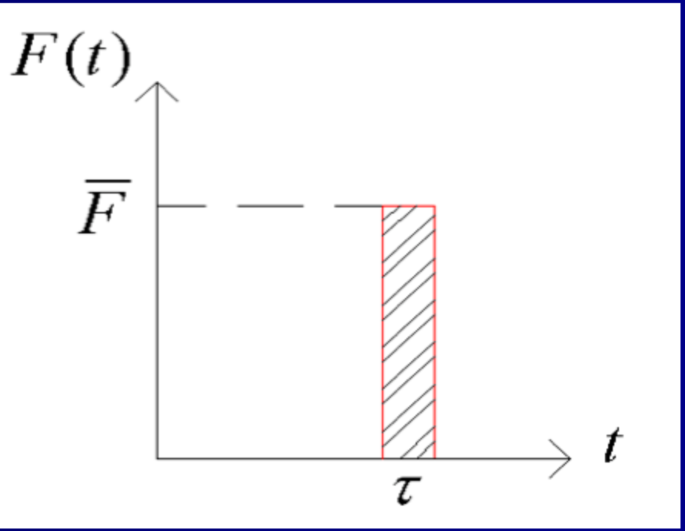
$$t > 0 \quad x(t) = Ih(t)$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (4/7)

Se, anziché all'istante $t = 0$, la forza impulsiva agisce all'istante $t = \tau$, la risposta del sistema, sempre supponendo condizioni iniziali di quiete, è rappresentata dalla seguente relazione:

$$
\begin{aligned}
t < \tau \quad & x(t) = 0 \\
t > \tau \quad & x(t) = Ih(t-\tau)
\end{aligned}
$$

Il valore dello spostamento dipende sostanzialmente dall'intervallo di tempo $t - \tau$ intercorso tra l'istante t in cui si valuta la risposta e l'istante τ in cui è stata applicata la forza F.



Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (5/7)

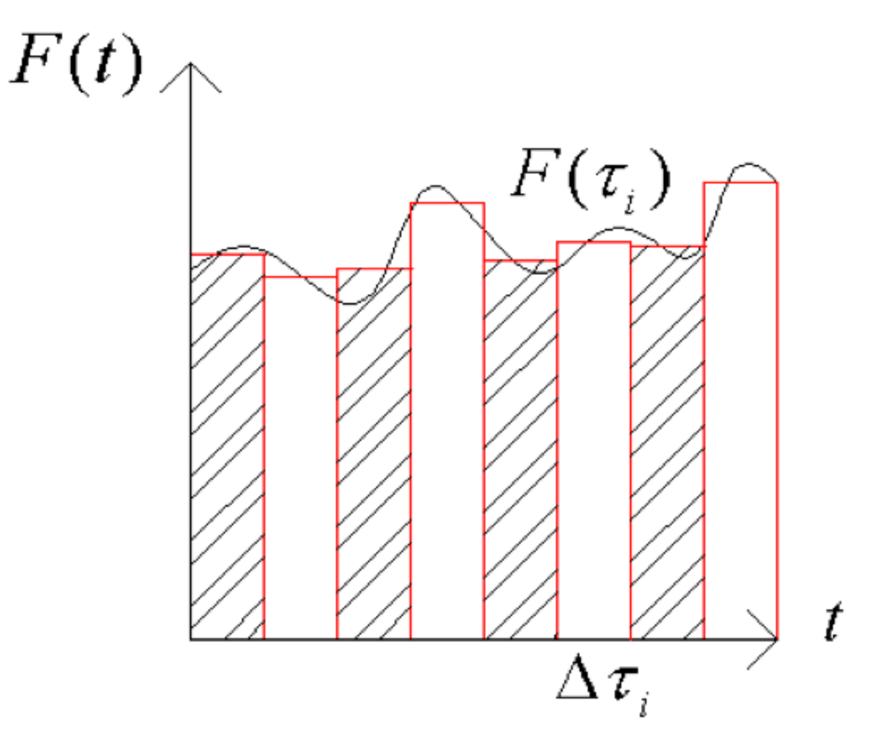
Una forza caratterizzata da una generica funzione del tempo F(t) può essere rappresentata approssimativamente come sovrapposizione di una successione di forze impulsive agenti a istanti diversi 0, $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2 \dots \Delta\tau_n$.

La forza i-esima (impulso i-esimo) dà un contributo alla risposta siffatto:

$$x(t) = \frac{F(\tau_i)\Delta\tau_i}{m\Omega} e^{-\nu\omega_1 t}\left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right) =$$
$$= F(\tau_i)\Delta\tau \cdot h(t-\tau_i)$$

Sommando gli effetti delle singole forze si ottiene una risposta in forma approssimata del tipo:

$$x(t) = \frac{F(\tau_i)\Delta\tau_i}{m\Omega} e^{-\nu\omega_1 t}\left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right) =$$



Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (6/7)

Facendo tendere $\Delta\tau \to 0$ si ha:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

Nel caso particolare dell'oscillatore semplice smorzato otteniamo l'integrale di Duhamel:

$$x(t) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t e^{-\nu\omega_1 t} F(\tau) \left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right) d\tau$$

Questo integrale solitamente viene espresso in un'altra forma, più adatta per le applicazioni; se chiamiamo F(t) = F · f (t) essendo B una costante che ha le dimensionidi una forza e f(t) una funzione del tempo adimensionale:

$$x(t) = \frac{F}{m\Omega} \int_0^t e^{-\nu\omega_1 t} f(\tau) \left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right) d\tau$$

$$x(t) = x_{st} \cdot \xi(t)$$

$$x_{st} = F/k$$

$$\xi(t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\nu^2}} \int_0^t e^{-\nu\omega_1 t} f(\tau) \left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right) d\tau$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento (7/7)

Essendo x_{st} lo spostamento che produrrebbe la F agendo staticamente e $\xi(t)$ un fattore dinamico dimensionale il quale dipende dalla legge di variazione della forza, dalla pulsazione naturale e dal fattore di smorzamento.

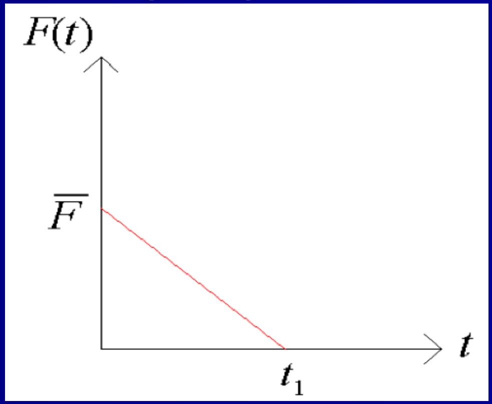
Se le condizioni iniziali non sono di quiete si può ottenere la legge del moto aggiungendo alla risposta trovata il termine che rappresenta le oscillazioni libere del sistema:

$$x(t) = e^{-\nu\omega_1 t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + \frac{1}{m\Omega}\int_0^t e^{-\nu\omega_1 t}F(\tau)\left(\sin\left(\Omega\left(t-\tau_i\right)\right)\right)d\tau$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento – Esempio 1

Si determini la risposta del seguente sistema in assenza di smorzamento (v = 0)

$$
\begin{cases}
F(t) = \bar{F}\left(1 - \dfrac{t}{t_1}\right) & 0 \le t < t_1 \\
F(t) = 0 & t \ge t_1
\end{cases}
$$



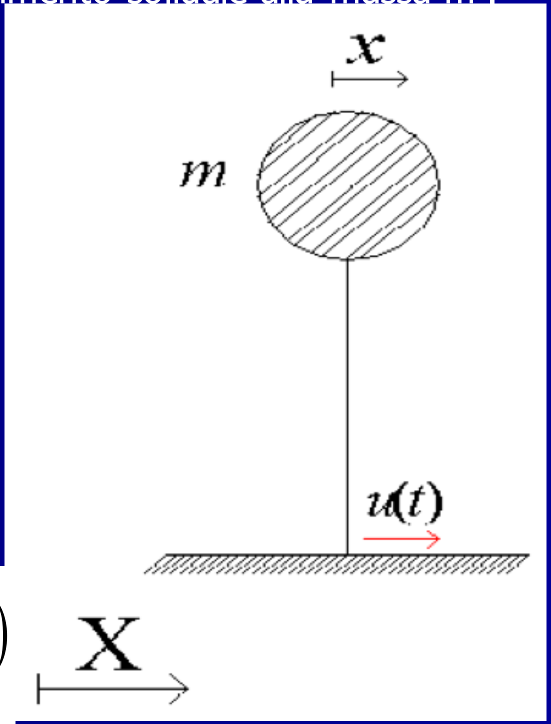
La risposta sarà composta da due contributi, calcolabili utilizzando l'integrale di Duhamel:

$$
0 \le t < t_1 \qquad x(t) = \frac{\bar{F}}{m\omega_1}\int_0^t \left(1 - \tau / t\right)\left(\sin\left(\omega_1\left(t - \tau_i\right)\right)\right)d\tau = \frac{\bar{F}}{k}\left(1 - \cos\left(\omega_1 t\right)\right) + \frac{\bar{F}}{kt_1}\left(\frac{\sin\left(\omega_1 t\right)}{\omega_1} - t\right)
$$

$$
t \ge t_1 \qquad x(t) = \frac{\bar{F}}{m\omega_1}\int_0^{t_1} \left(1 - \tau / t\right)\left(\sin\left(\omega_1\left(t - \tau_i\right)\right)\right)d\tau + \int_{t_1}^{t} 0\, d\tau = \frac{\bar{F}}{k}\left[\frac{\left(\sin\left(\omega_1 t\right) - \sin\left(\omega_1\left(t - t_1\right)\right)\right)}{\omega_1 t_1} - \cos\left(\omega_1 t\right)\right]
$$

Oscillazioni forzate in modo periodico in presenza di smorzamento – Esempio 2

Determinare la risposta della seguente struttura alla quale è applicato uno spostamento impresso u(t) alla base.
Sia X un sistema di riferimento inerziale, mentre x un sistema di riferimento solidale alla massa m .



L'equazione del moto può essere espressa nel seguente modo:

$$x+u(t)=X$$
$$\dot{x}+\dot{u}(t)=\dot{X}$$
$$\ddot{x}+\ddot{u}(t)=\ddot{X}$$

$$-m\ddot{X}-kx=0$$
$$-m\left(\ddot{x}+\ddot{u}(t)\right)-kx=0$$
$$m\ddot{x}+kx=-m\ddot{u}(t)$$

e la risposta può essere calcolata utilizzando l'integrale di Duhamel:

$$x(t)=\frac{1}{m\Omega}\int_0^t e^{-\nu\omega_1(t-\tau)}F(\tau)\left(\sin\left(\Omega(t-\tau)\right)\right)d\tau \Leftarrow F(\tau)=-m\ddot{u}(t)$$
$$x(t)=-\frac{1}{\Omega}\int_0^t e^{-\nu\omega_1(t-\tau)}\ddot{u}(t)\left(\sin\left(\Omega(t-\tau)\right)\right)d\tau$$

Riferimenti bibliografici e iconografici

- M. Como*, Statica delle costruzioni storiche in muratura. Archi, volte, cupole, architetture monumentali, edifici sotto carichi verticali e sotto sisma*, Aracne: Roma, 2010.
- I.V. Carbone, A. Fiore, G. Pistone, *Le costruzioni in muratura*, Hoepli: Milano, 2001.
- A. Castiglioni, *Introduzione alla dinamica delle strutture*, Masson: Milano, 1977.
- R. W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of structures*, McGraw-Hill: New York, 1975[3].