

# Statica per l'edilizia storica

**Università degli Studi di Cagliari**  
**Corso di Laurea Magistrale in**  
**Architettura**  
**A.A. 2016-2017**

***Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Iginò Mura,***  
***Dr. ing. Flavio Stochino***

[antonio.cazzani@unica.it](mailto:antonio.cazzani@unica.it)

*<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>*

*Lezione 12 – Le cupole in muratura*

# Sommario

## Introduzione

- **Le cupole come strutture di copertura**
- **Comportamento statico delle cupole**

## Le cupole in regime membranale

- **La cupola: definizioni geometriche**
- **La cupola: premesse alle equazioni governanti**
- **Le equazioni governanti**
- **le membrane curve in regime assialsimmetrico**
- **Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali**

## Esempi applicativi

- **Cupola aperta in sommità. Cupola dotata di lanterna**
- **Analisi di una volta a vela. Consolidamento.**

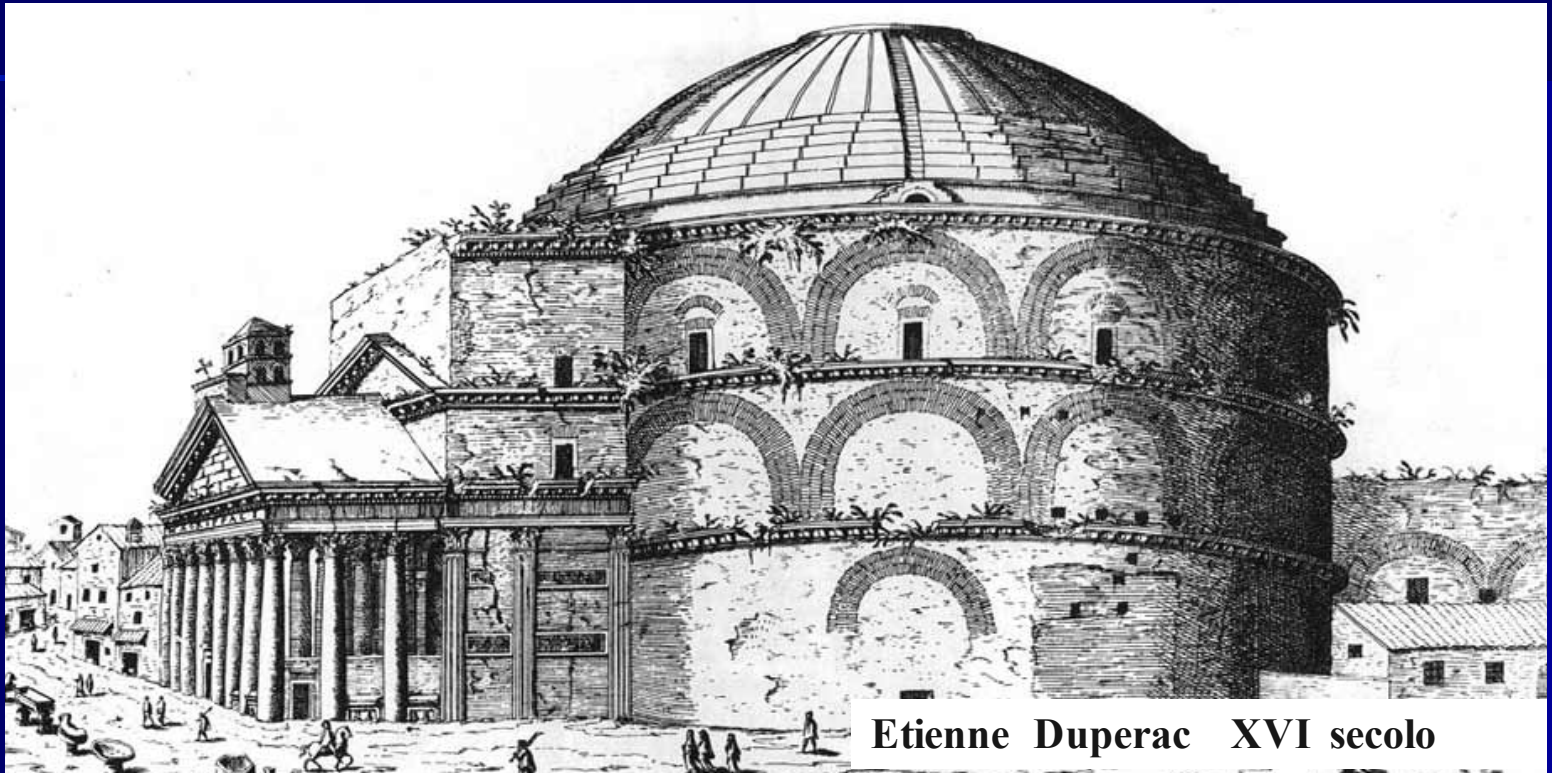
# Le cupole come strutture di copertura (1/6)

**La cupola è la più perfetta e ingegnosa struttura di copertura di tutti i tempi: si deve all'architettura di epoca romana la soluzione della copertura a cupola in forma monumentale.**

**La ricerca etrusca sugli archi e le volte fu sviluppata dai Romani con una tecnica costruttiva per quei tempi innovativa, adottando una malta legante che gettata sull'armatura lignea consentiva di realizzare una copertura unitaria e compatta.**



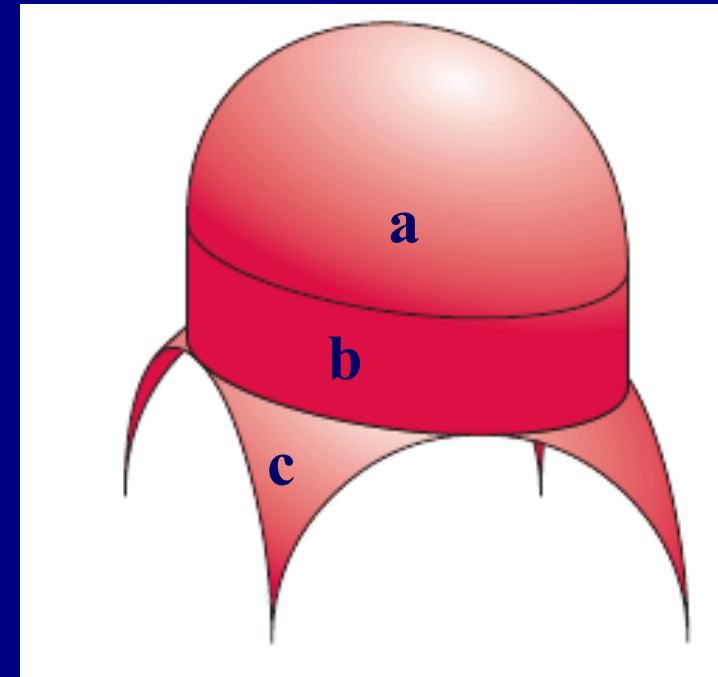
## Le cupole come strutture di copertura (2/6)



**Gli architetti romani predilessero grandi sale rotonde (si pensi al Pantheon, con un diametro di 43,50 m e un'altezza di altrettanto) e realizzarono le coperture alleggerendo quanto più possibile le masse e concentrando le spinte in alcuni punti, dove venivano disposti archi di scarico.**

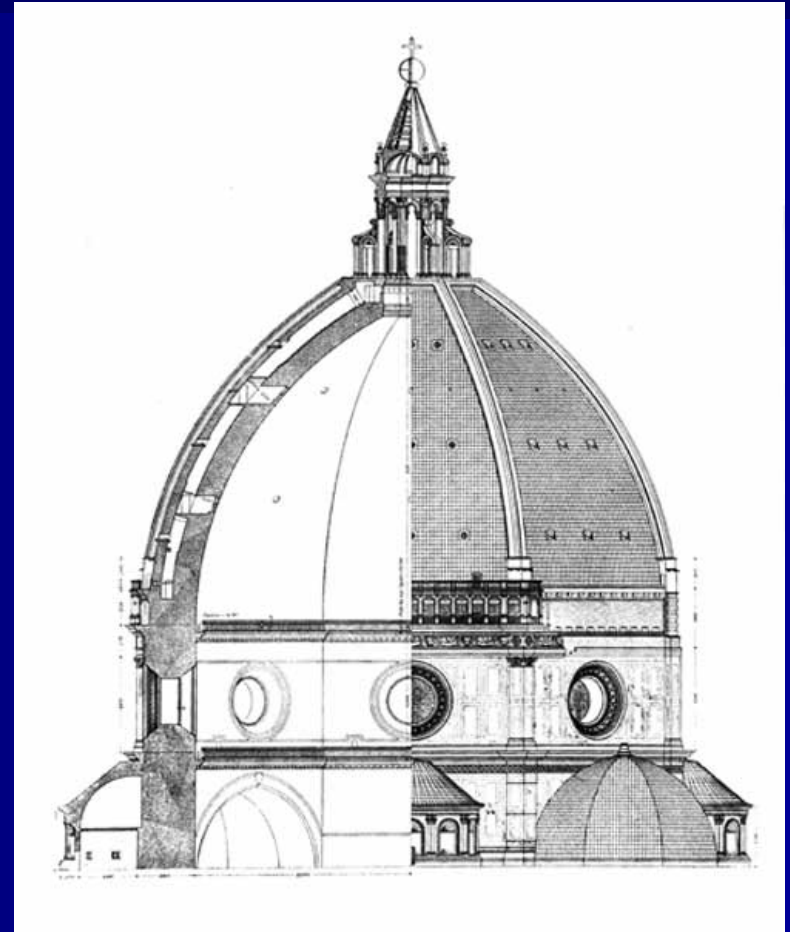
## Le cupole come strutture di copertura (3/6)

In seguito lo sviluppo tecnico e costruttivo portarono a vari perfezionamenti come l'innalzamento della cupola (**a**) su un tamburo (**b**) su cui si aprivano aperture di illuminazione, l'alleggerimento dei rinfianchi e la creazione di una struttura di raccordo, i pennacchi (**c**), che permettevano di impostare la copertura su una sottostante pianta poligonale e scaricare i pesi concentrandoli su dei pilastri.



## Le cupole come strutture di copertura (4/6)

Con la costruzione delle cupole di **S. Maria del Fiore** a Firenze Brunelleschi apre la serie delle cupole del Rinascimento, in cui la costruzione senza centine è favorita dall'adozione del sesto acuto: la cupola risulta alleggerita e quindi si diminuisce la spinta mediante l'adozione di una doppia calotta, in cui le due parti sono collegate da un sistema di nervature meridiane unite fra loro da archi paralleli.



## Le cupole come strutture di copertura (5/6)

**Con la cupola di S. Pietro a Roma, Michelangelo porta alla più alta attuazione il modello di cupola di tipo romano e apre la strada agli sviluppi e alle varianti di epoca barocca.**

**L'attuale configurazione della cupola si deve a Della Porta (che la portò a compimento tra il 1588 e il 1593) che per prevenire dissesti strutturali la realizzò a sesto rialzato, circa 7 metri più alta rispetto a quella michelangiotesca.**



# Le cupole come strutture di copertura (6/6)

**La forma geometrica della cupola può essere quella semisferica (come S. Sofia a Costantinopoli) o della superficie di rivoluzione ottenuta per rotazione attorno a un asse verticale di una curva piana, come un arco di circonferenza o di parabola, anche se non mancano cupole a forma di ellissoide o a spicchi su base poligonali.**



# Comportamento statico delle cupole (1/17)

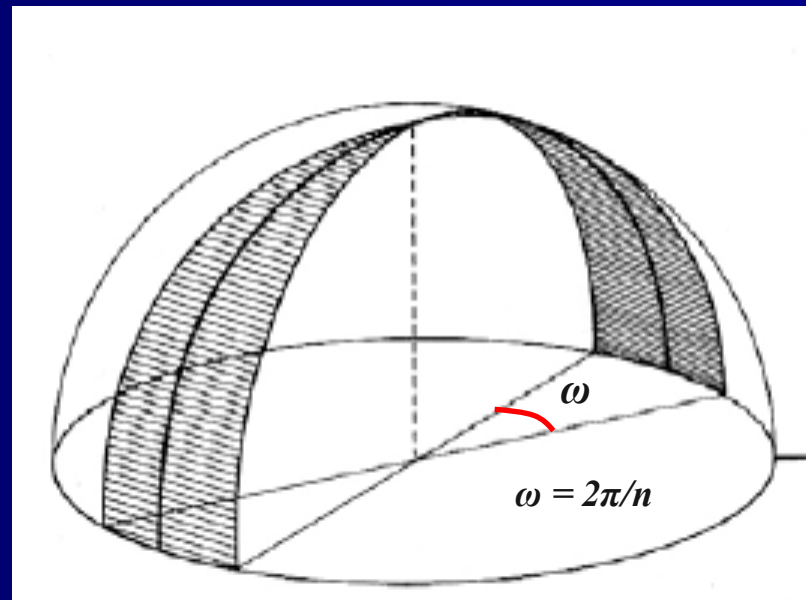
**Il comportamento statico di una cupola è complesso e la sua corretta impostazione costituisce un tipico problema di scienza delle costruzioni.**

**Gli schemi statici usualmente adottati per modellare le cupole (da quella più semplice a quelle più complesse) sono fondamentalmente:**

- A) lo schema del comportamento ad arco;**
- B) lo schema del comportamento a piastra curva .**

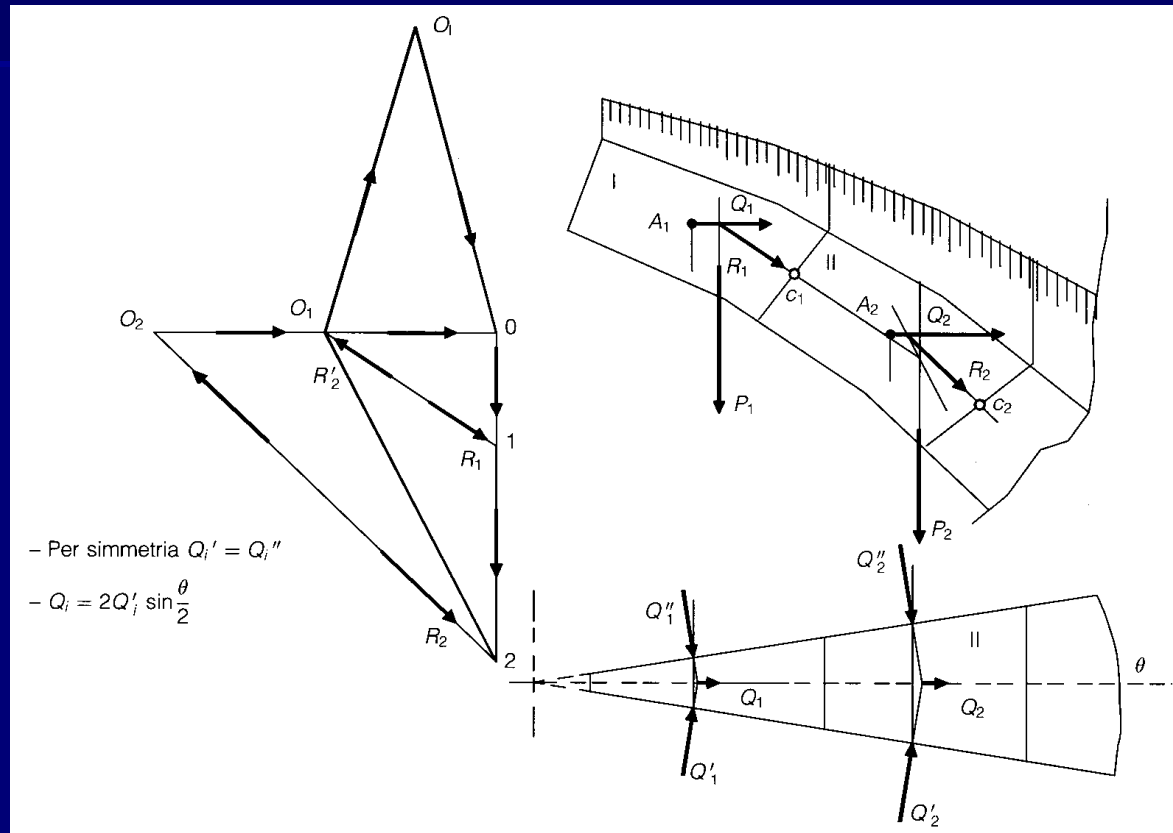
## Comportamento statico delle cupole (2/17)

Gli studiosi del Settecento pensavano alla cupola come costituita da unghie o spicchi che si appoggiavano mutuamente al vertice, in modo che **il funzionamento meccanico veniva ricondotto a quello dell'arco**.



# Comportamento statico delle cupole (3/17)

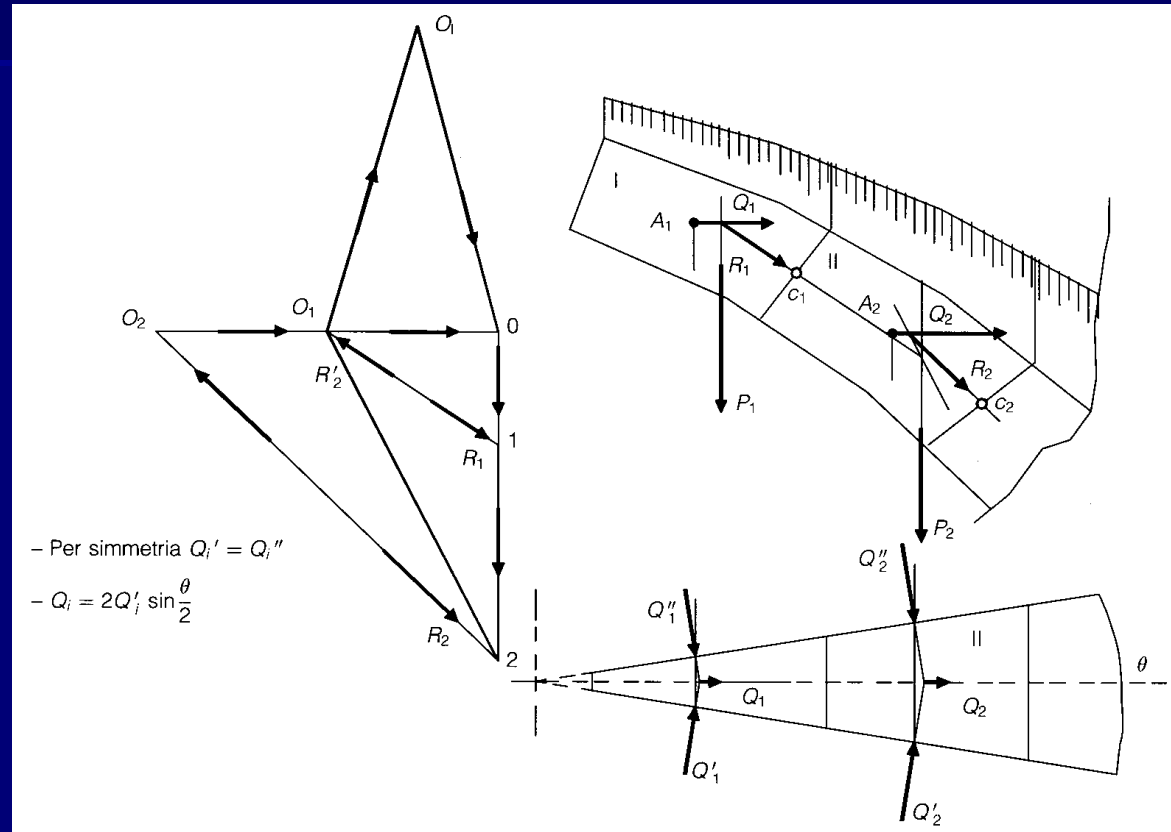
**Allo stato di sforzo, dedotto dall'ipotesi di funzionamento ad arco, si ipotizzava che si accompagnasse uno stato di sforzo secondo i paralleli, che teneva conto del mutuo sostegno laterale che gli spicchi esercitavano l'uno sull'altro.**



**La concezione di questo meccanismo resistente veniva enunciata ipotizzando che la linea delle pressioni dell'arco incidesse verso l'interno obliquamente sulla superficie di separazione dei conci.**

# Le cupole : modelli di calcolo ad arco (4/17)

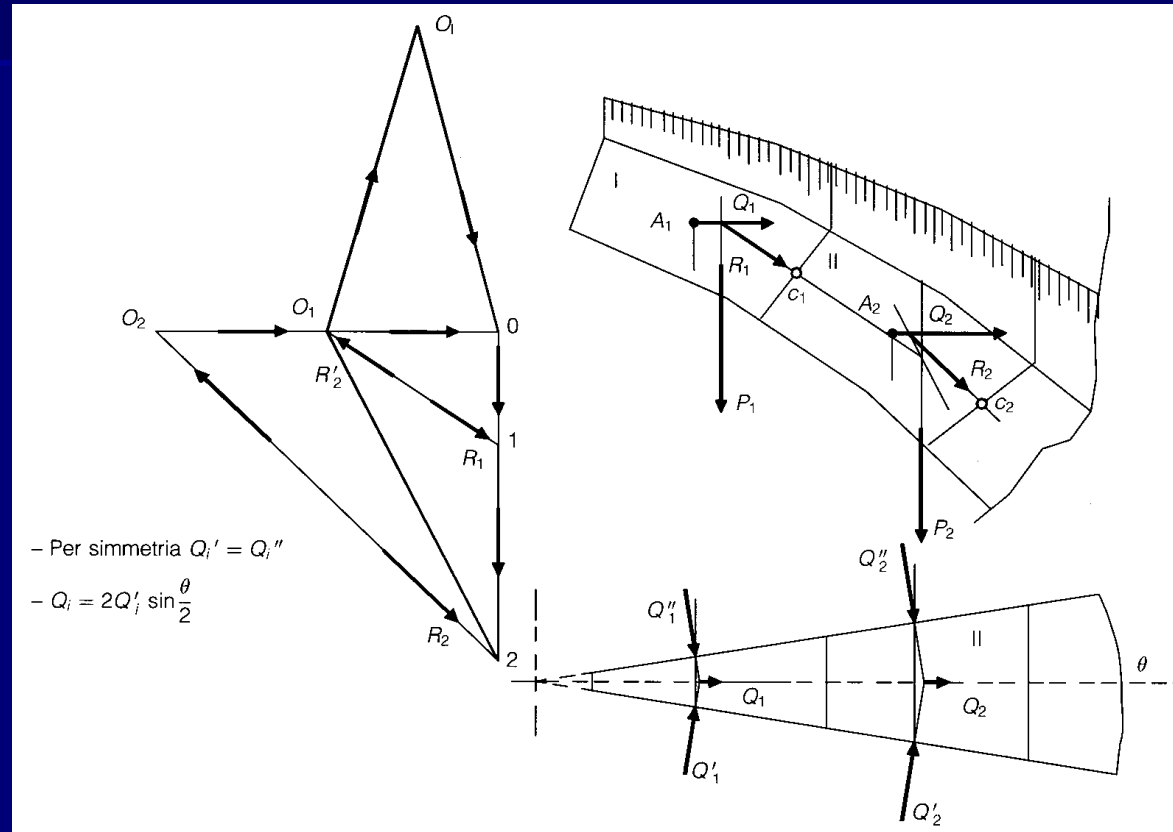
Se si considera una cupola dotata di lucernario in chiave, l'equilibrio del concio superiore *I* vede presenti il carico verticale  $P_1$ , le spinte orizzontali  $Q_1'$  e  $Q_1''$  (eguali per simmetria e normali alle facce del concio) e la reazione mutua con il concio successivo *II*,  $R_1$ .



# Le cupole : modelli di calcolo ad arco (5/17)

Detta  $Q_1$  la risultante di  $Q_1'$  e  $Q_1''$ , per l'equilibrio  $P_1$ ,  $Q_1$  e  $R_1$  devono concorrere in uno stesso punto e formare un poligono delle forze chiuso.

Non essendo però noti né  $Q_1$ , né  $R_1$  l'equilibrio del concio risulta non determinato, e questo si ripete per tutti i conci.



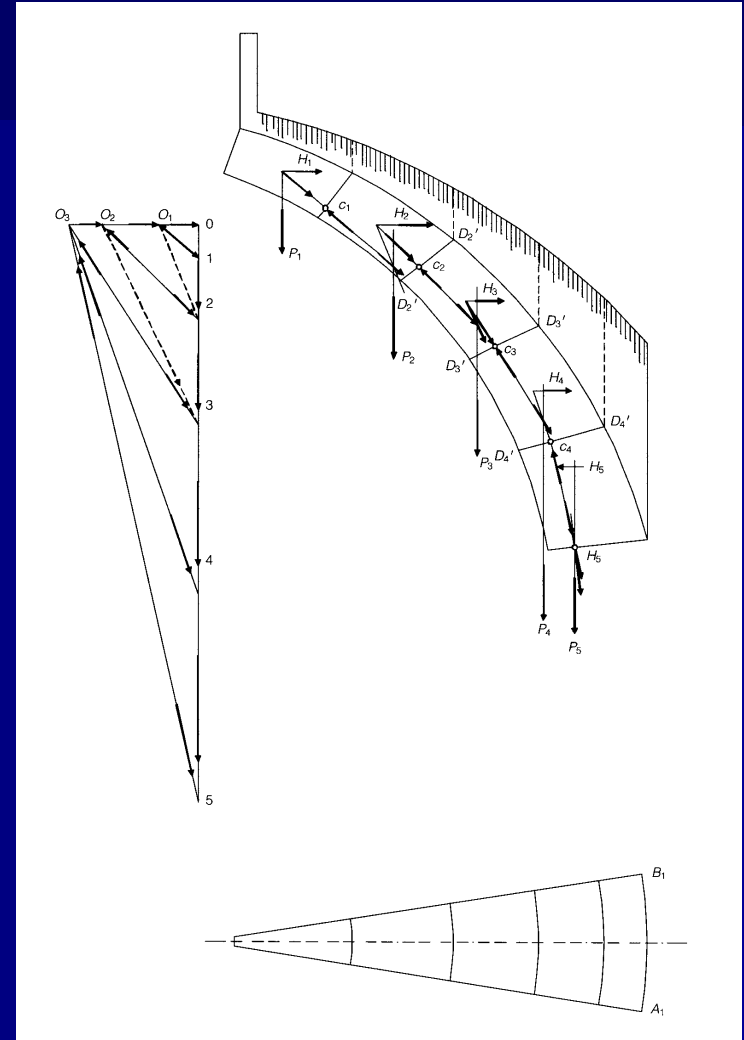
# Comportamento statico delle cupole (6/17)

La risoluzione del problema avviene con l'introduzione di ipotesi semplificative riguardo al collocamento della curva delle pressioni di ogni concio.

La costruzione assume che il punto di applicazione della forza orizzontale  $Q_i$  sia il punto  $H_i$ , estremo superiore del nocciolo delle facce laterali e la reazione mutua,  $R_i$  sia invece applicata all'estremo inferiore del terzo medio del corrispondente letto

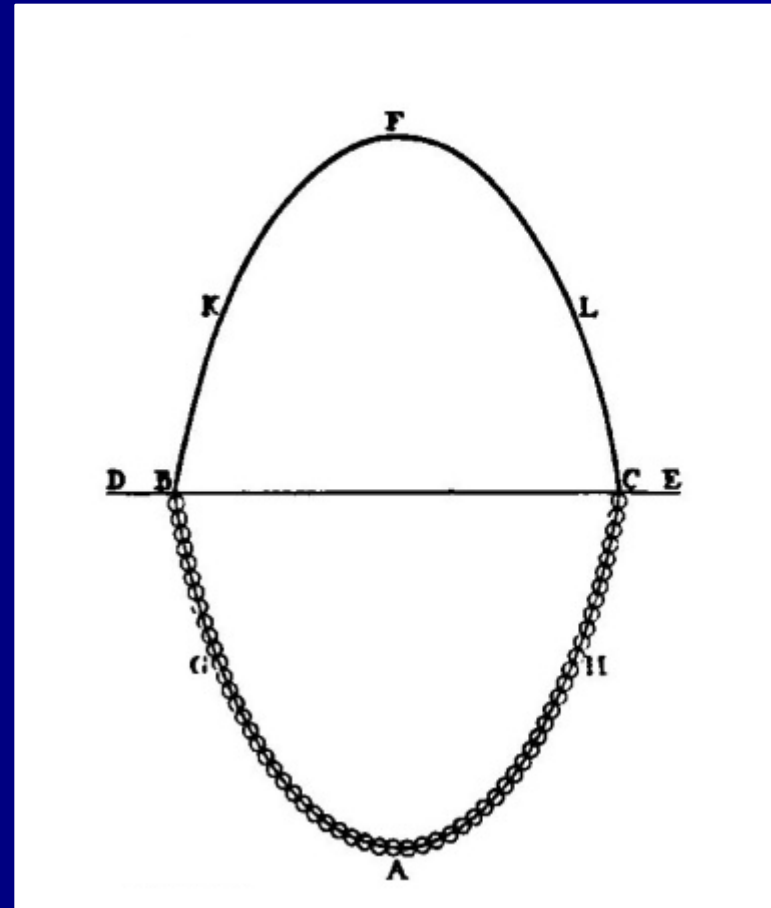
$$D_i - D_i'$$

Risultati più accurati e coerenti con il meccanismo resistente si ottengono con la teoria membranale dei gusci di rivoluzione.



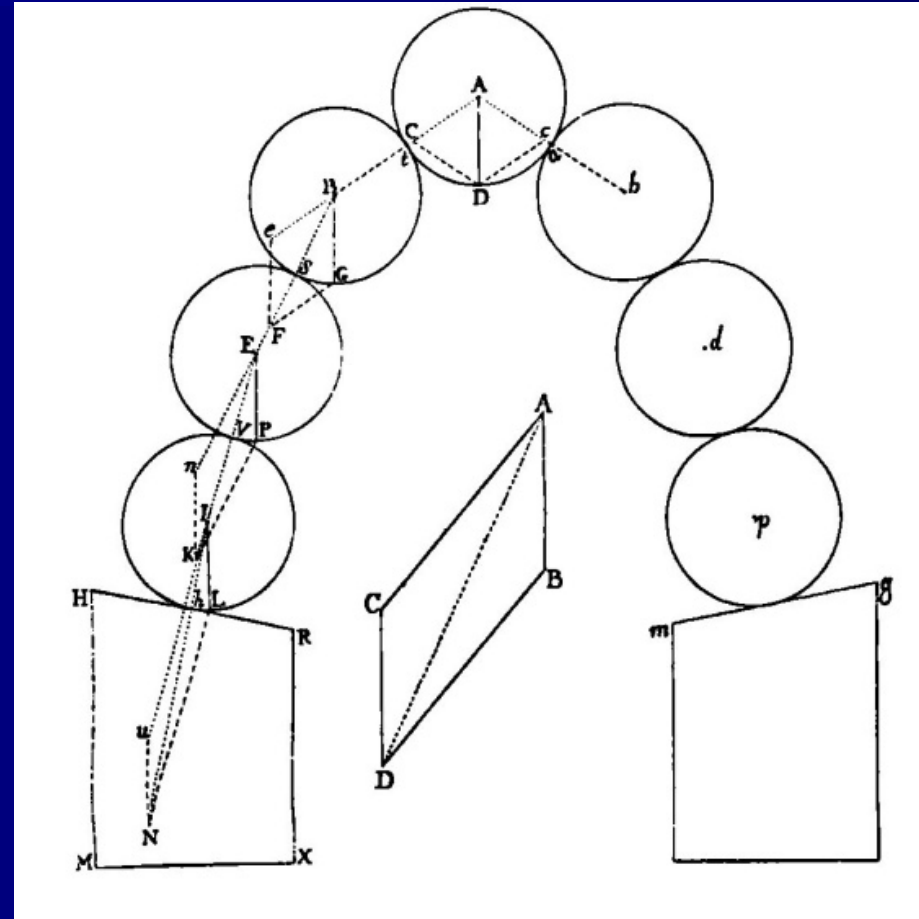
## Comportamento statico delle cupole (7/17)

Nel filone degli studi di statica fondati su principi di analisi geometrica teorica, ma anche su prove sperimentali (eseguite con sferette di ferro), i fratelli Bernoulli (fine del seicento) individuano in termini analitici la *curva catenaria* come l'unica configurazione deformata, tra le infinite che potrebbero scegliersi, nella quale il baricentro si colloca nella posizione più bassa possibile.



# Comportamento statico delle cupole (8/17)

Su questa base l'inglese Sterling nell'opera "**Lineae tertii ordinis Newtonianae**" (1717) risolve il problema della forma della curva che garantisce lo stato di equilibrio di sfere di egual peso e che coincide con la catenaria ribaltata rispetto all'orizzonte della collana di tali sfere.

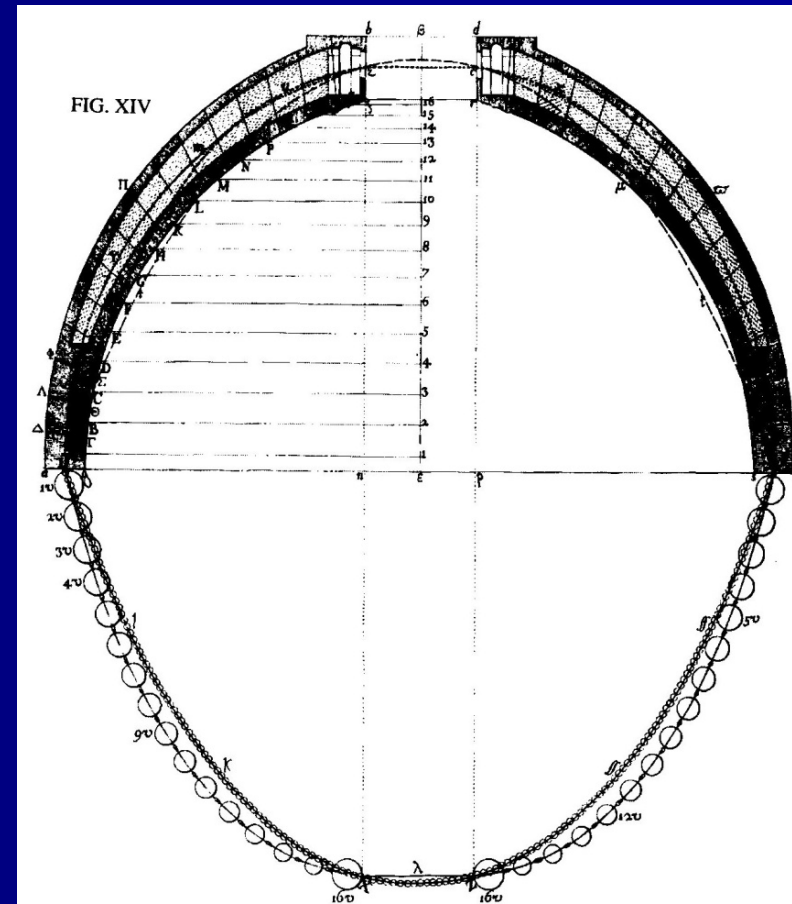


# Comportamento statico delle cupole (9/17)

Bouger nel 1734 estende il concetto della catenaria al tridimensionale per determinare la forma ottimale delle cupole, prescindendo dall'attrito.

Nel 1743 papa Benedetto XIV affida a Giovanni Poleni, prof. di Fisica a Padova, un programma di ricerca per indicare le cause di una serie di lesioni nella cupola di San Pietro e i rimedi da adottare.

L'aspetto significativo di questo episodio è che il Poleni introdusse il concetto di *forma resistente*.

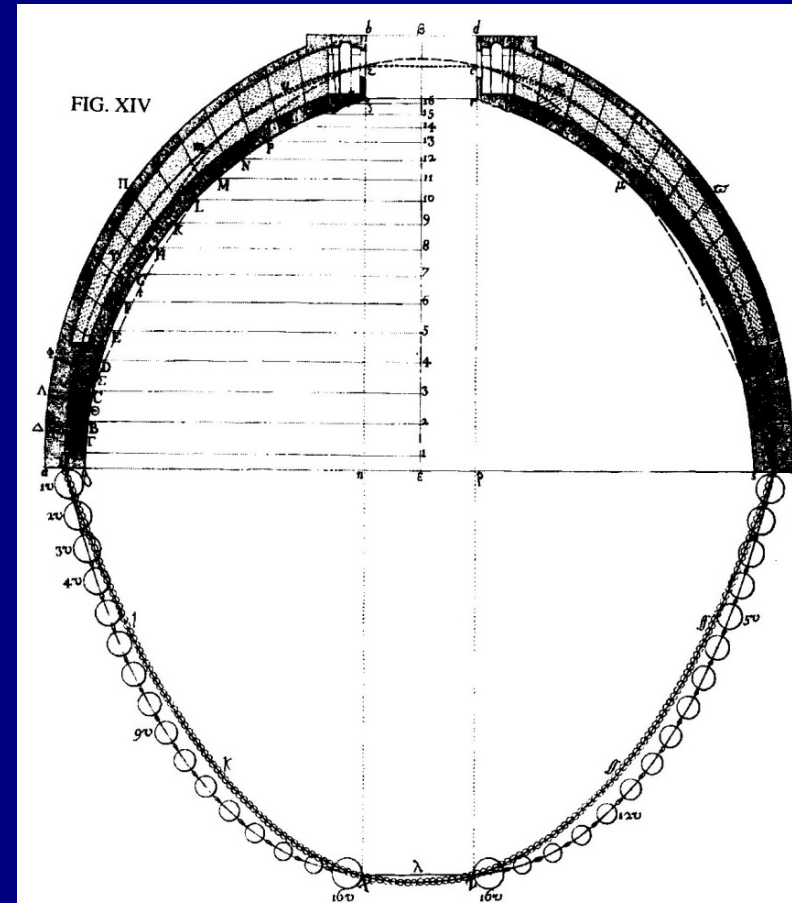


# Comportamento statico delle cupole (10/17)

Poleni applicò gli studi di Sterling sulla catenaria.

Prese in esame uno dei costoloni, lo divise in conci e, utilizzando un modellino sperimentale, trovò la curva di equilibrio secondo la quale si dispone la collana di sfere di peso proporzionale ad ogni concio, disposte secondo una scala geometrica rispetto al vero.

Il Poleni concluse che *“il profilo più conveniente da attribuire all’arco è quello per cui la fibra baricentrica risulti funicolare dei carichi su di esso agenti”*.



## Comportamento statico delle volte (11/17)

L'analisi corretta del funzionamento statico di una cupola non può ignorare, specialmente quando la cupola è “sottile”, che lo schema di funzionamento da adottare è quello **a piastra curva**, secondo cui la struttura si comporta come “un continuo”.

Nel comportamento a piastra, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, lo stato di sollecitazione complessivo può essere rappresentato come la somma di due differenti stati di sollecitazione:

1) lo stato di sollecitazione **membranale**

( che determina le sollecitazioni derivanti dai carichi agenti );

2) lo stato di sollecitazione **flessionale**

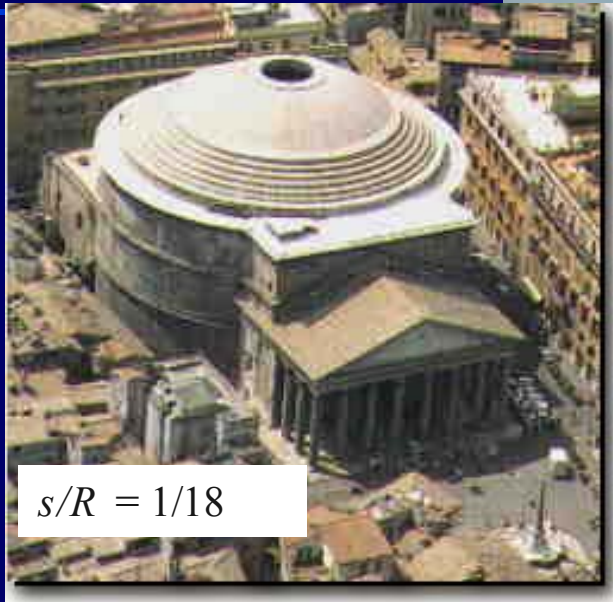
( che determina le sollecitazioni derivanti dai vincoli al contorno).

## Comportamento statico delle volte (12/17)

**Le sollecitazioni (e le conseguenti deformazioni) in regime membranale possono essere determinate per qualsiasi distribuzione di forze esterne applicate. Esse possono essere ritenute conclusive esclusivamente per le strutture totalmente prive di rigidità flessionale ( ad esempio le “**tensostrutture**”, che hanno spessore praticamente nullo se rapportato alle dimensioni globali).**

**Per le strutture di spessore finito lo studio del regime membranale rappresenta la prima fase dello studio . Sui risultati che da esso derivano si fonda il secondo studio, quello flessionale .**

# Comportamento statico delle cupole (13/17)



*Il Pantheon a Roma del 120 d.C. e una copertura di H. Isler del 1968*

**1)** Le membrane curve sono **strutture sottili prive di rigidità flessionale e torsionale**: sono in ogni punto soggette a sforzi ‘membranali’ ovvero agenti nel piano tangente, risultando così esenti da momenti flettenti e torcenti e da azioni taglianti agenti in direzione perpendicolare alla superficie media.

# Comportamento statico delle cupole (14/17)



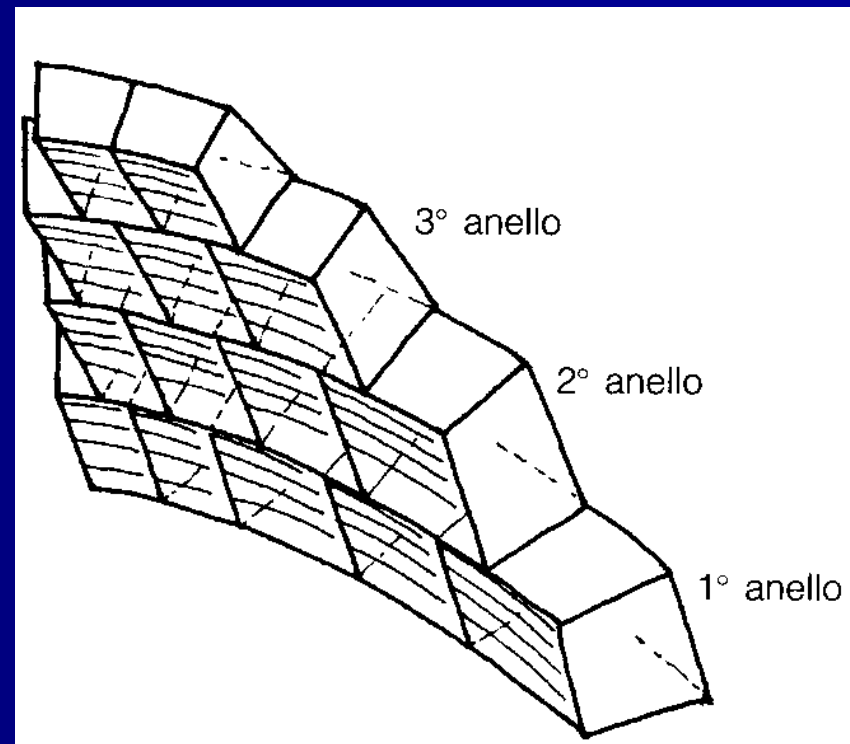
*Il Pantheon a Roma del 120 d.C. e una copertura di H. Isler del 1968*

**2)** Nel regime di membrana le equazioni di equilibrio sono necessarie e sufficienti a risolvere lo stato tensionale: **il problema è staticamente determinato.**

## Comportamento statico delle cupole (15/17)

**In termini più precisi, la cupola viene concepita come una volta nella quale intradosso ed estradosso sono due superfici di rivoluzione generate intorno allo stesso asse verticale.**

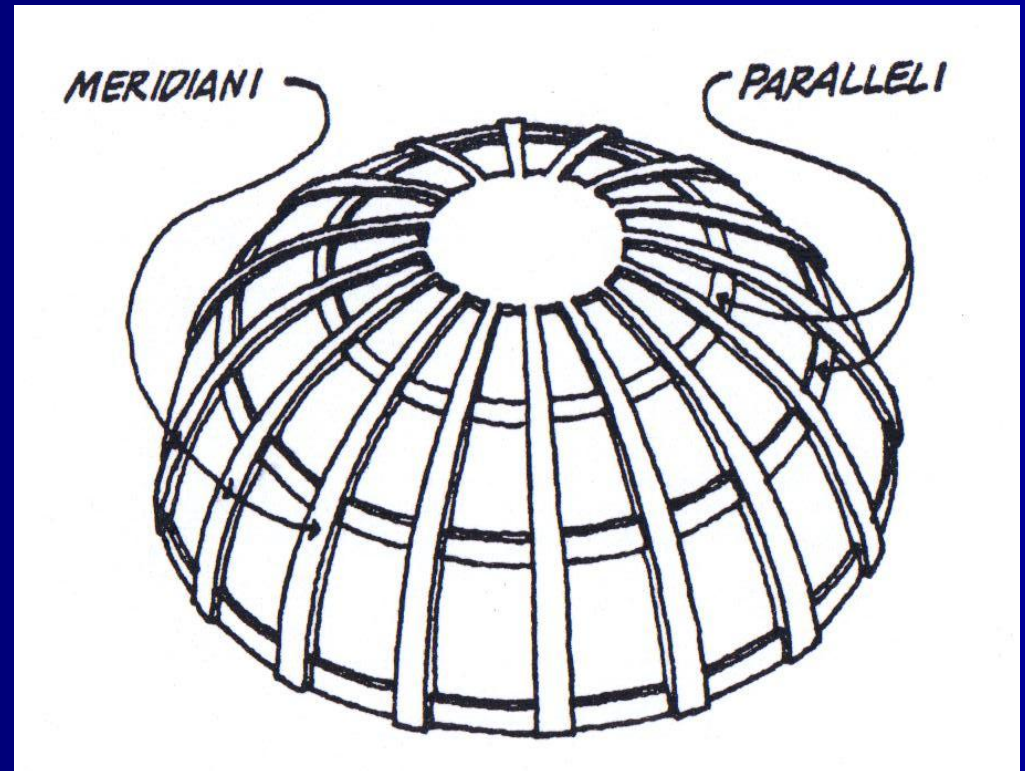
**Nella pratica corrente si usa considerare cupole anche quelle strutture nelle quali le sezioni orizzontali di intradosso ed estradosso sono poligoni regolari, e che risultano formate da tanti fusi cilindrici, a sesto rialzato e con il vertice comune.**



# Comportamento statico delle cupole (16/17)

Nel modello “continuo” di comportamento a piastra curva, la cupola è concepita come costituita da un graticcio di travi curve, tridimensionale e continuo.

Le travi sono disposte secondo due ordini mutuamente ortogonali, denominate *meridiani* e *paralleli*.



# Comportamento statico delle cupole (17/17)

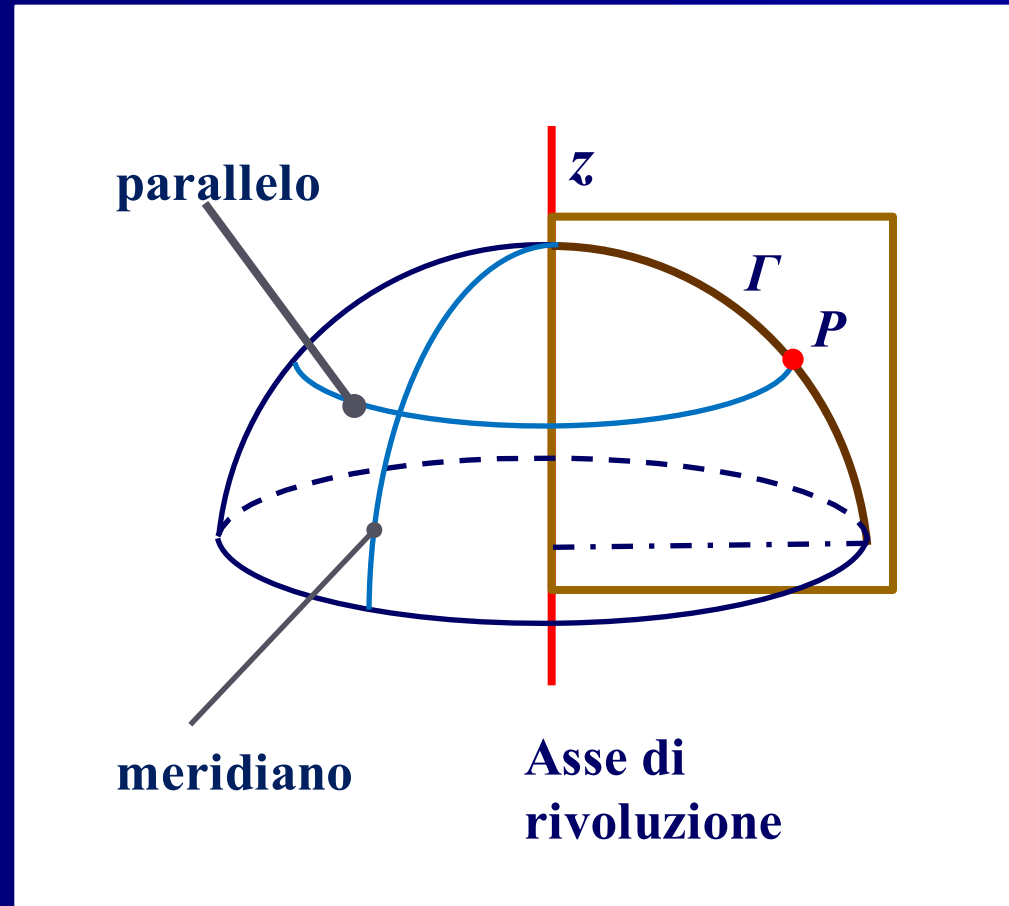
Si analizza il comportamento delle cupole come gusci assialsimmetrici in regime di sforzi membranali: le uniche sollecitazioni presenti sono le sollecitazioni agenti nel piano tangente, costanti nello spessore:  $N_1$  (sforzo normale per unità di lunghezza agente secondo il meridiano);  $N_2$  (idem, ma agente secondo il parallelo);  $N_{12}$  (sforzo tangenziale); quest'ultimo è nullo, per ragioni di simmetria, se anche le forze esterne rispettano la simmetria assiale del problema.



# La cupola: definizioni geometriche (1/7)

Facciamo riferimento a “**cupole di rivoluzione**”, ovvero a strutture la cui superficie media si ottiene a partire da un asse  $z$  facendogli ruotare intorno una opportuna curva  $\Gamma$  detta “**meridiano**”.

Il generico punto  $P$ , appartenente alla curva meridiana  $\Gamma$ , ruotando intorno a  $z$  descrive una circonferenza che viene detta “**parallelo**”.



## La cupola: definizioni geometriche (2/7)

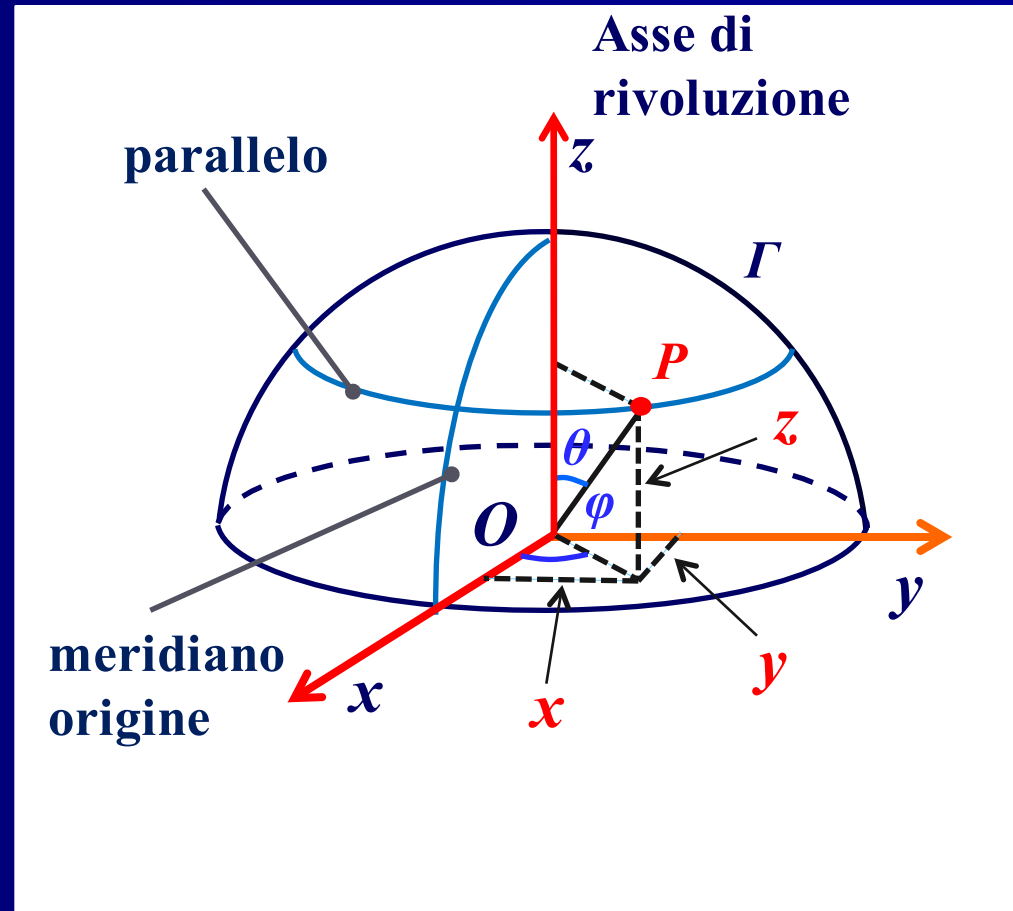
Assunto un sistema di riferimento ortogonale  $O(x, y, z)$ , il generico punto  $P$  è individuato dalle tre coordinate cartesiane  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Queste coordinate si possono esprimere anche in forma parametrica come:

$$x = x(\theta, \varphi) \quad y = y(\theta, \varphi)$$

$$z = z(\theta, \varphi)$$

Eliminando i due parametri  $\theta$  e  $\varphi$  si perviene all'equazione cartesiana della superficie della cupola:

$$z = z(x, y)$$

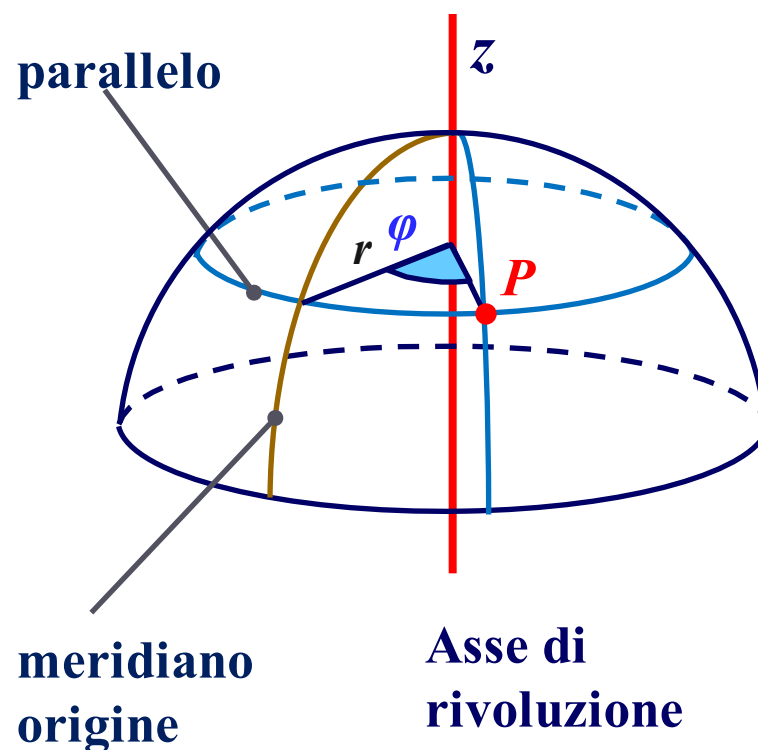


## La cupola: definizioni geometriche (3/7)

Gli andamenti più comuni del meridiano in una **cupola di rivoluzione** sono evidentemente quello **circolare, parabolico, a catenaria**, etc .

Qualora la curva del meridiano sia preventivamente assegnata, per individuare un generico punto  $P$  sulla superficie media della cupola sono sufficienti due parametri.

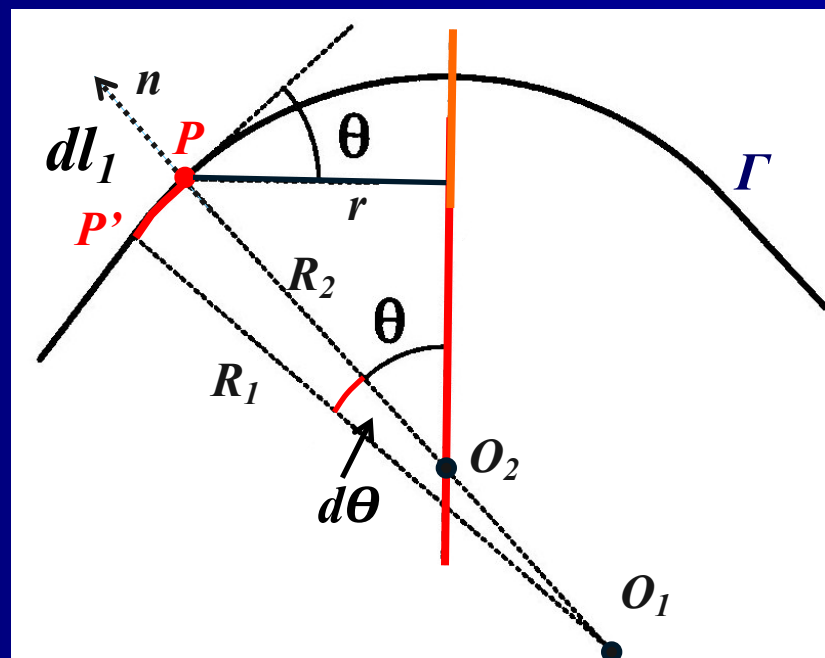
I parametri normalmente utilizzati sono i due angoli  $\varphi$  e  $\theta$ .



## La cupola: definizioni geometriche (4/7)

L'angolo  $\varphi$  è compreso fra il raggio  $r$  del parallelo contenente  $P$ , e passante per il meridiano origine, e quello del medesimo parallelo passante per il meridiano che contiene appunto  $P$ .

L'angolo  $\theta$  è invece formato dalla normale  $n$  alla superficie della cupola nel punto  $P$  con l'asse di rivoluzione  $z$ .



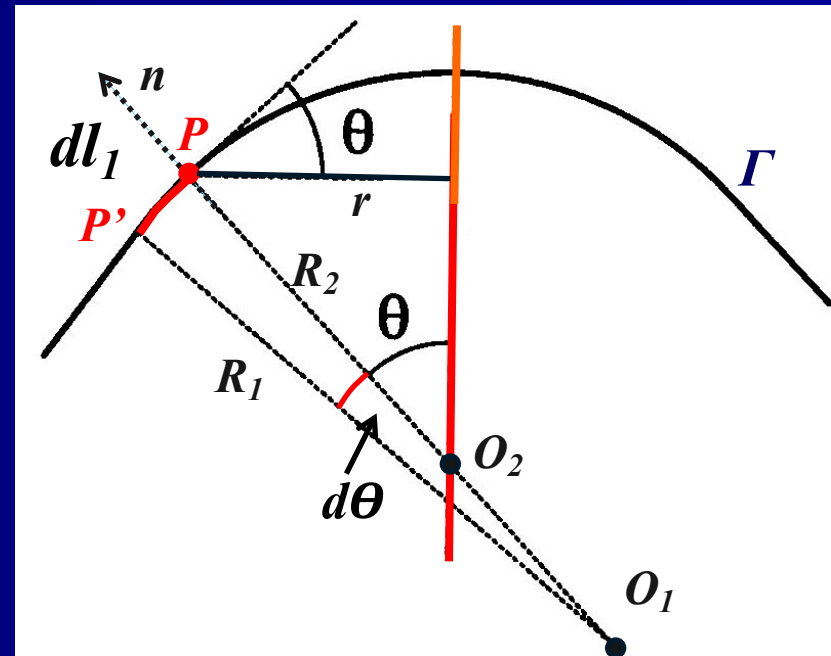
## La cupola: definizioni geometriche (5/7)

La normale alla superficie passante per  $P'$  (a distanza infinitesima  $dl_1$  da  $P$ ) incontra  $n$  nel punto  $O_1$  detto **centro di curvatura del meridiano** in  $P$ , e forma un angolo infinitesimo  $d\theta$ . Risultata :  $dl_1 = R_1 d\theta$ .

La distanza  $R_1$  è detta **raggio di curvatura del meridiano** in  $P$ .

Il punto  $O_2$ , di intersezione di  $n$  con l'asse di rivoluzione, e la corrispondente distanza  $R_2$ , sono detti rispettivamente **centro** e **raggio di curvatura del parallelo** in  $P$ .

La distanza  $r$  è detta **raggio del parallelo**. Risultata :  $r = R_2 \sin \theta$



## La cupola: definizioni geometriche (6/7)

Se si considera un elemento di guscio infinitesimo, ritagliato nell'intorno del punto P, delimitato da 2 paralleli e da 2 meridiani, si osserva che i due archi di meridiano hanno lunghezza uguale:

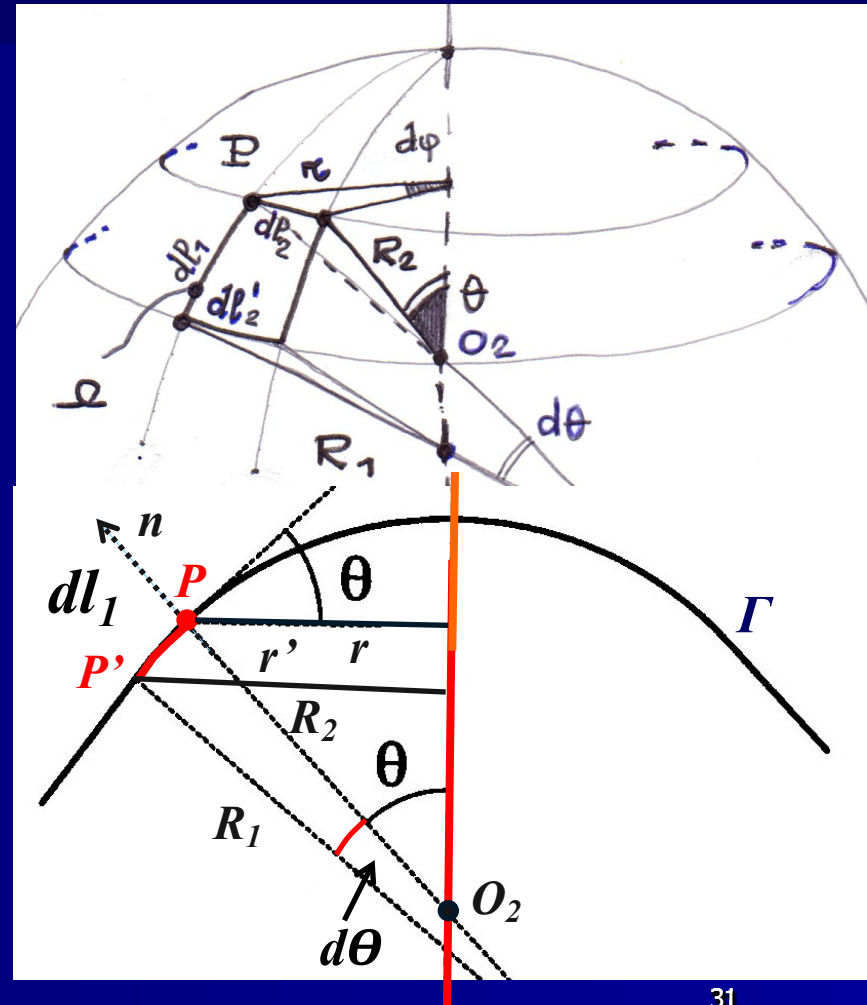
$$dl_1 = R_1 d\theta,$$

Gli archi di parallelo variano la loro lunghezza con l'angolo  $\theta$ . L'arco su P misura:

$$dl_2 = R_2 \cdot \sin \theta d\varphi = r \cdot d\varphi.$$

Quello a distanza infinitesima ha lunghezza  $d'l_2$  e differisce da  $dl_2$  per infinitesimi di ordine superiore:

$$d'l_2 = \left( r + \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta \right) d\varphi$$

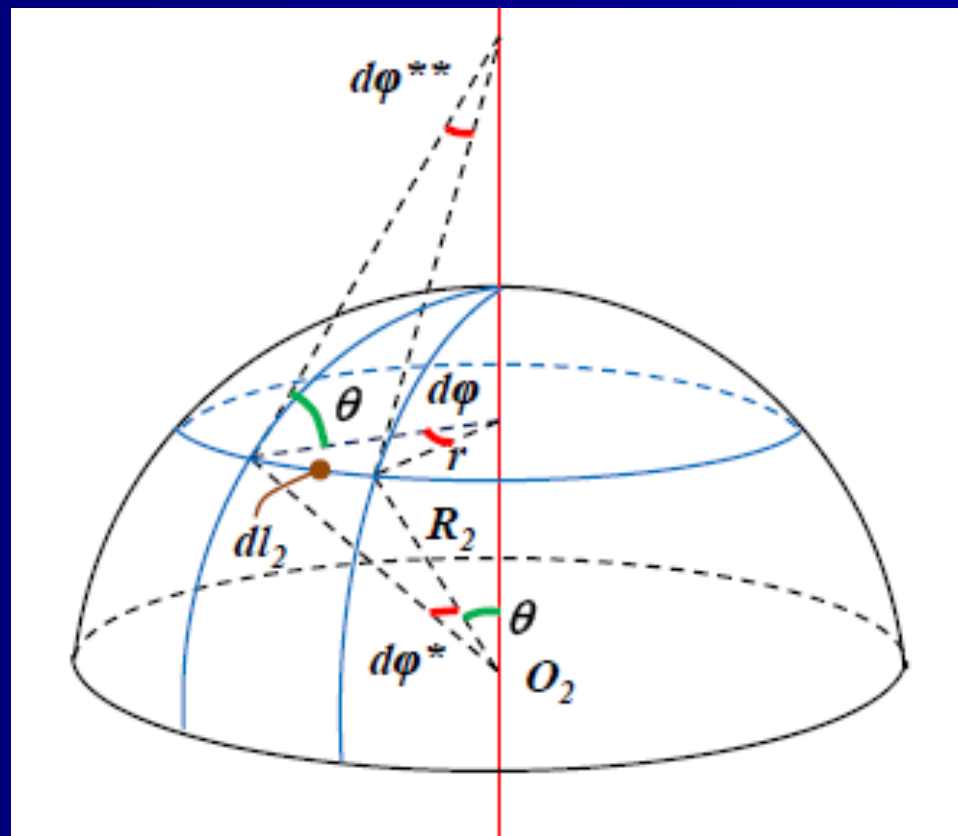


## La cupola: definizioni geometriche (7/7)

Definiamo due enti geometrici, detti rispettivamente *cono normale* e *cono tangente*. Si tratta di due superfici rigate, formate dalle normali alla superficie (rispettivamente: dalle tangenti alla superficie) che si appoggiano ai punti di un dato parallelo. Semplici considerazioni geometriche mostrano che  $d\varphi$  proiettato fra le generatrici dei due coni diventa:

$$d\varphi^* = d\varphi \operatorname{sen} \theta,$$

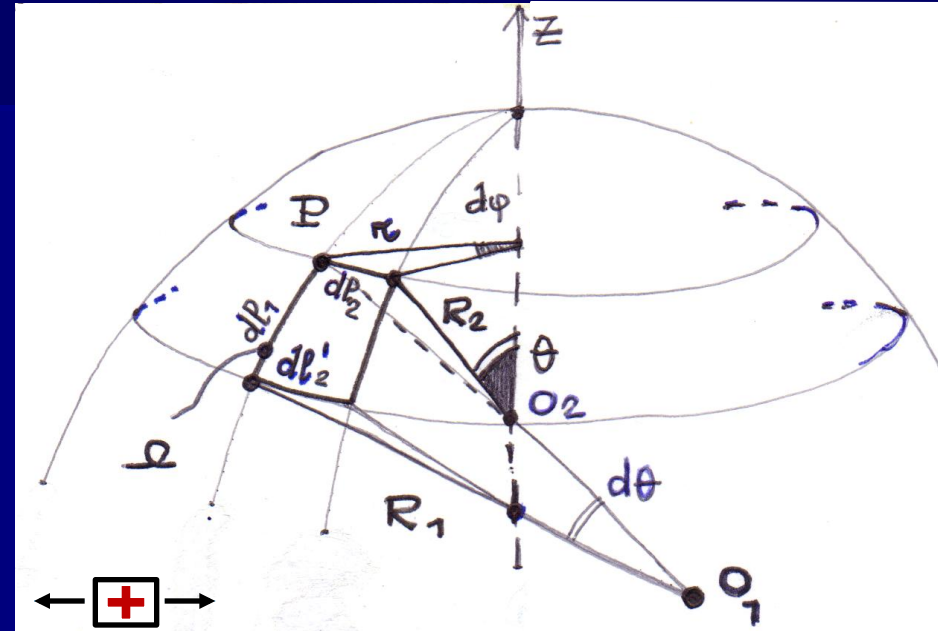
$$d\varphi^{**} = d\varphi \operatorname{cos} \theta$$



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (1/7)

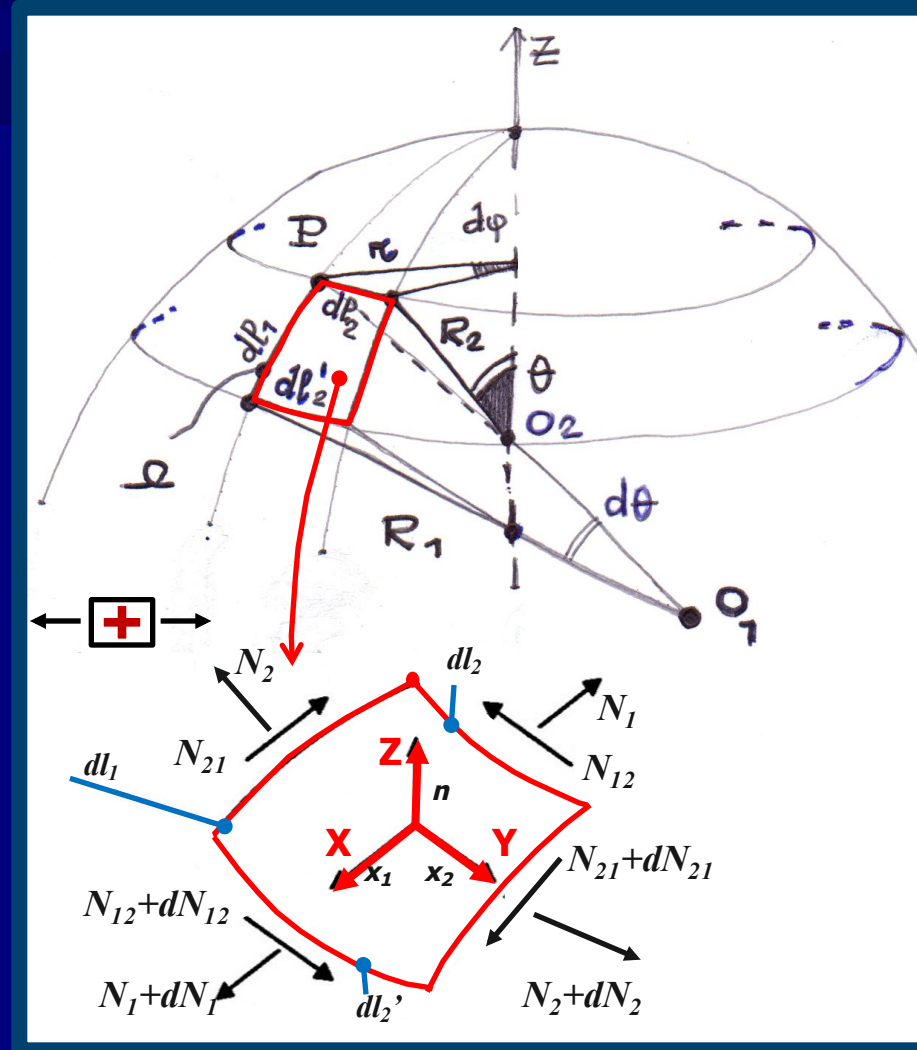
Si considera un **comportamento puramente membranale**: la cupola viene ritenuta priva di rigidezza flessionale e soggetta a vincoli compatibili con un regime di sollecitazione privo di tali azioni interne; gli sforzi agenti punto per punto nel piano tangente sono in grado di equilibrare da soli i carichi esterni  $p$  ( $x, y, z$ ).

Ricordiamo che questa ipotesi di membrana conduce a equazioni facilmente risolubili, ma sottostima l'effettivo stato tensionale (trascura le sollecitazioni derivanti dai reali vincoli al contorno).



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (2/7)

- Estraiamo dalla cupola un elemento di volume infinitesimo del secondo ordine, avente le due dimensioni in pianta infinitesime ( $dl_1$  e  $dl_2$ ) e lo spessore  $s$  finito.
- Questo elementino è in equilibrio sotto l'azione :
  - a) delle componenti cartesiane del carico esterno distribuito  $p(x, y, z)$ , dirette secondo gli assi,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  ;
  - b) degli sforzi per unità di lunghezza  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12} = N_{21}$  .



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (3/7)

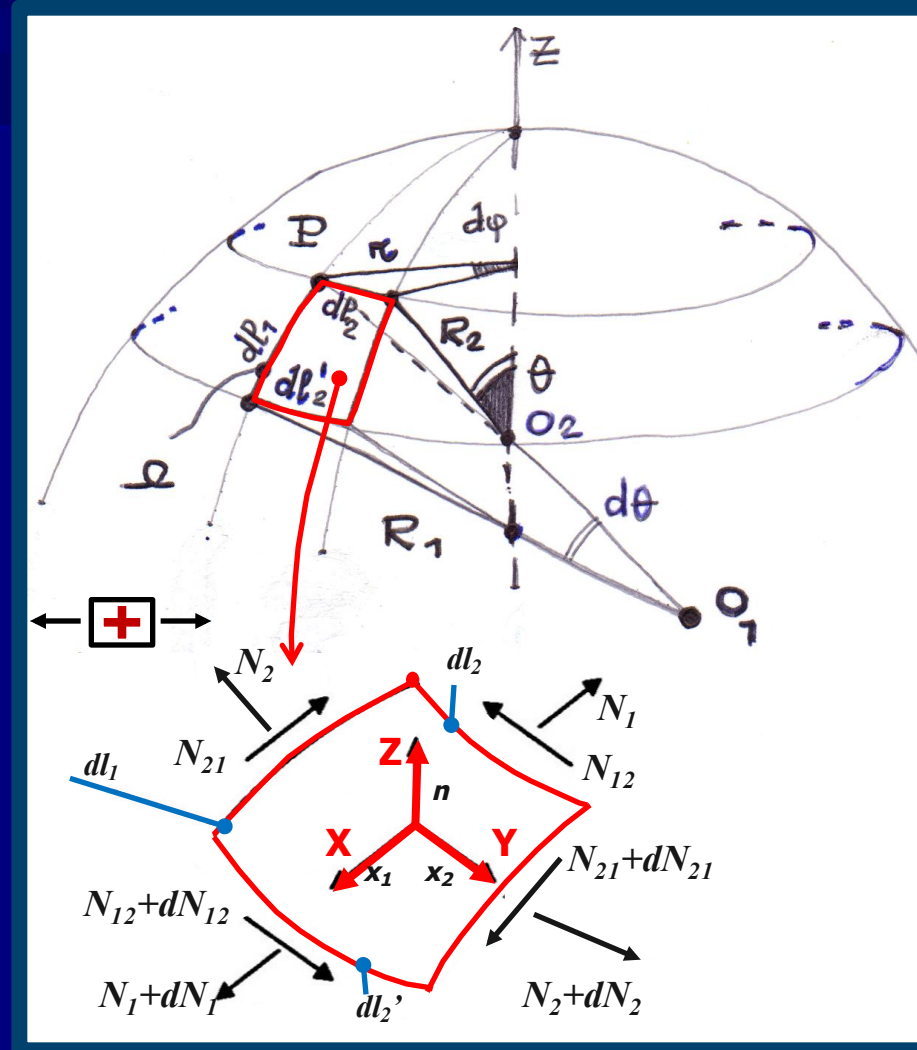
- Gli incrementi delle azioni interne, dovuti alla continuità, sono infinitesimi del primo ordine e ovviamente sono dati da:

$$dN_1 = \frac{\partial N_1}{\partial \theta} d\theta$$

$$dN_2 = \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dN_{12} = \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} d\theta$$

$$dN_{21} = \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} d\varphi$$



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (4/7)

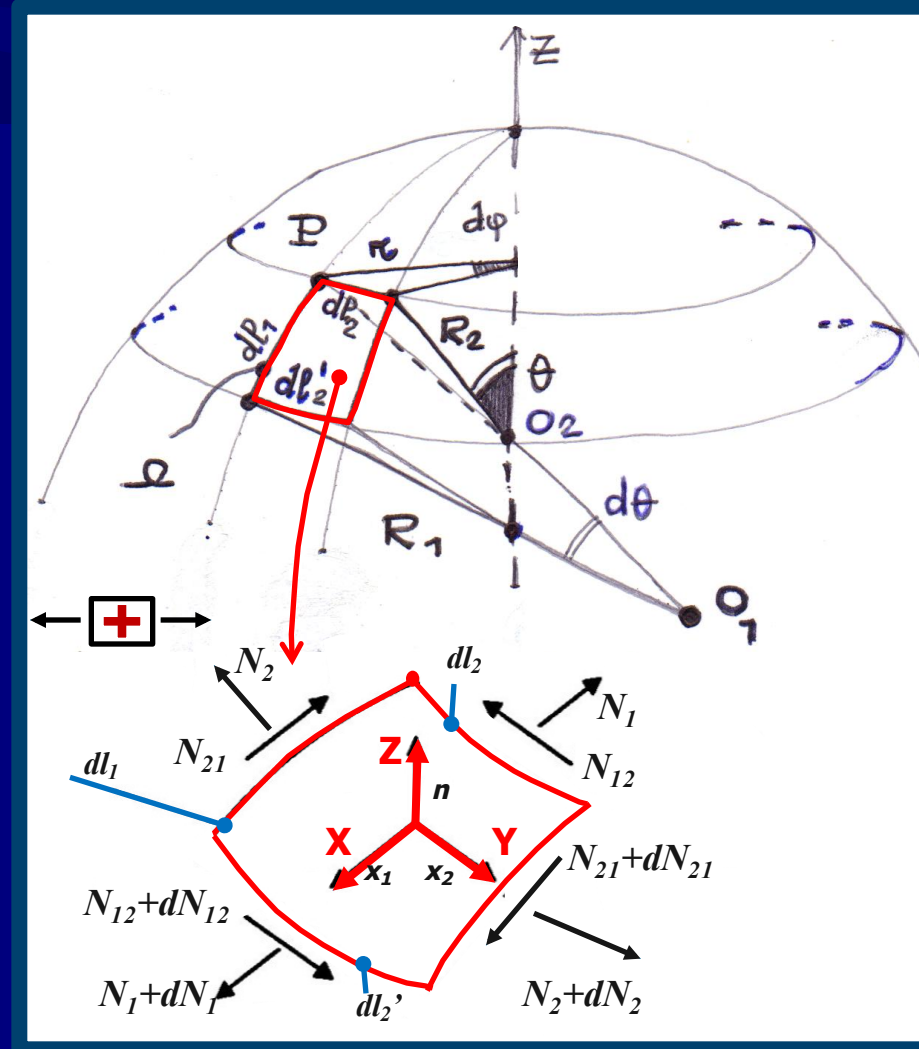
Lo sforzo normale per unità di lunghezza  $N_1$  risulta diretto secondo la direzione dell'asse  $x_1$  (tangente al meridiano).

Lo sforzo normale per unità di lunghezza  $N_2$  è diretto secondo la tangente al parallelo  $x_2$ .

Lo sforzo tangenziale per unità di lunghezza  $N_{12} = N_{21}$  agisce nel piano tangente alla superficie.

Noti  $S_1, S_2, T_{12}$  le tensioni unitarie locali, uniformi nello spessore, sono date da:

$$\sigma_1 = N_1/s; \quad \sigma_2 = N_2/s; \quad \tau = N_{12}/s.$$



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (5/7)

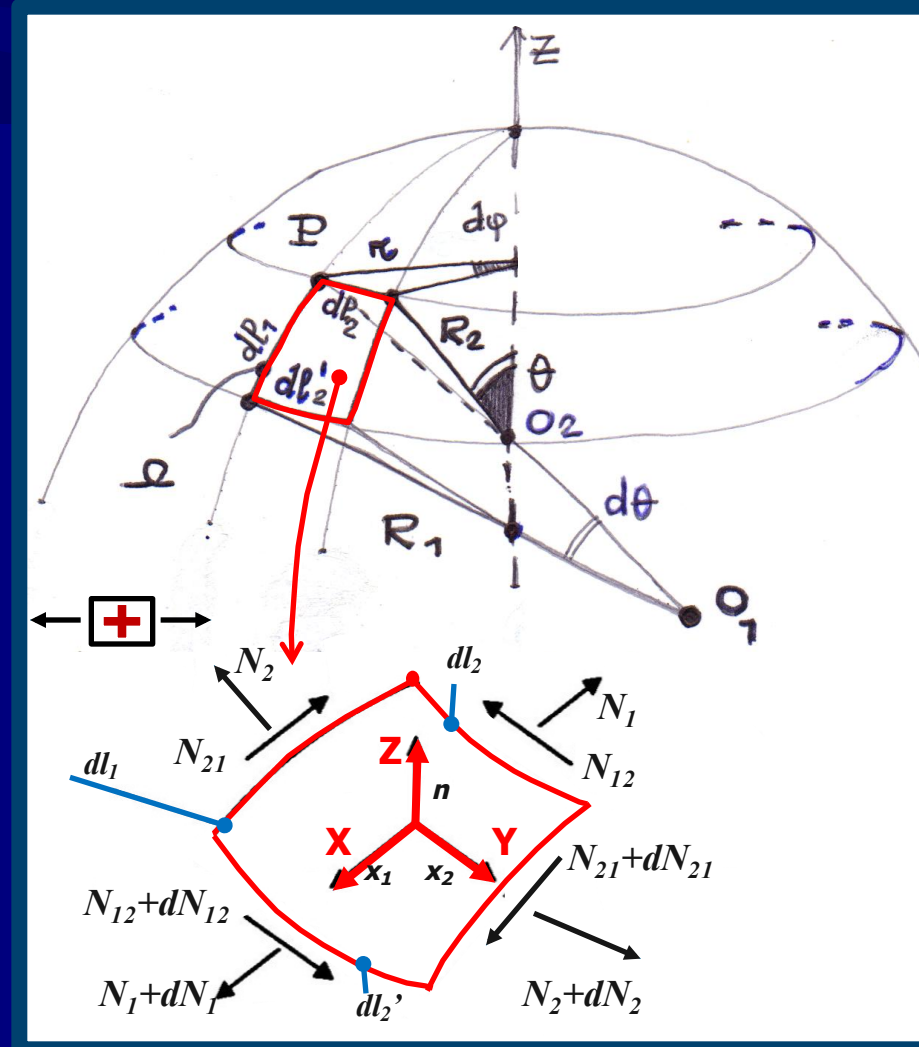
Se si considera la condizione di equilibrio secondo la direzione della normale  $n$  uscente dal piano tangente, con riferimento a un elemento di guscio infinitesimo delimitato da 2 paralleli,  $ac$  e  $bd$ , e da 2 meridiani,  $ab$  e  $cd$ , si osserva che i due archi di meridiano hanno lunghezza uguale

$$dl_1 = R_1 d\theta,$$

mentre l'arco di parallelo  $ac$  misura

$$dl_2 = R_2 \cdot \sin \theta d\psi = r \cdot d\psi.$$

L'arco di parallelo  $bd$  ha lunghezza  $d'l_2$  e differisce da  $dl_2$  per infinitesimi di ordine superiore.



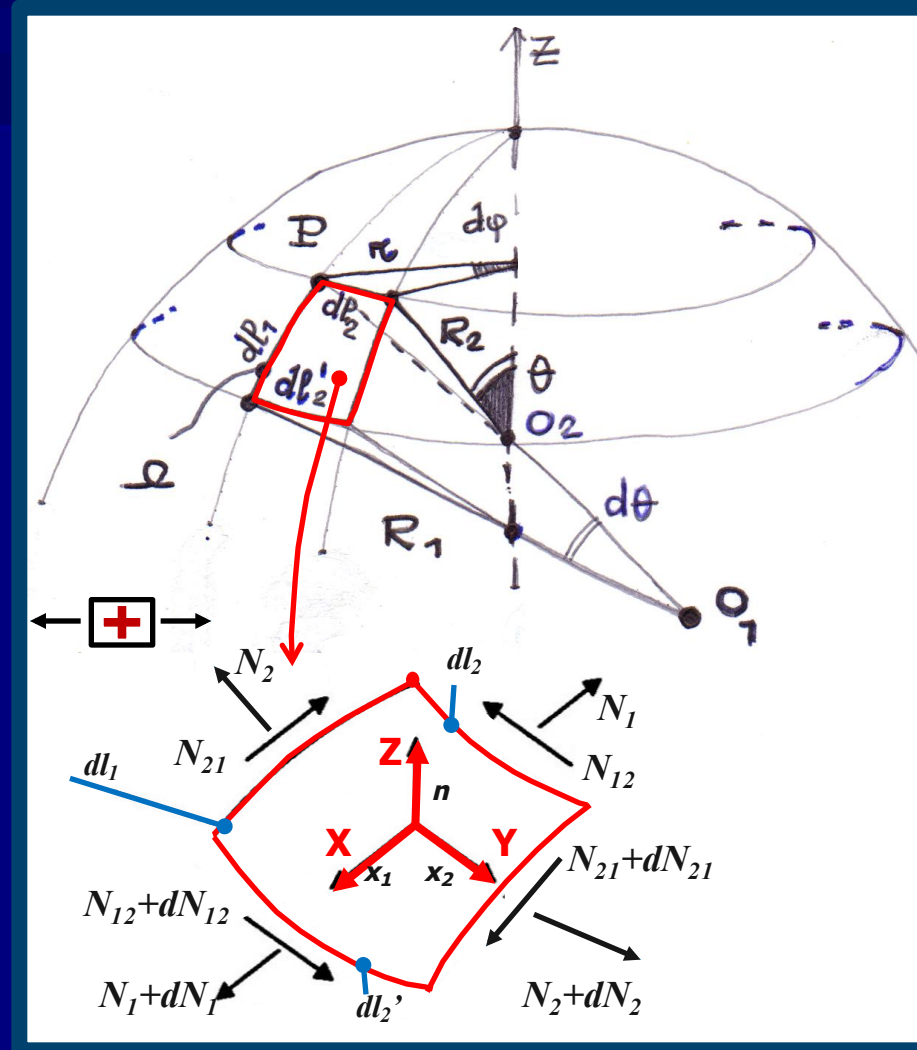
# La cupola: premesse alle equazioni governanti (6/7)

L'elemento di volume di cupola, a meno di infinitesimi, ha area:

$$dA = dl_1 \cdot dl_2 = R_1 d\theta \cdot r d\varphi$$

dove si rammenta che l'elemento di arco  $dl_1$  si può esprimere come prodotto del raggio di curvatura del meridiano  $R_1$  e dell'angolo sotteso,  $d\theta$  e l'elemento  $dl_2$  come prodotto del raggio del parallelo per l'angolo sotteso  $d\varphi$ .

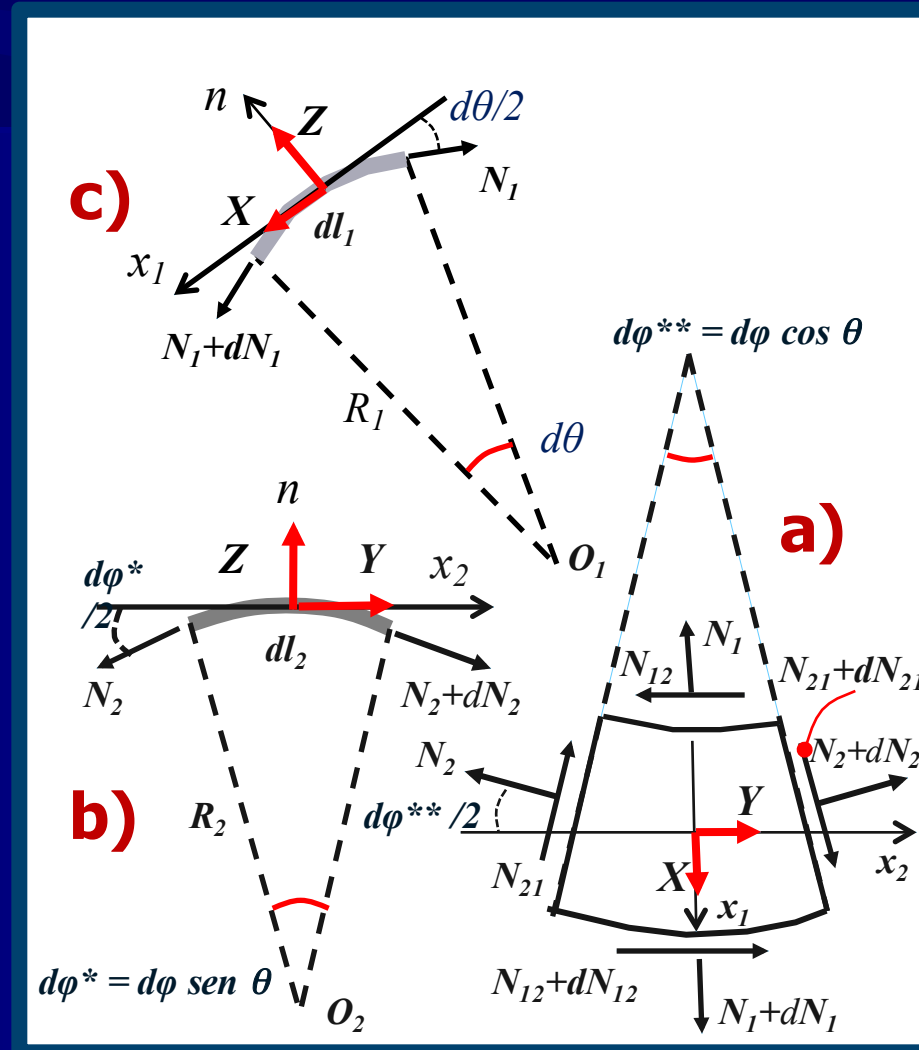
L'equilibrio alla traslazione nelle direzioni  $n$ ,  $x_1$  e  $x_2$  fornisce un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_{12}$ .



# La cupola: premesse alle equazioni governanti (7/7)

Conviene nel seguito, per scrivere le equazioni indefinite di equilibrio dell'elementino, fare riferimento anziché all'unica vista tridimensionale, alle viste di esso dai tre assi coordinati  $n$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .

Questo semplificherà molto la trattazione potendosi meglio valutare le proiezioni delle azioni interne nella direzione degli assi.



# Sommario

## Introduzione

- **Le cupole come strutture di copertura**
- **Comportamento statico delle cupole**

## Le cupole in regime membranale

- **La cupola: definizioni geometriche**
- **La cupola: premesse alle equazioni governanti**
- **Le equazioni governanti**
- **le membrane curve in regime assialsimmetrico**
- **Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali**

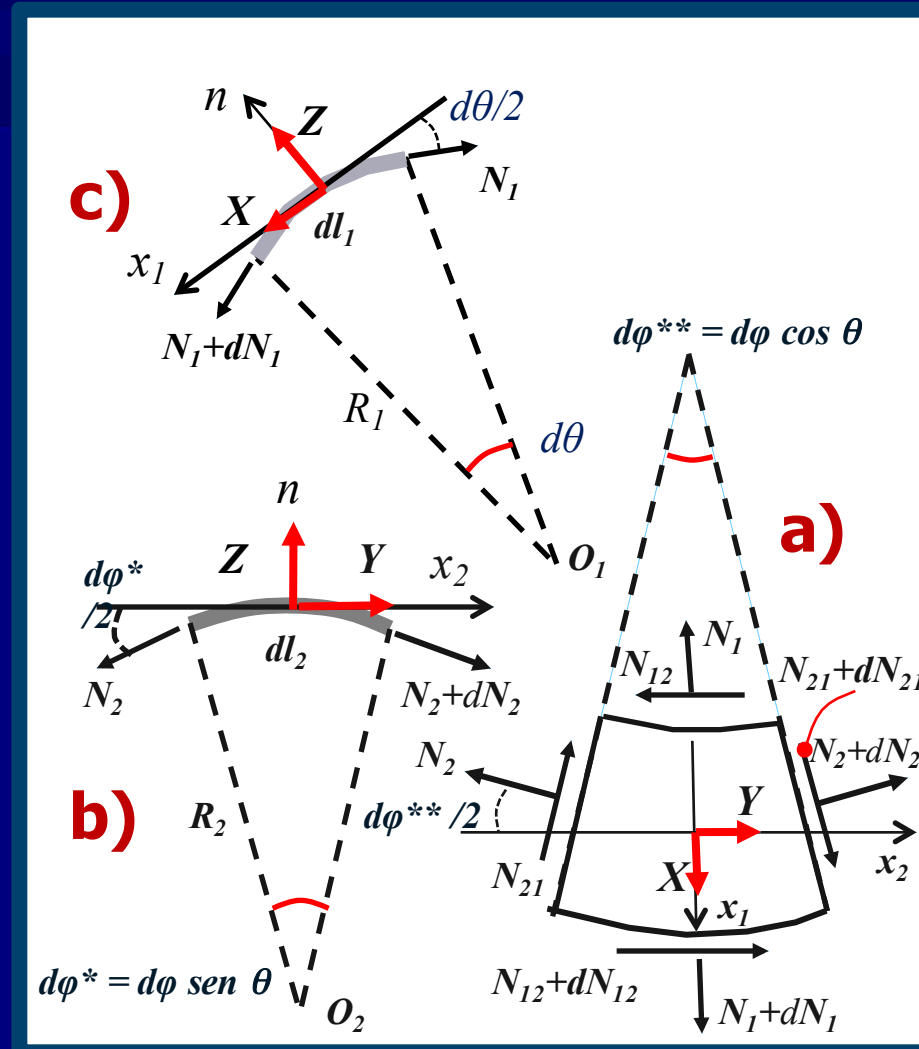
## Esempi applicativi

- **Cupola aperta in sommità. Cupola dotata di lanterna**
- **Analisi di una volta a vela. Consolidamento.**

# La cupola: le equazioni governanti (1/9)

Conviene nel seguito, per scrivere le equazioni indefinite di equilibrio dell'elementino, fare riferimento anziché all'unica vista tridimensionale, alle viste di esso dai tre assi coordinati  $n$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .

Questo semplificherà molto la trattazione potendosi meglio valutare le proiezioni delle azioni interne nella direzione degli assi.



# La cupola: le equazioni governanti (2/9)

## Equilibrio in direzione $x_1$

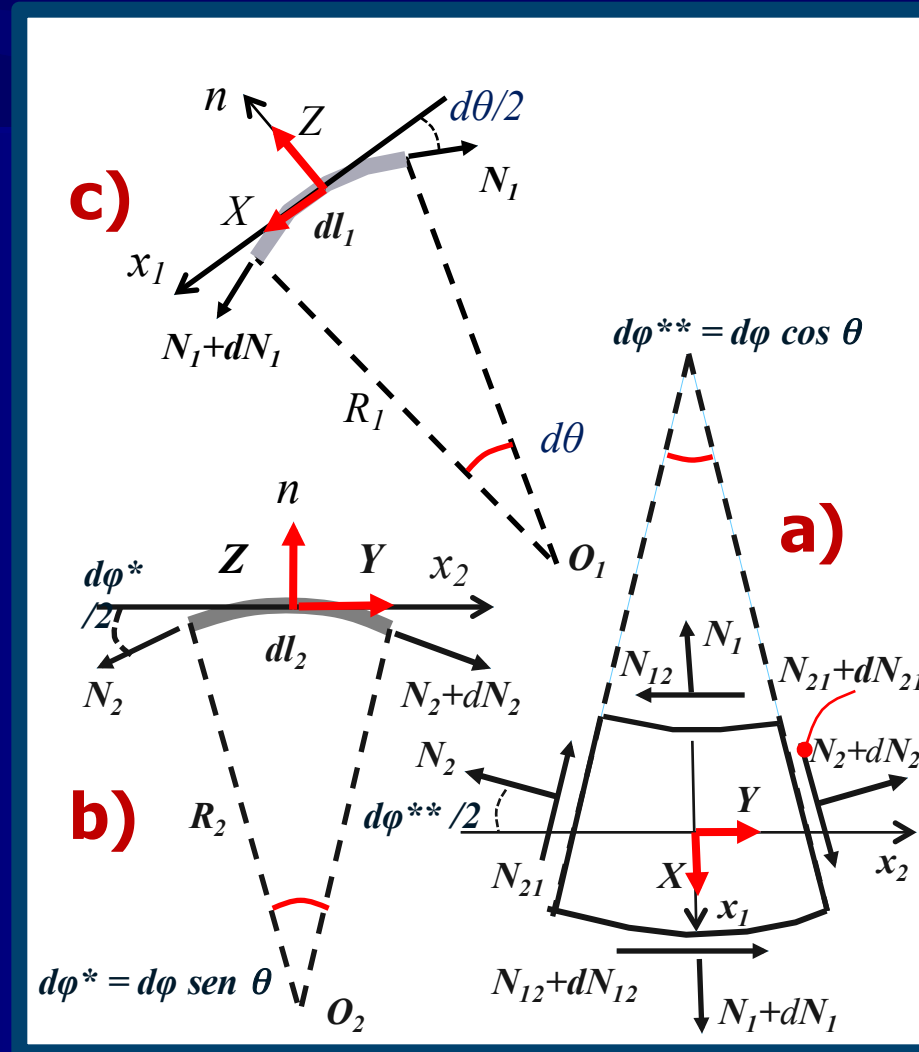
Sono ininfluenti le componenti del carico esterno  $Z$  e  $Y$ .  
Per quanto concerne le azioni interne sono ininfluenti:

$$N_{12} \quad (N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} d\theta)$$

perché hanno retta d'azione giacente su superfici ortogonali alla direzione del meridiano.

Considereremo nell'ordine i contributi di :

$$N_1 \quad N_{21} \quad N_2 \quad X$$



# La cupola: le equazioni governanti (3/9)

## Equilibrio in direzione $x_1$

Contributo di  $N_1$

$$\left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \theta} d\theta\right) \left(r + \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta\right) d\varphi \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - N_1 r d\varphi \cdot \cos \frac{d\theta}{2}$$

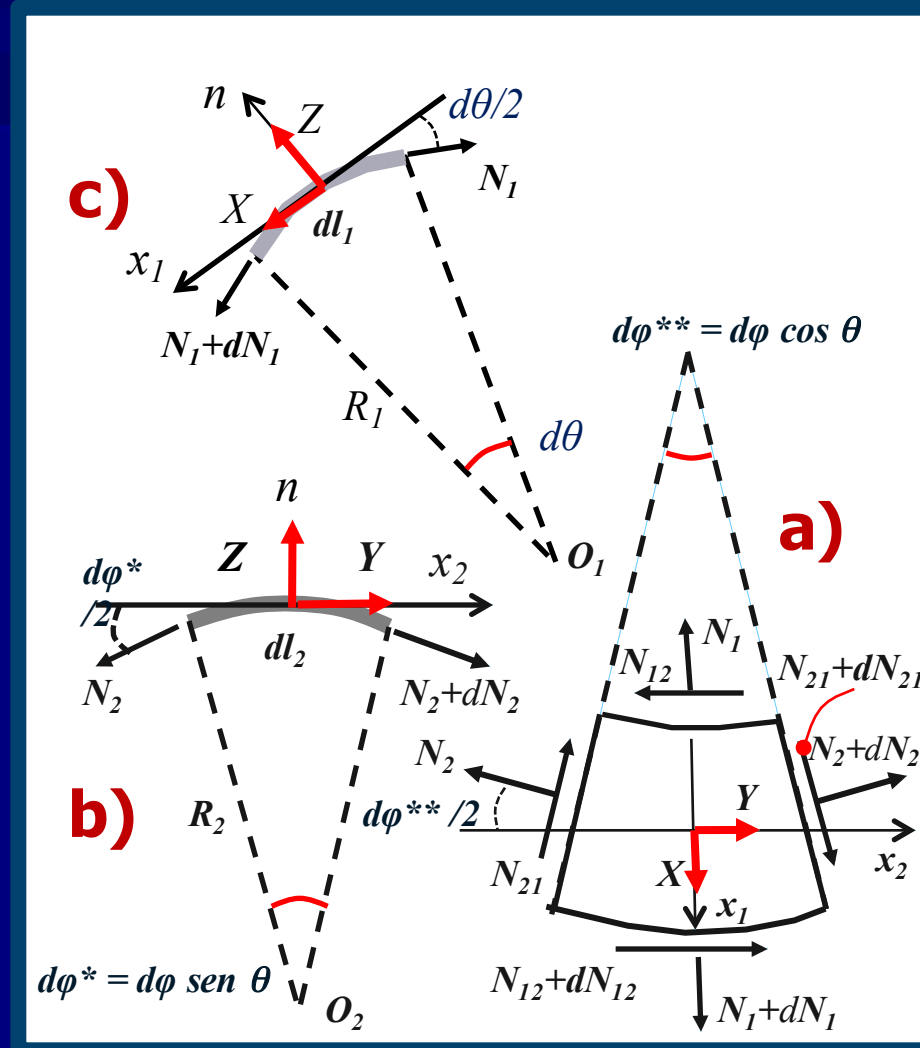
essendo:  $\cos \frac{d\theta}{2} \cong 1$

si ottiene:

$$N_1 r d\varphi + N_1 \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta d\varphi + \frac{\partial N_1}{\partial \theta} d\theta r d\varphi + \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta d\theta d\varphi - N_1 r d\varphi$$

semplificando e trascurando il termine infinitesimo di ordine superiore:

$$\frac{\partial(r N_1)}{\partial \theta} d\theta d\varphi$$





# La cupola: le equazioni governanti (5/9)

## Equilibrio in direzione $x_1$

Contributo di  $N_2$

$$- \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi \right) R_1 d\theta \cos \frac{d\varphi^*}{2} \sin \frac{d\varphi^{**}}{2}$$

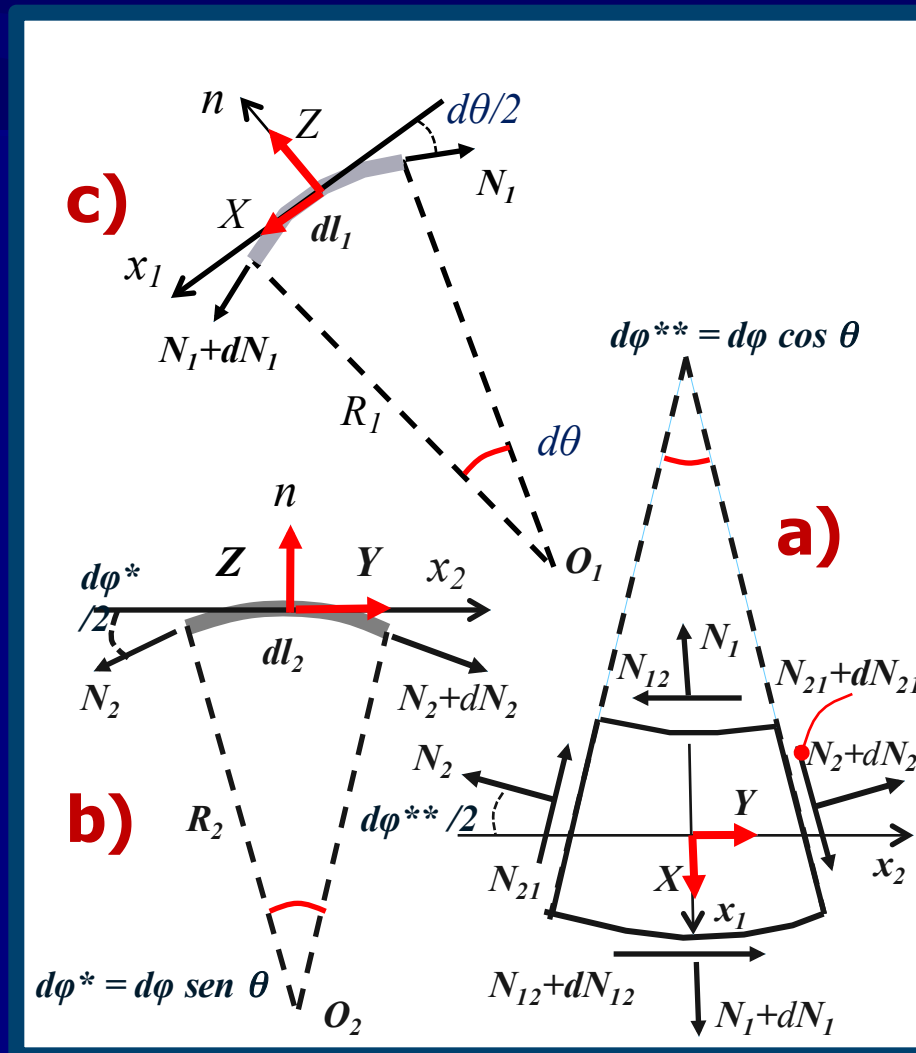
$$- N_2 R_1 d\theta \cdot \cos \frac{d\varphi^*}{2} \sin \frac{d\varphi^{**}}{2}$$

essendo:  $\cos \frac{d\varphi^*}{2} \cong 1$ ,  $\sin \frac{d\varphi^{**}}{2} = \frac{d\varphi^{**}}{2}$   
 si ottiene:

$$- N_2 R_1 d\theta \frac{d\varphi^{**}}{2} - \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi R_1 d\theta \frac{d\varphi^{**}}{2}$$

trascurando l'infinitesimo di ordine superiore e tenuto conto dell'espressione di  $d\varphi^{**}$  si ottiene:

$$- N_2 R_1 d\theta d\varphi \cos \theta$$



# La cupola: le equazioni governanti (6/9)

## Equilibrio in direzione $x_1$

Contributo di  $X$

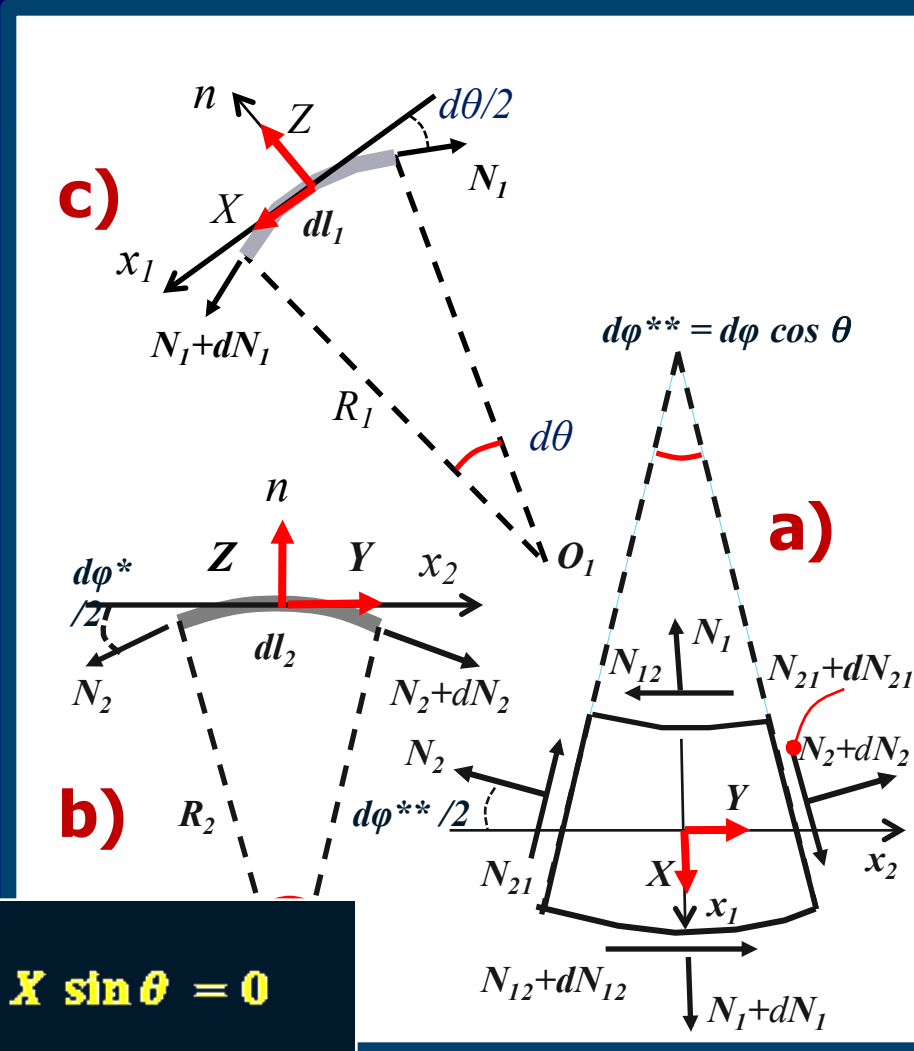
Risulta :  $X r d\varphi R_1 d\theta$

Sommando tutti i contributi precedenti risulta:

$$\frac{\partial(\tau N_1)}{\partial \theta} d\theta d\varphi + X r d\varphi R_1 d\theta + \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} R_1 d\varphi d\theta - N_2 R_1 d\theta d\varphi \cos \theta = 0$$

Dividendo tutti i termini per la quantità  $R_1 R_2 d\theta d\varphi$  si ottiene:

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial(\tau N_1)}{\partial \theta} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} - \frac{N_2}{R_2} \cos \theta + X \sin \theta = 0$$

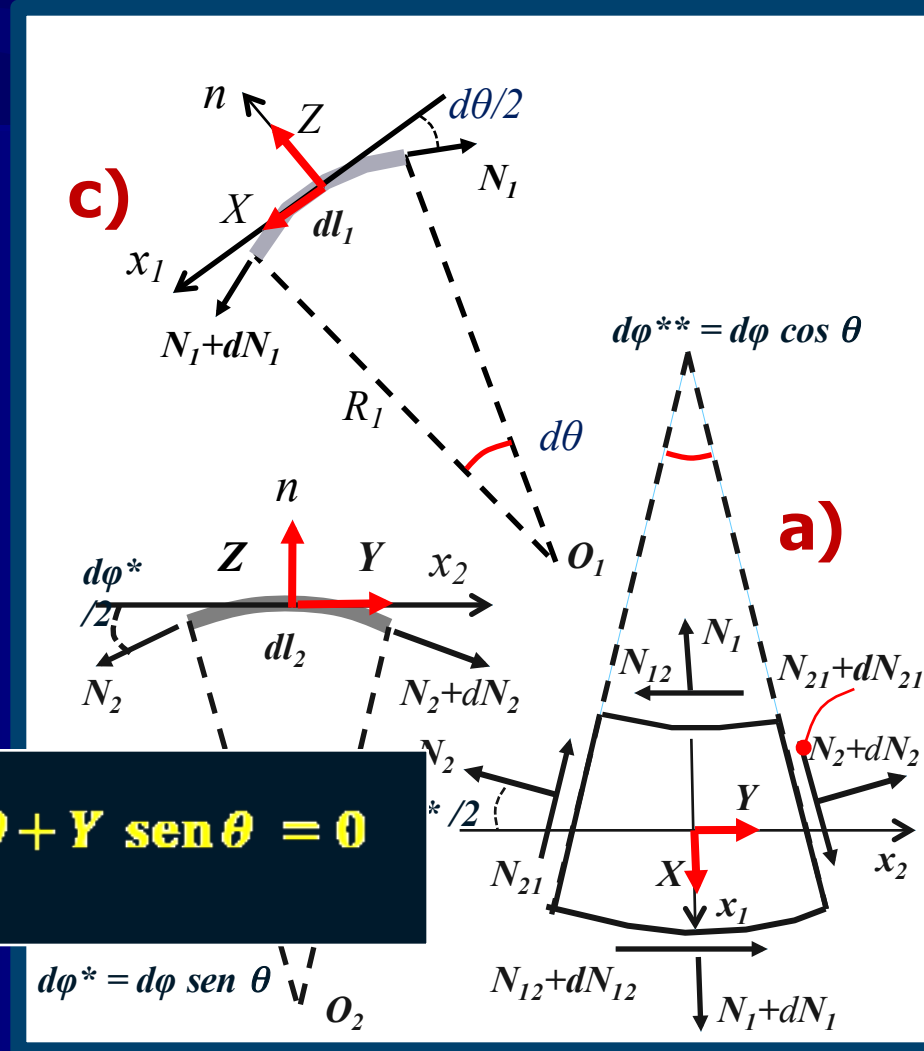


# La cupola: le equazioni governanti (7/9)

## Equilibrio in direzione $x_2$

Con procedura analoga risulta agevole mostrare che l'equazione che esprime l'equilibrio alla traslazione in direzione della tangente al parallelo, potendo trascurare il contributo di  $Z$ ,  $Y$  e  $N_{12}$ , si esprime come:

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial(r N_{12})}{\partial \theta} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{N_{21}}{R_2} \cos \theta + Y \sin \theta = 0$$



$$d\varphi^* = d\varphi \sin \theta$$

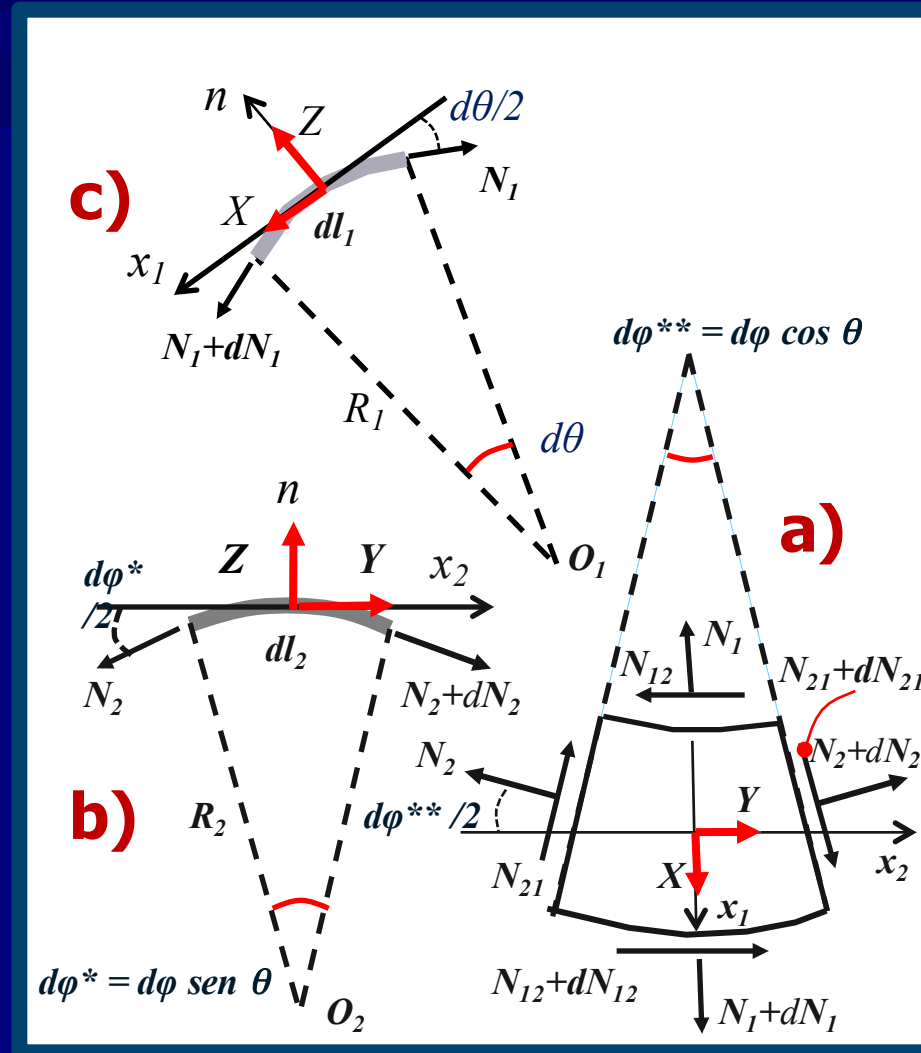
# La cupola: le equazioni governanti (8/9)

## Equilibrio in direzione $n$

Sono ininfluenti le componenti del carico esterno  $X$ ,  $Y$  e le azioni interne  $N_{12}$  ed  $N_{21}$ .

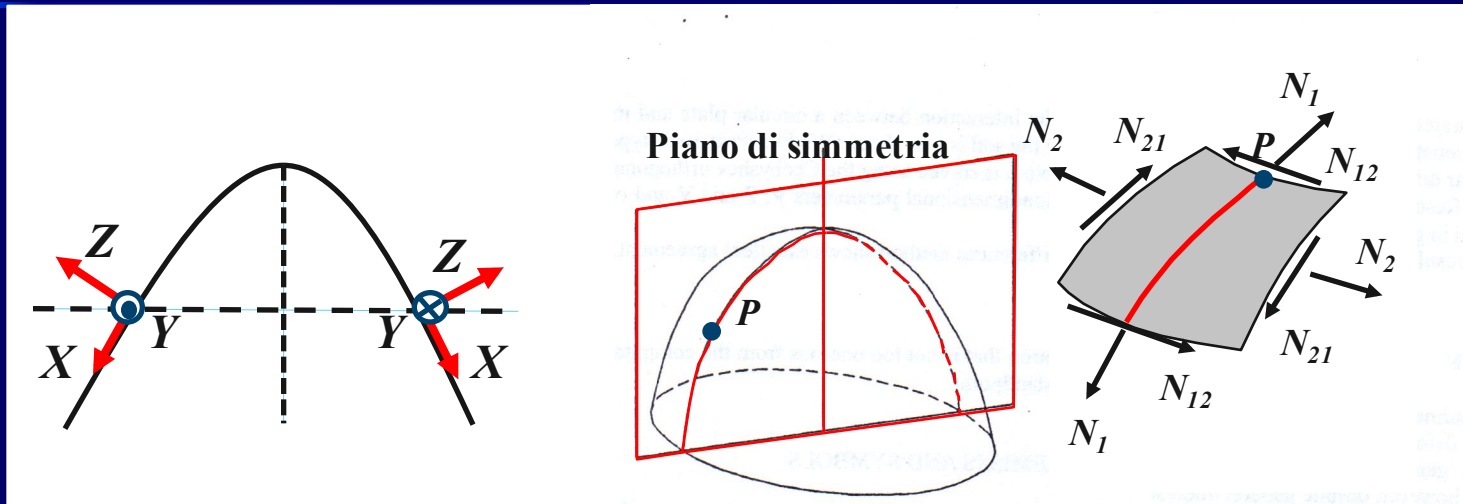
Con procedura analoga ai casi precedenti si perviene alla seguente equazione algebrica:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$





# Membrane curve in regime assialsimmetrico (1/12)

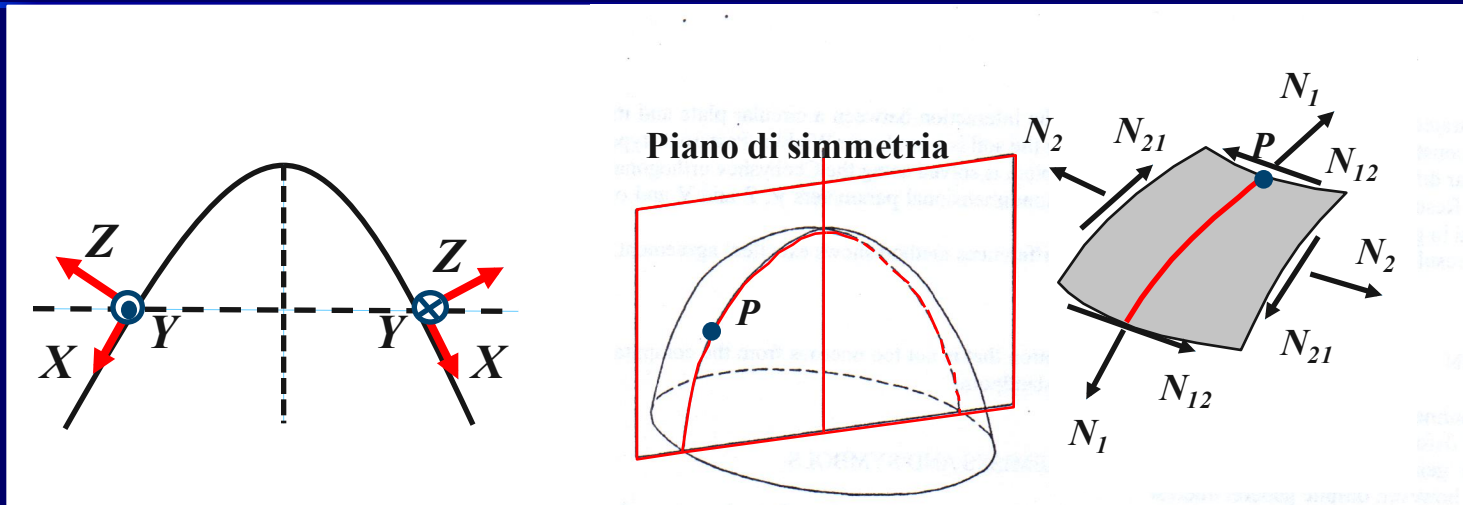


Se i carichi esterni rispettano la simmetria assiale, devono ridursi alle sole componenti  $Z$  (in direzione normale al piano tangente) e  $X$  (secondo la direzione tangente al meridiano).

Per simmetria la componente  $Y$  (tangente al parallelo) deve essere nulla ovunque :

$$Y \equiv 0.$$

# Membrane curve in regime assialsimmetrico (2/12)

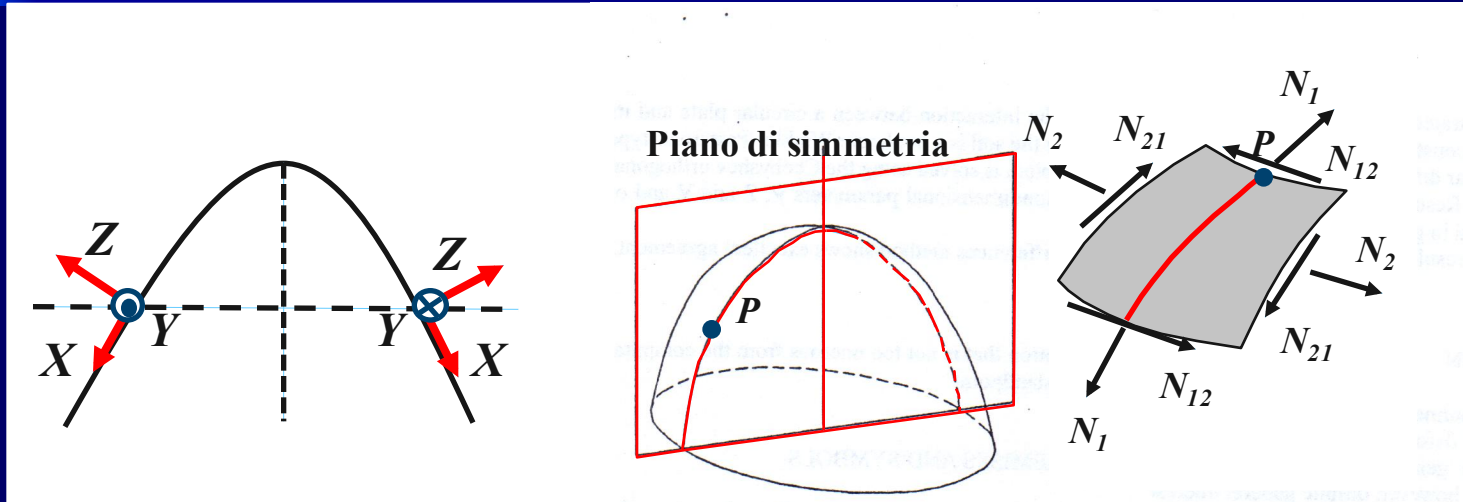


Analogamente per questioni di simmetria deve annullarsi lo sforzo tangenziale  $N_{21}$ . Tenuto conto della reciprocità delle azioni interne  $N_{21}$  e  $N_{12}$  deve essere :

$$N_{21} \equiv N_{12} \equiv 0$$

L'azione interna  $N_2$  deve essere costante in ogni punto di un dato parallelo.

# Membrane curve in regime assialsimmetrico (3/12)



Le azioni interne  $N_1$  ed  $N_2$  devono essere costanti in ogni punto di un dato parallelo. Possono variare al variare di  $\theta$  ma devono rimanere costanti al variare di  $\varphi$ .

Essendo :  $N_1 = N_1(\theta)$  e  $N_2 = N_2(\theta)$  deve anche essere:

$$\left( \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} \right) \equiv 0$$

# Membrane curve in regime assialsimmetrico (4/12)

In definitiva per la simmetria risulta:

$$Y \equiv 0,$$

$$N_{21} \equiv N_{12} \equiv 0,$$

$$(\partial N_2 / \partial \varphi) \equiv 0.$$

La seconda delle equazioni di equilibrio si riduce ad una

identità, essendo anche il primo termine sempre identicamente nullo. La prima equazione si semplifica essendo nullo il secondo termine che contiene  $N_{21}$ .

Essendo tutte le azioni interne funzioni esclusive di  $\theta$  possiamo usare le derivate ordinarie al posto di quelle parziali.

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial(r N_1)}{\partial \theta} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_{21}}{\partial \varphi} - \frac{N_2}{R_2} \cos \theta + X \sin \theta = 0$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial(r N_{12})}{\partial \theta} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + \frac{N_{21}}{R_2} \cos \theta + Y \sin \theta = 0$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

## Membrane curve in regime assialsimmetrico (5/12)

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{d(r N_1)}{d\theta} - \frac{N_2}{R_2} \cos \theta + X \sin \theta = 0$$
$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

Il sistema delle equazioni indefinite di equilibrio, che regge il problema delle **membrane di rivoluzione assialsimmetriche** è in definitiva quello che precede.

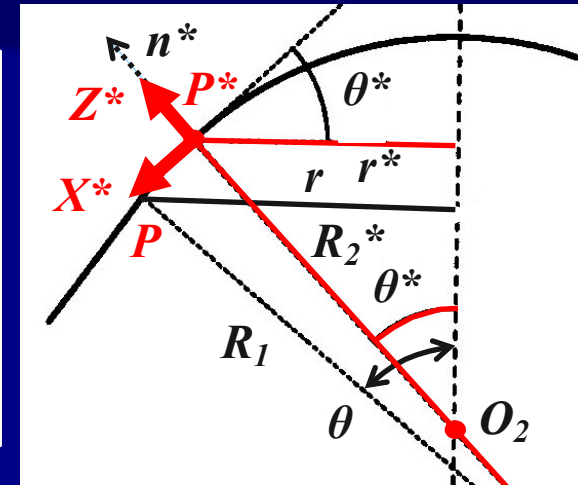
La seconda equazione algebrica.

La prima è invece una equazione differenziale del primo ordine e occorre preliminarmente procedere alla sua integrazione .

# Membrane curve in regime assialsimmetrico (6/12)

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{d(r N_1)}{d\theta} - \frac{N_2}{R_2} \cos \theta + X \sin \theta = 0$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$



Si ricava  $N_2$  dalla seconda equazione e si opera la sostituzione nella prima. La prima equazione presenta ora l'unica incognita  $N_1$ .  
L'integrazione conduce alla seguente espressione:

$$2\pi r N_1 \sin \theta = - \int_0^\theta (X^* \sin \theta^* - Z^* \cos \theta^*) 2\pi r^* R_1^* d\theta^*$$

Si pone :

$$Q = \int_0^\theta (X^* \sin \theta^* - Z^* \cos \theta^*) 2\pi r^* R_1^* d\theta^*$$

## Membrane curve in regime assialsimmetrico (7/12)

$$\frac{1}{R_1 R_2} \frac{d(r N_1)}{d\theta} - \frac{N_2}{R_2} \cos \theta + X \sin \theta = 0$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

In definitiva l'equazione che sostituisce nel sistema precedente la prima equazione differenziale si scrive:

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi r \cdot \sin \theta}$$

## Membrane curve in regime assialsimmetrico (8/12)

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi r \cdot \sin \theta}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

Nella prima equazione, che deriva dall'integrazione, si è indicato con  $Q = Q(\theta)$  una quantità che fisicamente rappresenta: *la risultante delle componenti verticali di tutte le forze che agiscono sulla porzione di membrana che si trova al disopra del parallelo individuato da un assegnato angolo  $\theta$* . Ha pertanto le dimensioni di una forza.

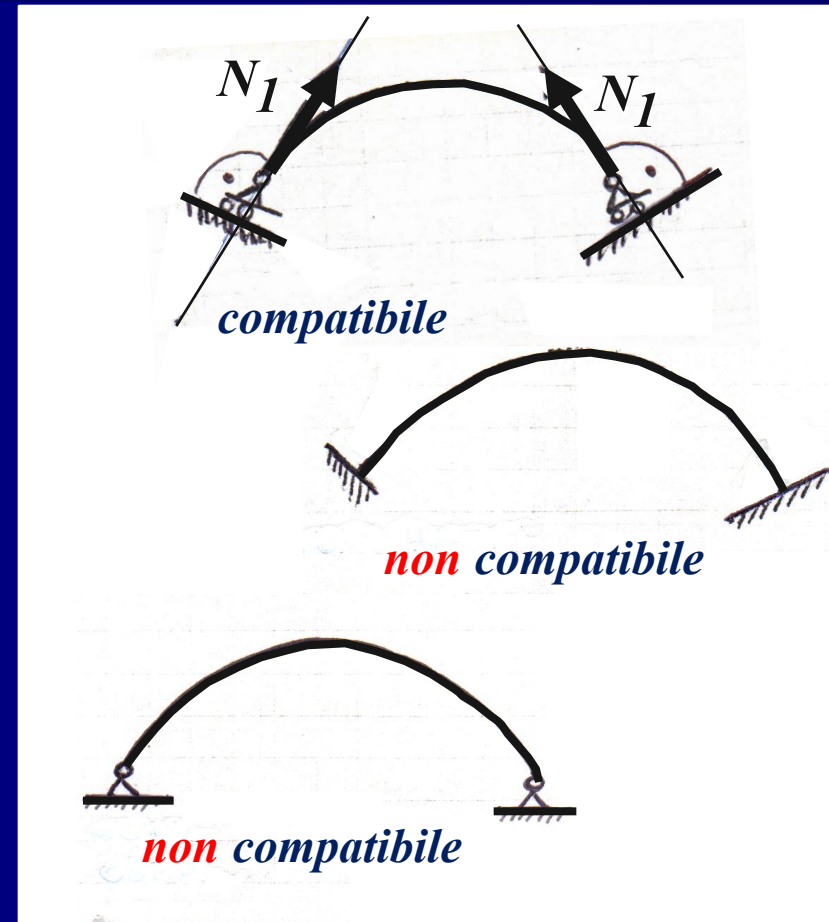
Viceversa  $Z = Z(\theta)$  rappresenta: *la componente del carico esterno ripartito, diretto secondo la normale alla superficie, agente nei punti del parallelo individuato dal medesimo angolo  $\theta$* . Ha dimensioni di forza/superficie.



# Membrane curve in regime assialsimmetrico (10/12)

Il regime di sforzi membranali così ottenuto è presente in ogni punto del guscio, fino al bordo, e non è accompagnato da momenti flettenti (e neppure da azioni taglianti) o torcenti.

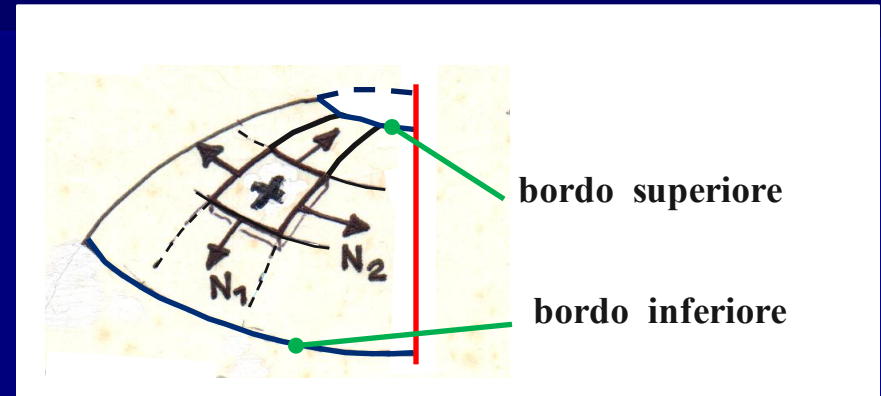
Questo è possibile però solo nel caso che il bordo stesso sia vincolato in modo da trasmettere al guscio i soli sforzi che gli trasmetterebbe il prolungamento del guscio stesso, ovvero tali da applicare reazioni coincidenti con le azioni normali di meridiano  $N_1$ .



# Membrane curve in regime assialsimmetrico (11/12)

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi r \cdot \sin \theta}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$



Ricaviamo le deformazioni che subiscono le fibre di materiale orientate in direzione del meridiano e del parallelo :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1)$$

Essendo:

$$\sigma_1 = N_1/s$$

$$\sigma_2 = N_2/s$$

Si ottiene:

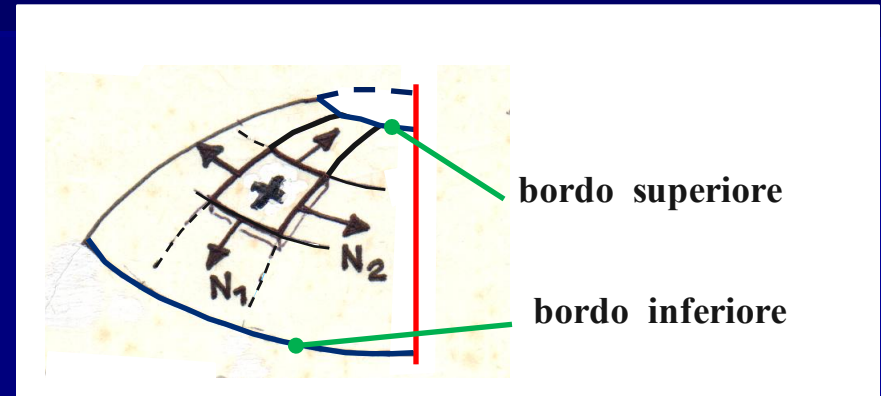
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E s} (N_1 - \nu N_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E s} (N_2 - \nu N_1)$$

# Membrane curve in regime assialsimmetrico (12/12)

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi r \cdot \sin \theta}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$



Si osserva che le direzioni del meridiano e del parallelo sono *direzioni principali*, e le azioni sollecitanti lungo queste direzioni sono una massima e l'altra minima.

Le espressioni di  $N_1$  ed  $N_2$ , definiscono le *azioni interne principali* in quanto agiscono su una struttura che per questioni di simmetria non risulta soggetta a momenti flettenti o torcenti.

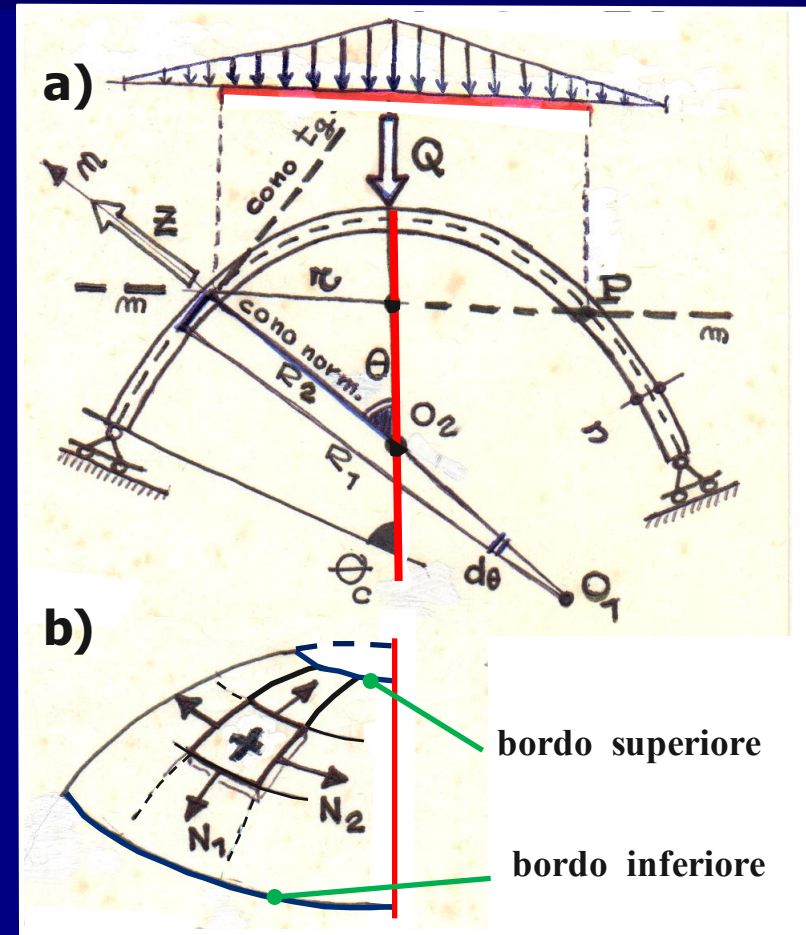
Di conseguenza anche gli sforzi e le deformazioni che abbiamo calcolato  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , sono *sforzi e deformazioni principali*.

# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (1/14)

Consideriamo una cupola di spessore  $s$ , in regime di membrana, come quella indicata in figura **a**).

La teoria statica finora sviluppata, fa riferimento ad un elemento di volume infinitesimo del secondo ordine, prelevato a distanza dal contorno.

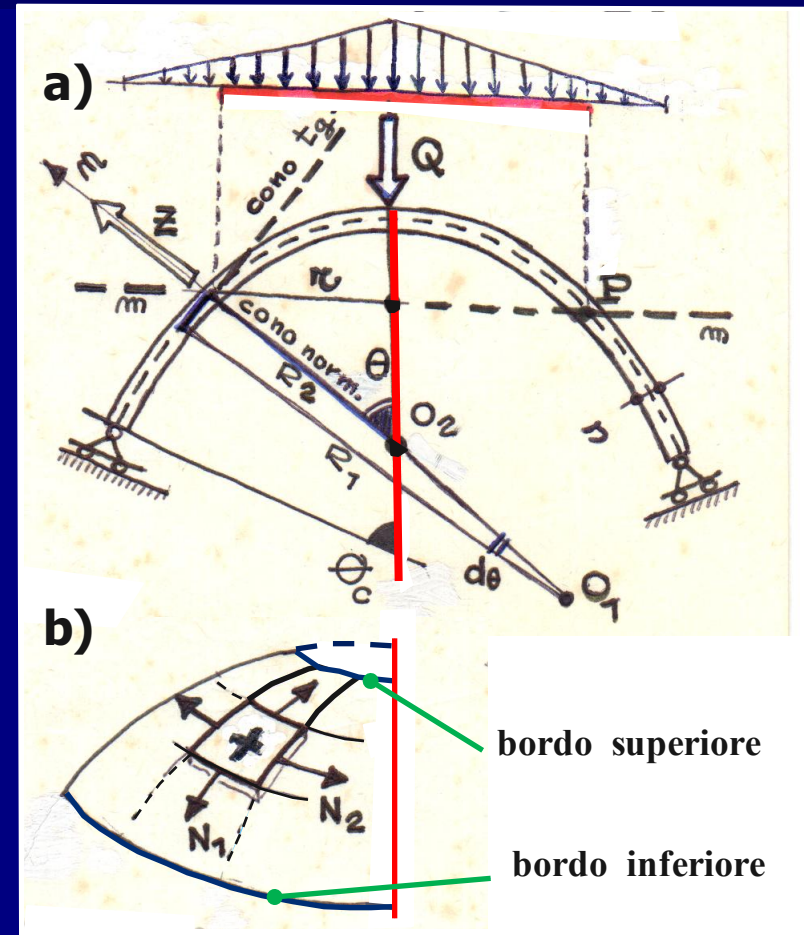
Essa pertanto è valida sia nel caso di una membrana con un solo bordo, quello di imposta (ovvero a “semplice contorno”) come indicato in figura **a**) sia nel caso di membrane con il doppio contorno (es.: cupole con “lanterna” o lucernario) come in figura **b**).



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (2/14)

Se  $R_1$  è il raggio di curvatura del meridiano ( di centro  $O_1$  ) e  $R_2$  il raggio di curvatura del parallelo ( di centro  $O_2$  ) e se , assegnato l'andamento del meridiano, per individuare la posizione dei punti sulla superficie si fa uso delle coordinate angolari  $\theta$  (colatitudine) e  $\varphi$  (longitudine), si ricorda che il raggio del parallelo alla colatitudine  $\theta$  è pari a:

$$r = R_2 \cdot \sin \theta.$$





# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (4/14)

Lo stato di sollecitazione dovuto alle azioni interne  $N_1$  ed  $N_2$  si determina risolvendo il sistema fornito dalle due equazioni di equilibrio:

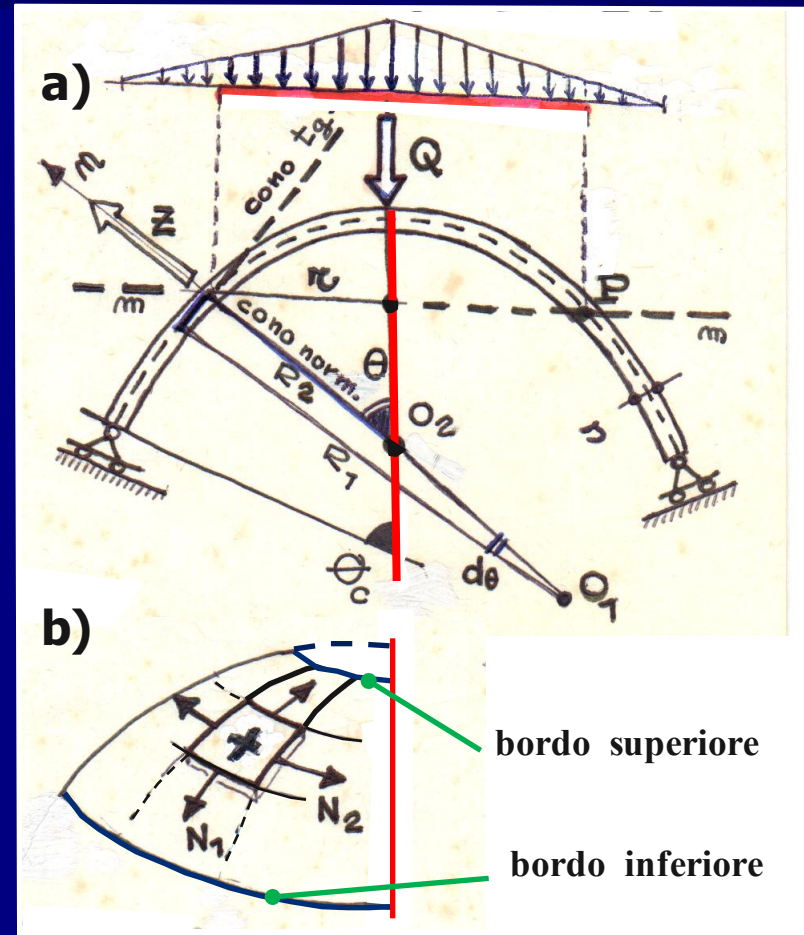
$$N_1 = -\frac{Q}{2\pi r \cdot \sin \theta} \quad \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

Nel caso della *membrana sferica* risulta:

$$R_1 = R_2 = R \quad R = R_2 \sin \theta$$

Le precedenti equazioni diventano:

$$N_1 = -\frac{Q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta} \quad N_2 = Z \cdot R - N_1$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (5/14)

## CARICO UNIFORME ORIZZONTALE

Consideriamo una membrana sferica soggetta all'azione di un carico uniformemente distribuito per unità di superficie orizzontale, di intensità  $p$  (fig. a).

Determiniamo  $Q$ :

$$Q = \pi r^2 p = \pi p$$

Per determinare  $Z$  osserviamo dalla figura b che risulta:

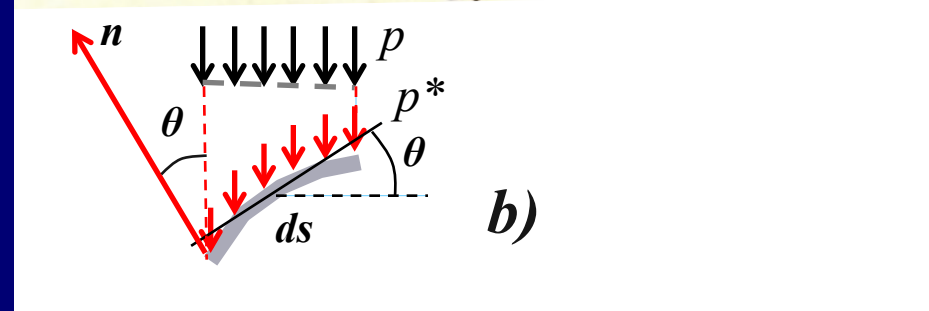
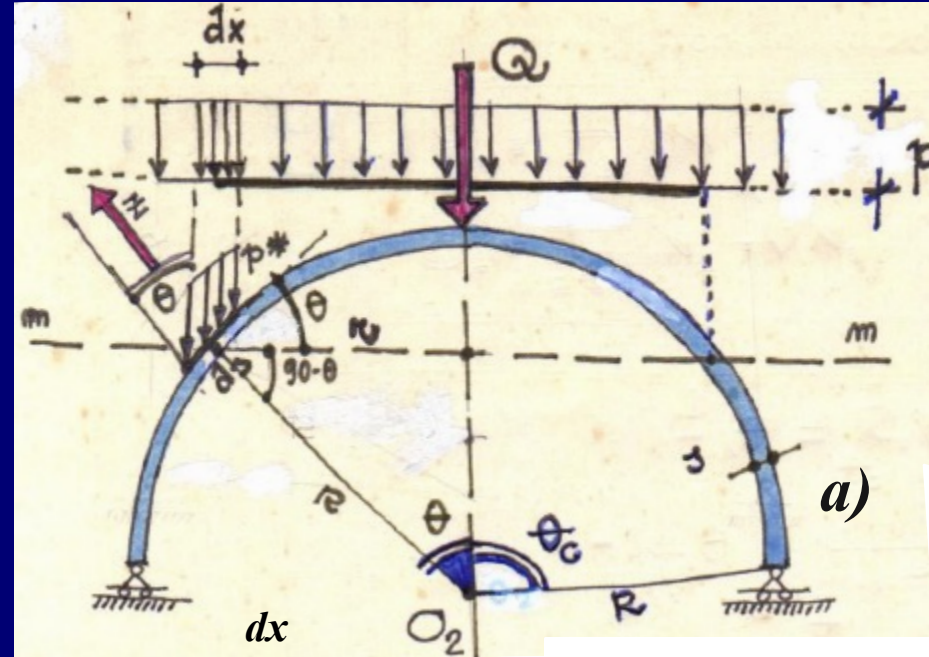
$$p^* ds = p dx$$

$$dx = ds \cos \theta$$

$$p^* ds = p ds \cos \theta$$

$$p^* = p \cos \theta$$

$$Z = -p \cos^2 \theta$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (6/14)

## CARICO UNIFORME ORIZZONTALE

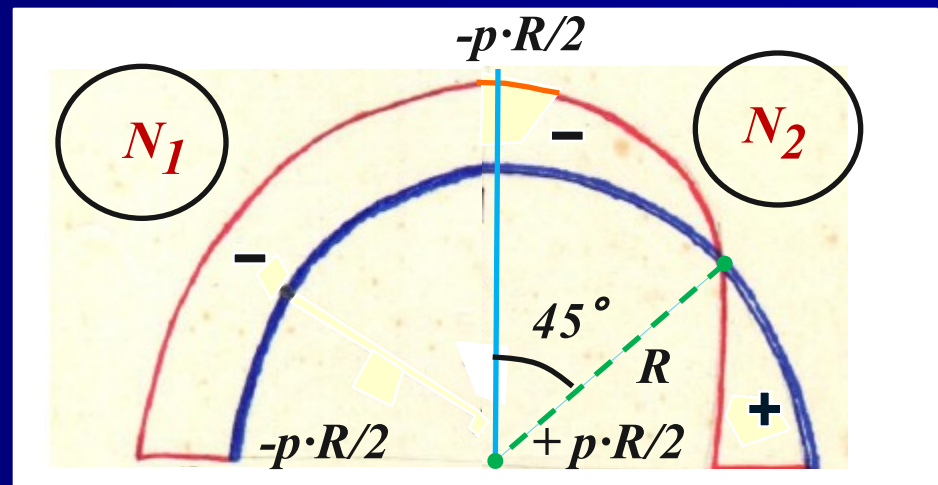
Determiniamo:

$$N_1 = - \frac{\pi \cdot R^2 \sin^2 \theta \cdot p}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta} = - \frac{p R}{2}$$

$$N_2 = Z \cdot R - N_1 = -p \cos^2 \theta R + \frac{p R}{2} = p R \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \theta \right)$$

Possiamo ora disegnare i diagrammi delle azioni interne  $N_1$  e  $N_2$ , rappresentandoli come nella figura a lato. Risulta:

$$N_2 = 0 \quad \text{per} \quad \theta = \pi/4$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (7/14)

## CARICO UNIFORME ORIZZONTALE

Determiniamo le espressioni delle deformazioni:

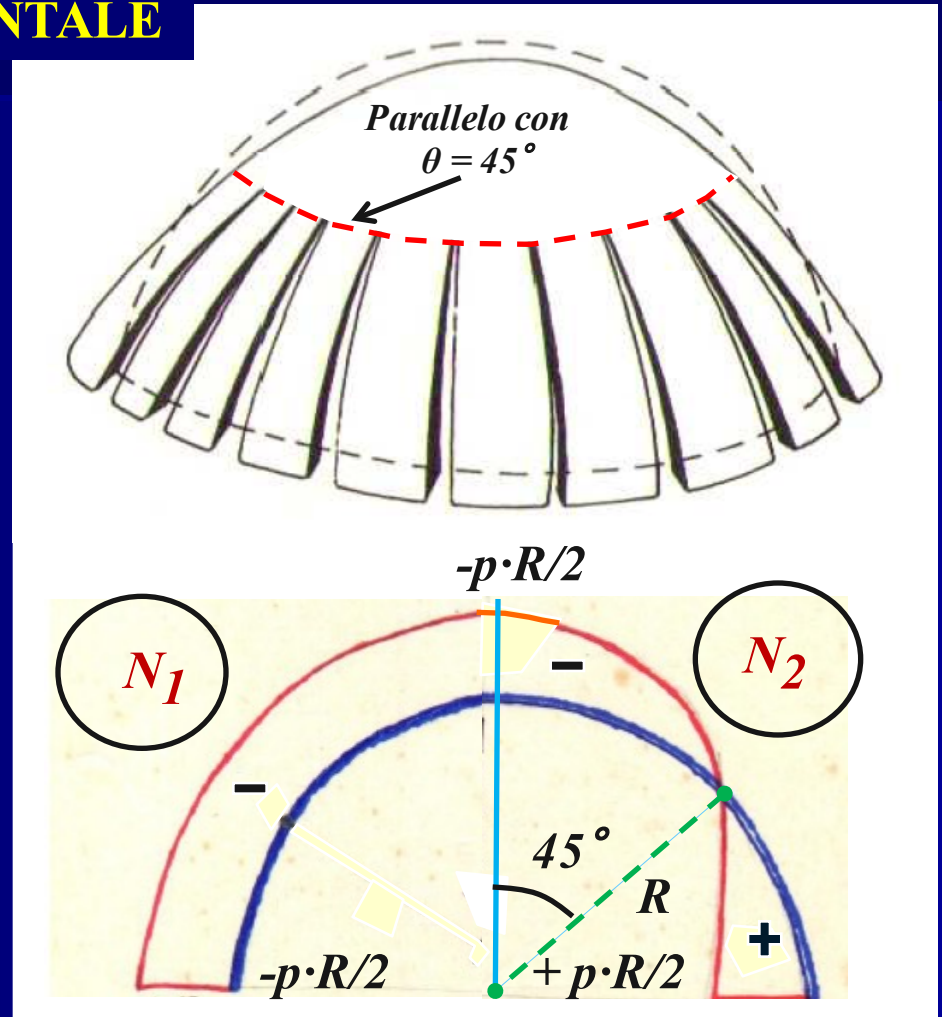
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_s} (N_1 - \nu N_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_s} (N_2 - \nu N_1)$$

Si ottiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_s} p R \left( \nu \cos^2 \theta - \frac{1 + \nu}{2} \right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_s} p R \left( \frac{1 + \nu}{2} - \cos^2 \theta \right)$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (8/14)

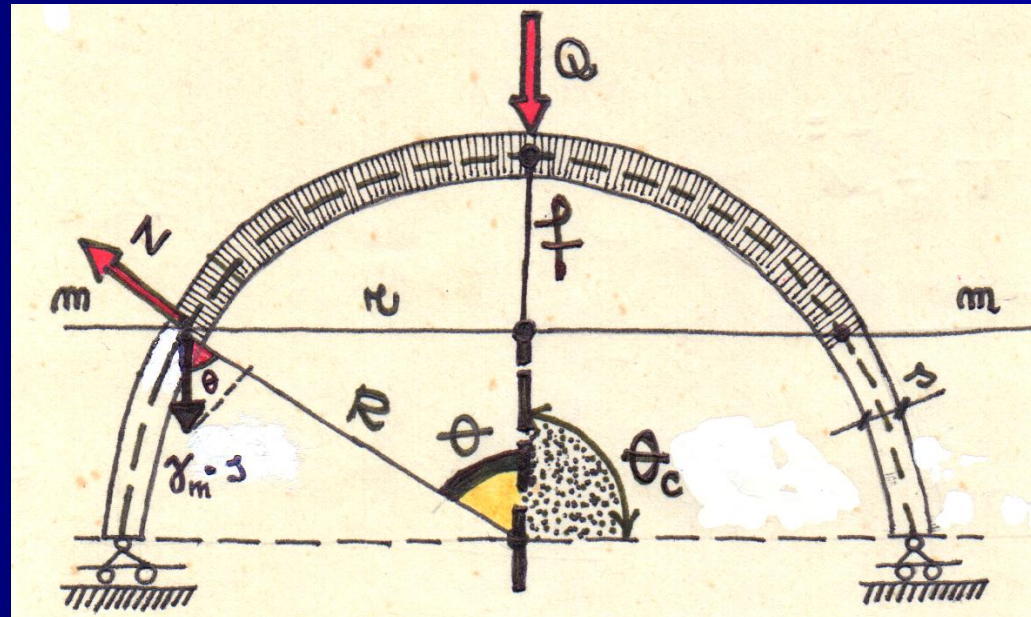
## PESO PROPRIO

Ci riferiamo al carico derivante dal peso proprio del materiale: muratura (pietra o mattoni), calcestruzzo etc. Indichiamo con  $\gamma_m$  il *peso specifico del materiale* costituente la cupola.

Determiniamo  $Q$  considerando il generico parallelo  $m-m$ , individuato dall'angolo  $\theta$ .

Ricaviamo la risultante dei pesi del materiale che compongono il volume di cupola al di sopra del parallelo  $m - m$ .

Questa risultante è centrata sull'asse della cupola.



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (9/14)

## PESO PROPRIO

L'area della superficie media della calotta sferica al di sopra del parallelo m-m (manuale *Cremonese*) vale:

$$A = 2 \pi R \cdot f$$

Essendo ovviamente:

$$f = (R - R \cos \theta) = R(1 - \cos \theta)$$

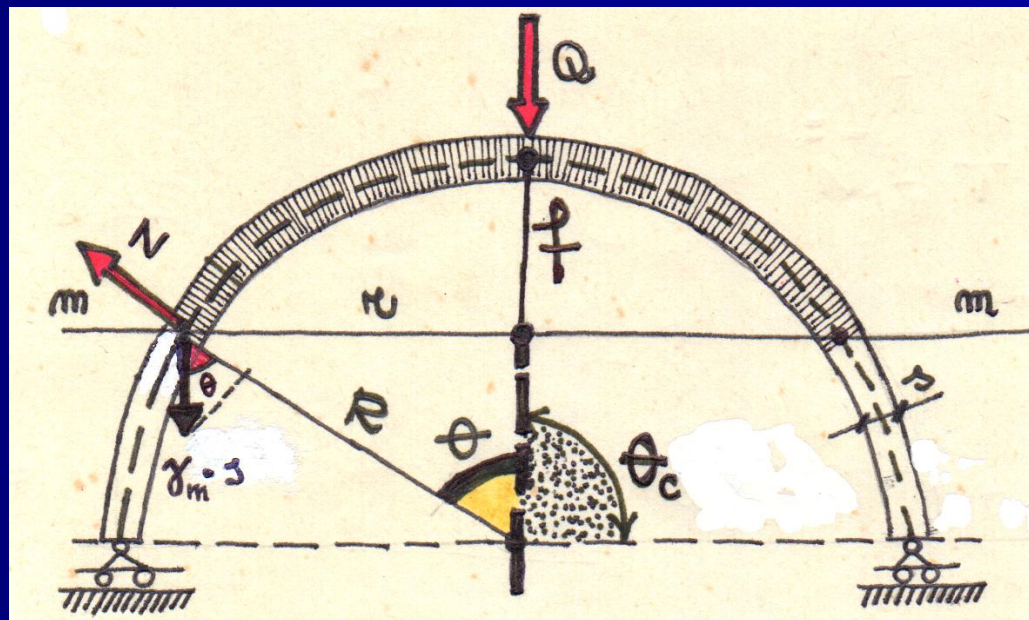
$$V = s A = s 2 \pi R^2 \cdot (1 - \cos \theta)$$

Si ottiene:

$$Q = \gamma_m \cdot s \cdot 2 \pi R^2 \cdot (1 - \cos \theta)$$

Risulta anche:

$$Z = -\gamma_m \cdot s \cdot \cos \theta$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (10/14)

## PESO PROPRIO

Si ottiene:

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta} = - \frac{\gamma_m \cdot s \cdot 2\pi R^2 \cdot (1 - \cos \theta)}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta}$$
$$= - \frac{s \gamma_m R \cdot (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

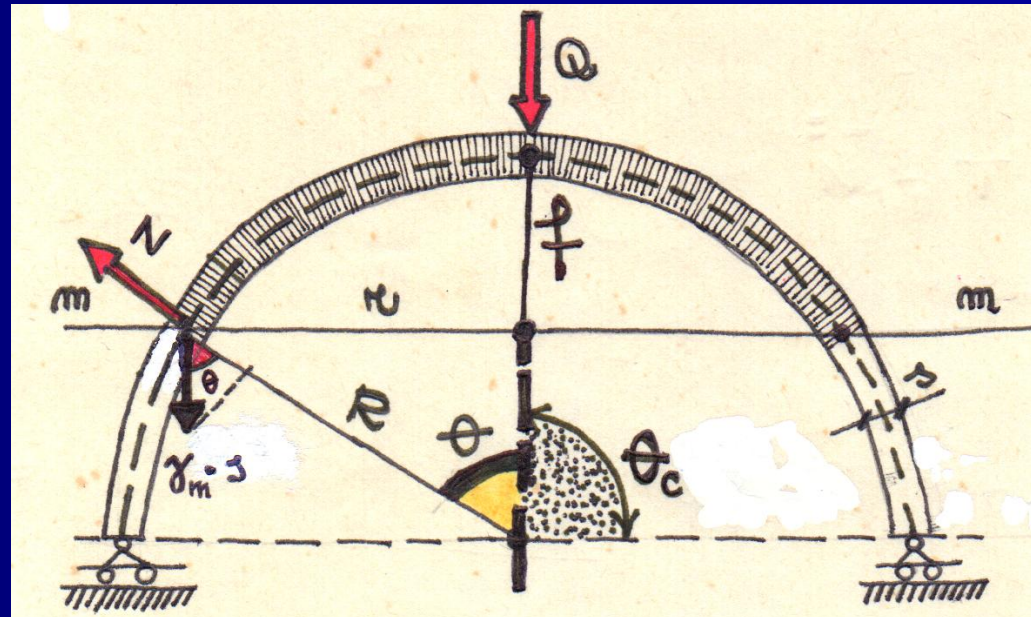
La precedente espressione risulta indeterminata quando  $\theta = 0$ .

Per porre rimedio sostituiamo al denominatore:

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$$

Risulta:

$$N_1 = - \frac{s \gamma_m R}{1 + \cos \theta}$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (11/14)

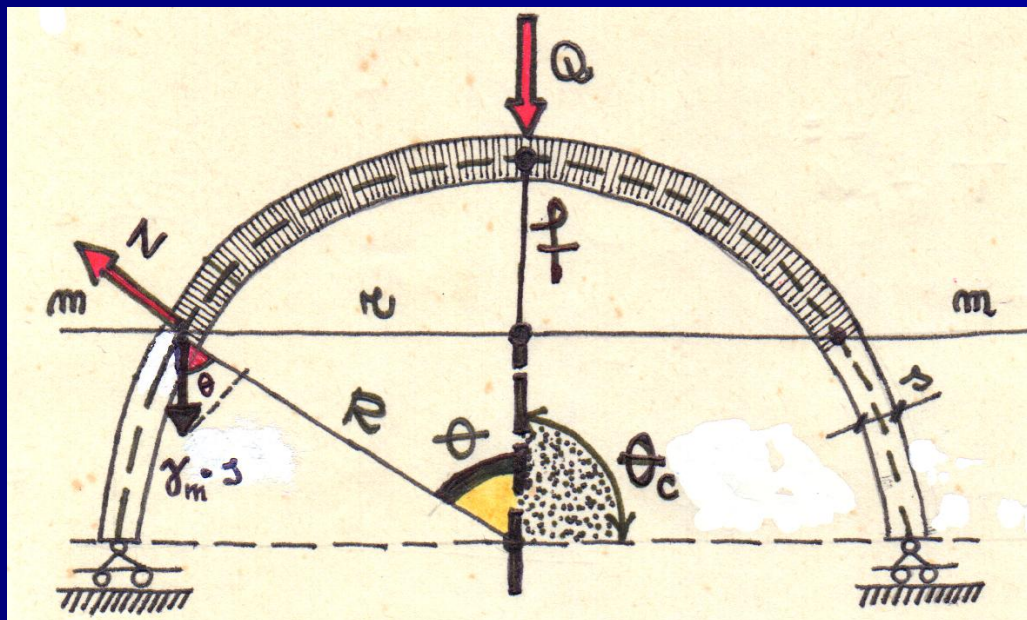
## PESO PROPRIO

Si ottiene poi tenuto conto di  $N_1$  e  $Z$  :

$$N_2 = Z \cdot R - N_1 = -\gamma_m \cdot s \cos \theta \cdot R + \frac{s \gamma_m R}{1 + \cos \theta}$$

Ovvero dopo semplificazione :

$$N_2 = \gamma_m \cdot s \cdot R \left[ \frac{1 - \cos^2 \theta - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right]$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (12/14)

## PESO PROPRIO

$$N_1 = - \frac{s \gamma_m R}{1 + \cos \theta}$$

$$N_2 = \gamma_m \cdot s \cdot R \left[ \frac{1 - \cos^2 \theta - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right]$$

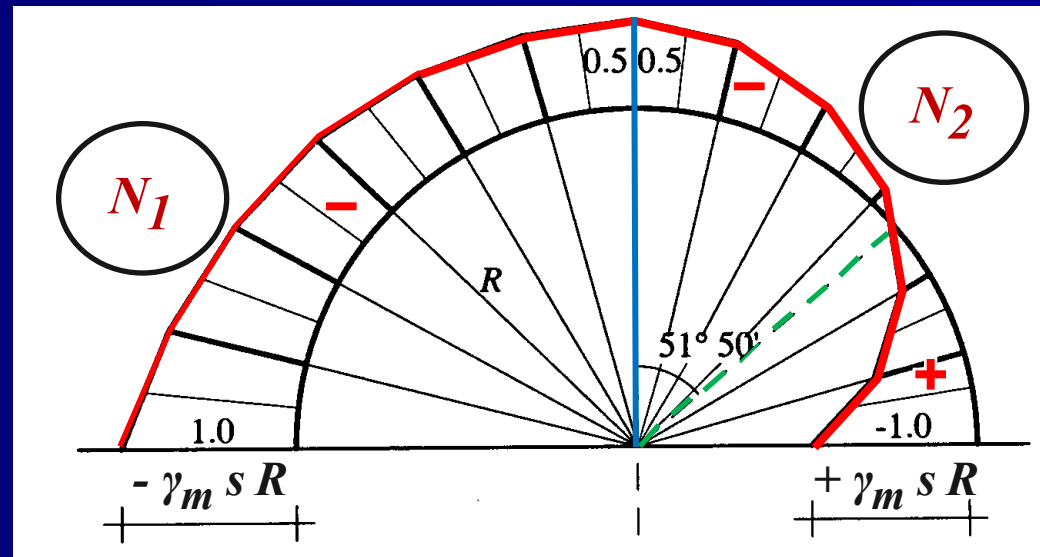
Determiniamo l'angolo  $\theta$  che rende nullo  $N_2$  :

$$1 - \cos^2 \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,610$$

$$\theta = 51^\circ 50'$$





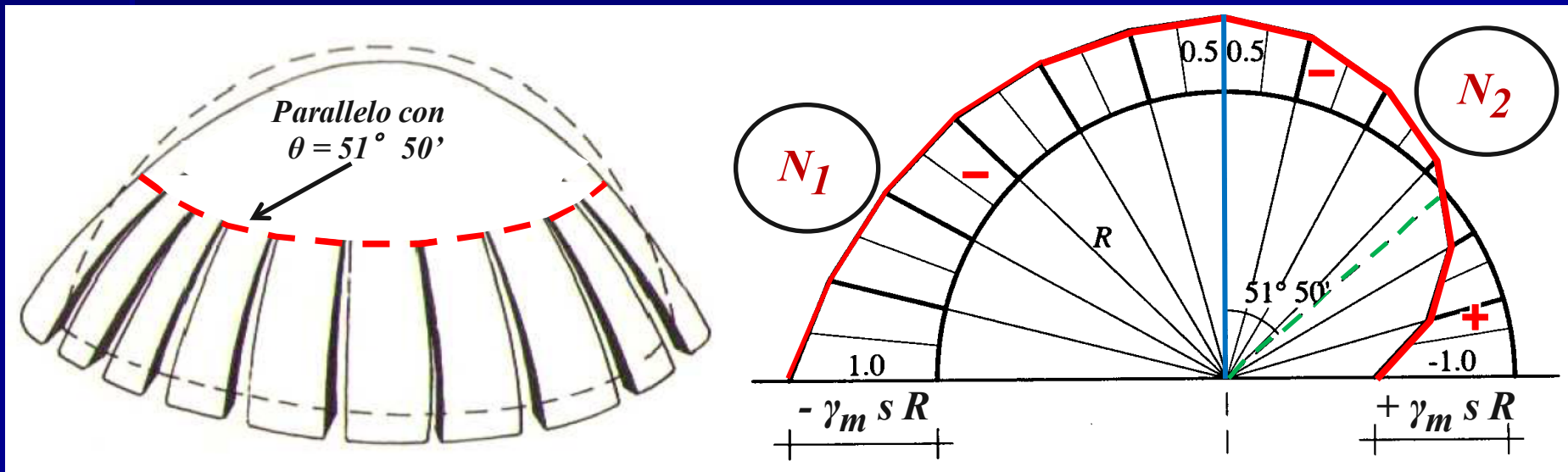
# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (14/14)

## PESO PROPRIO

Determiniamo le deformazioni:

$$\epsilon_1 = \frac{\gamma_m R}{E} \left( \frac{\nu \cos \theta - \nu \sin^2 \theta - 1}{1 + \cos \theta} \right)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\gamma_m R}{E} \left( \frac{\nu + \sin^2 \theta - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)$$



# Sommario

## Introduzione

- **Le cupole come strutture di copertura**
- **Comportamento statico delle cupole**

## Le cupole in regime membranale

- **La cupola: definizioni geometriche**
- **La cupola: premesse alle equazioni governanti**
- **Le equazioni governanti**
- **le membrane curve in regime assialsimmetrico**
- **Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali**

## Esempi applicativi

- **Cupola aperta in sommità. Cupola dotata di lanterna**
- **Analisi di una volta a vela. Consolidamento.**

# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (1/7) cupole aperte in sommità

**Domus Aurea (64-8 d.C.).  
Costruita per Nerone  
dagli architetti Severo  
e Celere**



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (2/7)

## cupole aperte in sommità

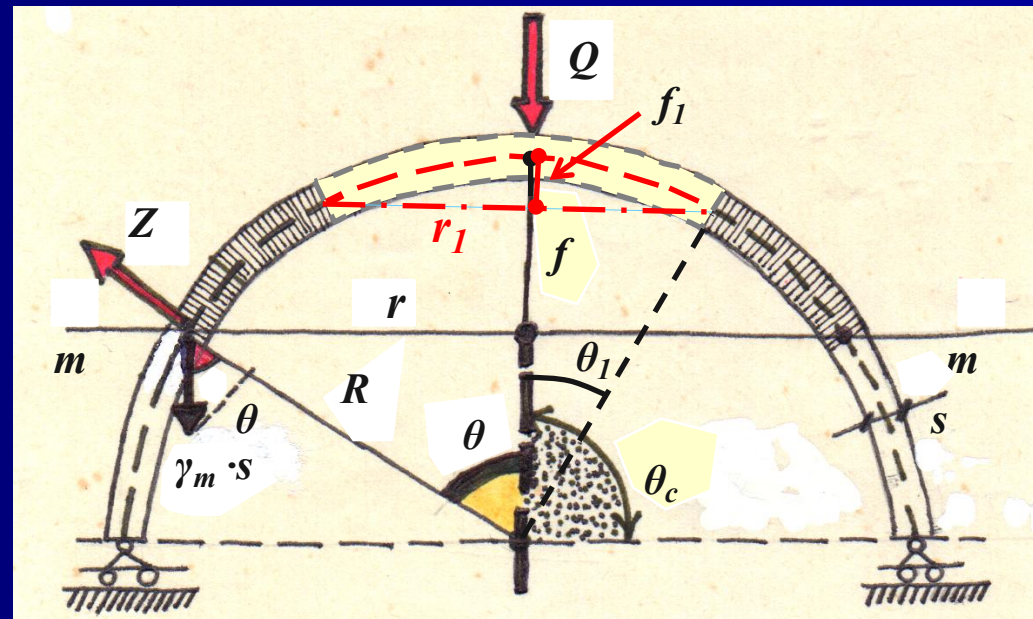
### PESO PROPRIO

Ci riferiamo ancora al carico derivante dal peso proprio del materiale: muratura (pietra o mattoni), calcestruzzo etc. Indichiamo con  $\gamma_m$  il *peso specifico del materiale* costituente la cupola.

Determiniamo  $Q$  considerando il generico parallelo  $m - m$ , individuato dall'angolo  $\theta$ .

Ricaviamo la risultante dei pesi del materiale che compongono il volume di cupola al di sopra del parallelo  $m - m$ .

Questa risultante è centrata sull'asse della cupola.



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (3/7)

## cupola aperta in sommità

### PESO PROPRIO

L'area della superficie media, della porzione sferica al di sopra del parallelo m-m vale:

$$A = 2 \pi R(f - f_1)$$

Essendo ovviamente:

$$f = (R - R \cos \theta) = R(1 - \cos \theta)$$

$$f_1 = (R - R \cos \theta_1) = R(1 - \cos \theta_1)$$

Si ottiene:

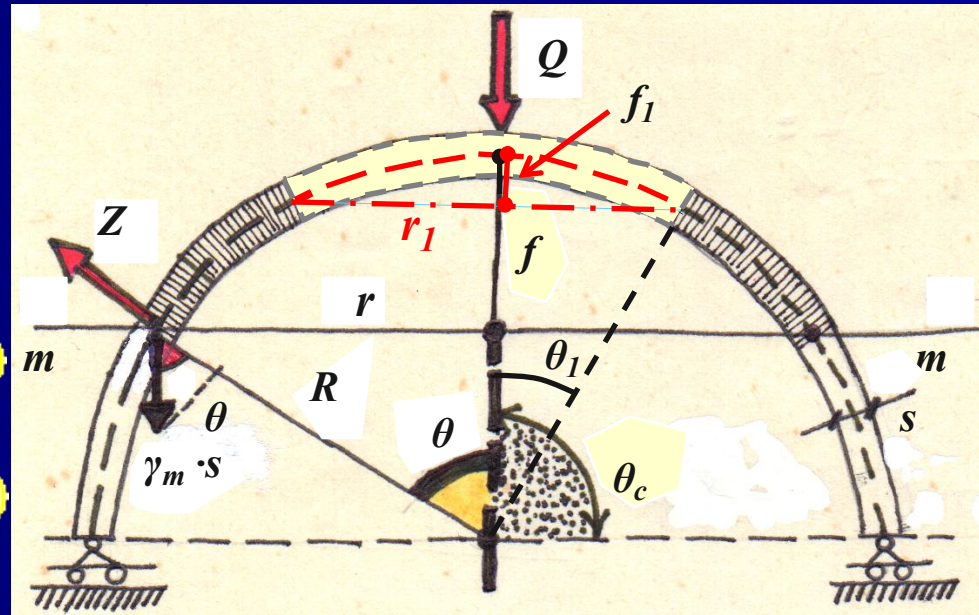
$$V = s A = s 2 \pi R^2 \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta)$$

Risulta :

$$Q = \gamma_m \cdot s \cdot 2 \pi R^2 \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta)$$

Risulta infine :

$$Z = -\gamma_m \cdot s \cdot \cos \theta$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (4/7)

## cupola aperta in sommità

### PESO PROPRIO

Si ottiene:

$$N_1 = - \frac{s \gamma_m R \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

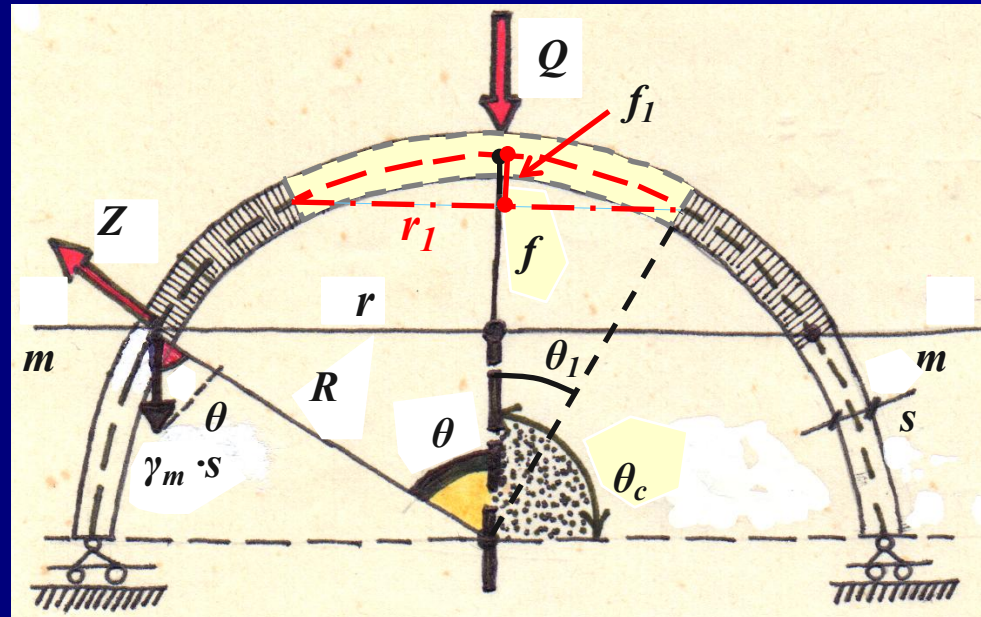
La precedente relazione, al contrario di quanto si verifica nel caso della calotta completa, non presenta problemi di indeterminatezza.

Tenuto conto della precedente espressione di  $N_1$  e tenuto conto che risulta per  $Z$  :

$$Z = - \gamma_m \cdot s \cdot \cos \theta$$

Possiamo calcolare  $N_2$  con la relazione:

$$N_2 = Z \cdot R - N_1$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (5/7)

## cupola aperta in sommità

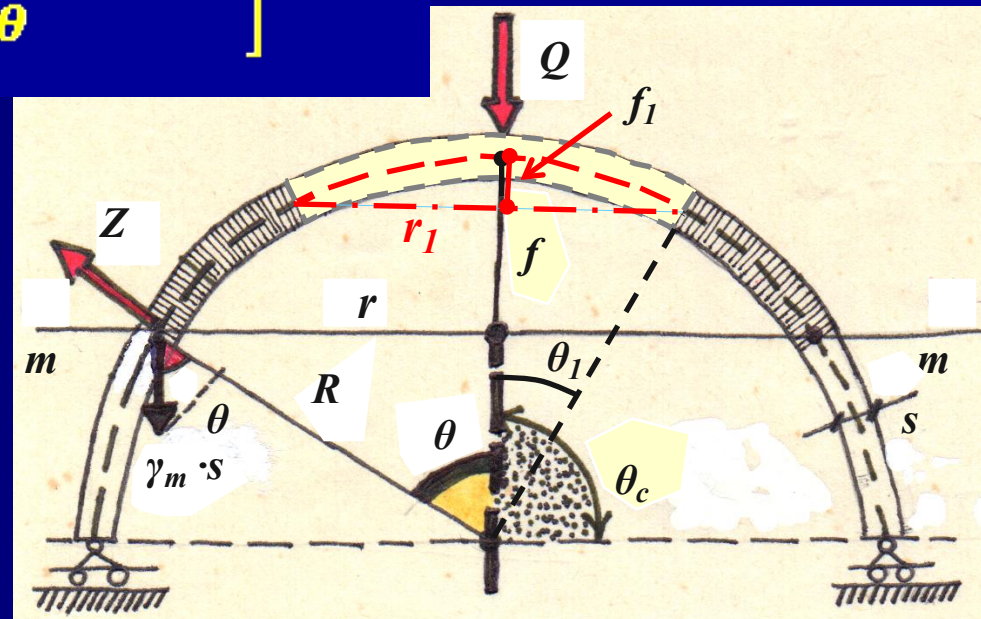
### PESO PROPRIO

Si ottiene:

$$N_2 = -\gamma_m \cdot s \cos \theta \cdot R + \frac{s \gamma_m R \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

$$N_2 = \gamma_m \cdot s \cdot R \left[ \frac{\cos^3 \theta - 2 \cos \theta + \cos \theta_1}{\sin^2 \theta} \right]$$

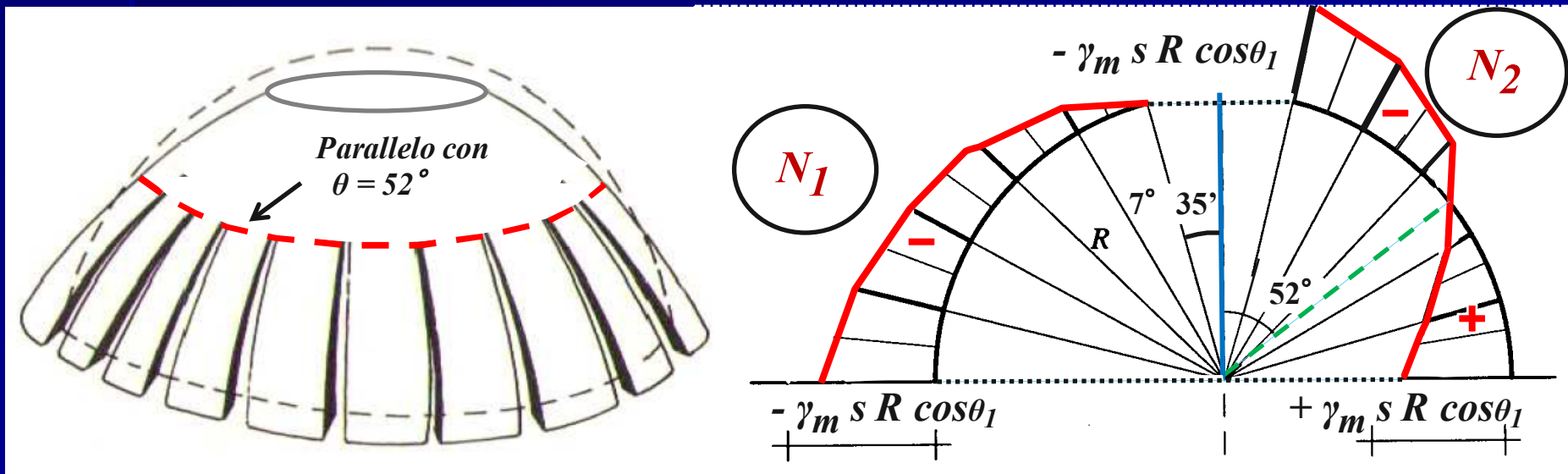
Essendo sempre il denominatore positivo e diverso da zero, nel campo dei valori di  $\theta$  che interessano, la precedente espressione di  $N_2$  si annulla, per il valore dell'angolo  $\theta$  che rende nullo il numeratore della quantità dentro parentesi.



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (6/7) cupola aperta in sommità

## PESO PROPRIO

Determiniamo l'angolo  $\theta$  che rende nullo  $N_2$ . Occorre risolvere una equazione di 3° grado. Se si considera  $\cos \theta_1 = 0,9911$ , che fornisce un angolo di apertura dell'occhio della cupola pari a  $\theta_1 = 7^\circ 35'$  si ottiene  $\theta \approx 52^\circ$ . Si ottengono i diagrammi delle azioni interne in figura.



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (7/7)

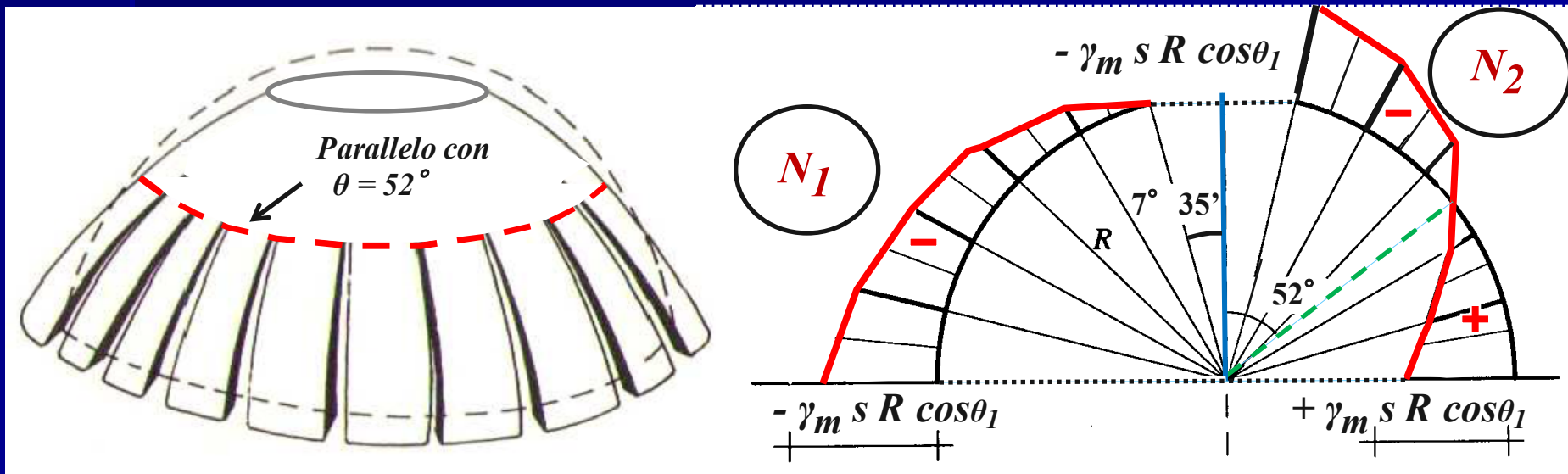
## cupola aperta in sommità

### PESO PROPRIO

Le espressioni delle deformazioni risultano:

$$\epsilon_1 = \frac{-\gamma_m R}{E \sin^2 \theta} \left( \nu \cos^3 \theta - \cos \theta (1 + 2\nu) + \cos \theta_1 (1 + \nu) \right)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\gamma_m R}{E \sin^2 \theta} \left( \cos^3 \theta - \cos \theta (2 + \nu) + \cos \theta_1 (1 + \nu) \right)$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (1/6)

## cupola aperta in sommità

### PESO DELLA LANTERNA

Consideriamo una cupola di raggio  $R$  e spessore  $s$ , aperta in sommità con un angolo  $\theta_1$  e soggetta ad un carico di intensità  $q$  per unità di lunghezza, applicato sul contorno superiore.

Supponiamo che il suddetto carico lineare derivi dal carico trasmesso da una struttura soprastante ( *lanterna* ) di peso  $P$  e che il suddetto carico  $P$  corrisponda al peso proprio complessivo della lanterna.



**Il Santuario di Mater Domini – Mesagne**

# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (2/6)

## cupola aperta in sommità

### PESO PROPRIO

Possiamo schematizzare la cupola soggetta al carico suddetto come nella figura, dove ovviamente risulta:

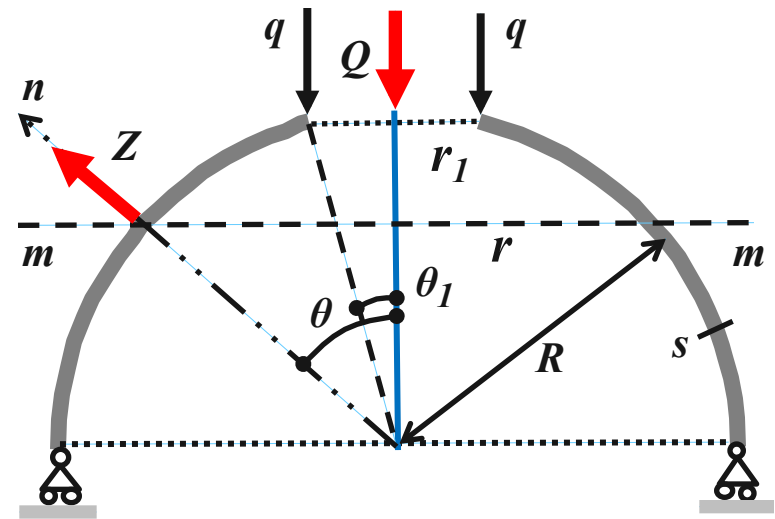
$$q = P / 2 \pi R \sin \theta_1.$$

Ricordiamo che nel caso della membrana sferica, essendo  $R_1 = R_2 = R$  e  $r = R \sin \theta$  le azioni interne si determinano con le relazioni semplificate.

Risulta:

$$Q = 2 \pi R \sin \theta_1 \cdot q$$

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta}$$
$$N_2 = Z \cdot R - N_1$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (3/6)

## cupola aperta in sommità

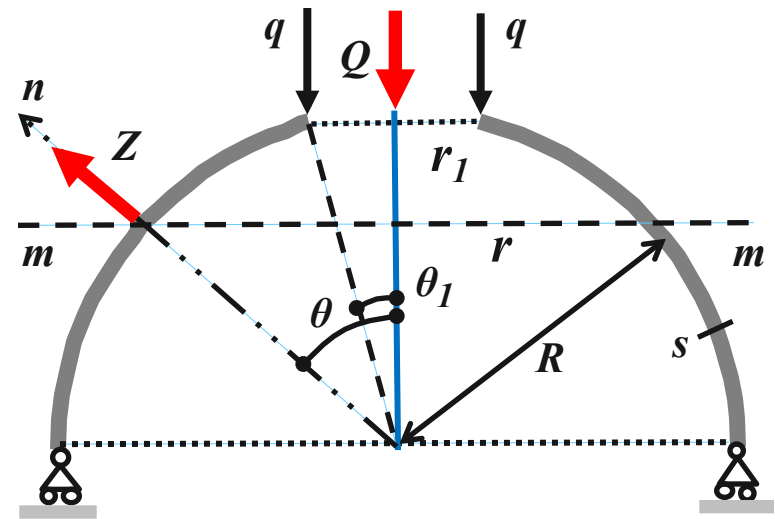
### PESO PROPRIO

Per determinare l'espressione di  $Z$ , componente del carico ripartito agente sulla superficie e diretta secondo la normale alla superficie della cupola, osserviamo che risulta:

$$Z = 0.$$

Ci si rende conto facilmente di questo osservando che  $Z$  ha le dimensioni di una pressione (dimensioni  $F/L^2$ ) mentre l'unico carico agente sulla struttura è il carico lineare  $q$  (dimensioni  $F/L$ ).

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta}$$
$$N_2 = Z \cdot R - N_1$$



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (4/6)

## cupola aperta in sommità

### PESO PROPRIO

Risultano le componenti di azione interna:

$$N_1 = - \frac{2\pi r_1 q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta}$$

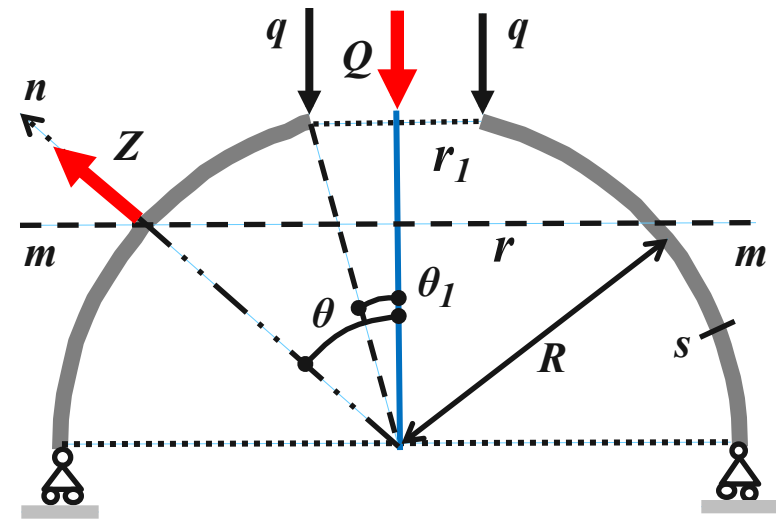
$$= - \frac{2\pi \cdot R \sin \theta_1 q}{2\pi \cdot R \sin^2 \theta} = - \frac{\sin \theta_1 q}{\sin^2 \theta}$$

$$N_2 = Z \cdot R - N_1 = \frac{\sin \theta_1 q}{\sin^2 \theta}$$

Si constata che  $N_2 = -N_1$ , e che la costruzione dei relativi diagrammi non presenta difficoltà.

$$N_1 = - \frac{Q}{2\pi R \cdot \sin^2 \theta}$$

$$N_2 = Z \cdot R - N_1$$



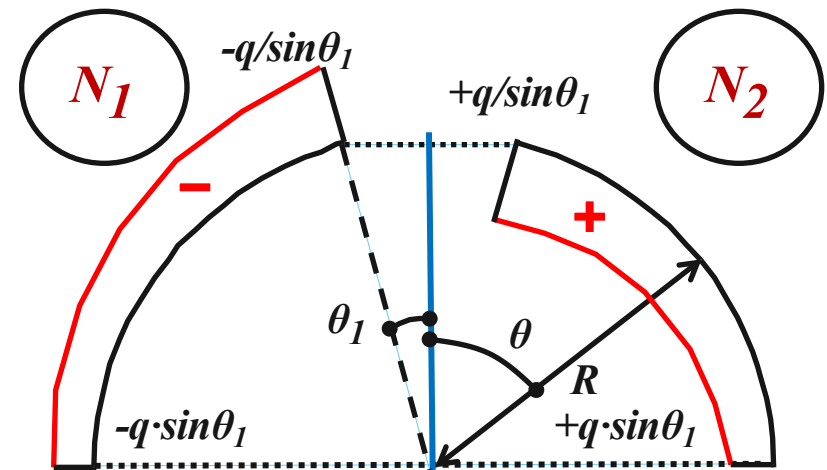
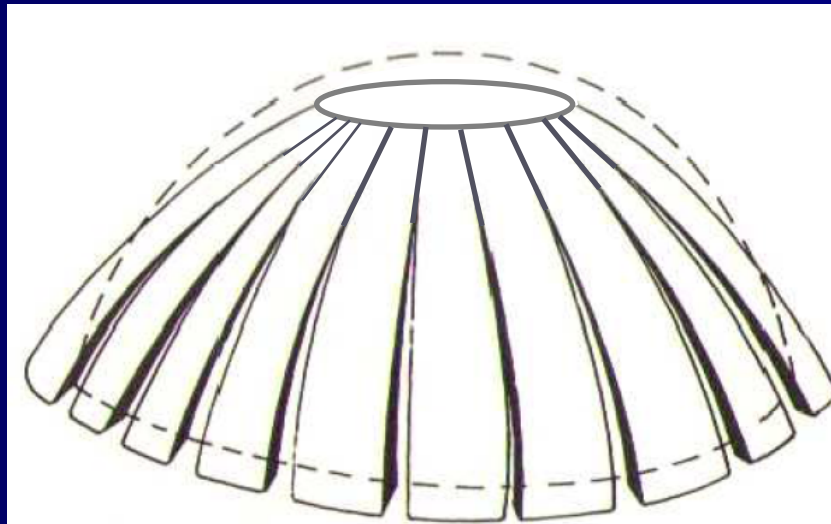
# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (5/6) cupola aperta in sommità

## PESO PROPRIO

$$N_1 = -\frac{\sin\theta_1 q}{\sin^2\theta}$$

$$N_2 = \frac{\sin\theta_1 q}{\sin^2\theta}$$

I meridiani sono sempre compressi, e si comportano in pratica come dei pilastri. I paralleli sono sempre tesi.



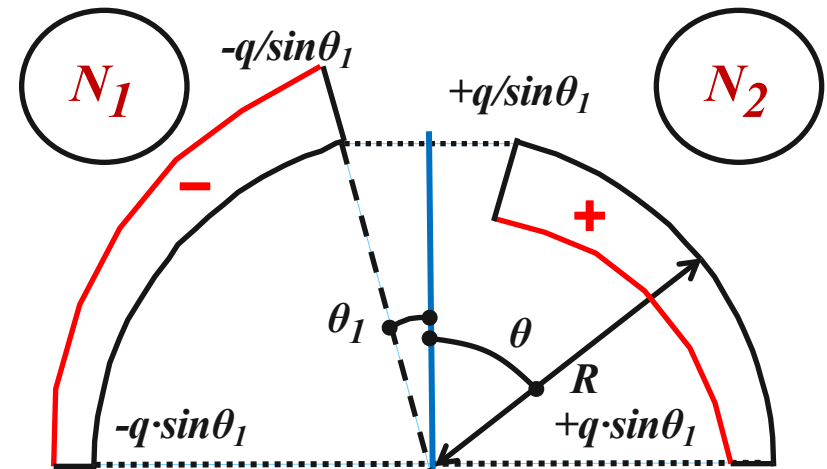
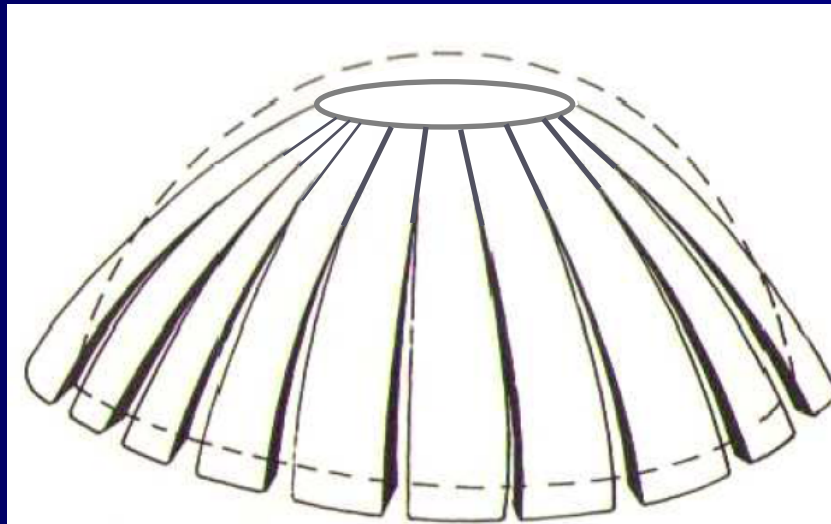
# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (6/6) cupola aperta in sommità

## PESO PROPRIO

Se si trascura la resistenza a trazione della muratura, la cupola si fessura come in figura. Si ottengono facilmente le espressioni delle deformazioni.

$$\epsilon_1 = -\frac{q}{E_s} \frac{\sin \theta_1}{\sin^2 \theta} (1 + \nu)$$

$$\epsilon_2 = +\frac{q}{E_s} \frac{\sin \theta_1}{\sin^2 \theta} (1 + \nu)$$

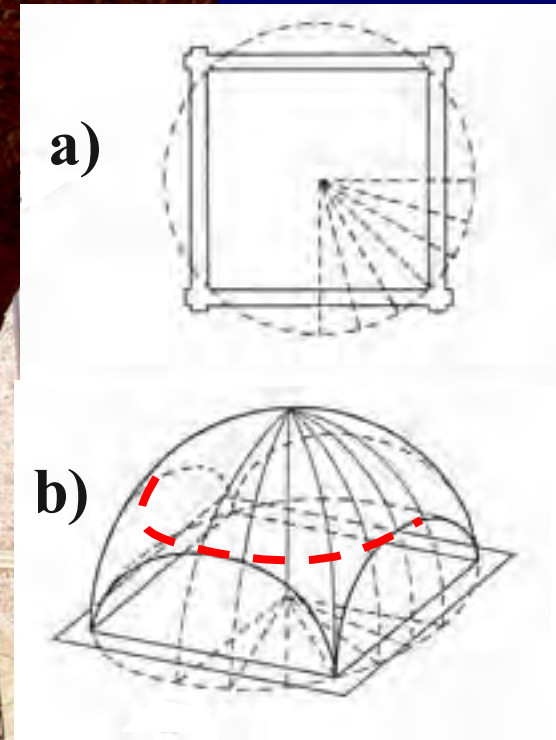
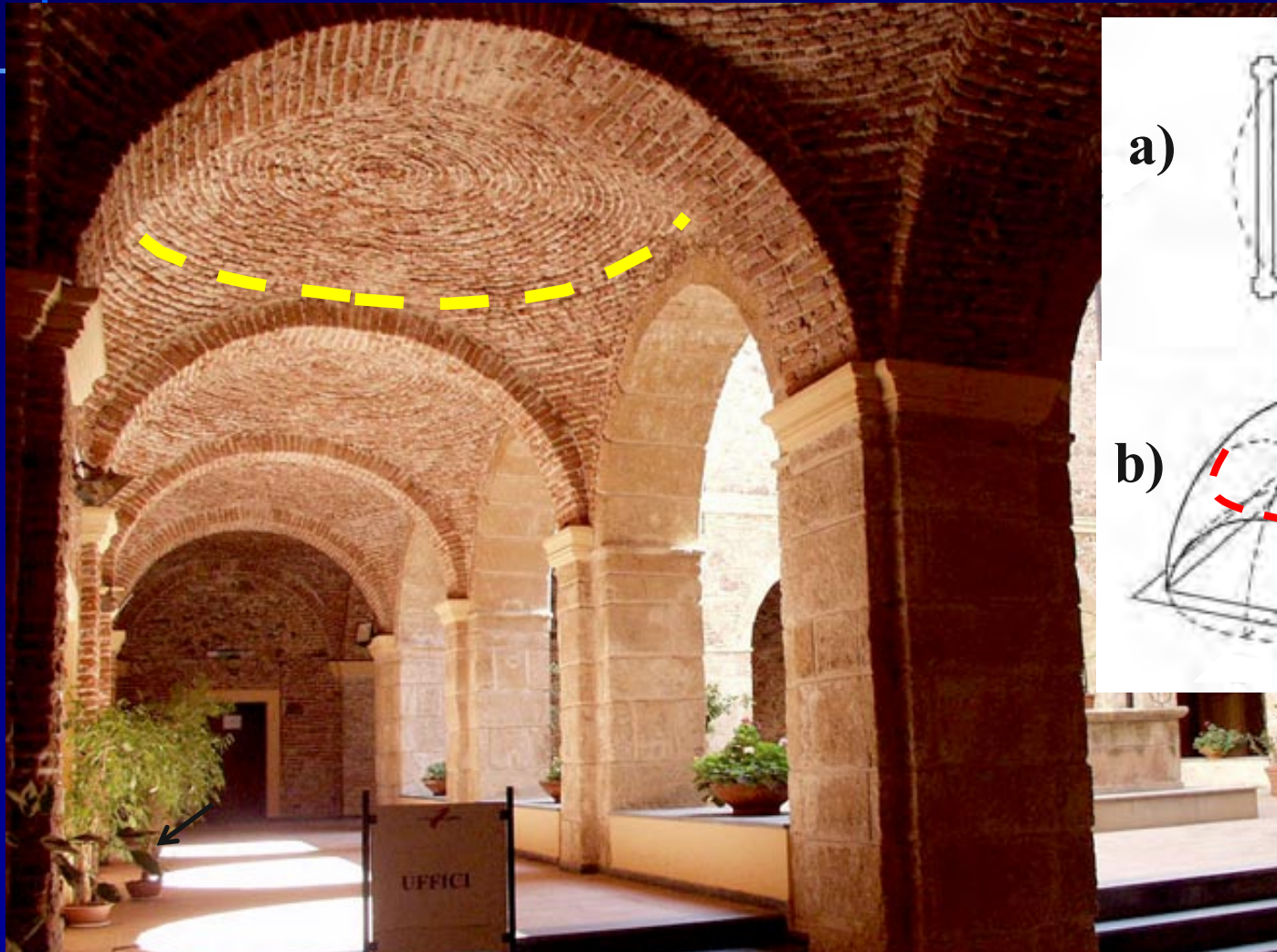


# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (1/2) verifica di una volta a vela



**Chiostro del  
monastero del  
Carmine  
(Oristano)**

# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (2/2) verifica di una volta a vela

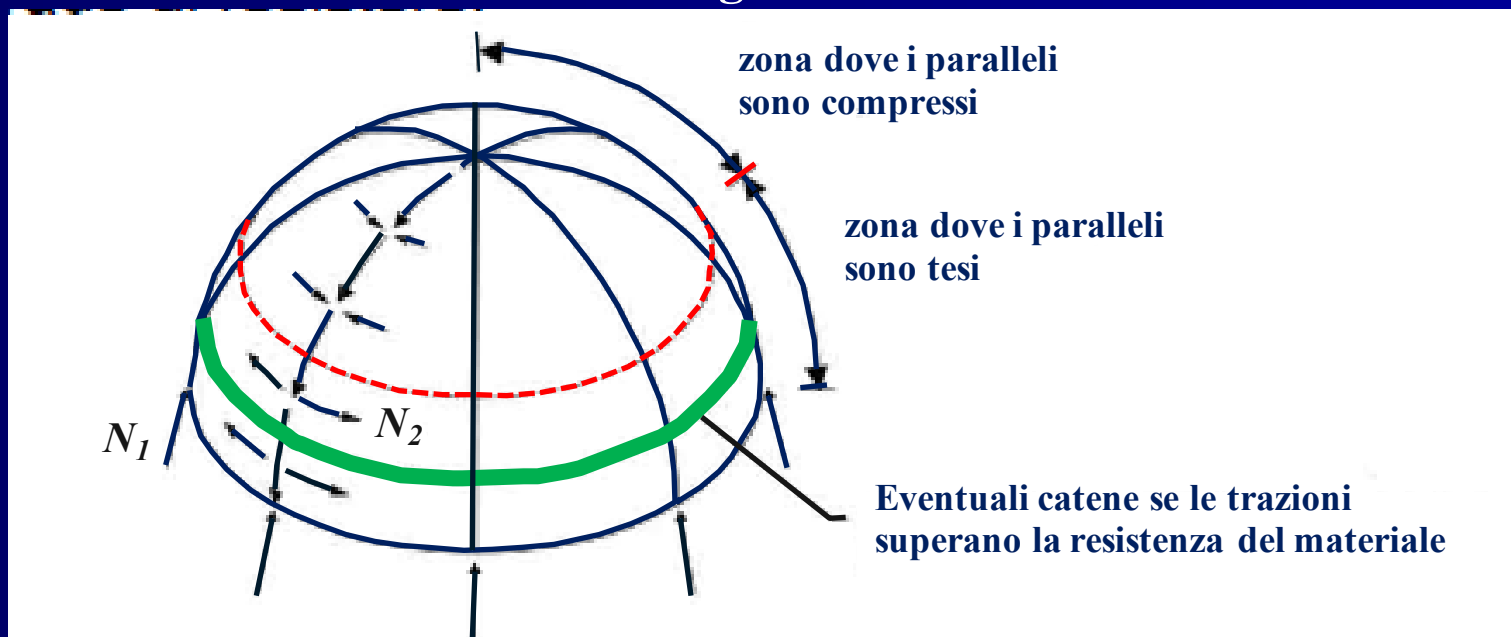


**Chiostro del  
monastero del  
Carmine  
(Oristano)**

# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (1/5)

## CONSOLIDAMENTO

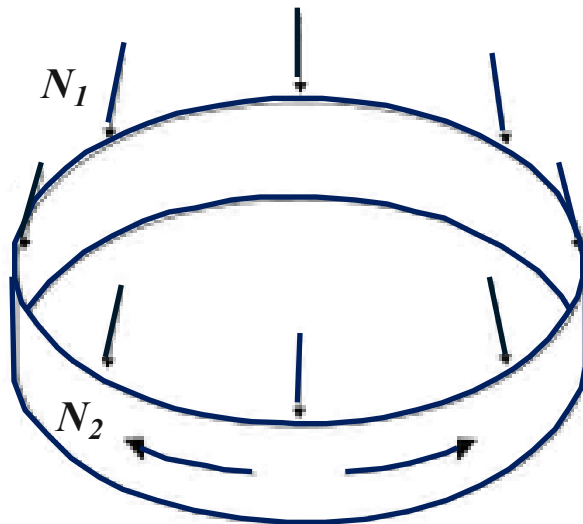
Abbiamo visto che nelle cupole, al di sotto di una certa quota, si sviluppano sforzi di trazione in direzione tangenziale. E' quindi spesso opportuno fare ricorso a tiranti, che seguono il tracciato dei paralleli della cupola, e che hanno il compito di assorbire gli sforzi di trazione cui la muratura non è in grado di fare fronte.



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (2/5)

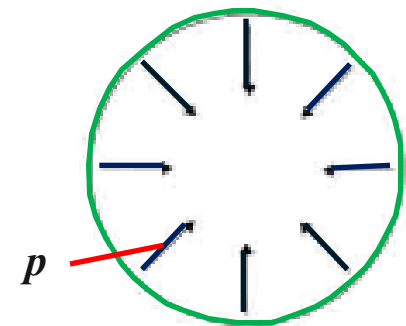
## CONSOLIDAMENTO

il dimensionamento dei tiranti non risulta molto complicato  
Essi devono applicare una pressione  $p$  sulla superficie esterna della cupola, nella zona in cui la cerchiatura viene applicata, tale da annullare lo sforzo di trazione localmente agente nel parallelo  $N_2$ .



*Forze equivalenti radiali  
prodotte dalle catene*

$$p = N_2 / r$$

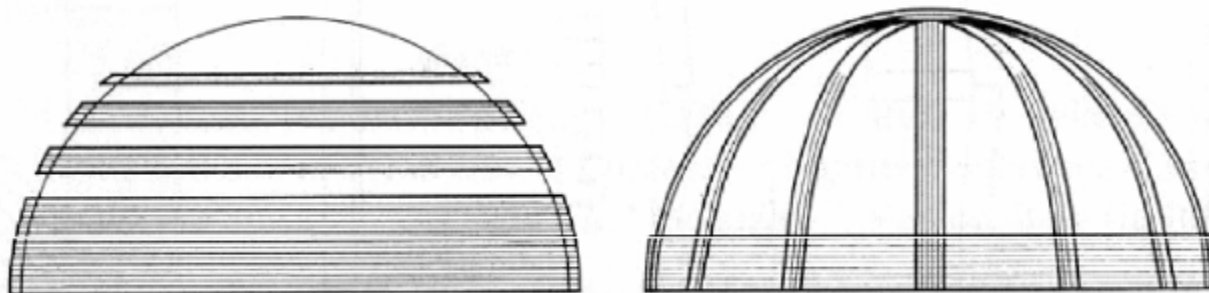


# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (3/5)

## CONSOLIDAMENTO

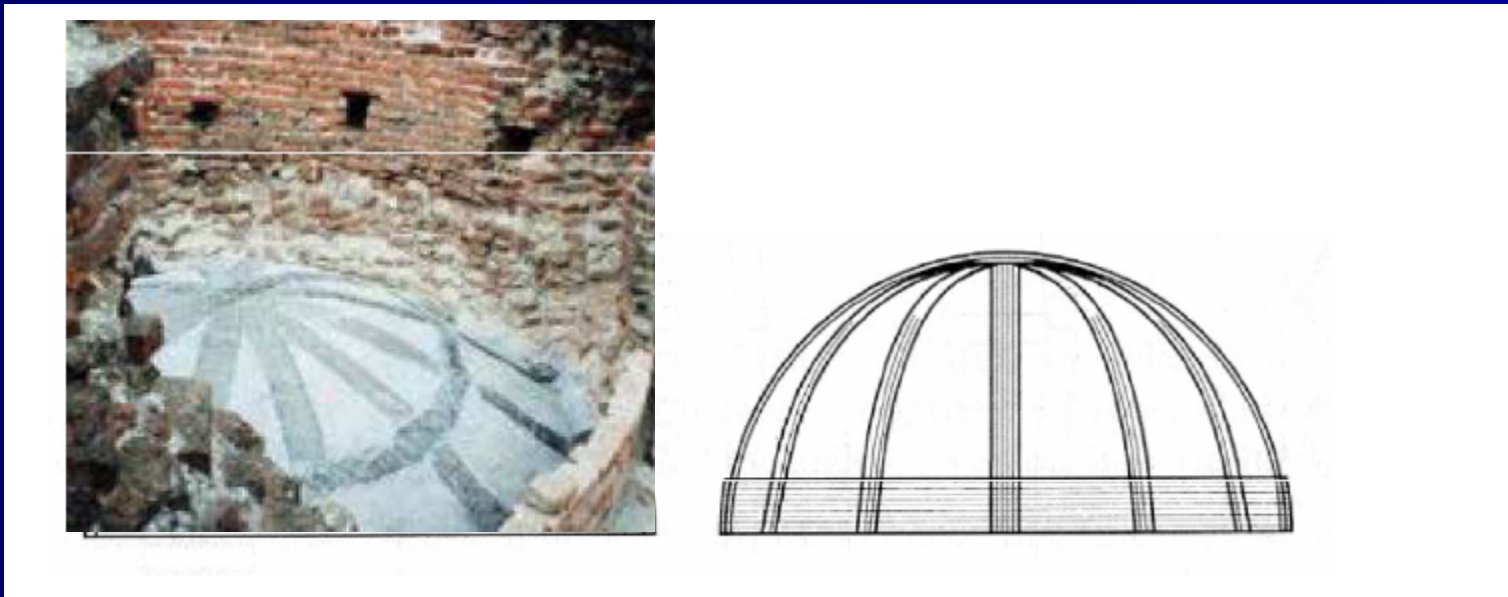
Nelle figure i basso sono riportati due tipici schemi di applicazione di tiranti con materiali fibrorinforzati (FRP).

Cerchiatura cupola con FRP



# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (4/5) **CONSOLIDAMENTO**

Nelle figure i basso sono riportati due tipici schemi di applicazione di tiranti con materiali fibrorinforzati (FRP).

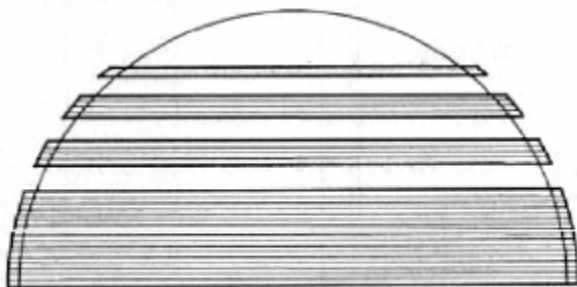


# Le cupole sottili soggette a soli carichi verticali (5/5)

## CONSOLIDAMENTO

Nelle figure i basso sono riportati due tipici schemi di applicazione di tiranti con materiali fibrorinforzati (FRP).

Cerchiatura cupola con FRP



Cerchiatura cupola San Carlo, Roma

