

Statica per l'edilizia storica

Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in
Architettura

A.A. 2016-2017

Prof. ing. Antonio Cazzani, Dr. ing. Iginò Mura,
Dr. ing. Flavio Stochino

antonio.cazzani@unica.it

<http://people.unica.it/antoniocazzani/ses/>

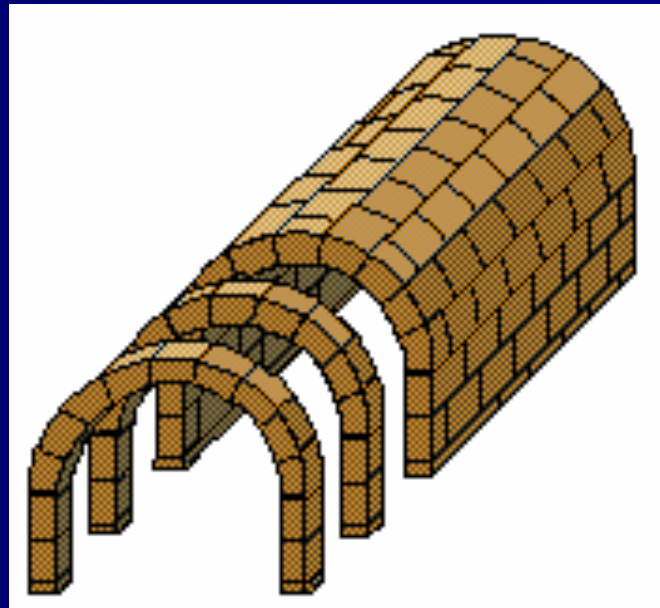
Lezione 11 – Le volte in muratura

Sommario

- Introduzione
 - **Le volte come strutture di copertura**
 - **Descrizione del comportamento statico delle volte**
- La volta a botte
 - **Le equazioni governanti**
 - **Le ipotesi semplificatrici**
 - **La presenza di soli carichi verticali**
 - **Le forme di direttrici più comuni**
- Gli altri tipi di volta
 - **La volta a crociera**
 - **La volta a padiglione**
- Esempi applicativi
 - **Analisi statica di una volta a botte**
 - **Analisi statica semplificata di una volta a crociera**

Le volte come strutture di copertura (1/5)

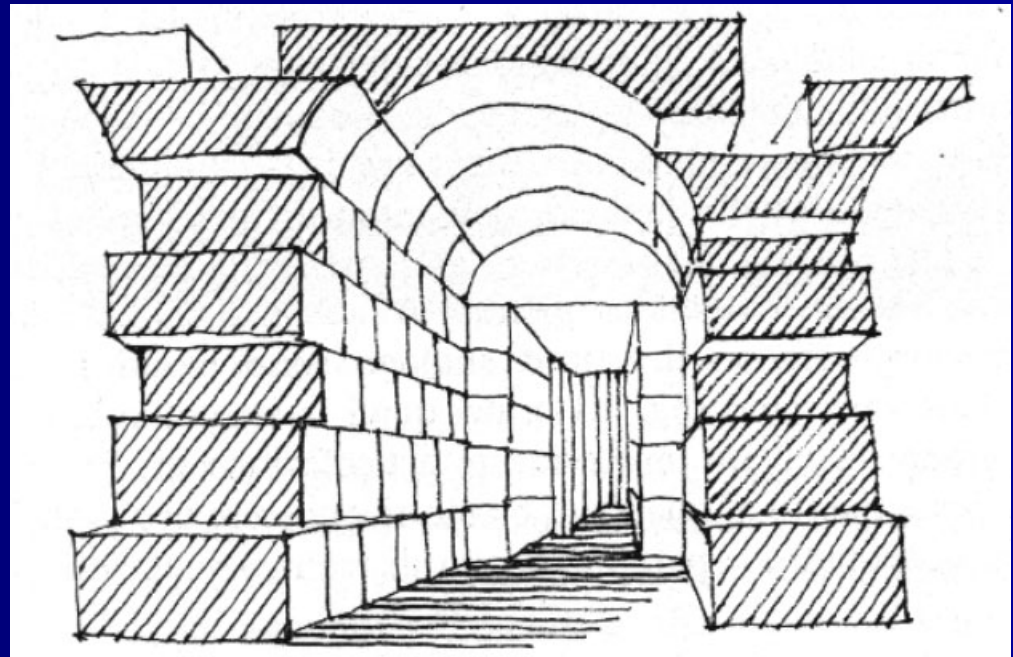
Le volte sono strutture di copertura derivate dall'arco e molto utilizzate nell'Architettura. Geometricamente, si può immaginare di costruire una volta per estrusione da un arco che trasla lungo una generatrice.



Le volte come strutture di copertura (2/5)

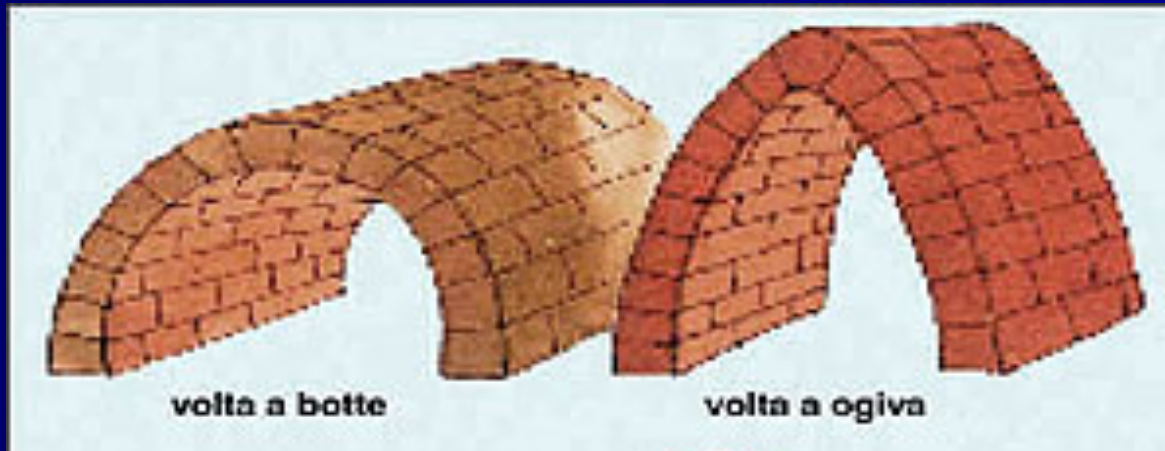
Il loro uso si diffuse dalle regioni mesopotamiche in Egitto, ma lo sviluppo prevalente si ebbe nell'architettura romana che, grazie alla conoscenza del comportamento statico portò a una modifica delle forme e a nuove applicazioni.

Egitto , VI dinastia .
Cappella di Abido.



Le volte come strutture di copertura (3/5)

L'interesse per le volte, tramontato nell'alto medioevo, ebbe nuovo sviluppo in epoca romanica e soprattutto gotica, specialmente nelle regioni dell'Europa settentrionale: la scoperta della volta a sesto acuto, che comportava spinte minori, contribuì ad accentuare il verticalismo delle costruzioni dell'epoca, in particolare modo delle cattedrali.

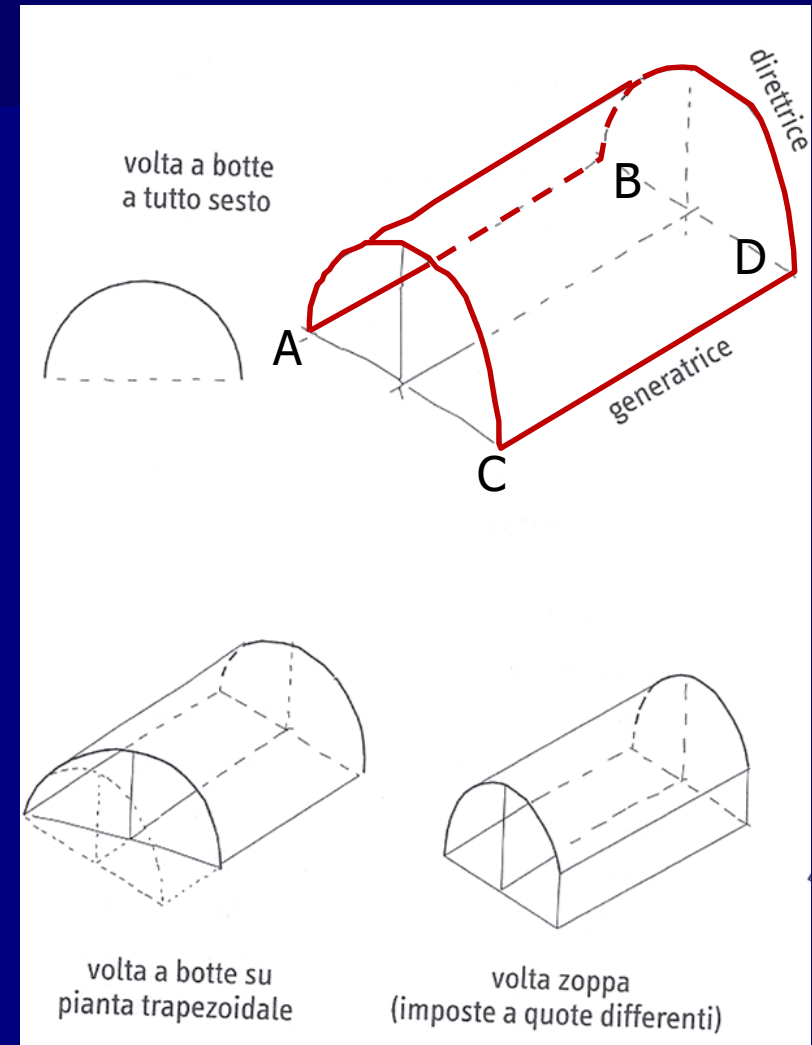


Le volte come strutture di copertura (4/5)

Ciò che distingue le volte di copertura è la forma geometrica della superficie media.

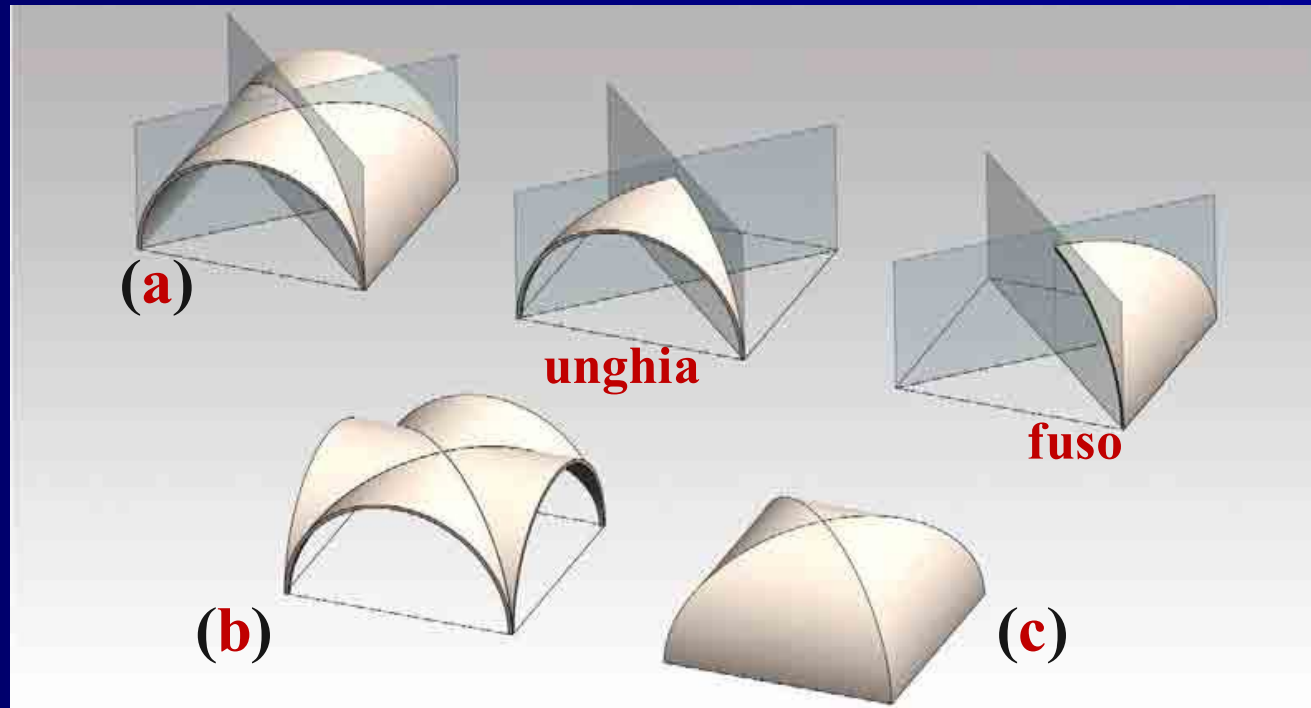
La più semplice è quella **a botte**, costituita da una porzione di superficie cilindrica, delimitata da due **generatrici**, AB e CD, che coincidono con i lati d'imposta.

Le **direttrici** terminali, sagomate ad arco, si appoggiano alla sommità delle due pareti di testata.



Le volte come strutture di copertura (5/5)

Sezionando opportunamente la **volta a botte (a)** si possono comporre con gli elementi ottenuti (**unghie** e **fusi**), la **volta a crociera (b)** o la **volta a padiglione (c)**.



Comportamento statico delle volte (1/5)

Il comportamento statico di una volta è complesso e la sua corretta impostazione costituisce un tipico problema di scienza delle costruzioni.

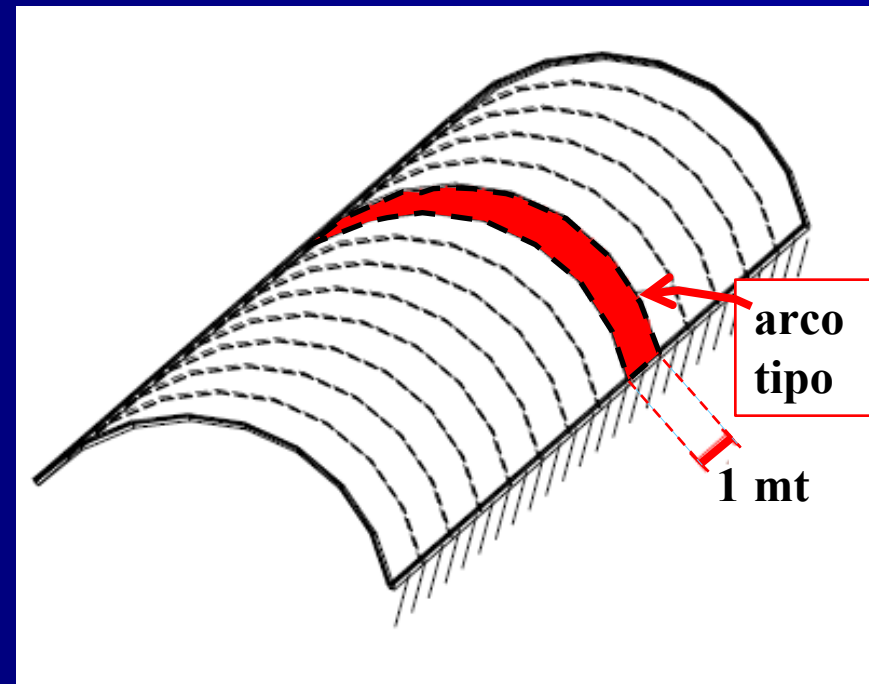
Gli schemi statici usualmente adottati per modellare le volte (sia quella più semplice a botte sia quelle derivate da essa) sono fondamentalmente:

- A) lo schema del comportamento ad arco;**
- B) lo schema del comportamento a piastra curva .**

Comportamento statico delle volte (2/5)

Secondo il **primo metodo** la volta a botte (che geometricamente, come già illustrato, si costruisce per estrusione da un arco che trasla lungo una generatrice) in termini statici si può studiare come **una successione di archi uguali paralleli**.

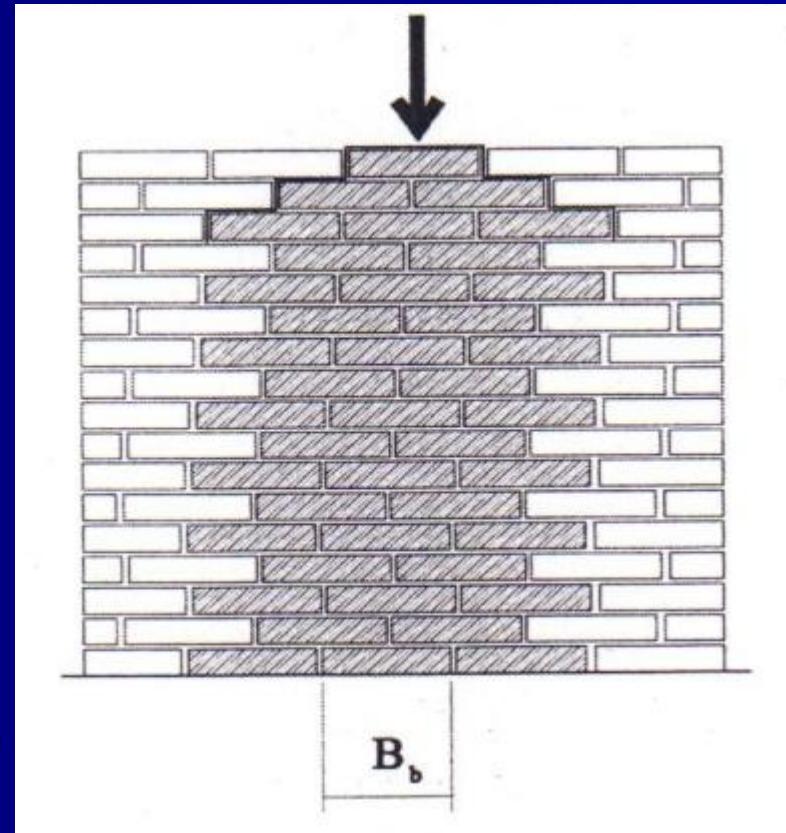
Isolandone una striscia di lunghezza unitaria si ricava la distribuzione degli sforzi interni come per un arco: i muri d'ambito sui quali essa poggia ne sopportano la spinta loro trasmessa con continuità dalle imposte.



Comportamento statico delle volte (3/5)

Fino alla metà del secolo scorso fu usato quasi esclusivamente il precedente schema di calcolo.

Esso ammette che ogni arco sopporti esclusivamente il carico che direttamente è applicato su di esso, e che non esista ripartizione degli sforzi tra gli archi affiancati in quanto la redistribuzione degli sforzi normali di compressione (agenti sugli archi) è interdetta dai giunti di malta orientati parallelamente alla medesima direzione dell'azione di compressione.



Comportamento statico delle volte (4/5)

L'analisi corretta del funzionamento statico di una volta non può ignorare, specialmente quando la volta è “sottile”, che lo schema di funzionamento da adottare è quello **a piastra curva**, secondo cui la struttura si comporta come “un continuo”.

Nel comportamento a piastra, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, lo stato di sollecitazione complessivo può essere rappresentato come la somma di due differenti stati di sollecitazione:

1) lo stato di sollecitazione **membranale**

(che determina le sollecitazioni derivanti dai carichi agenti);

2) lo stato di sollecitazione **flessionale**

(che determina le sollecitazioni derivanti dai vincoli al contorno).

Comportamento statico delle volte (5/5)

Le sollecitazioni (e le conseguenti deformazioni) in regime membranale possono essere determinate per qualsiasi distribuzione di forze esterne applicate. Esse possono essere ritenute conclusive esclusivamente per le strutture totalmente prive di rigidità flessionale (ad esempio le “tensostrutture**”, che hanno spessore praticamente nullo se rapportato alle dimensioni globali).**

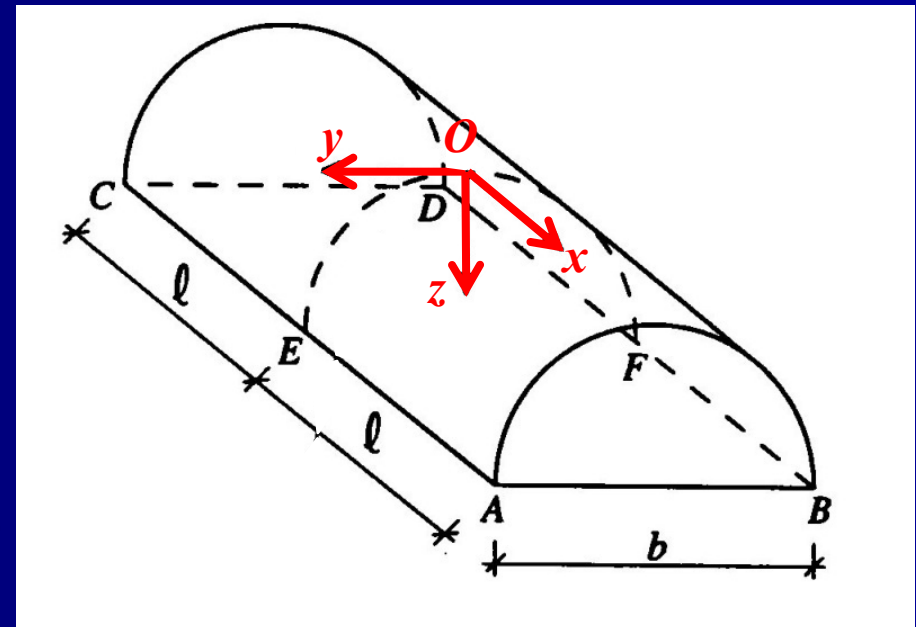
Per le strutture di spessore finito lo studio del regime membranale rappresenta la prima fase dello studio . Sui risultati che da esso derivano si fonda il secondo studio, quello flessionale .

La volta a botte: le equazioni governanti (1/19) il sistema di riferimento

Si assume un sistema di riferimento ortogonale $O(x, y, z)$, con l'origine posta nella sezione di chiave in corrispondenza della superficie media, a metà della luce (ℓ); l'asse z è rivolto in basso, l'asse y è tangente alla direttrice nel punto di colmo e l'asse x è la generatrice di colmo.

Rispetto a questo sistema di riferimento la volta è completamente definita dalla equazione della sua direttrice:

$$z = z(y)$$



La volta a botte: le equazioni governanti (2/19) il sistema di riferimento

Le forme più comuni della direttrice in una volta a botte sono quella **circolare, cicloidale, a catenaria, parabolica**. Queste curve presentano equazioni poco diverse fra di loro se, invece di esprimere la direttrice in funzione della coordinata z della superficie media, cioè nella forma:

$$z = z(y)$$

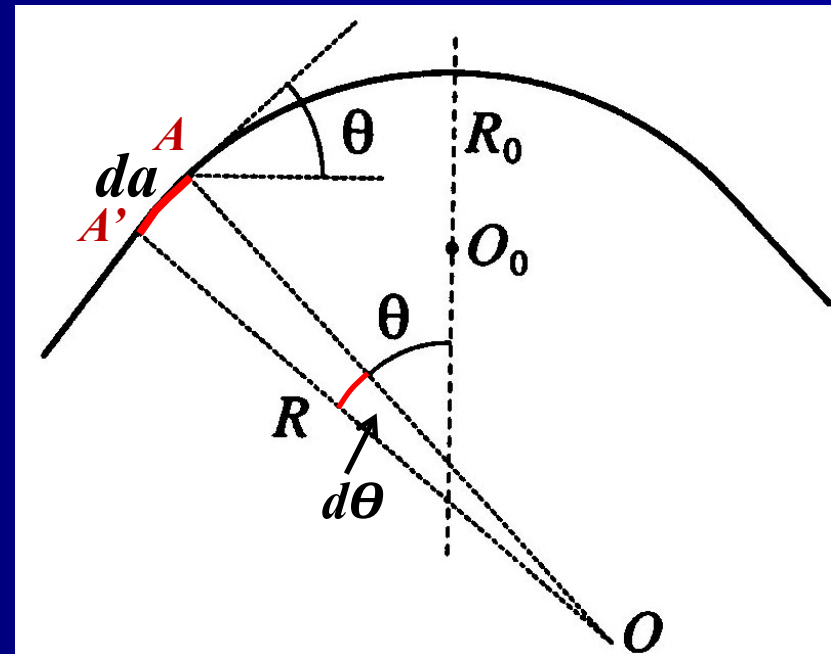
la si pone in funzione del **raggio di curvatura R** , cioè nella forma:

$$R = R(\theta).$$

Detto R_0 il raggio di curvatura in chiave l'espressione:

$$R = R_0 \cos^n \theta$$

rappresenta al variare di n , le quattro curve prima citate.



La volta a botte: le equazioni governanti (3/19) il sistema di riferimento

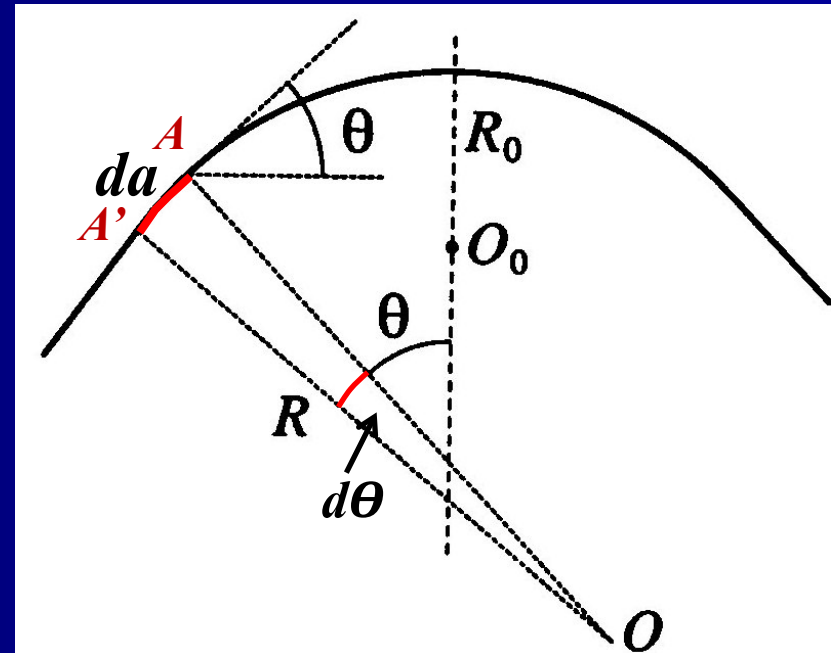
Assegnata la curva che definisce la direttrice mediante l'espressione:

$$R = R_0 \cos^n \theta$$

con n intero, da specificare in dipendenza del tipo di curva,

risulta agevole esprimere la lunghezza da dell'arco infinitesimo AA' individuato in una assegnata generatrice passante per il punto A .
Risulta:

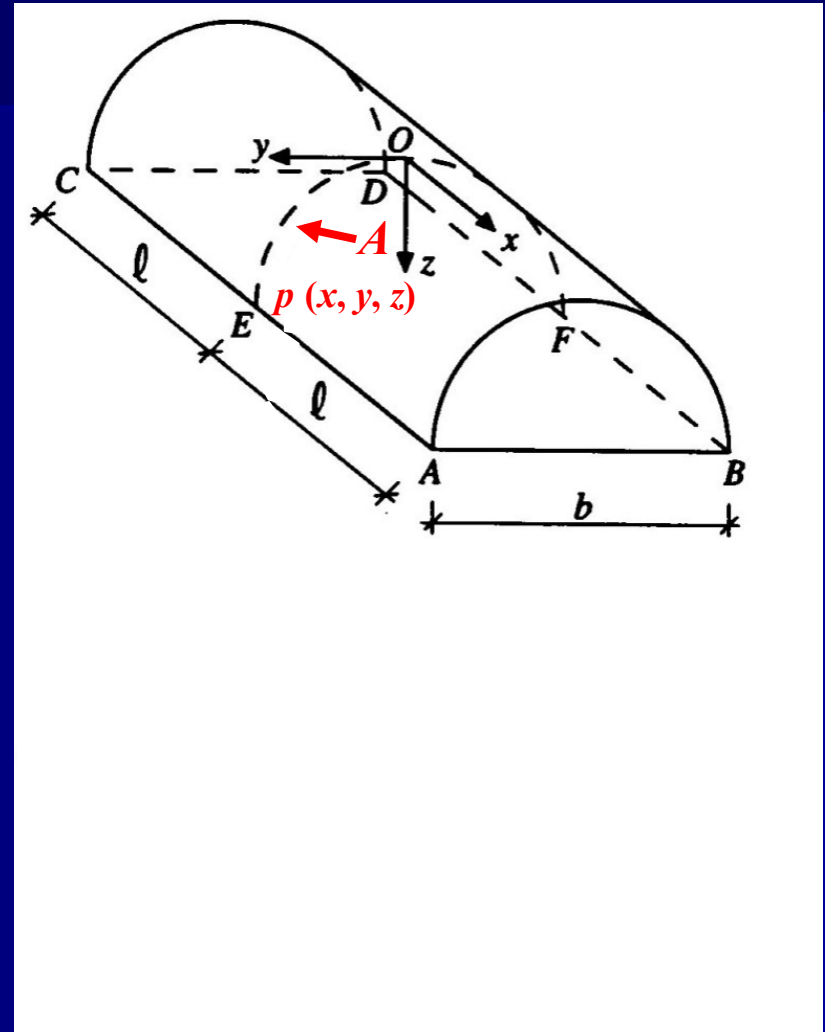
$$da = R d\theta$$



La volta a botte: le equazioni governanti (4/19)

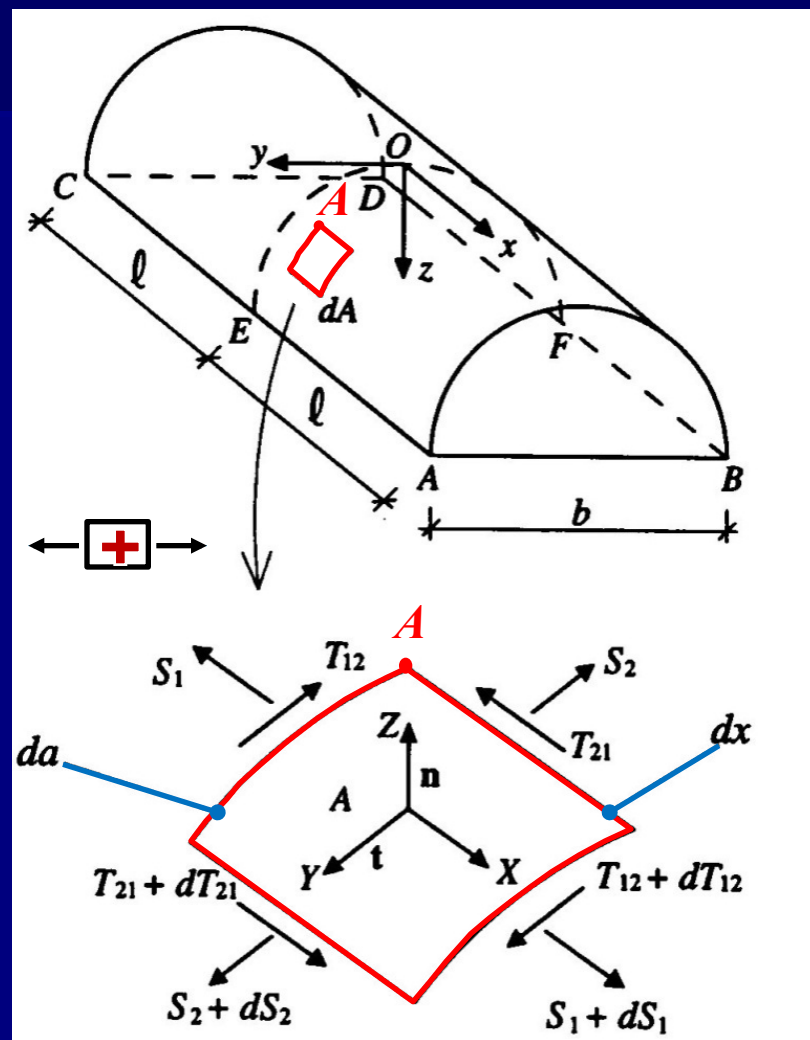
Si considera un **comportamento puramente membranale**: la volta viene ritenuta indefinitamente estesa e priva di rigidità flessionale; gli sforzi agenti punto per punto nel piano tangente sono in grado di equilibrare da soli i carichi esterni $p(x, y, z)$.

L'ipotesi membranale conduce a equazioni facilmente risolubili ma sottostima l'effettivo stato tensionale (trascura le sollecitazioni derivanti dai reali vincoli al contorno).



La volta a botte: le equazioni governanti (5/19)

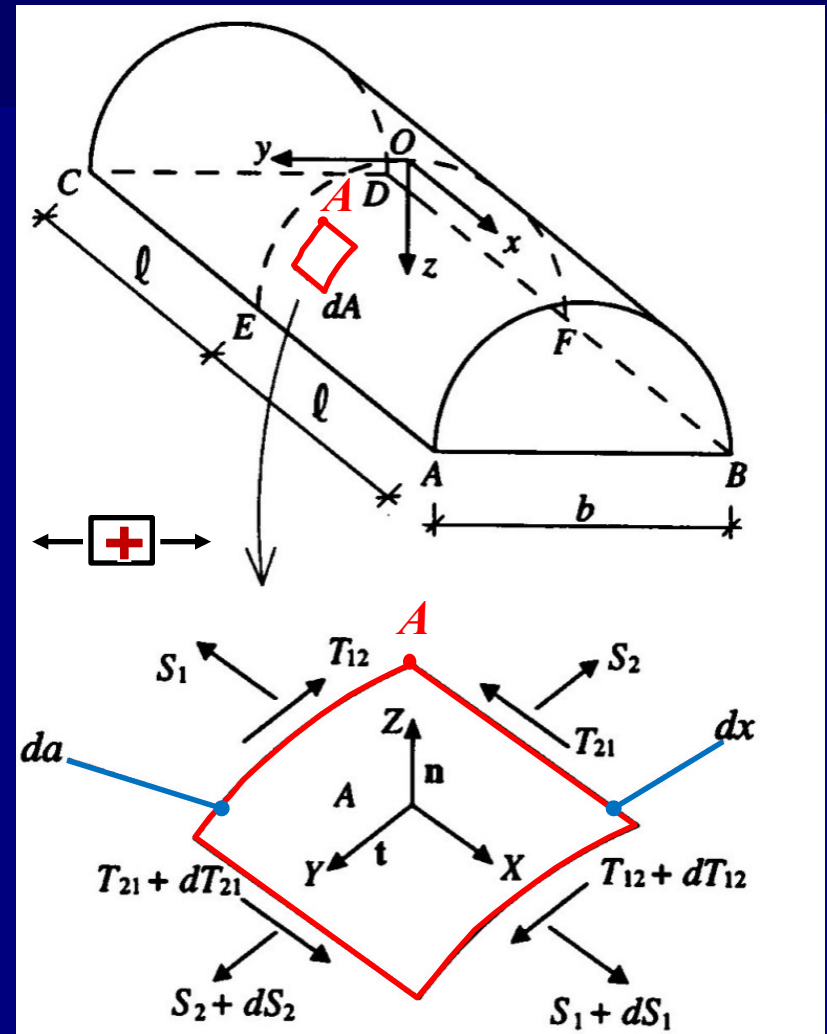
- Estraiamo dalla volta un elemento infinitesimo di volume del secondo ordine, avente le due dimensioni in pianta infinitesime (dx e da) e lo spessore s finito.
- Questo elementino è in equilibrio sotto l'azione :
 - a) delle componenti cartesiane del carico esterno distribuito $p(x, y, z)$, dirette secondo gli assi, X , Y e Z ;
 - b) degli sforzi per unità di lunghezza S_1 , S_2 , $T_{12} = T_{21}$.



La volta a botte: le equazioni governanti (6/19)

Lo sforzo normale per unità di lunghezza S_1 risulta diretto secondo la direzione dell'asse x , lo sforzo normale per unità di lunghezza S_2 è diretto secondo la tangente t e lo sforzo tangenziale per unità di lunghezza vale $T_{12} = T_{21}$ ed agisce nel piano tangente.

Spostandoci dalle facce che hanno vertice nel punto A a distanza infinitesima, le azioni interne predette si incrementano di quantità ugualmente infinitesime.



La volta a botte: le equazioni governanti (7/19)

Risulta:

$$dS_1 = (\partial S_1 / \partial x) dx$$

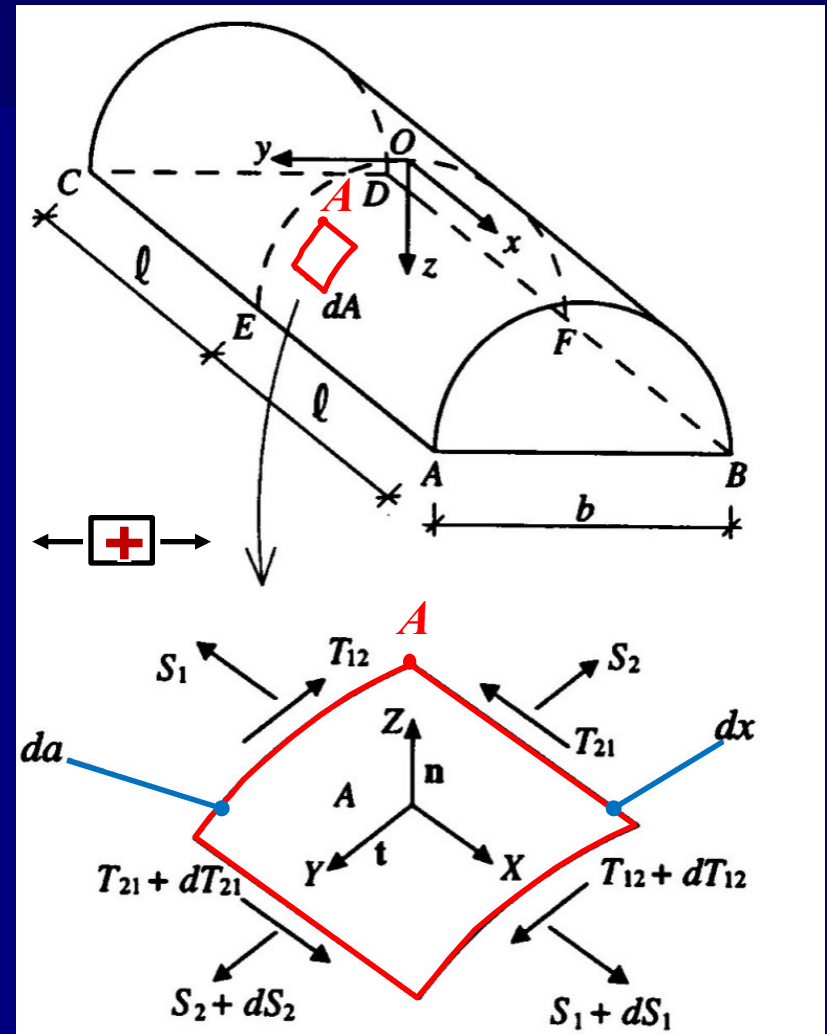
$$dS_2 = (\partial S_2 / \partial a) da$$

$$dT_{12} = (\partial T_{12} / \partial x) dx$$

$$dT_{21} = (\partial T_{21} / \partial a) da$$

Noti S_1 , S_2 , T_{12} le tensioni unitarie locali, uniformi nello spessore, sono date da:

$$\sigma_1 = S_1/s ; \quad \sigma_2 = S_2/s ; \quad \tau = T_{12}/s.$$



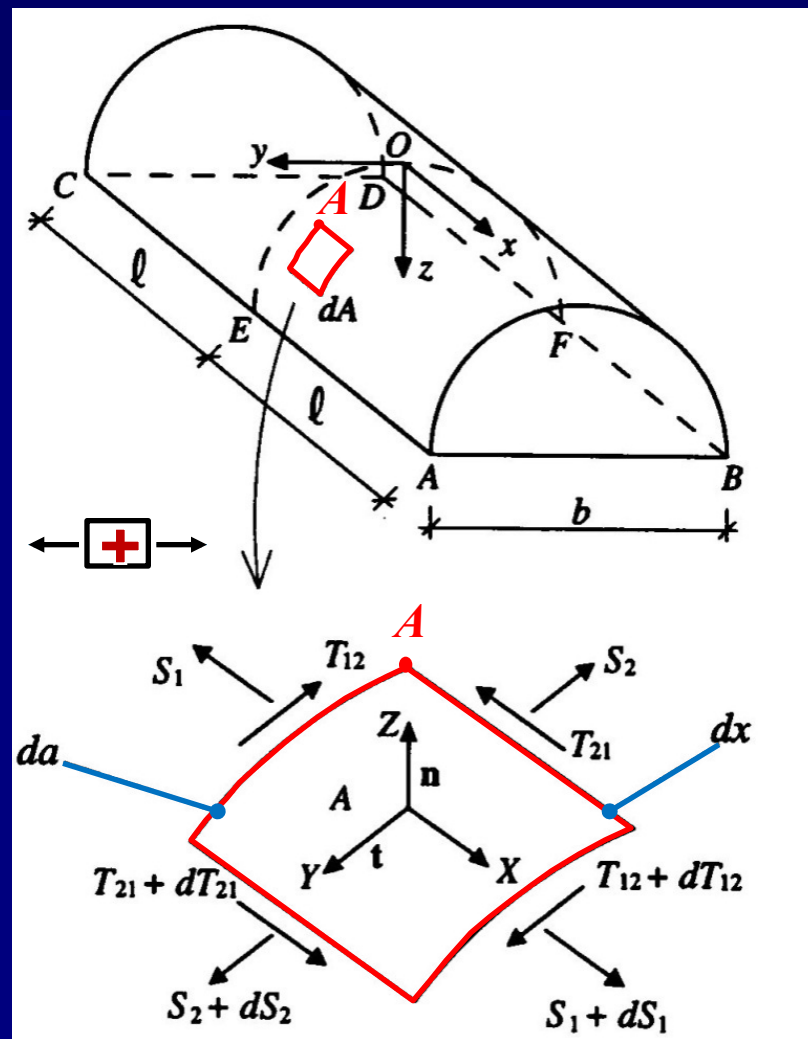
La volta a botte: le equazioni governanti (8/19)

L'elemento di volta ha area:

$$dA = dx da = dx R d\theta$$

dove si rammenta che l'elemento di arco da si può esprimere come prodotto del raggio di curvatura $R(\theta)$ e dell'angolo sotteso $d\theta$.

Imponendo l'equilibrio alla traslazione secondo le direzioni z (ovvero n), y (ovvero t) e x si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tra incognite S_1 , S_2 , T_{12} .

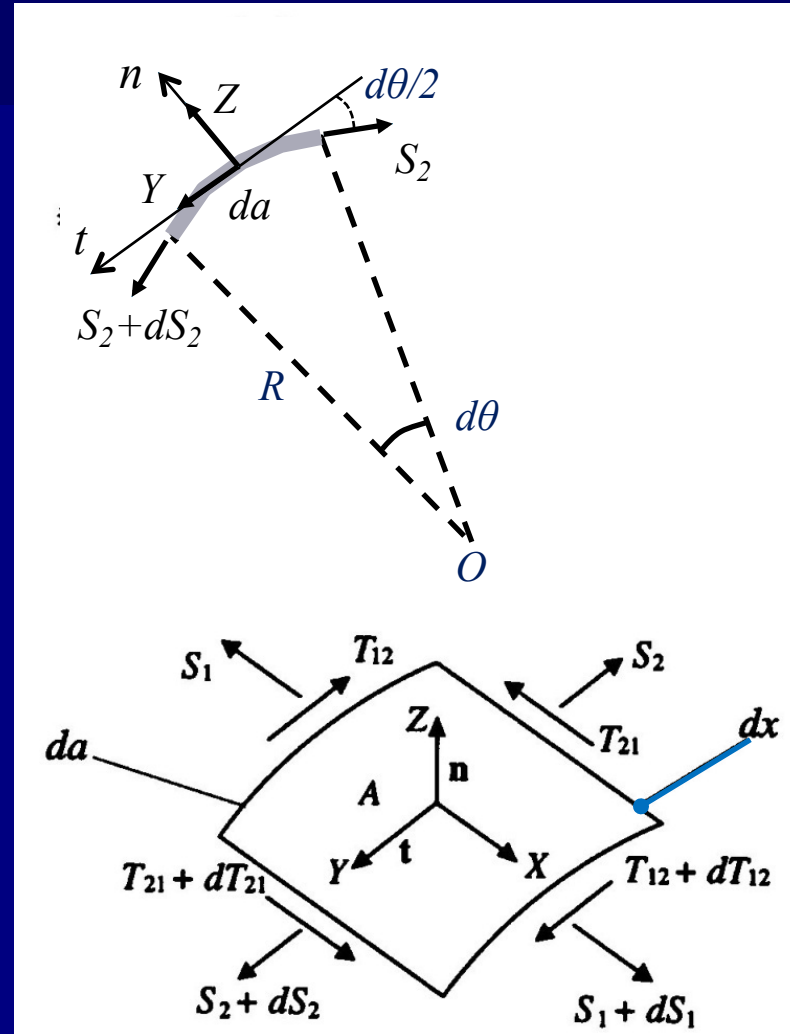


La volta a botte: le equazioni governanti (9/19)

Equilibrio in direzione n

Le forze T , così come le componenti X e Y del carico esterno, agiscono nel piano ortogonale ad n , pertanto non danno componenti in tale direzione.

Analogamente l'azione interna S_1 è diretta secondo x (ortogonale a n) e quindi non da contributo.



La volta a botte: le equazioni governanti (10/19)

Equilibrio in direzione n

Sono pertanto significative esclusivamente Z e l'azione interna S_2 . Considerando positive le azioni nel verso di n si hanno i contributi:

$Z dx da$

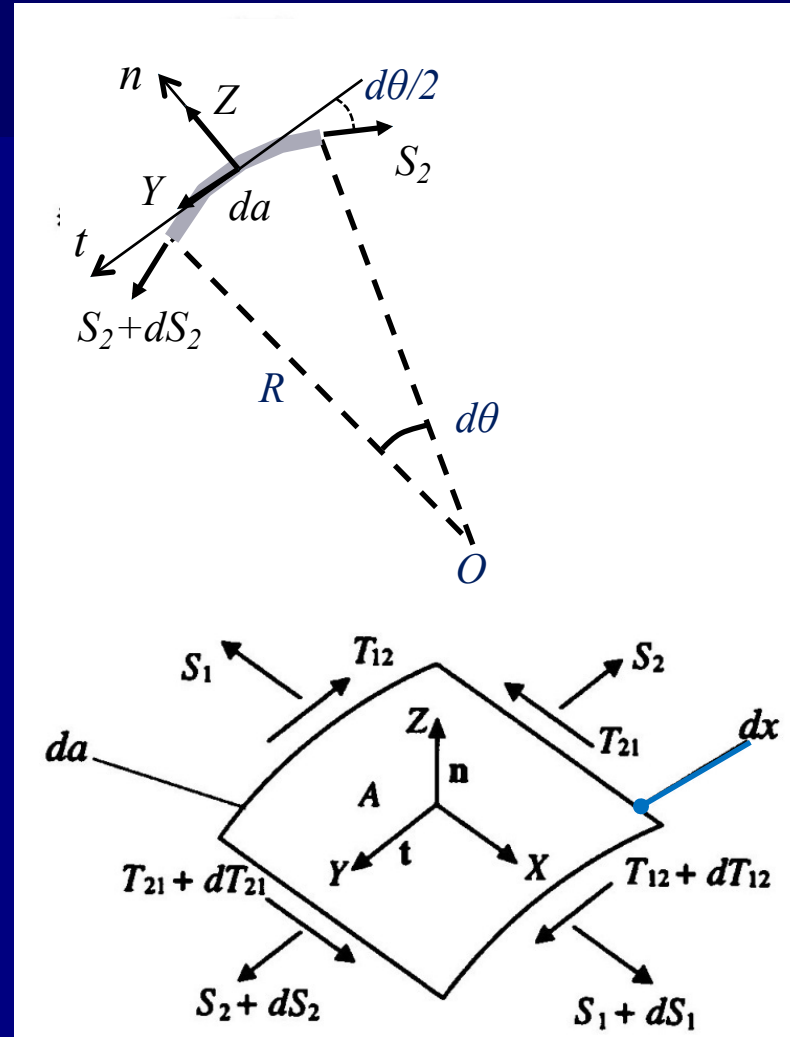
$$- S_2 dx \sin(d\theta/2) - (S_2 + dS_2) dx \sin(d\theta/2) = - 2 S_2 dx \sin(d\theta/2) - dS_2 dx \sin(d\theta/2)$$

Teniamo conto che a meno di infinitesimi di ordine superiore risulta :

$$\sin(d\theta/2) \cong d\theta/2$$

Possiamo scrivere:

$$- S_2 dx d\theta - dS_2 dx (d\theta/2) + Z dx da = 0$$



La volta a botte: le equazioni governanti (11/19)

Equilibrio in direzione n

$$-S_2 dx d\theta - dS_2 dx (d\theta/2) + Z dx da = 0$$

trascurando il secondo termine che risulta infinitesimo del terzo ordine, e pertanto di ordine superiore rispetto agli altri due, che sono del secondo ordine, si ottiene:

$$-S_2 dx d\theta + Z dx da = 0$$

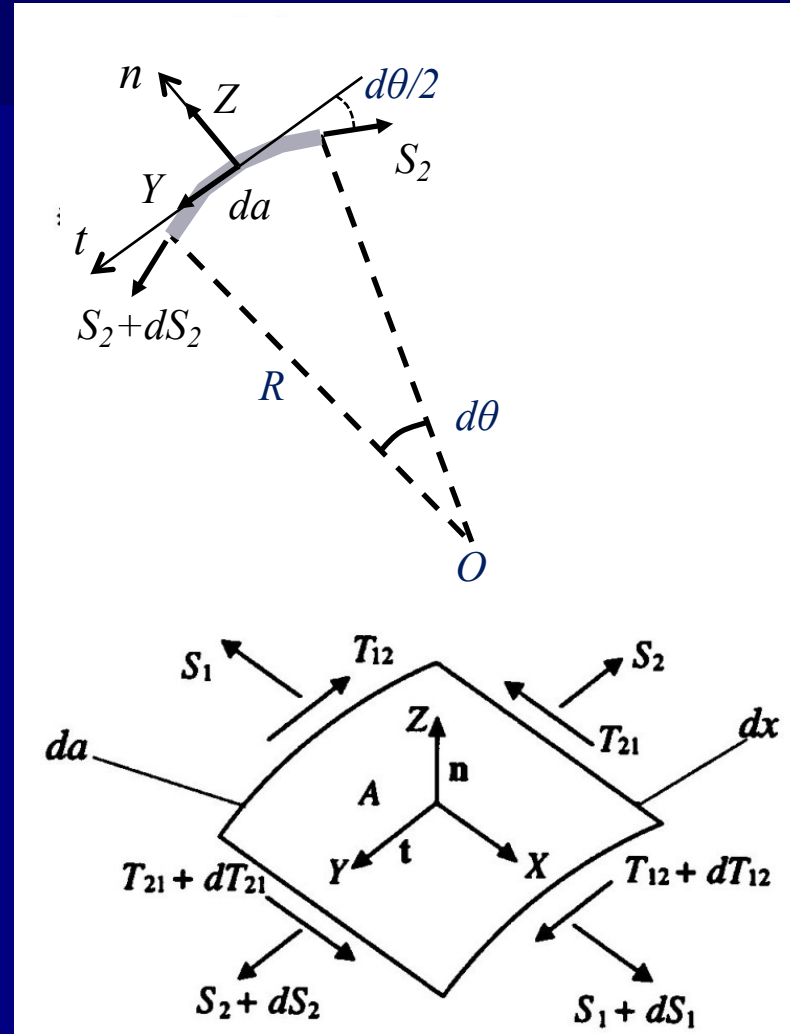
Ricordando che $da = R d\theta$ risulta:

$$-S_2 dx d\theta + Z dx R d\theta = 0$$

$$(-S_2 + Z R) d\theta dx = 0$$

Poiché $d\theta dx$ è infinitesimo, ma non nullo, deve essere:

$$S_2 - Z R = 0. \quad [1]$$



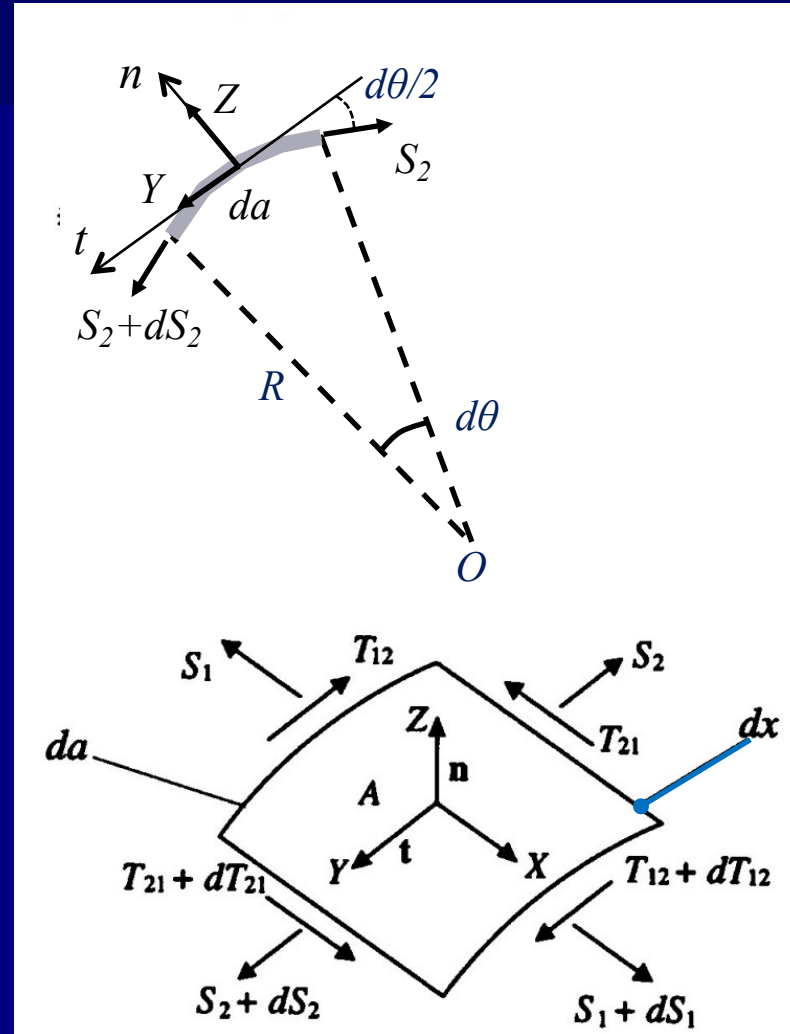
La volta a botte: le equazioni governanti (12/19)

Equilibrio in direzione t

Le forze T_{21} e le componenti X e Z del carico esterno, agiscono in direzione ortogonale ad t e non danno componenti in tale direzione.

Analogamente l'azione interna S_1 è diretta secondo x (ortogonale a t) e quindi non dà contributo.

Sono significative esclusivamente Y , e le azioni interne T_{12} e S_2 .



La volta a botte: le equazioni governanti (13/19)

Equilibrio in direzione t

Considerando positive le azioni nel verso di t si hanno i contributi:

$$Y dx da$$

$$[-T_{12} da + (T_{12} + dT_{12})da] = dT_{12} da$$

$$\begin{aligned} -S_2 dx \cos(d\theta/2) + (S_2 + dS_2)dx \cos(d\theta/2) &= \\ &= dS_2 dx \cos(d\theta/2) \end{aligned}$$

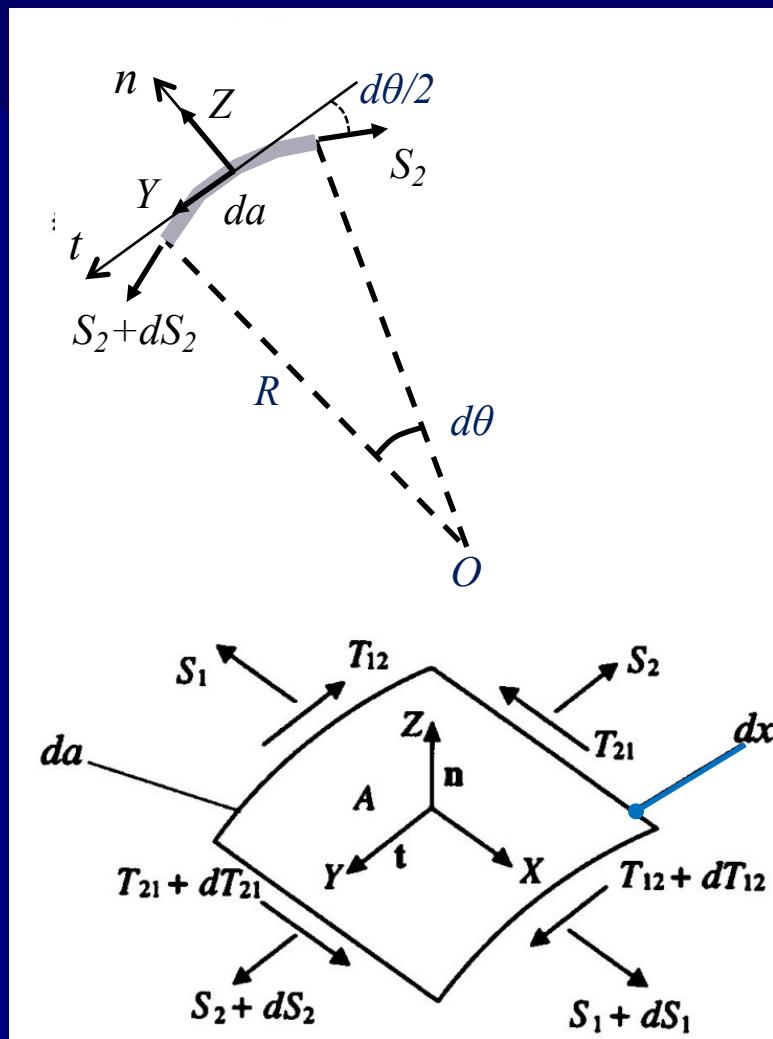
Possiamo scrivere:

$$dT_{12} da + dS_2 dx \cos(d\theta/2) + Y dx da = 0$$

Teniamo conto che :

$$dT_{12} = (\partial T_{12} / \partial x) dx ; \quad dS_2 = (\partial S_2 / \partial a) da ;$$

$$\cos(d\theta/2) \cong 1$$



La volta a botte: le equazioni governanti (14/19)

Equilibrio in direzione t

L'equazione diventa quindi

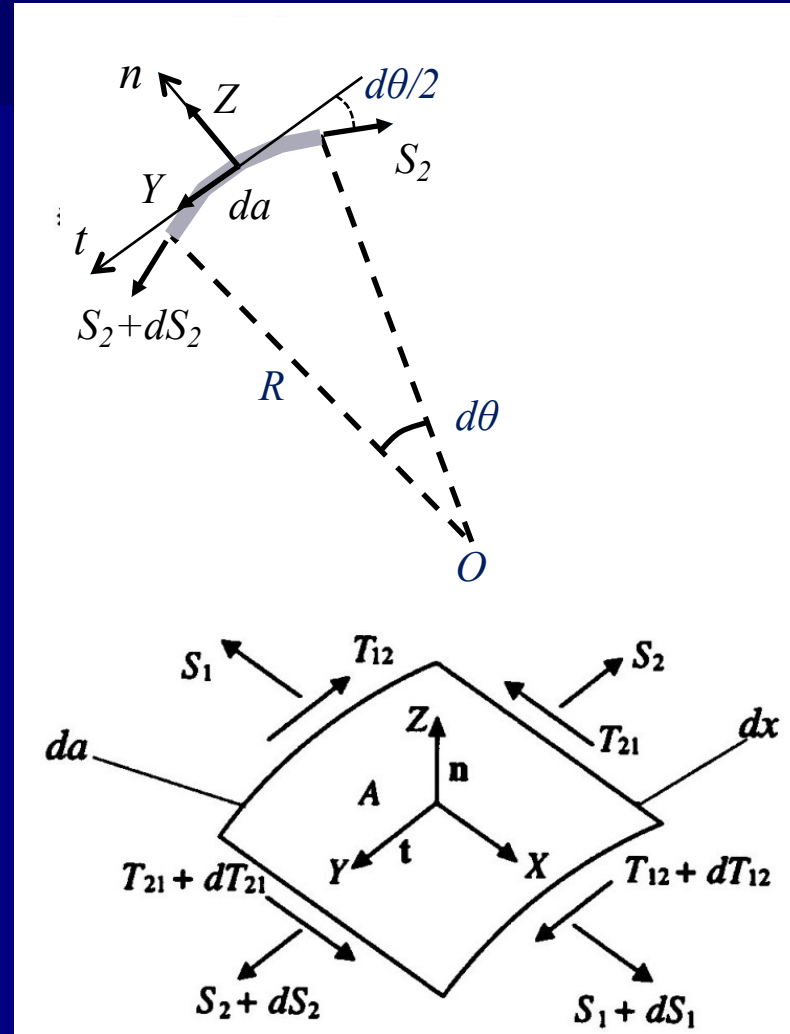
$$(\partial T_{12}/\partial x) dx da + (\partial S_2/\partial a) da dx + Y dx da = 0$$

si ottiene:

$$[(\partial T_{12}/\partial x) + (\partial S_2/\partial a) + Y] dx da = 0$$

Poiché $dx da$ è infinitesimo ma non nullo, l'uguaglianza è soddisfatta se:

$$(\partial T_{12}/\partial x) + (\partial S_2/\partial a) + Y = 0 \quad [2]$$



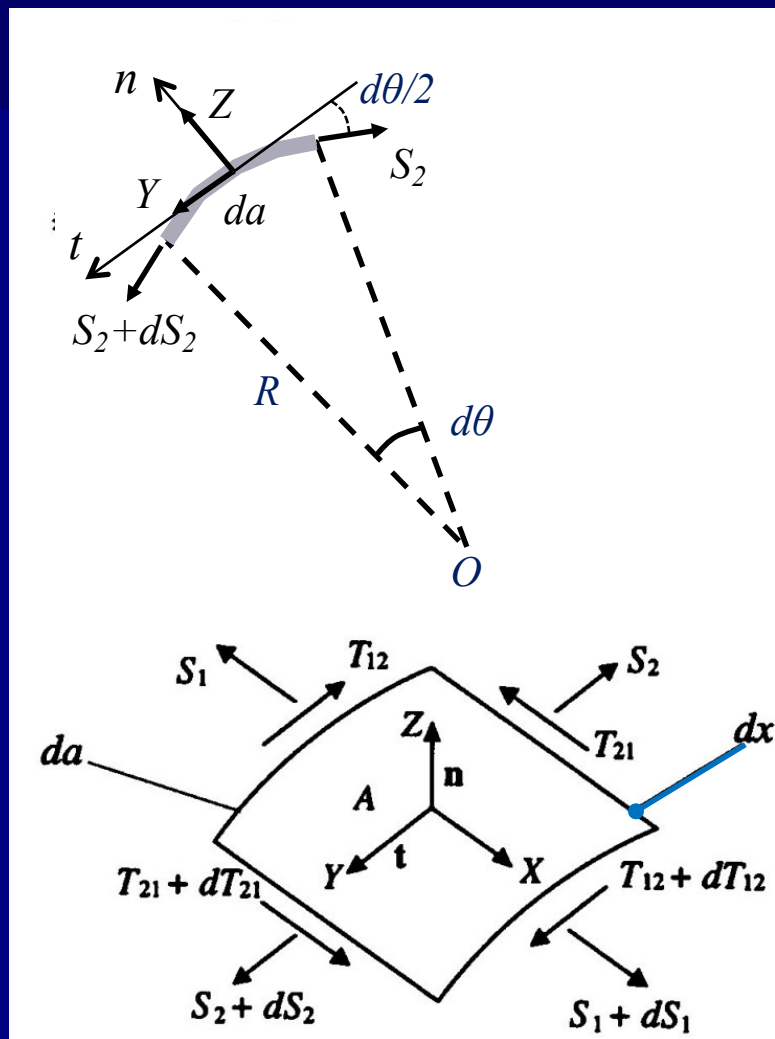
La volta a botte: le equazioni governanti (15/19)

Equilibrio in direzione x

Le forze T_{12} e le componenti Z e Y del carico esterno, agiscono in direzione ortogonale ad x , pertanto non danno componenti in tale direzione.

Analogamente l'azione interna S_2 è diretta secondo y (ortogonale a x) e quindi non da contributo.

Sono significative esclusivamente X e le azioni interne T_{21} e S_1 .



La volta a botte: le equazioni governanti (16/19)

Equilibrio in direzione x

Considerando positive le azioni nel verso di x si ha:

$$X dx da$$

$$- T_{21} dx + (T_{21} + dT_{21}) dx = dT_{21} dx$$

$$- S_1 da + (S_1 + dS_1) da = dS_1 da$$

Possiamo scrivere:

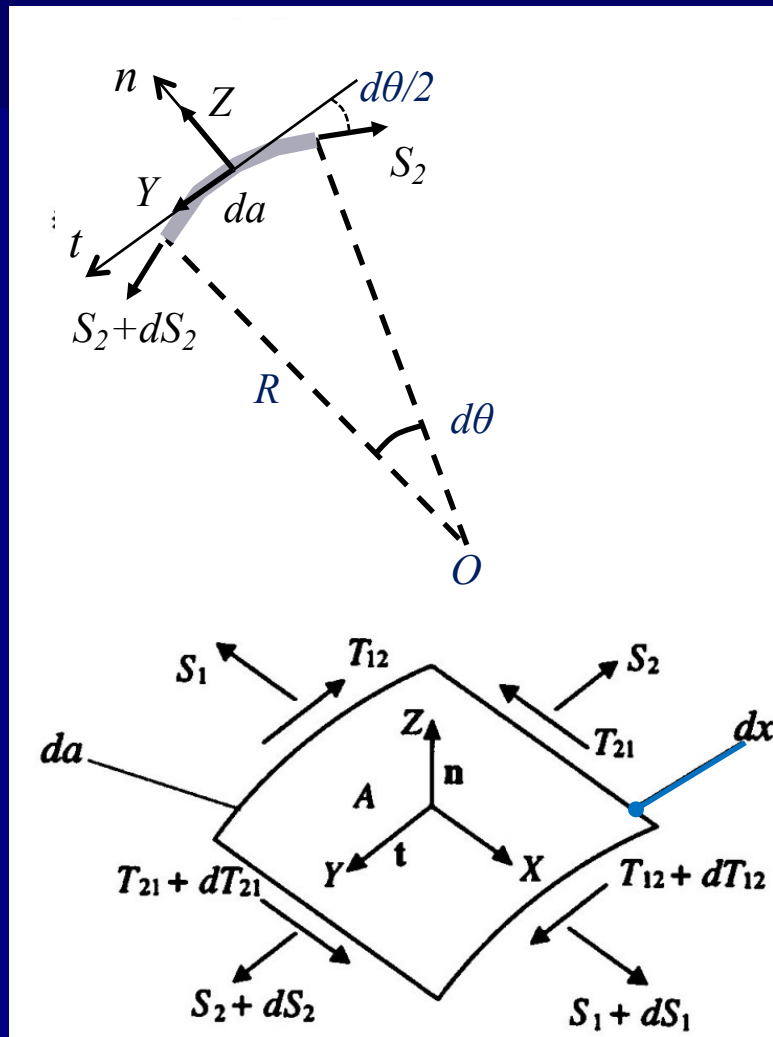
$$dT_{21} dx + dS_1 da + X dx da = 0$$

Tenuto conto che :

$$dT_{21} = (\partial T_{21} / \partial a) da ; \quad dS_1 = (\partial S_1 / \partial x) dx ;$$

Possiamo scrivere:

$$(\partial T_{21} / \partial a) da dx + (\partial S_1 / \partial x) dx da + X dx da = 0$$



La volta a botte: le equazioni governanti (17/19)

Equilibrio in direzione x

L'equazione precedente:

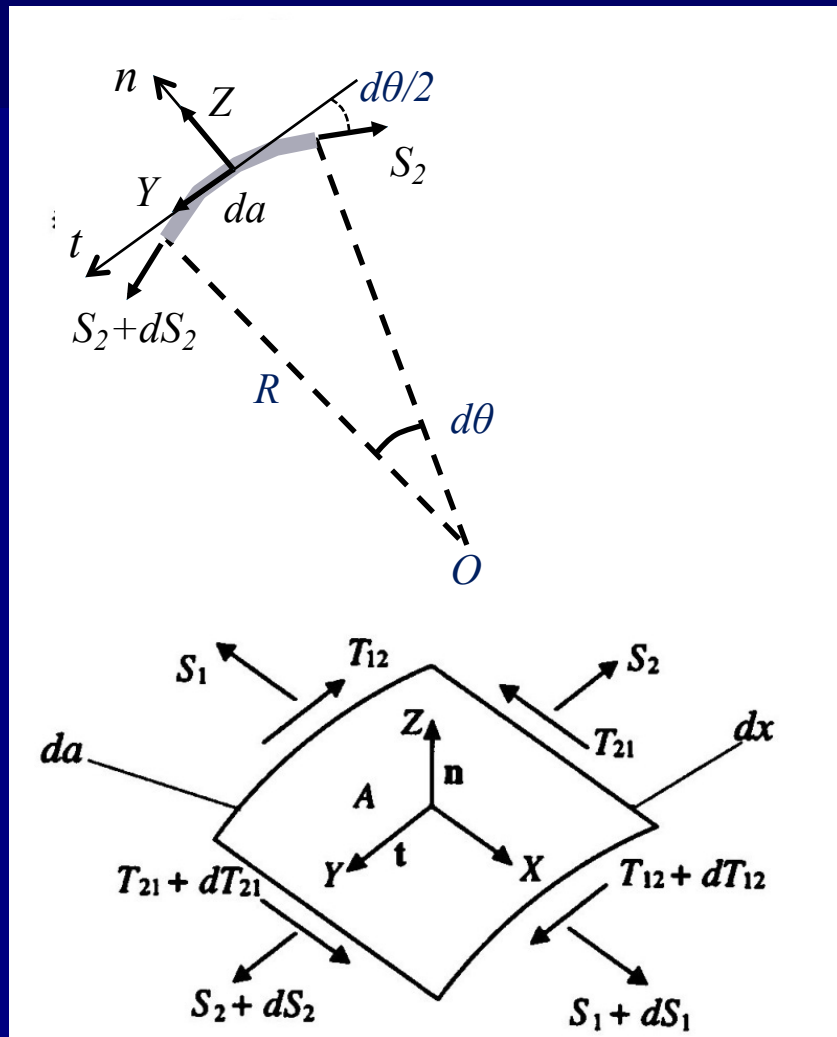
$$(\partial T_{21}/\partial a) da dx + (\partial S_1/\partial x) dx da + X dx da = 0$$

si può riscrivere:

$$[(\partial T_{21}/\partial a) + (\partial S_1/\partial x) + X] dx da = 0$$

Poiché $dx da$ è infinitesimo ma non nullo, l'uguaglianza è soddisfatta se:

$$(\partial T_{21}/\partial a) + (\partial S_1/\partial x) + X = 0 \quad [3]$$



La volta a botte: le equazioni governanti (18/19)

Il comportamento della volta a botte in regime di membrana è dunque governato da queste 3 equazioni:

$$S_2 - Z R = 0. \quad [1]$$

$$(\partial T_{12}/\partial x) + (\partial S_2/\partial a) + Y = 0 \quad [2]$$

$$(\partial S_1/\partial x) + (\partial T_{21}/\partial a) + X = 0 \quad [3]$$

La [1] è un'equazione algebrica: pertanto S_2 è completamente determinato da $Z(x, y, z)$ e da $R(\theta)$ e non si possono imporre condizioni al contorno su S_2 .

La [2] e la [3] sono invece equazioni differenziali; tuttavia nota S_2 possono essere facilmente integrate.



Locale commerciale in Cagliari
(piazza Yenne)

La volta a botte: le equazioni governanti (19/19)

L'integrazione fornisce:

$$T_{12} = -\int (\partial S_2 / \partial a) dx - \int Y dx + \varphi(\theta) \quad [4]$$

$$S_1 = -\int (\partial T_{12} / \partial a) dx - \int X dx + \psi(\theta) \quad [5]$$

dove $\varphi(\theta)$ e $\psi(\theta)$ sono due funzioni di integrazione della sola variabile θ , che si determinano con le condizioni al contorno.



Locale commerciale in Cagliari
(piazza Yenne)

La volta a botte: le ipotesi semplificatrici (1/5)

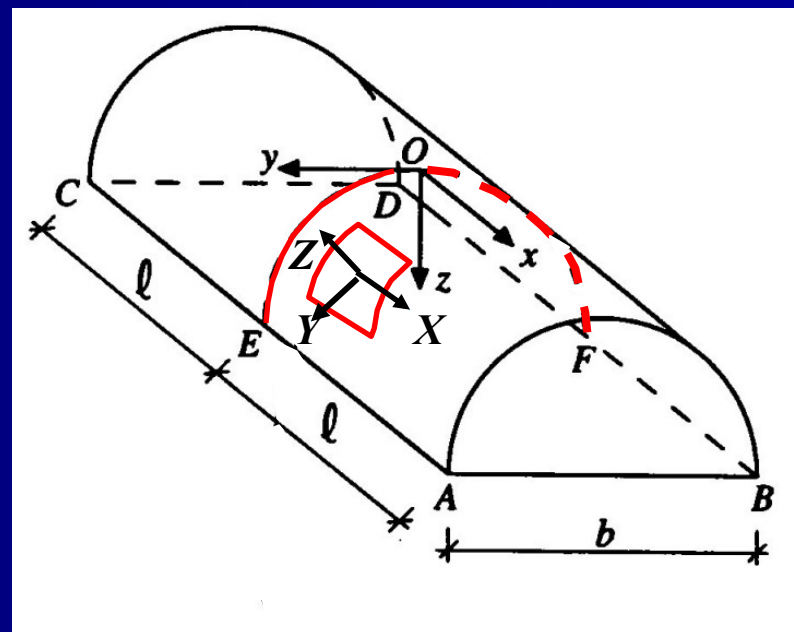
Ipotesi semplificatrici:

1. Se, come generalmente avviene, le componenti del carico esterno X , Y e

Z sono funzione di θ ma non di x (cioè sono costanti al variare di x), S_2 non dipende da x e le equazioni [4], [5] assumono l'aspetto seguente:

$$\begin{aligned} T_{12} &= -x [(dS_2/R d\theta) + Y] + \varphi(\theta) = \\ &= -x K(\theta) + \varphi(\theta) \end{aligned} \quad [6]$$

$$S_1 = (x^2/2) (dK/R d\theta) - x [(d\varphi/R d\theta) + X] + \psi(\theta) \quad [7]$$



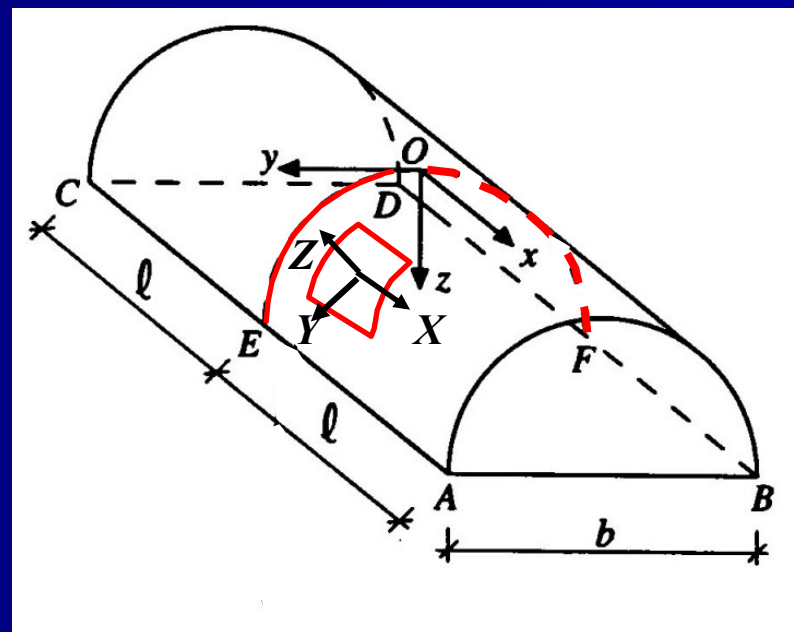
La volta a botte: le ipotesi semplificatrici (2/5)

Ipotesi semplificatrici:

2. Se la volta è egualmente vincolata alle estremità frontali AB e CD , nel piano medio EF (per la simmetria) deve essere $T_{12} = 0$. Pertanto se nella [6] si pone $T_{12} = 0$ per $x = 0$, si trova che $\varphi(\theta) = 0, \forall \theta$.

$$T_{12} = -x K(\theta) \quad [6a]$$

$$S_1 = (x^2/2) (dK/Rd\theta) - x [X] + \psi(\theta) \quad [7a]$$



La volta a botte: le ipotesi semplificatrici (3/5)

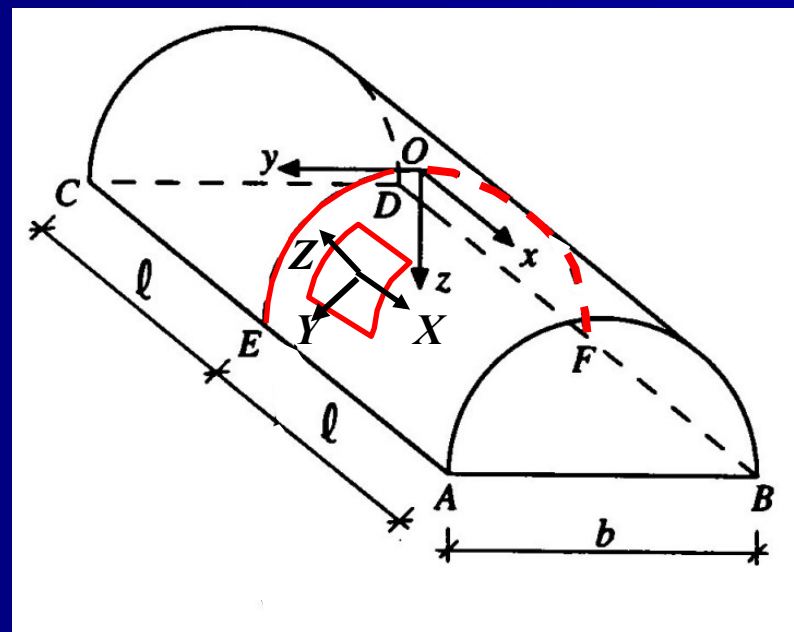
Ipotesi semplificatrici:

3. Di norma i timpani non sono in grado di reagire a un'azione trasversale, per cui deve essere $S_1 = 0$ per $x = \pm \ell$. Pertanto, tenuto conto che $\varphi(\theta) \equiv 0$, si ottiene dalla [7] $X(\theta) = 0$ e:

$$\psi(\theta) = -(\ell^2/2) (dK/R d\theta).$$

$$T_{12} = -x K(\theta) \quad [6b]$$

$$S_1 = (x^2/2) (dK/R d\theta) - (\ell^2/2) (dK/R d\theta) \quad [7b]$$



La volta a botte: le ipotesi semplificatrici (4/5)

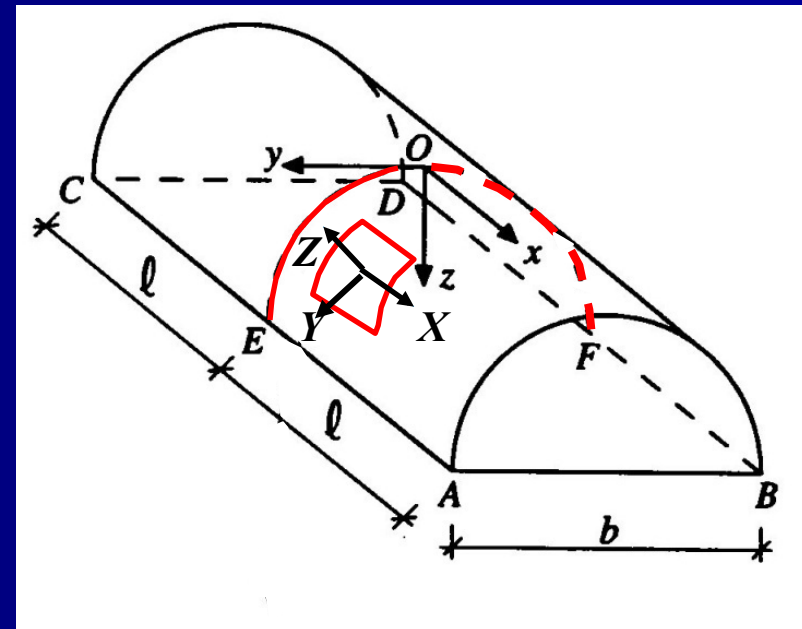
Ipotesi semplificatrici:

4. In definitiva, se valgono le ipotesi 1, 2 e 3 le equazioni [6] e [7] divengono:

$$T_{12} = -x K(\theta) \quad [8]$$

$$S_1 = 1/2(x^2 - \ell^2) [(1/R) (dK/d\theta)] \quad [9]$$

Con : $K(\theta) = (1/R)(dS_2/d\theta) + Y$



La volta a botte: le ipotesi semplificatrici (5/5)

Conseguenze delle ipotesi semplificatrici:

1. Se Z è indipendente da x , S_2 è indipendente da x , e varia lungo ogni direttrice con la stessa legge; inoltre il valore di S_2 non dipende dalle condizioni di vincolo della volta;
2. Anche la spinta orizzontale H , per unità di lunghezza, nel bordo longitudinale è indipendente da x e vale: $H = -S_2 \cos \theta$;
3. Se la direttrice termina con tangenti verticali ($\theta = 90^\circ$), nei bordi si ha: $H = 0$;
4. Gli sforzi T_{12} e S_1 variano in generale con θ ; inoltre T_{12} è una funzione lineare di x , mentre S_1 è una funzione parabolica di x .
5. I risultati ottenuti restano validi finché la volta si comporta ovunque come una membrana: ciò richiede che essa sia sottile e preveda al contorno **vincoli compatibili** con il regime di membrana (tali da escludere azioni flettenti e taglianti).

Sommario

- Introduzione
 - Le volte come strutture di copertura
 - Descrizione del comportamento statico delle volte

- La volta a botte
 - Le equazioni governanti
 - Le ipotesi semplificatrici
 - **La presenza di soli carichi verticali**
 - **Le forme di direttrici più comuni**

- Gli altri tipi di volta
 - **La volta a crociera**
 - **La volta a padiglione**

- Esempi applicativi
 - Analisi statica di una volta a botte
 - Analisi statica semplificata di una volta a crociera

La volta a botte soggetta a soli carichi verticali (1/5)

I carichi verticali più frequenti per questi tipi di volte sono:

1. **il peso proprio**
(carico uniformemente distribuito *per unità di sviluppo*);
2. **il carico da neve**
(carico uniformemente distribuito *per unità di proiezione orizzontale*).

La volta a botte soggetta a soli carichi verticali (2/5)

Peso proprio - carico uniformemente distribuito per unità di sviluppo.

Se V rappresenta il valore del carico per unità di area, le componenti Cartesiane sono date da:

$$Z = -V \cos \theta ;$$

$$Y = +V \sin \theta ;$$

$$X = 0.$$

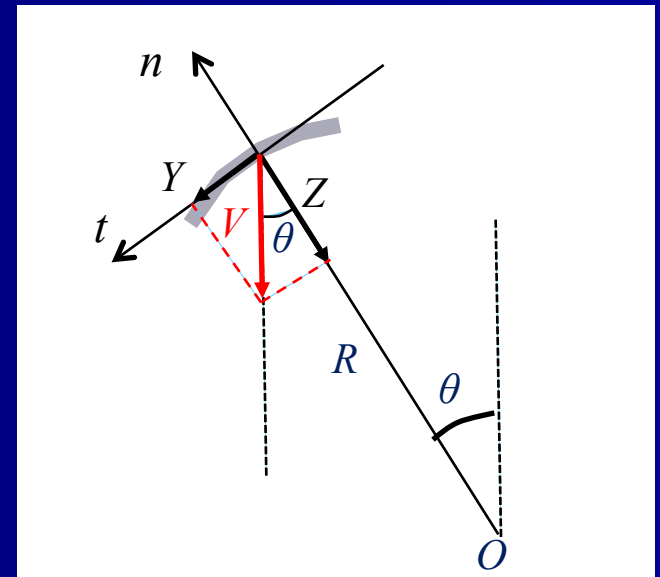
Nel caso di volta a botte di spessore s costante e peso specifico γ_m si ha:

$$V = \gamma_m \cdot 1 \cdot 1 \cdot s = \gamma_m \cdot s = g, \quad g = \text{const.})$$

Si ottiene allora:

$$S_2 = -g R \cos \theta$$

$$\begin{aligned} K &= (1/R)(dS_2/d\theta) + Y = (1/R)[g R \sin \theta - g \cos \theta (dR/d\theta)] + g \sin \theta = \\ &= 2g \sin \theta - (g/R) \cos \theta (dR/d\theta). \end{aligned}$$



La volta a botte soggetta a soli carichi verticali (3/5)

Noto il valore di $K(\theta)$, che dipende dalla forma della direttrice attraverso il termine $(dR/d\theta)$, si determinano agevolmente gli sforzi.

Nel caso di volta appoggiata a entrambe le estremità, cioè per $x = \pm \ell$ si trova:

$$S_2 = -g R \cos \theta$$

$$T_{12} = -x K(\theta)$$

$$S_1 = 1/2(x^2 - \ell^2) [(1/R) (dK/d\theta)].$$

La volta a botte soggetta a soli carichi verticali (4/5)

Carico uniformemente distribuito in proiezione orizzontale.

Se V rappresenta la risultante del carico distribuito p_0 per unità di superficie di volta:

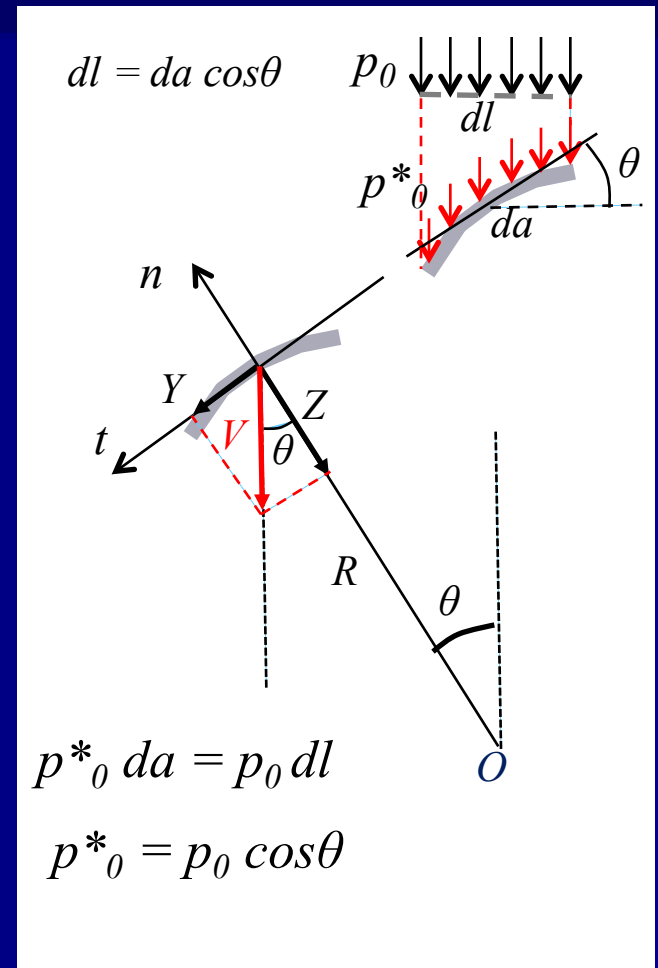
$$V = p_0^* \cdot 1 \cdot 1 = p_0 \cos \theta;$$

ne segue:

$$Z = -V \cos \theta = -p_0 \cos^2 \theta;$$

$$Y = +V \sin \theta = p_0 \sin \theta \cos \theta;$$

$$X = 0.$$



La volta a botte soggetta a soli carichi verticali (5/5)

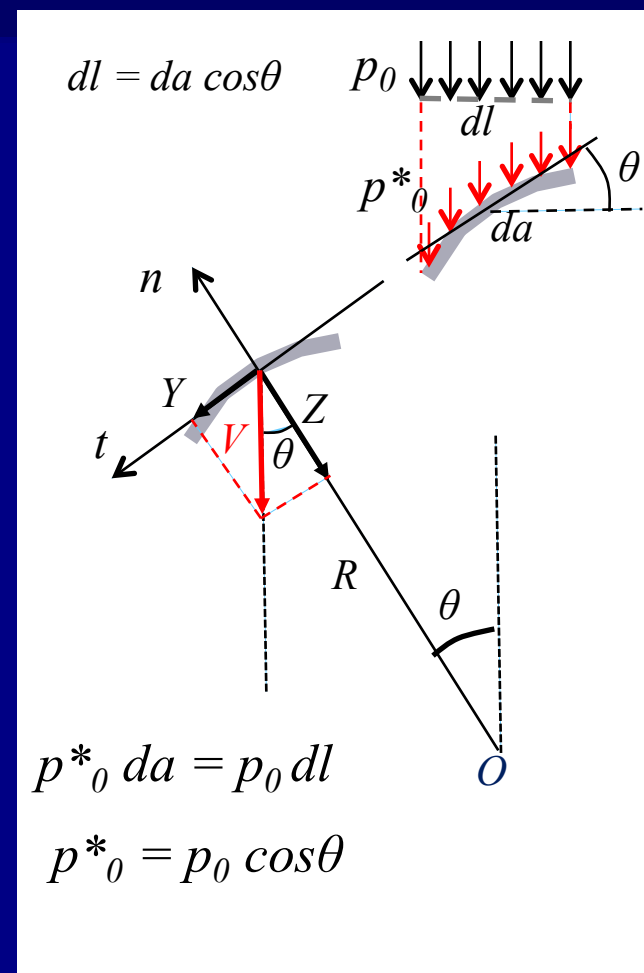
Carico uniformemente distribuito in proiezione orizzontale.

Si ottiene allora:

$$S_2 = -p_0 R \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} K &= (1/R)(dS_2/d\theta) + Y = \\ &= (1/R)[2p_0 R \sin\theta \cos\theta - p_0 \cos^2\theta (dR/d\theta)] \\ &\quad + p_0 \sin\theta \cos\theta \\ &= 3p_0 \sin\theta \cos\theta - (p_0/R) \cos^2\theta (dR/d\theta). \end{aligned}$$

Nota l'espressione di $K(\theta)$, che dipende dalla forma della direttrice attraverso il termine $(dR/d\theta)$, si determinano agevolmente gli sforzi.



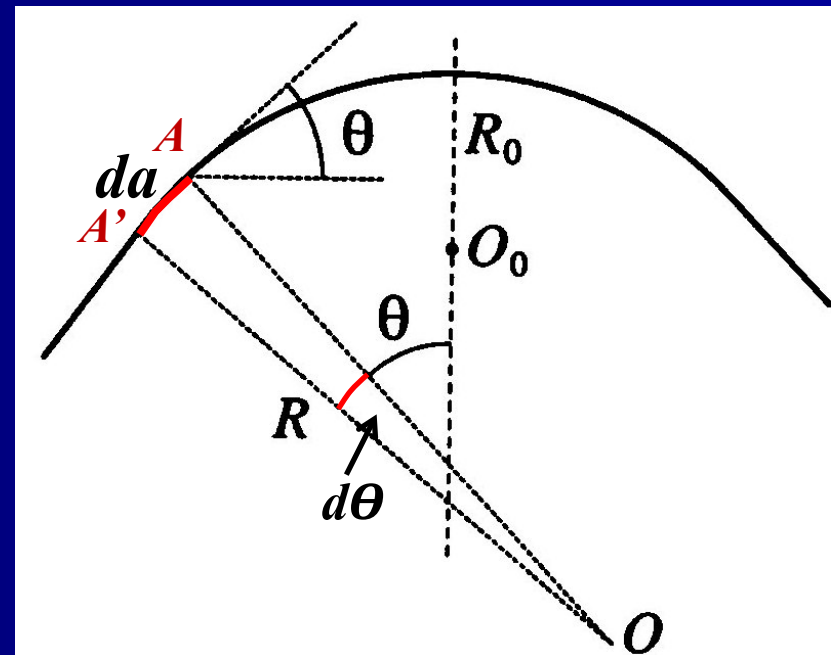
La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (1/7)

Come detto le forme più comuni della direttrice in una volta a botte sono quella **circolare**, **cicloidale**, a **catenaria**, **parabolica**. La funzione che descrive la direttrice in funzione del raggio di curvatura R assume la forma:

$$R = R(\theta).$$

Detto R_0 il raggio di curvatura in chiave si ha che l'espressione: $R = R_0 \cos^n \theta$ rappresenta, al variare dell'esponente n , le curve seguenti:

1. **circonferenza** ($n = 0$);
2. **cicloide** ($n = 1$);
3. **catenaria** ($n = -2$);
4. **parabola** ($n = -3$).



La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (2/7)

Per una voltina a **direttrice semi-ellittica** con semiasse maggiore a disposto orizzontalmente e con semiasse minore b verticale, il raggio di curvatura assume l'espressione seguente:

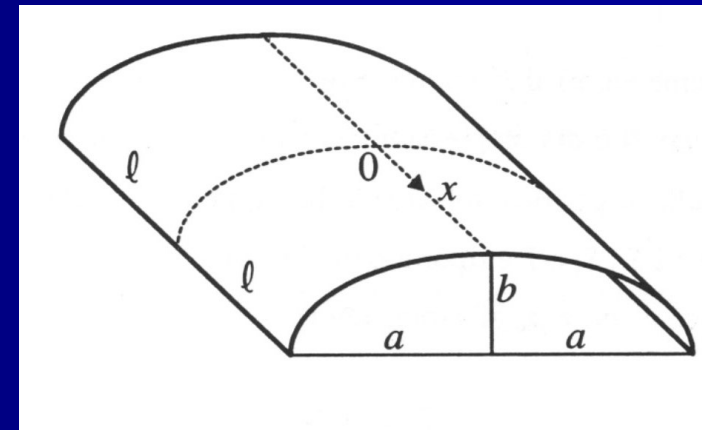
$$R = (a^2 b^2) / [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]^{3/2}.$$

In presenza di carico dovuto a **peso proprio** g , le espressioni degli sforzi sono queste:

$$S_2 = -g (a^2 b^2 \cos \theta) / [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]^{3/2}$$

$$T_{12} = -g x \sin \theta [2a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \theta] / [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]$$

$$S_1 = - (1/2) g (\ell^2 - x^2) \cos \theta [3a^2 b^2 + a^2 b^2 \sin^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \theta) - a^4 \sin^2 \theta (4 - \cos^2 \theta) - b^4 \cos^4 \theta] / \{a^2 b^2 [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}$$



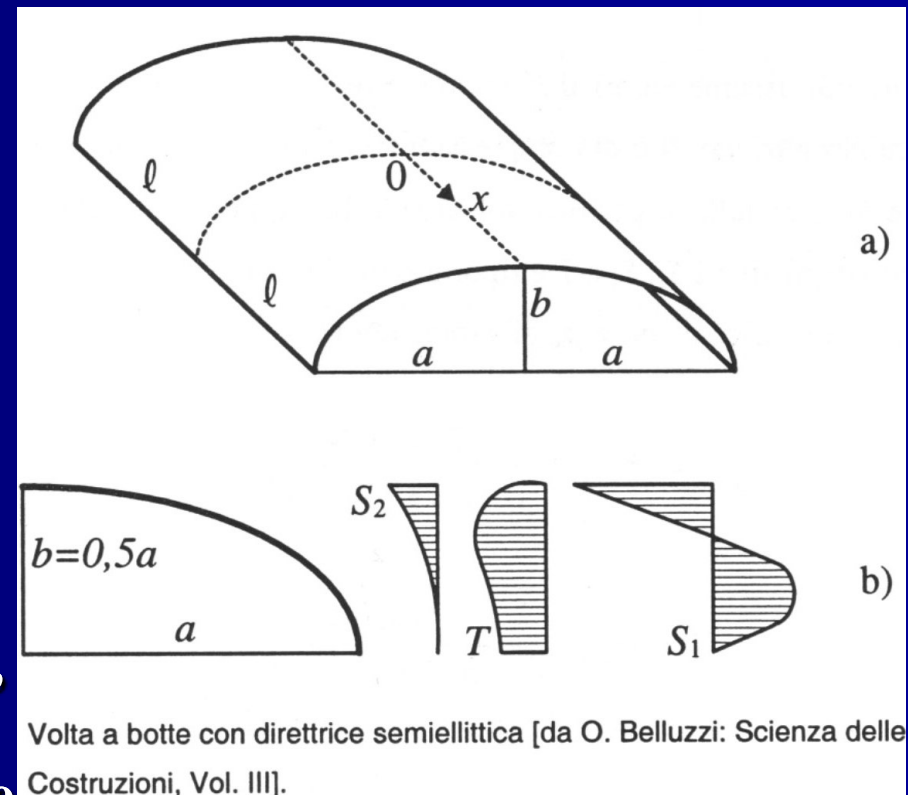
La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (3/7)

Lo sforzo S_1 assume valori di sola compressione per alcuni valori del rapporto fra i semiassi b/a , mentre per altri valori di questo rapporto si hanno valori di compressione nella parte superiore, e di trazione nella parte inferiore.

Gli sforzi S_2 e T_{12} assumono invece sempre valori dello stesso segno: in particolare S_2 è sempre di compressione.

Gli sforzi S_1 e S_2 si annullano ai bordi, ovvero per $\theta_c = 90^\circ$.

Per il rapporto $b/a = 0.5$ l'andamento degli sforzi è quello indicato in Figura.



La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (4/7)

In presenza di **carico da neve, p_o** , le espressioni degli sforzi sono:

$$S_1 = - (3/2) p_o (\ell^2 - x^2) [-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta] / \{b^2 [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\}$$

$$T_{12} = -3p_o x [a^2 \sin \theta \cos \theta] / [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]$$

$$S_2 = -p_o (a^2 b^2 \cos^2 \theta) / [a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta]^{3/2}$$

Lo sforzo S_1 è di compressione nella parte superiore e di trazione in quella inferiore per qualsiasi valore del rapporto b/a e non s'annulla ai bordi ; lo sforzo S_2 è sempre negativo e si annulla ai bordi; lo sforzo T_{12} cambia segno in chiave e si annulla ai bordi.

La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (5/7)

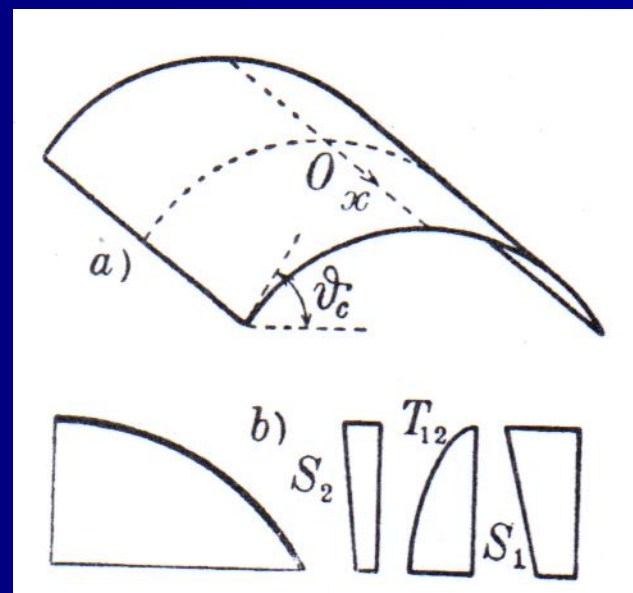
Per una voltina a direttrice semicircolare di raggio R_0 il raggio di curvatura assume la seguente espressione: $R = R_0$. Per carico uniformemente distribuito per unità di sviluppo (**peso proprio, g**) essendo $n = 0$ si trovano questi valori degli sforzi:

$$S_2 = -g R_0 \cos \theta$$

$$T_{12} = -2g x \sin \theta$$

$$S_1 = (g/R_0)(x^2 - \ell^2) \cos \theta.$$

Gli sforzi S_2 e S_1 sono di compressione ovunque, variano in proporzione alla distanza dal diametro orizzontale (proporzionale a $\cos \theta$) e si annullano ai bordi se l'angolo di imposta è $\theta_c = 90^\circ$; lo sforzo T_{12} varia in proporzione alla lunghezza delle corde orizzontali



La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (6/7)

Per un carico uniformemente distribuito per unità di proiezione (**carico da neve, p_o**), per una direttrice semicircolare si ha ancora $n = 0$ e si trovano questi valori degli sforzi:

$$S_2 = -p_o R_o \cos^2 \theta ,$$

$$T_{12} = - (3/2) p_o x \sin 2 \theta ,$$

$$S_1 = - (3/2) (p_o / R_o) (\ell^2 - x^2) \cos 2 \theta .$$

Si ha quindi che lo sforzo S_2 è ovunque di compressione; S_1 è di compressione nella porzione superiore per $\theta < 45^\circ$, e di trazione nella porzione inferiore; T_{12} cambia segno in corrispondenza della chiave e si annulla al bordo se $\theta_c = 90^\circ$.

La volta a botte: le forme più comuni di direttrice (7/7)

Note le azioni interne S_1 , S_2 e T_{12} si possono poi determinare i valori delle azioni principali, S_ξ e S_η con $S_\xi \geq S_\eta$ e rispettivamente pari a:

$$S_\xi = (S_1 + S_2)/2 + (1/2)[(S_1 - S_2)^2 + 4(T_{12})^2]^{1/2};$$
$$S_\eta = (S_1 + S_2)/2 - (1/2)[(S_1 - S_2)^2 + 4(T_{12})^2]^{1/2}.$$

Le direzioni principali sono definite dall'angolo α_0 che la direzione dello sforzo principale forma con la direzione x , lungo la quale agisce lo sforzo S_1 :

$$\tan 2\alpha_0 = 2T_{12}/(S_1 - S_2).$$

La ricerca delle direzioni principali può anche essere effettuata graficamente mediante la costruzione del cerchio di Mohr.

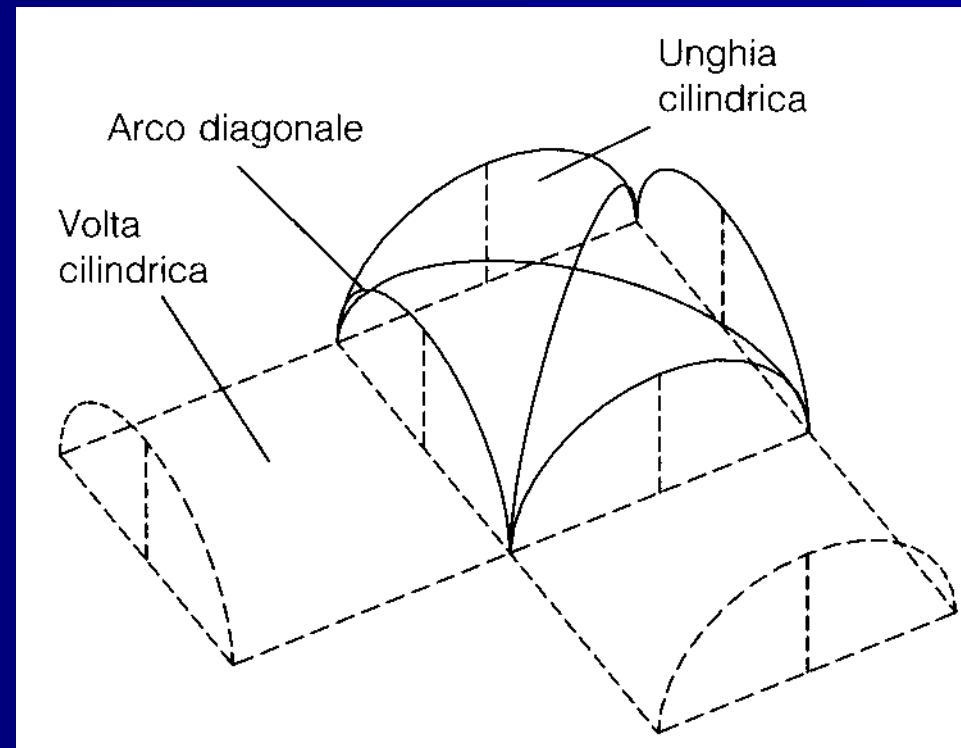
La volta a crociera



La volta a crociera (1/10)

In generale la volta a crociera è una volta composta da tante unghie quanti sono i lati del poligono di base, aventi tutte il vertice comune sulla verticale del baricentro della pianta. Negli edifici ordinari si hanno crociere con unghie cilindriche su pianta quadrata.

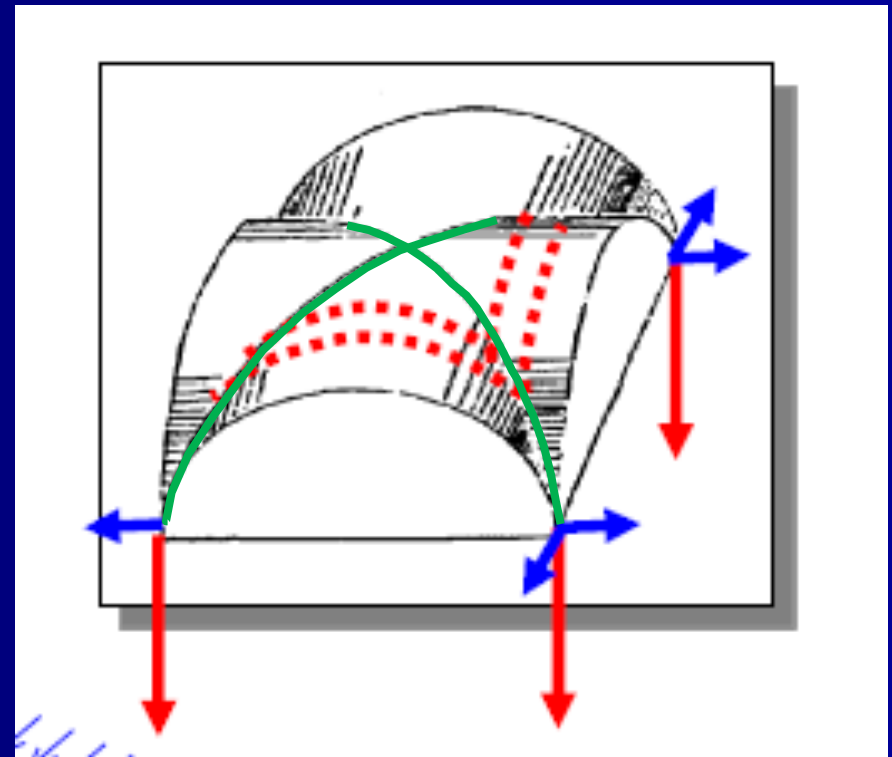
Nel caso in figura la volta a crociera si ottiene come intersezione di due volte a botte ortogonali: l'intersezione, formata da 4 unghie cilindriche costituisce il luogo geometrico degli archi diagonali.



La volta a crociera (2/10)

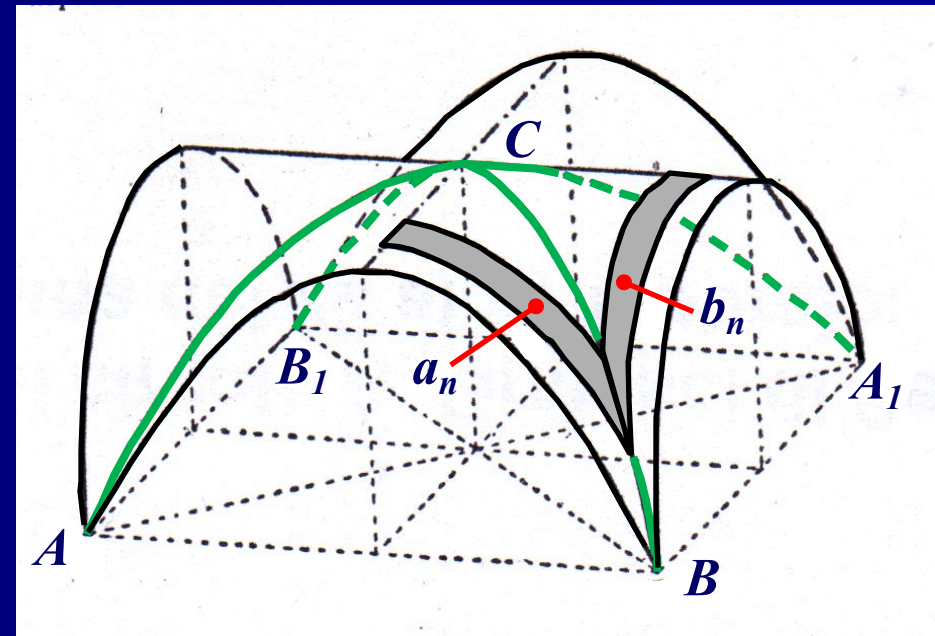
Il modello statico della volta a crociera è molto semplice:

- a) sugli archi diagonali si appoggiano i quattro spicchi di volta a botte, come una successione di archi via via più piccoli, mano a mano che si procede dal perimetro esterno verso il centro;
- b) i due archi diagonali, che costituiscono quindi la struttura portante, hanno il compito di trasferire i carichi ricevuti sui quattro piloni posti ai vertici



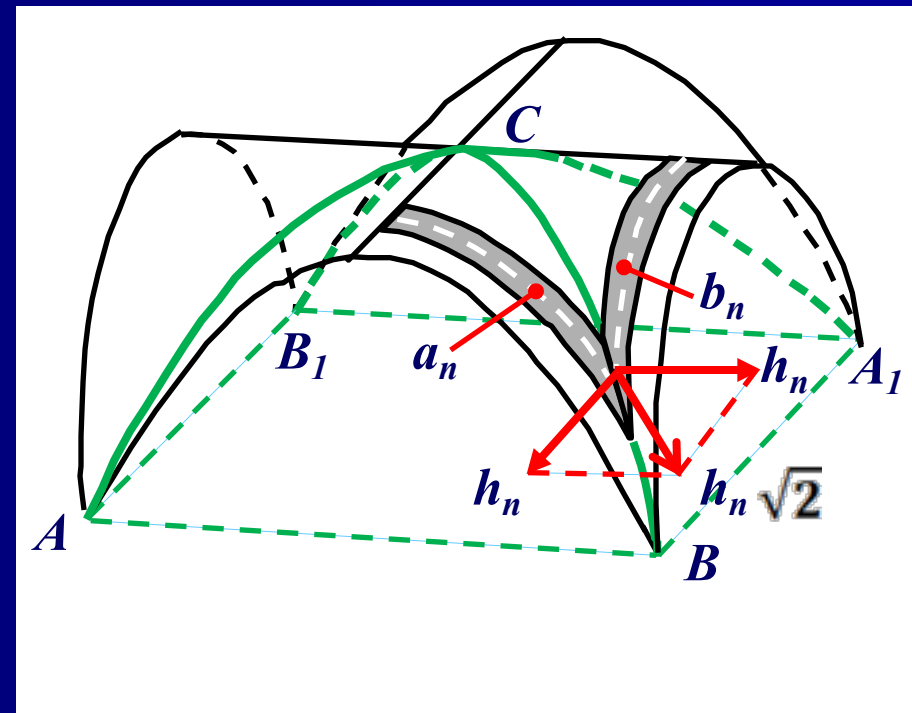
La volta a crociera (3/10)

Per il calcolo delle volte a crociera è necessario quindi suddividere ogni superficie in archetti elementari a_1, a_2, \dots, a_n ; b_1, b_2, \dots, b_n impostati sugli archi diagonali ACA_1 e BCB_1 , in modo che gli archetti di due quarti contigui insistano sul medesimo tratto dell'arco diagonale. Ciascun archetto può essere considerato come arco a due cerniere oppure incastrato sugli archi diagonali e calcolato con i metodi semplificati noti.



La volta a crociera (4/10)

- Le reazioni verticali $v_n/2$ (se v_n è il peso dell'archetto) ed orizzontali h_n , degli archetti elementari si scaricano negli archi diagonali, che risulteranno così sollecitati da forze orizzontali e verticali.
- Le due spinte h_n trasmesse all'arco diagonale da due archetti elementari corrispondenti, che formano un angolo di 90° , si compongono nella risultante $h_n \sqrt{2}$.
- Ugualmente le due reazioni verticali $v_n/2$ si sommano in un'unica risultante v_n .

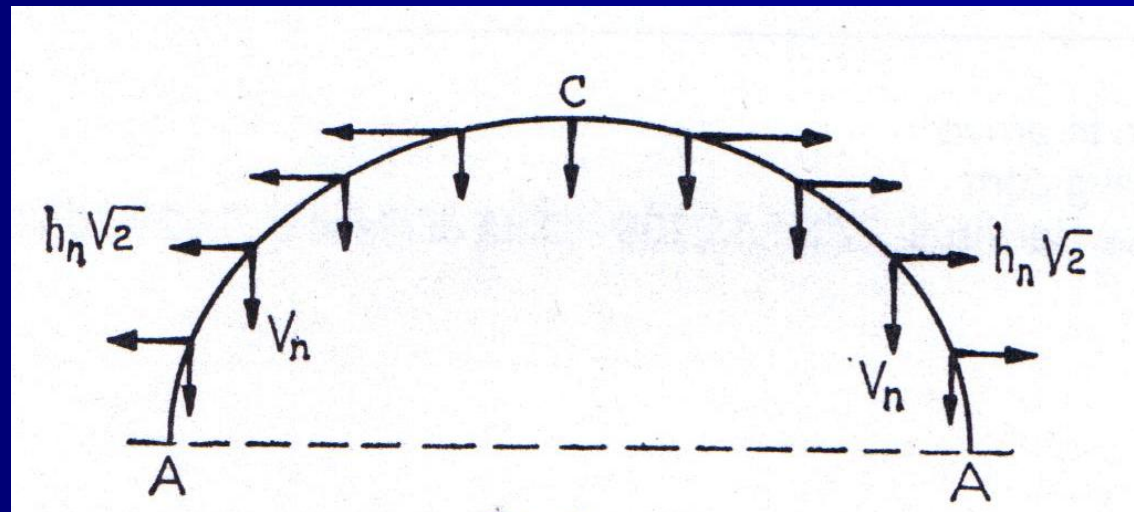


La volta a crociera (5/10)

In definitiva l'arco diagonale sarà sollecitato da un sistema di forze orizzontali $h_n \sqrt{2}$ e da un sistema di forze verticali v_n crescenti dalla chiave all'imposta.

Per il calcolo si procede separatamente per le due condizioni di carico, verticale e orizzontale.

L'arco diagonale si considera come incastrato.

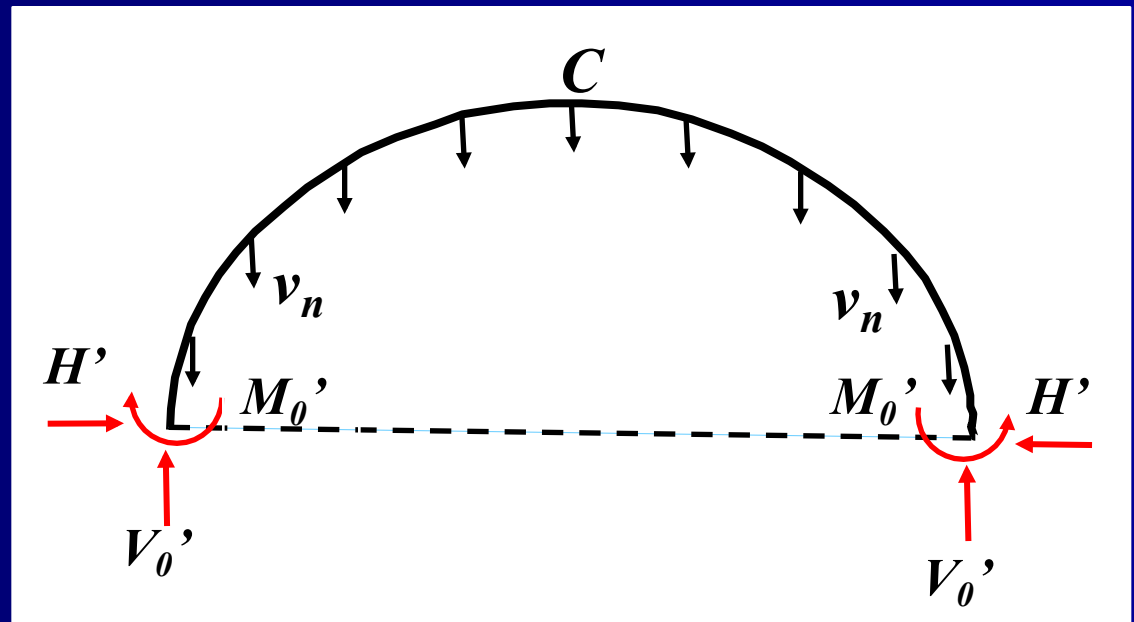


La volta a crociera (6/10)

1. Per i **carichi verticali simmetrici** v_n si troveranno le iperstatiche all'imposta

$$M'_0, V'_0 \text{ e } H'$$

come è stato indicato nella trattazione precedente dell'arco.



La volta a crociera (7/10)

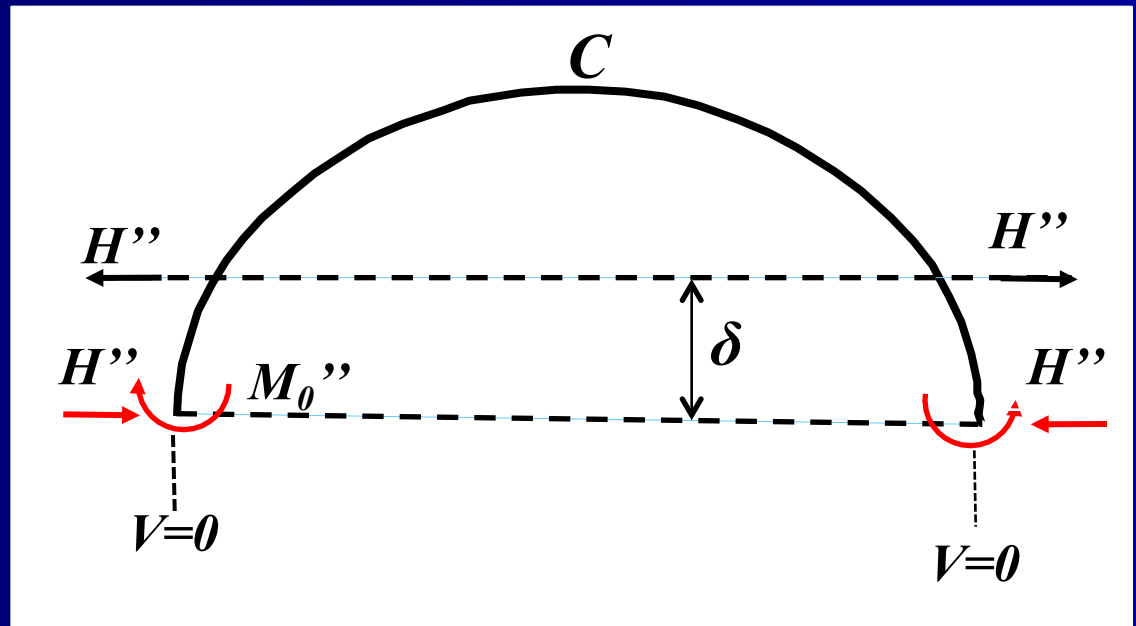
2. L'influenza dei **carichi orizzontali** $h_n \sqrt{2}$ pure simmetrici, si può determinare in modo approssimato, determinando la spinta H'' , uguale alla somma delle spinte elementari che insistono su metà arco, cioè:

$$H'' = \sqrt{2} \sum_1^n h_n$$

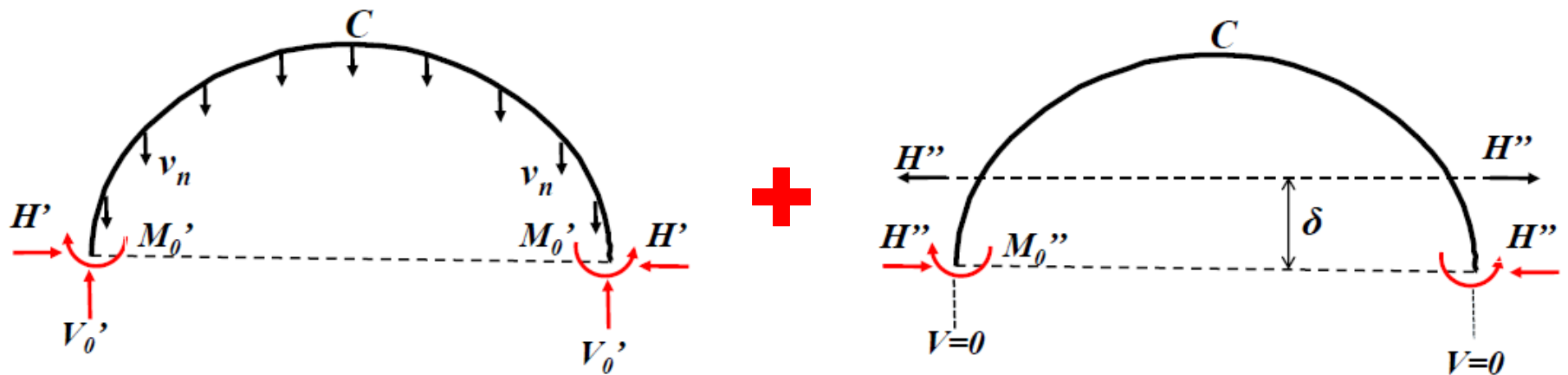
ed un momento:

$$M_0'' = -H'' \delta$$

in cui δ è il braccio di leva della risultante H'' dei carichi che insistono su metà arco, rispetto al baricentro della sezione d'imposta.



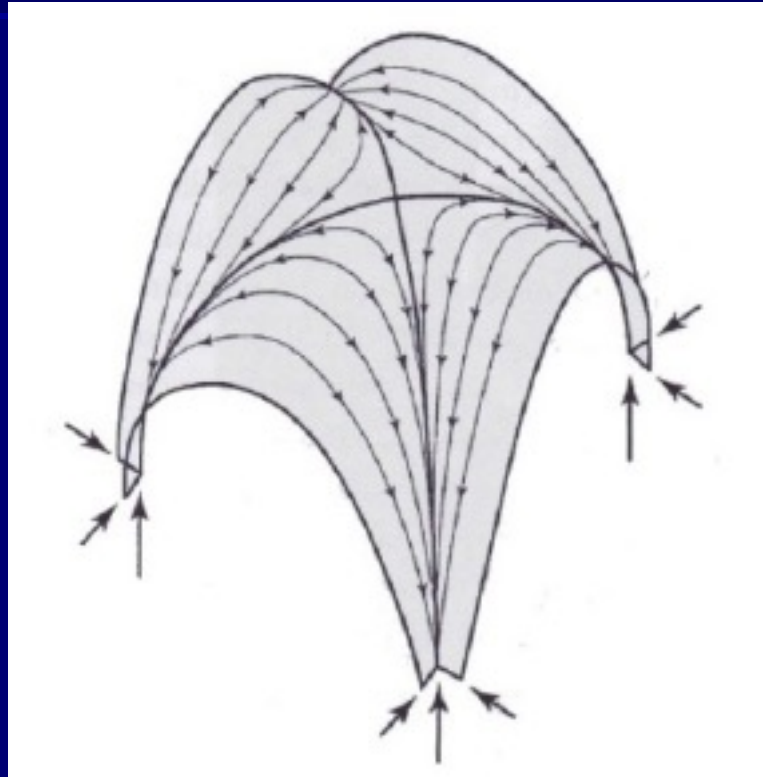
La volta a crociera (8/10)



In definitiva le reazioni all'imposta, sommando gli effetti delle condizioni di carico 1. e 2., sono:

$$V_0 = V'_0 \qquad M_0 = M'_0 + M''_0 \qquad H = H' + H''$$

La volta a crociera (9/10)



**Diagramma delle linee di compressione di una volta a crociera
(L.C. Lancaster, 2007, p. 135)**

La volta a crociera (10/10)

CONSIDERAZIONI FINALI

Questo modo di schematizzare la struttura, in modo da consentirne la verifica con i metodi tipici della statica degli archi è stato l'unico disponibile fino alla metà del XX secolo.

Attualmente questo metodo di analisi risulta superato a favore del **metodo degli elementi finiti, che consente di considerare più correttamente il funzionamento statico: gli spicchi di volta a botte non sono in effetti costituiti da una serie di archi separati ma risultano collaboranti in quanto la volta è un tessuto continuo che lega ciascuno dei supposti archi ideali a quelli adiacenti.**

I regimi statici si influenzano l'un l'altro modificando i risultati dell'analisi semplificata condotta sul modello schematico, tanto più che in molte situazioni gli archi diagonali non sono realizzati con vere e proprie nervature e non sono quindi neppure facilmente individuabili.



LA VOLTA A PADIGLIONE

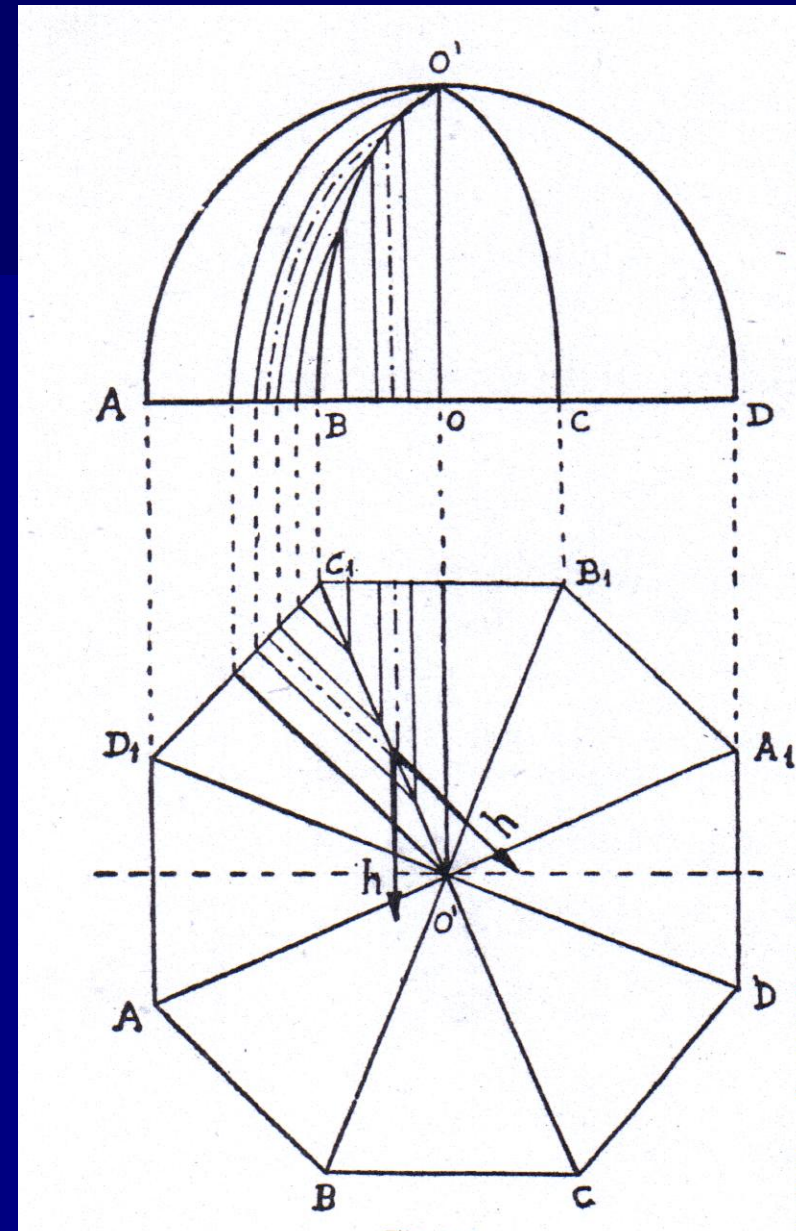
**Parrocchia di Sant'Avendrace
(Cagliari)**

La volta a padiglione (1/8)

La volta a padiglione è una volta composta da tanti fusi cilindrici quanti sono i lati del poligono di base che la volta stessa ricopre. Negli edifici ordinari sono comuni le volte a padiglione su pianta rettangolare o quadrata, generate dall'intersezione di due volte a botte ortogonali.

Il modello statico che si adotta è quello costituito da una serie di semiarchi ideali, tutti aventi l'imposta sui muri perimetrali e la chiave sugli archi diagonali.

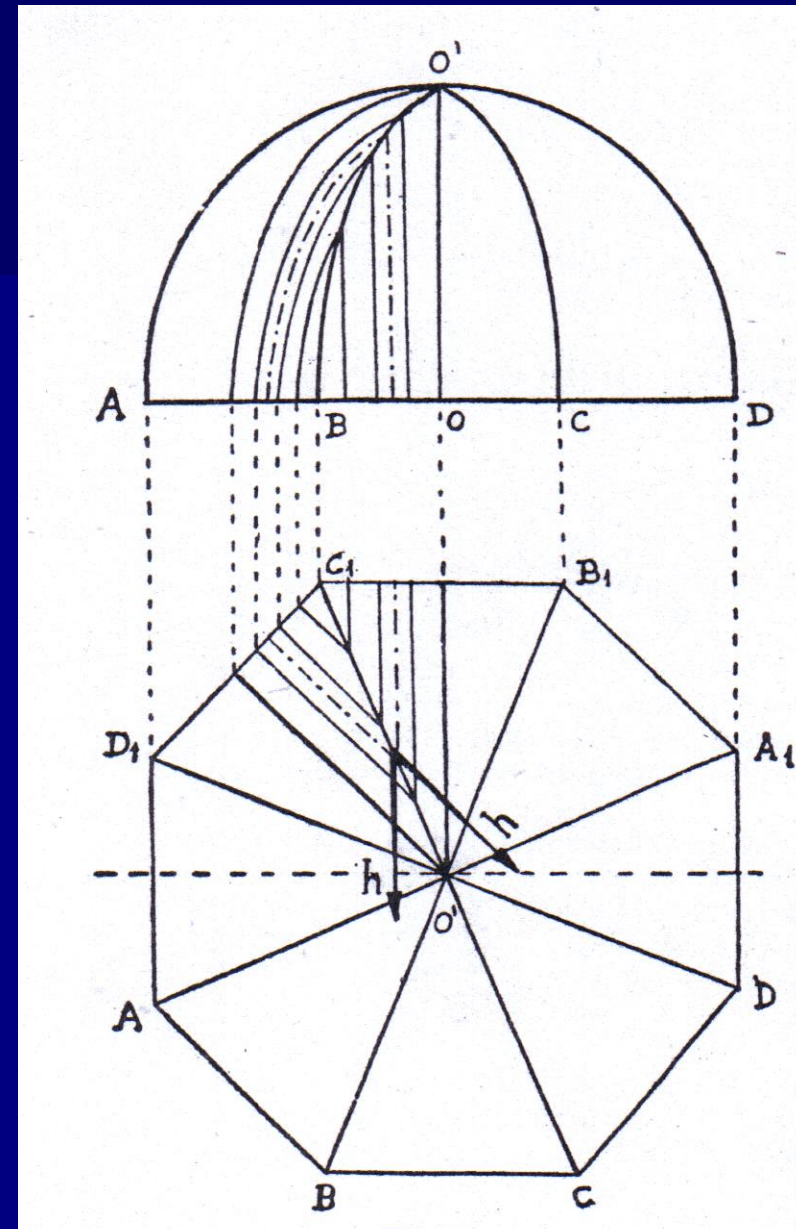
I semiarchi ideali trovano appoggio reciproco attraverso la direttrice della volta ortogonale a quella a cui appartengono.



La volta a padiglione (2/8)

Lo stato tensionale è più complesso che nella volta a crociera.

Un generico punto della volta si trova infatti a fare parte sia di uno degli archi elementari di cui essa è costituita, sia della direttrice che raccoglie le spinte dei due archi appartenenti alla volta a essa ortogonale.

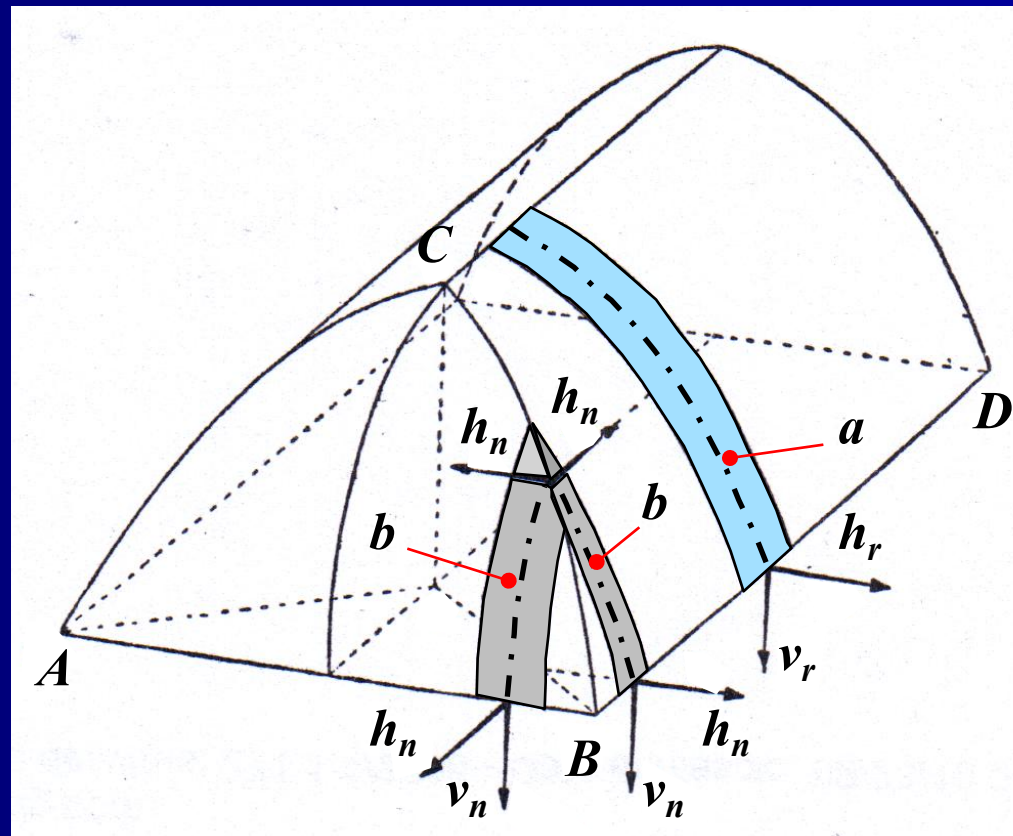


La volta a padiglione (3/8)

Le **volte a padiglione**, a pianta rettangolare o quadrata, possono essere divise in **archetti uguali "a"** ed in **archetti rampanti "b"**.

Gli archetti "a" daranno lungo i muri delle spinte h_r .

Gli archetti rampanti "b" daranno spinte h_n lungo i muri e sull'arco BC , le quali ultime, crescenti da B a C , sollecitano a compressione la volta lungo le generatrici.

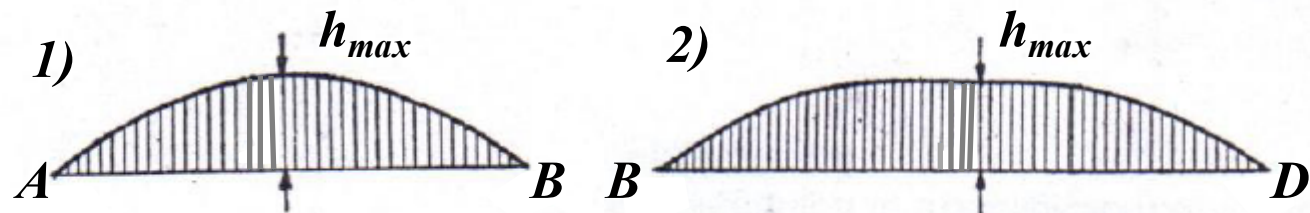
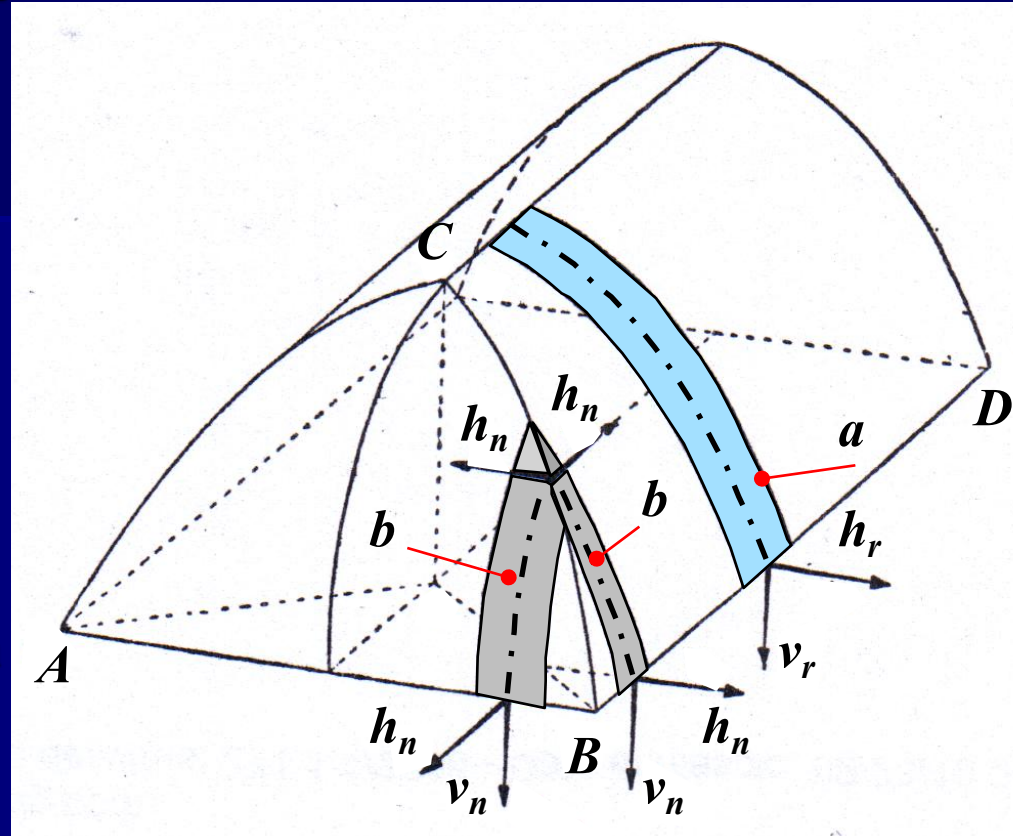


La volta a padiglione (4/8)

Il muro AB risulta sollecitato in sommità da una serie di forze orizzontali a distribuzione come in fig. 1, con un massimo di intensità in mezzeria.

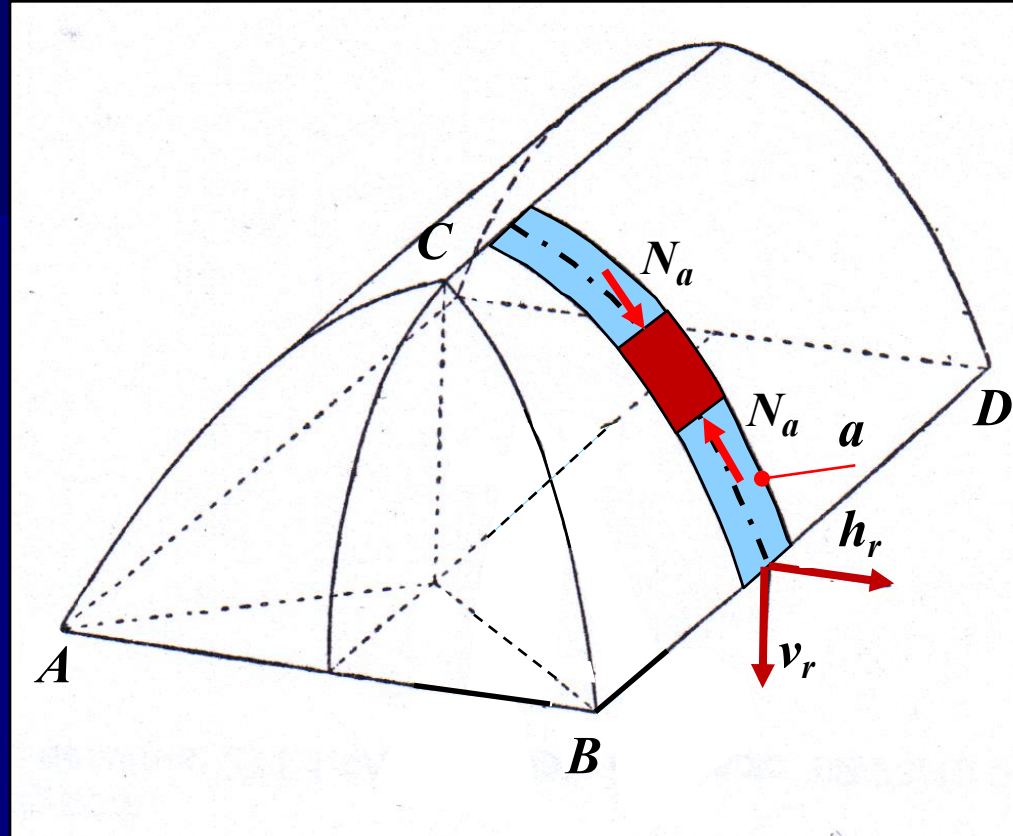
Nel muro BD la distribuzione delle spinte risulta invece come in fig. 2.

La distribuzione del carico verticale è analoga a quella delle spinte.



La volta a padiglione (5/8)

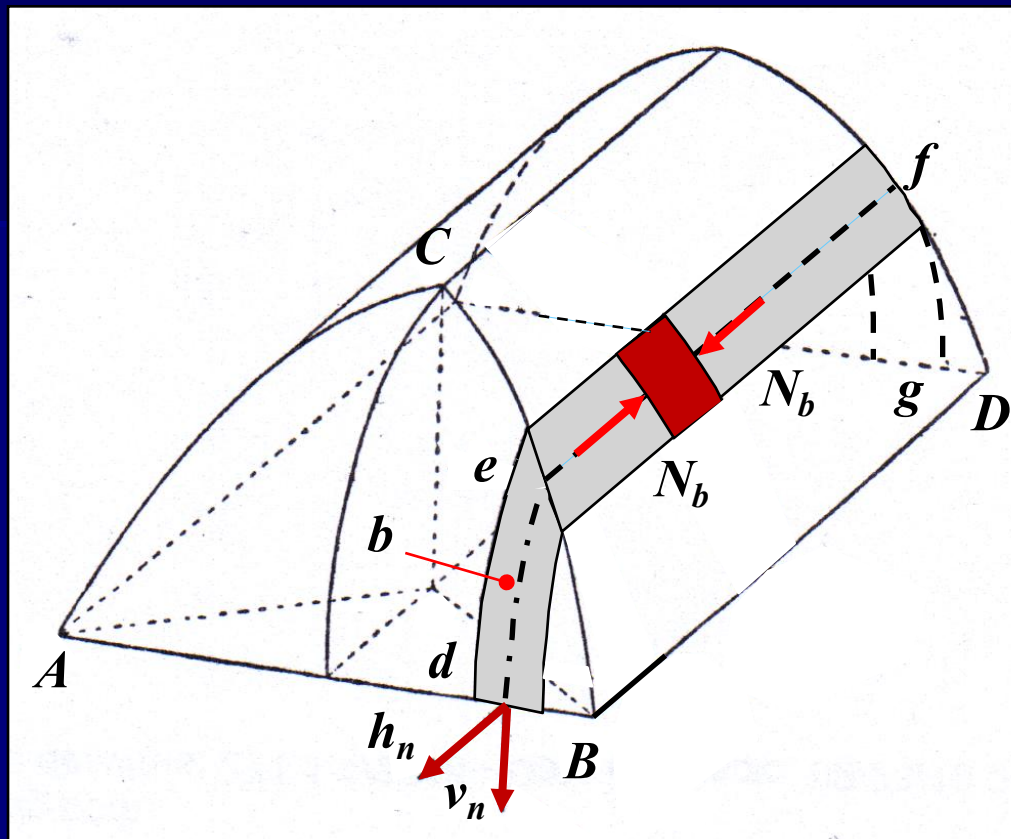
Se consideriamo un elemento di superficie di volta, avente lati di dimensioni unitarie, appare evidente che esso risulta sollecitato in primo luogo dalle azioni interne N_a , di compressione, che competono in quel punto all'arco uguale "a" al quale appartiene.



Questa azione normale si determina risolvendo l'arco "a", soggetto al peso proprio e ai sovraccarichi che competono (eventuale peso del riempimento, del massetto e pavimento, del sovraccarico accidentale etc) ad es. con il metodo di Mèry.

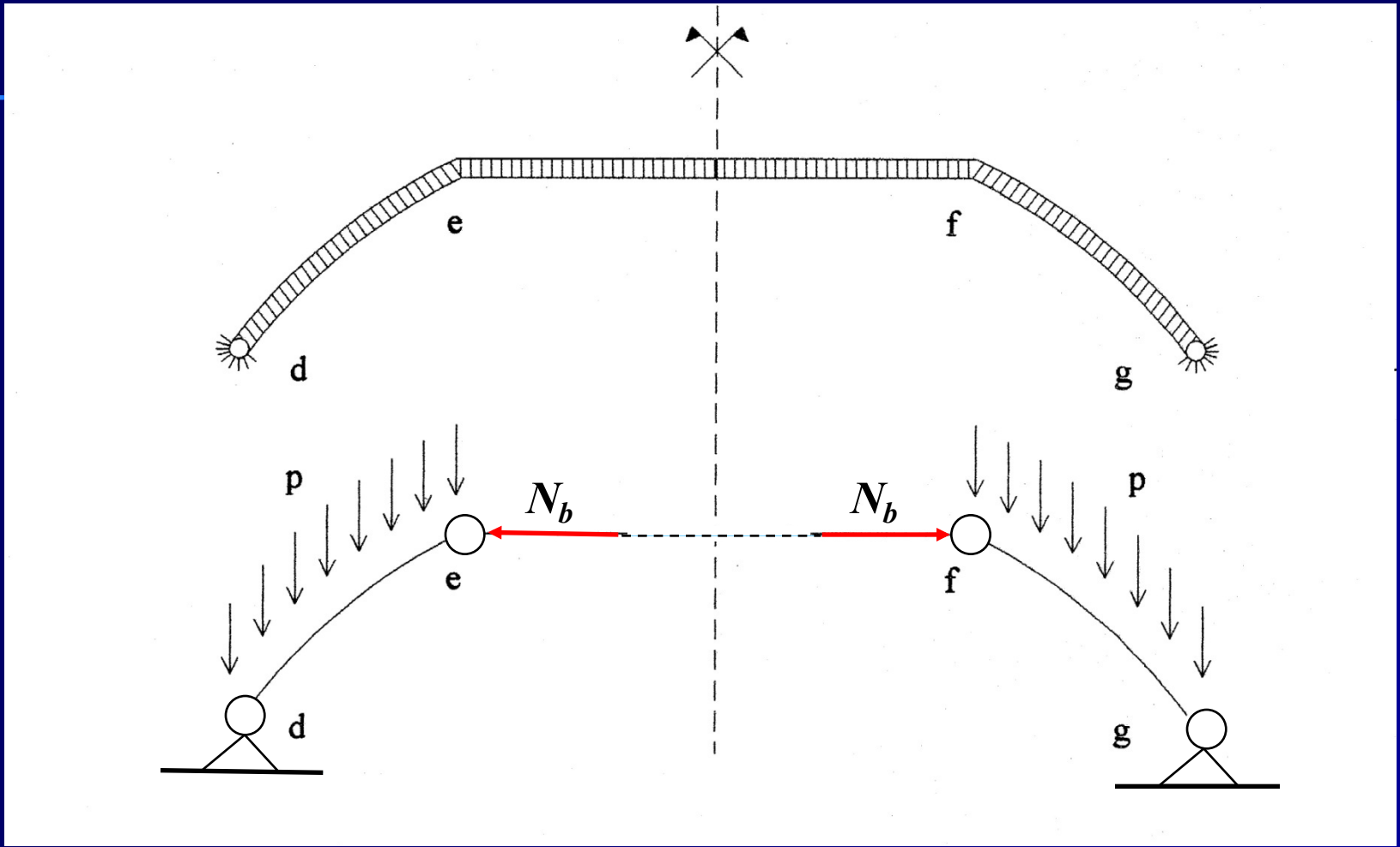
La volta a padiglione (6/8)

Il medesimo elemento di volta risulta inoltre sollecitato anche dalle azioni di compressione che gli archi rampanti de e gf applicano alla “biella” di muratura compressa ef , alla quale, in sommità, essi si appoggiano.



Questa azione normale N_b si determina risolvendo lo schema della figura seguente, dove esclusivamente gli archi de e gf sono soggetti al peso proprio e ai sovraccarichi che competono (eventuale peso del riempimento, del massetto e pavimento, del sovraccarico accidentale etc).

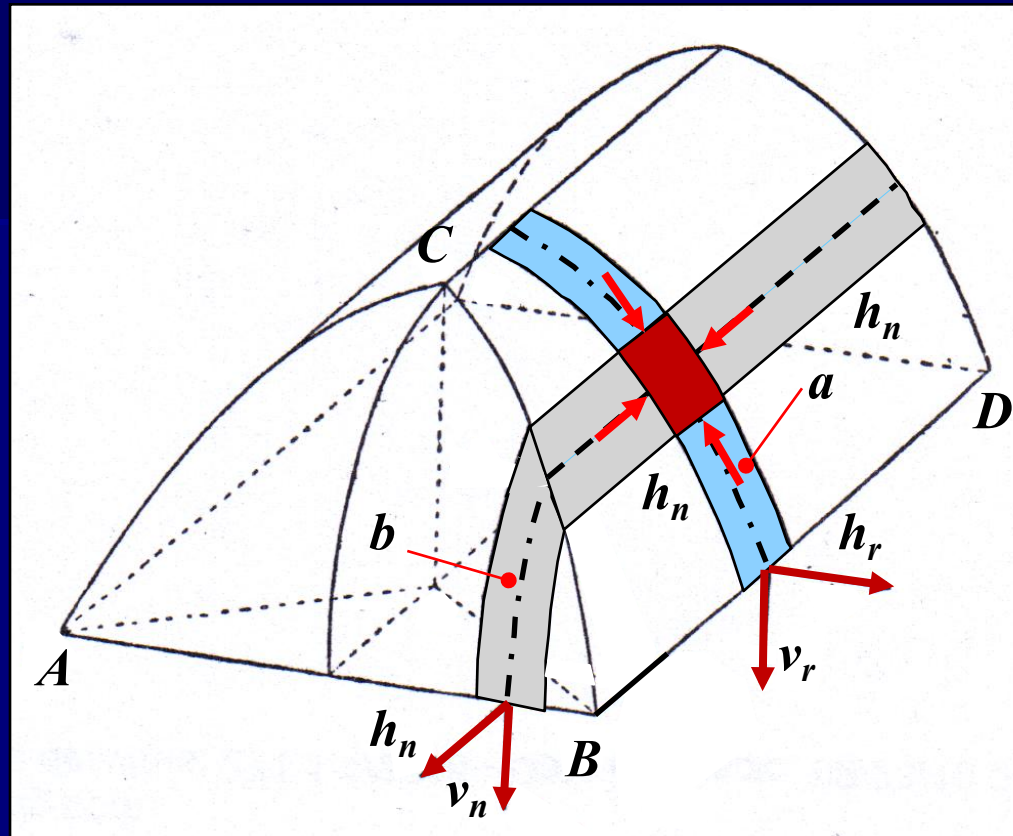
La volta a padiglione (7/8)



La volta a padiglione (8/8)

Si realizza quindi uno stato di **compressione ortogonale**: sia nella direzione dell'arco "a", come deriva dalla linea delle pressioni, sia in quella della direttrice a cui si appoggia l'arco "b".

Gli archi diagonali risultano scarichi se si fa l'ipotesi che la reazione in chiave dei semiarchi sia esclusivamente orizzontale.



Peraltro come visto la spinta sui muri AB e BD è distribuita su tutto il perimetro e risulta essere massima al centro di ciascun lato dove scaricano i semiarchi più grandi, e decrescenti verso i vertici, dove si annullano.

Ne segue che per questa tipologia di volta è necessario avere una muratura perimetrale continua.

Sommario

- Introduzione
 - Le volte come strutture di copertura
 - Il comportamento statico delle volte: ipotesi semplificatrici

- La volta a botte
 - Le equazioni governanti
 - Le semplificazioni connesse alla presenza di soli carichi verticali
 - Le forme di direttrici più comuni

- Gli altri tipi di volta
 - La volta a crociera
 - La volta a padiglione

- Esempi applicativi
 - **Analisi statica di una volta a botte**
 - **Analisi statica semplificata di una volta a crociera**

Analisi statica di una volta a botte (1/20)

Ci proponiamo di determinare le spinte in chiave e all'imposta di una volta circolare a sesto ribassato, in muratura di mattoni pieni, che presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- spessore costante $s = 25 \text{ cm};$
- luce $l = 7,00 \text{ m};$
- ribassamento $f = 1,40 \text{ m}.$

In corrispondenza della sezione in chiave, il riempimento, in sabbia e detriti, presenta uno spessore di 15 cm; si ha quindi un sottofondo in calcestruzzo (spessore 8 cm) sul quale è posato un pavimento in lastre di marmo su un letto di malta cementizia.

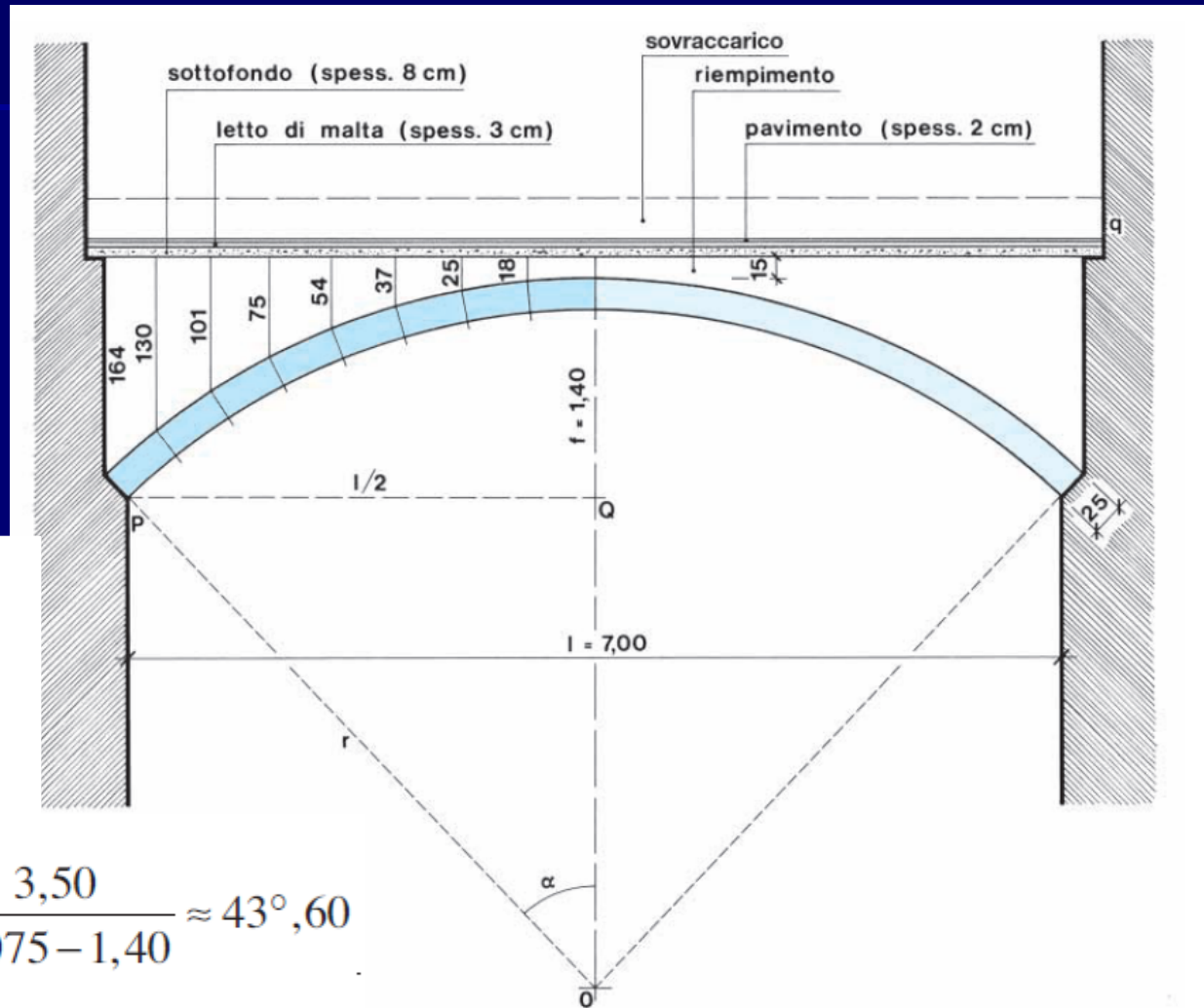
La volta realizza l'orizzontamento intermedio di un fabbricato storico ad uso residenziale e viene considerato un sovraccarico di $2,50 \text{ kN/m}^2$.

Analisi statica di una volta a botte (2/20)

Per il tracciamento della volta determiniamone il raggio r e l'angolo al centro α con le formule :

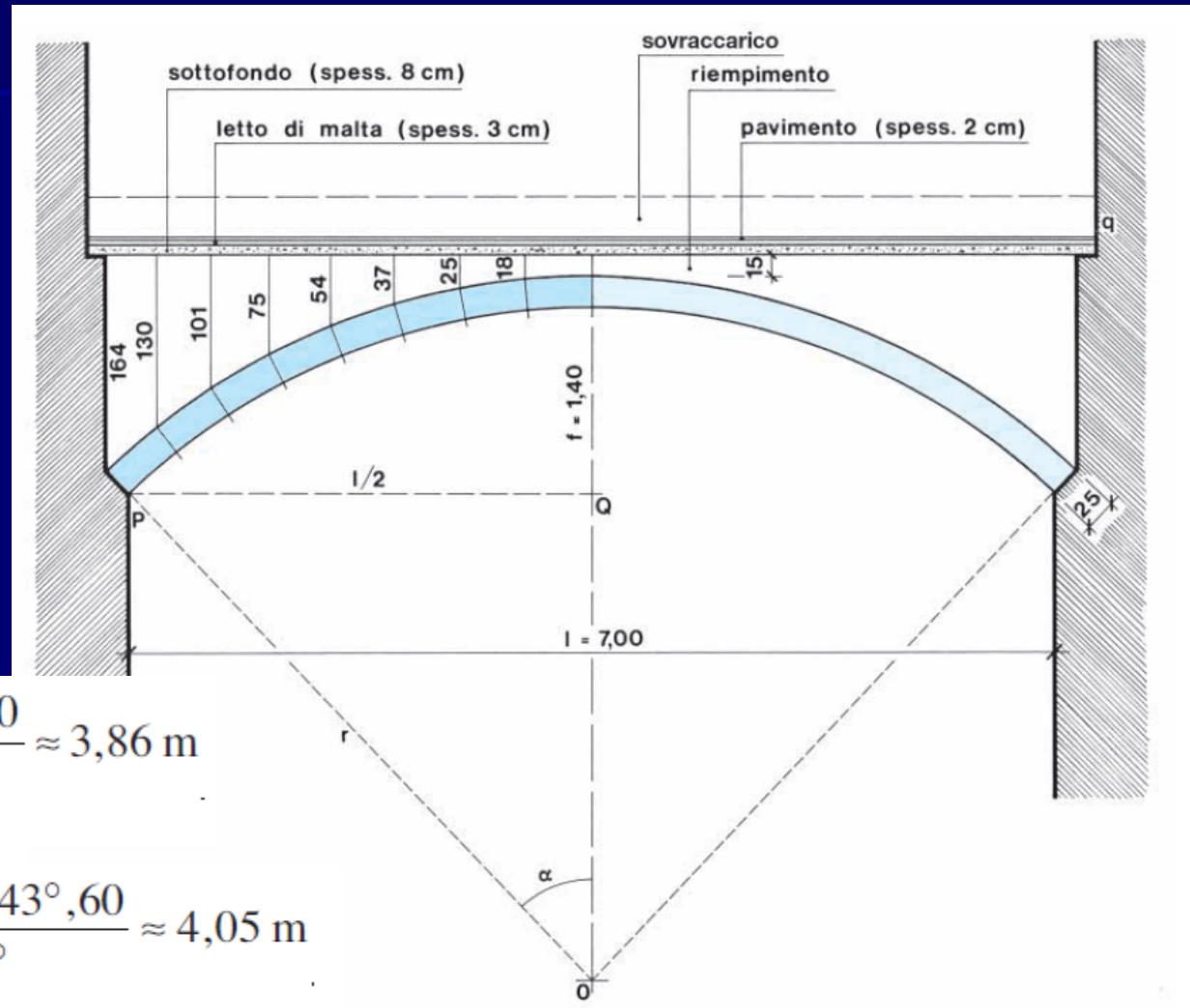
$$r = \frac{f^2 + \frac{l^2}{4}}{2 \cdot f} = 5,075$$

$$\alpha = \arctg \frac{\frac{l}{2}}{r-f} = \arctg \frac{3,50}{5,075 - 1,40} \approx 43^{\circ},60$$



Analisi statica di una volta a botte (3/20)

Possiamo calcolare sia lo sviluppo di intradosso Sv_i sia quello di estradosso Sv_e :



$$Sv_i = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5,075 \times 43^\circ,60}{180^\circ} \approx 3,86 \text{ m}$$

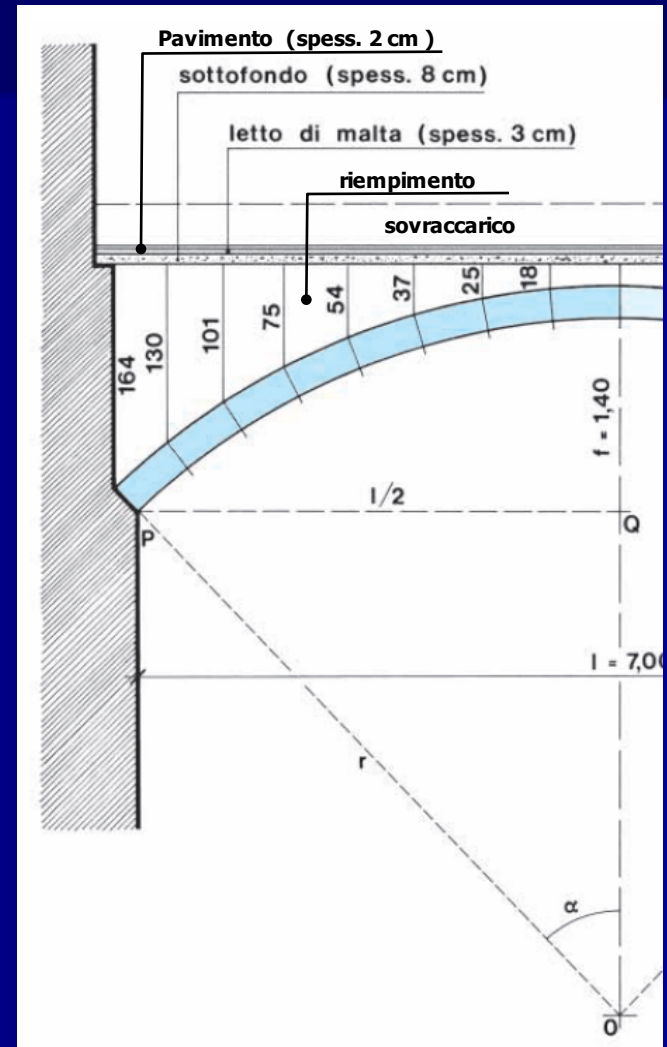
$$Sv_e = \frac{\pi \cdot (r + s) \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5,325 \times 43^\circ,60}{180^\circ} \approx 4,05 \text{ m}$$

Analisi statica di una volta a botte (4/20)

Tenuto conto della simmetria ci si riferisce a metà della volta. Suddividiamola in 8 conci (per il corretto uso del metodo di Mèry $n = 6 \div 10$).

Consideriamo una striscia di volta larga 1 m, con giunti radiali, e assumiamo un peso volumico per la muratura $\gamma_m = 18,00 \text{ kN/m}^3$. Potendo assimilare i singoli conci a dei trapezi il loro peso risulta:

$$P_c = \frac{1}{8} \cdot \frac{Sv_i + Sv_e}{2} \cdot s \cdot 1,00 \cdot \gamma_m \cdot \gamma_{GI} \approx 2,89 \text{ kN}$$

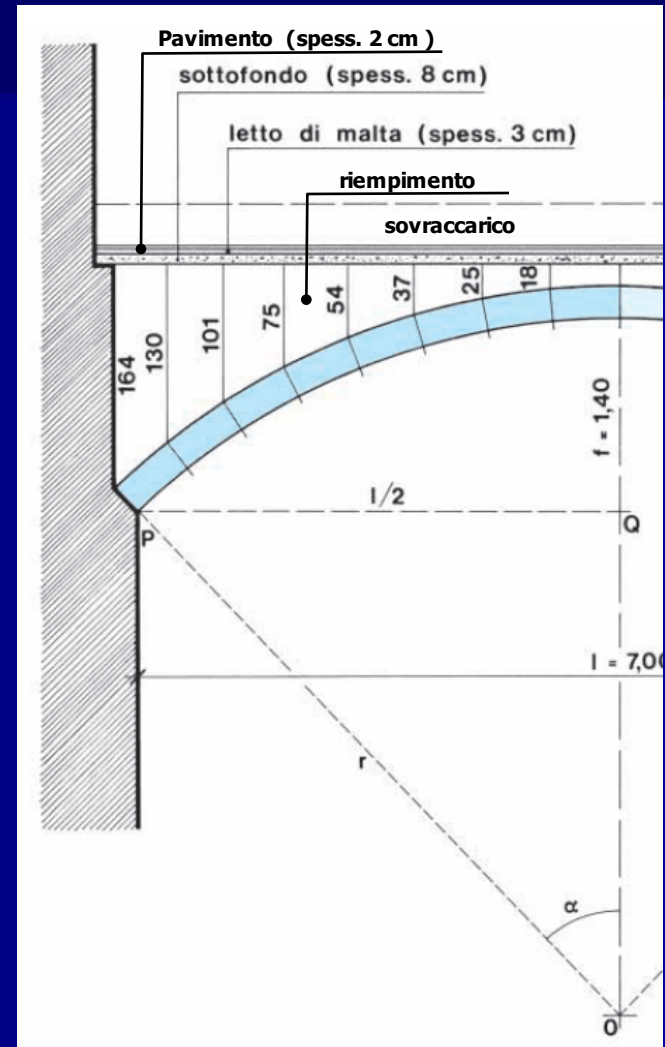


Analisi statica di una volta a botte (5/20)

I vettori che rappresentano il peso P_c si considerano applicati nel baricentro dei singoli conci, ubicato nel punto di mezzo dei conci stessi sull'asse della volta.

Dai punti di estradosso della volta, in corrispondenza dei giunti si mandano le verticali, che determinano le strisce di riempimento, sottofondo, letto di malta, pavimento e sovraccarico il cui peso grava sui singoli conci.

Si trasformano, per comodità di calcolo, le altezze di queste strisce di materiali differenti, in altezze di muratura equivalente.



Analisi statica di una volta a botte (6/20)

CALCOLO DELLE ALTEZZE FITTIZIE

1. Riempimento.

Si ammette il peso volumico $\gamma_1 = 20,00 \text{ kN/m}^3$:

$$c_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_m} = \frac{20,00}{18,00} \approx 1,11$$

Le altezze del riempimento diventano:

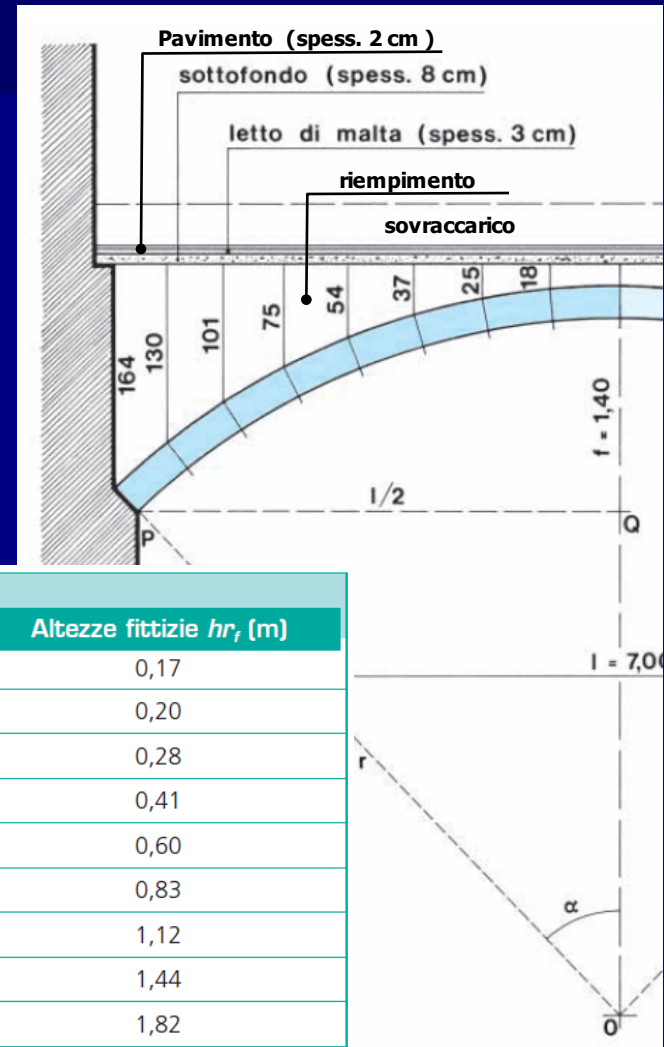


Tabella 1

Giunto	Altezze reali (m)	c_1	Altezze fittizie hr_i (m)
0	0,15	1,11	0,17
1	0,18	1,11	0,20
2	0,25	1,11	0,28
3	0,37	1,11	0,41
4	0,54	1,11	0,60
5	0,75	1,11	0,83
6	1,01	1,11	1,12
7	1,30	1,11	1,44
8	1,64	1,11	1,82

Analisi statica di una volta a botte (7/20)

2. Sottofondo in calcestruzzo

Si ammette il peso volumico $\gamma_2 = 24 \text{ kN/m}^3$:

$$c_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_m} = \frac{24,00}{18,00} \approx 1,33$$

Si ottiene l'altezza fittizia:

$$h_f^s = h \cdot c_2 = 0,08 \times 1,33 \approx 0,11 \text{ m}$$

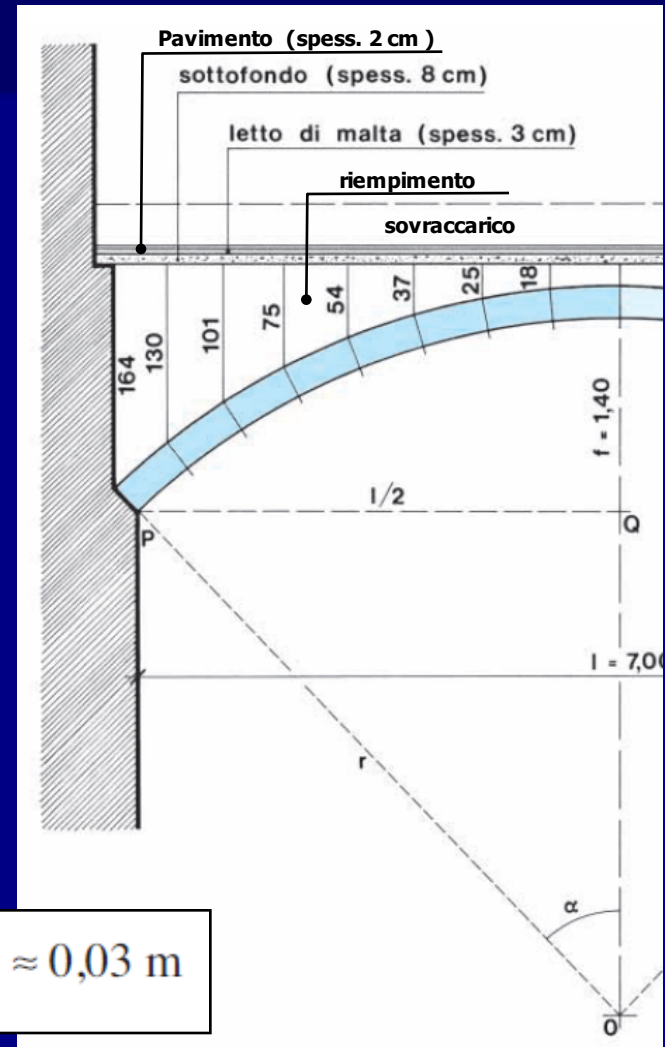
3. Letto in malta cementizia

Si ammette il peso volumico $\gamma_3 = 16 \text{ kN/m}^3$:

$$c_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_m} = \frac{16,00}{18,00} \approx 0,89$$

Si ottiene l'altezza fittizia:

$$h_f^c = h \cdot c_3 = 0,03 \times 0,89 \approx 0,03 \text{ m}$$



Analisi statica di una volta a botte (9/20)

I carichi strutturali e di esercizio, trasformati in muratura equivalente, vanno moltiplicati per i coefficienti γ_{G1} e γ_Q , che si assumono pari a **1,5**, per cui i due tipi di carico si considerano insieme.

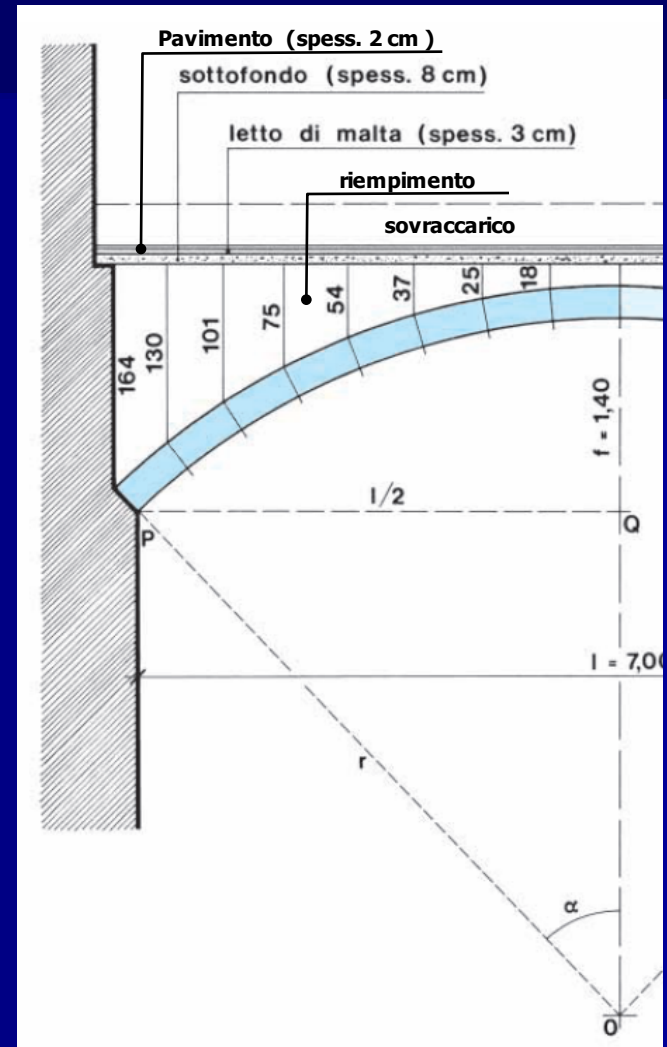
Le **altezze totali fittizie**, in corrispondenza ad ogni giunto, valgono:

$$h_0 = h_f^r + h_f^s + h_f^c + h_f^p + h_f^e =$$

$$= 0,17 + 0,11 + 0,03 + 0,03 + 0,14 = 0,48 \text{ m}$$

$$h_1 = 0,51 \text{ m}; h_2 = 0,59 \text{ m}; h_3 = 0,72 \text{ m}; h_4 = 0,91 \text{ m};$$

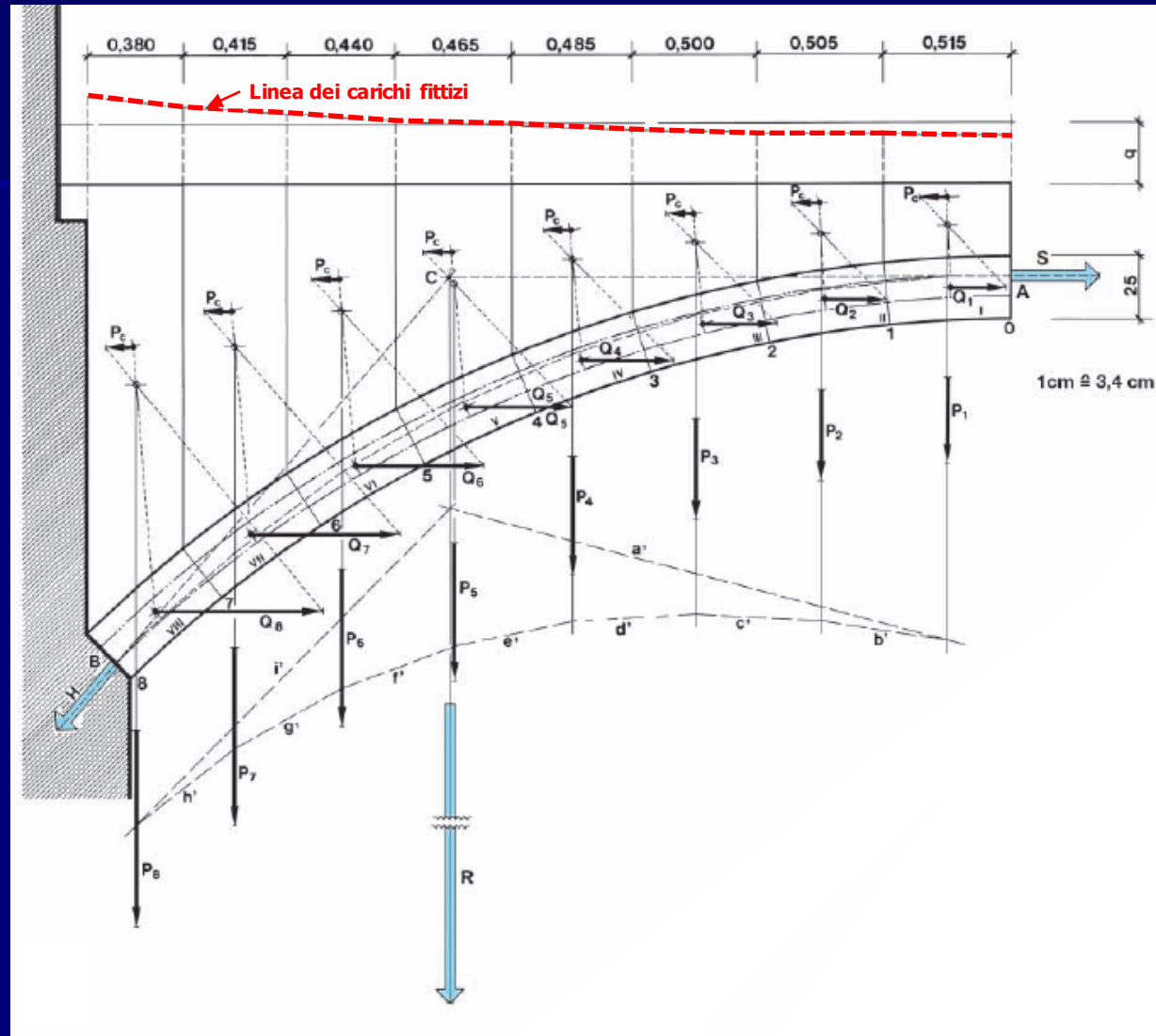
$$h_5 = 1,14 \text{ m}; h_6 = 1,43 \text{ m}; h_7 = 1,75 \text{ m}; h_8 = 2,13 \text{ m}$$



Analisi statica di una volta a botte (10/20)

Le altezze fittizie, riportate a partire dalla linea di estradosso, determinano la **linea dei carichi fittizi**, che rappresenta il profilo dei materiali superiori, resi omogenei alla muratura.

La superficie fra la curva di estradosso e la linea dei carichi fittizi definisce il **diagramma di carico**.



Analisi statica di una volta a botte (11/20)

Si determinano ora i **pesi delle singole strisce**, ciascuna delle quali è un prisma avente altezza unitaria (larghezza arco = 1 mt) e base assimilabile ad un trapezio (le cui basi corrispondono alle altezze fittizie prima calcolate).

In tabella il calcolo dei primi 4 conci.

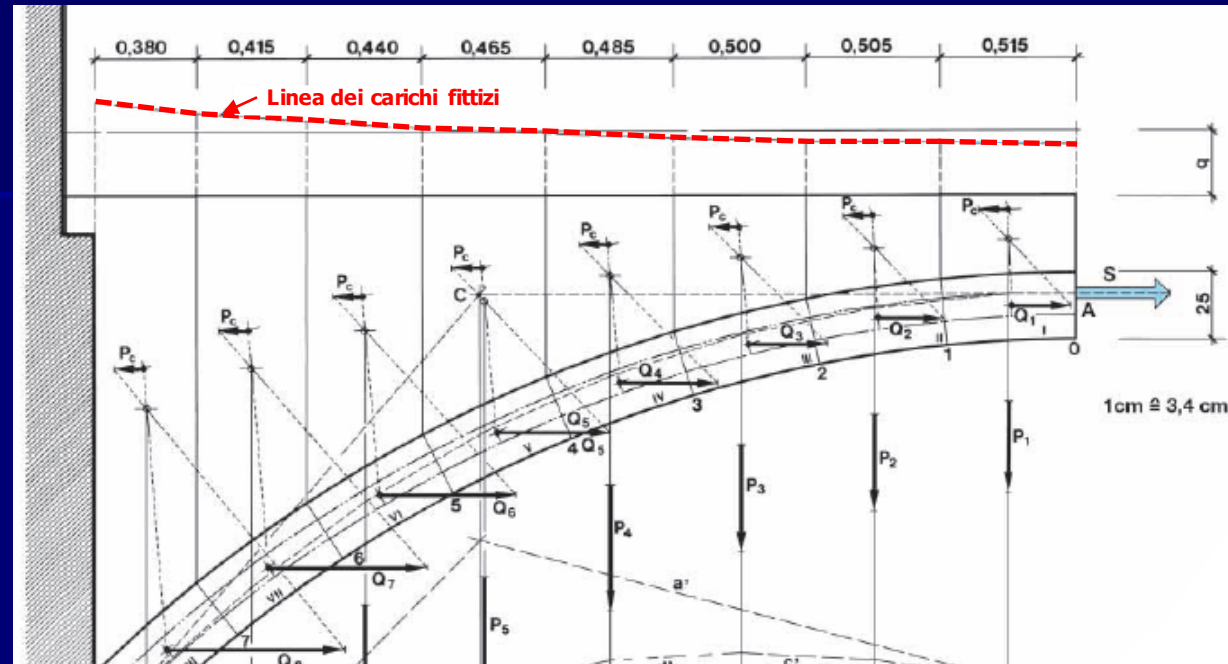


Tabella 2

Striscia		Pesi di calcolo (kN)
I	$\frac{0,48 + 0,51}{2} \times 0,515 \times 1,00 \times 18,00 \times 1,5$	$Q_1 = 6,88$
II	$\frac{0,51 + 0,59}{2} \times 0,505 \times 1,00 \times 18,00 \times 1,5$	$Q_2 = 7,50$
III	$\frac{0,59 + 0,72}{2} \times 0,500 \times 1,00 \times 18,00 \times 1,5$	$Q_3 = 8,84$
IV	$\frac{0,72 + 0,91}{2} \times 0,485 \times 1,00 \times 18,00 \times 1,5$	$Q_4 = 10,67$

Analisi statica di una volta a botte (12/20)

Si determina, con la costruzione grafica in figura, la linea di azione della risultante del peso del concio e della striscia sovrastante.

I pesi totali sono riportati in tabella.

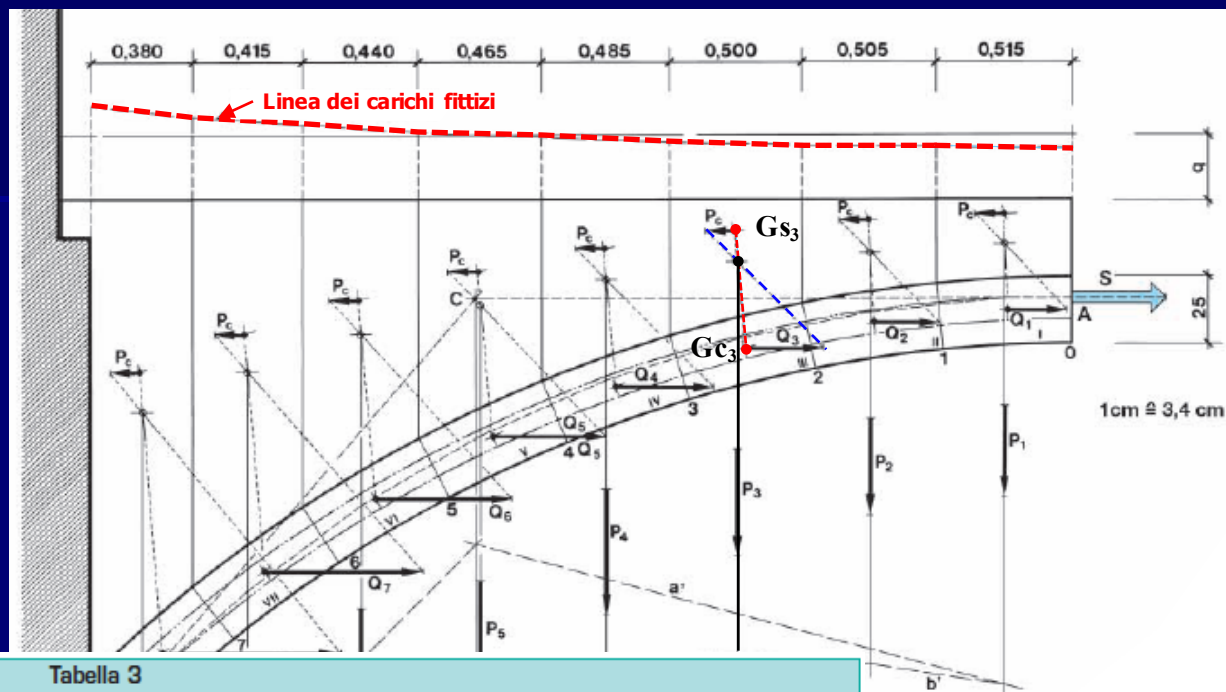
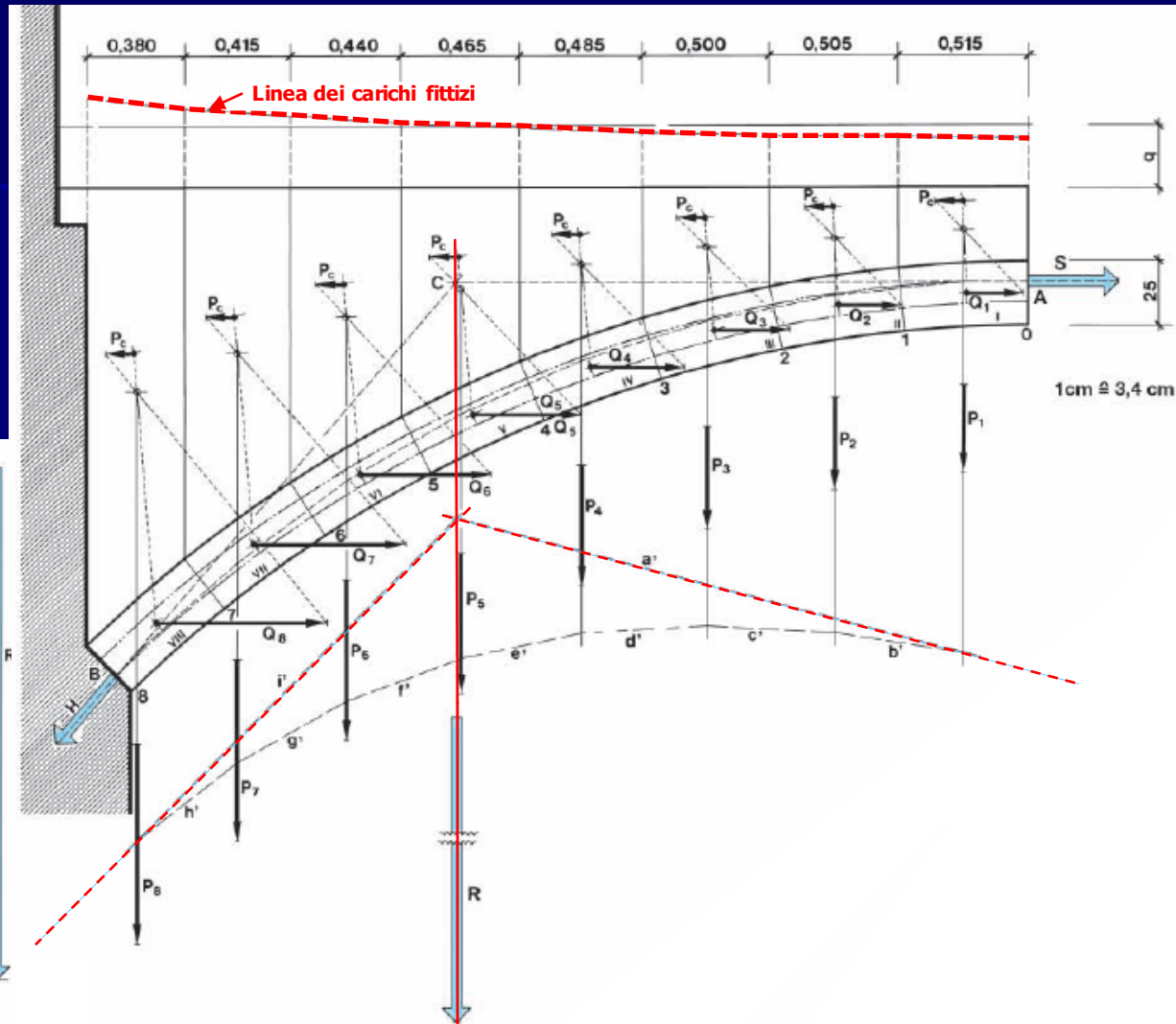
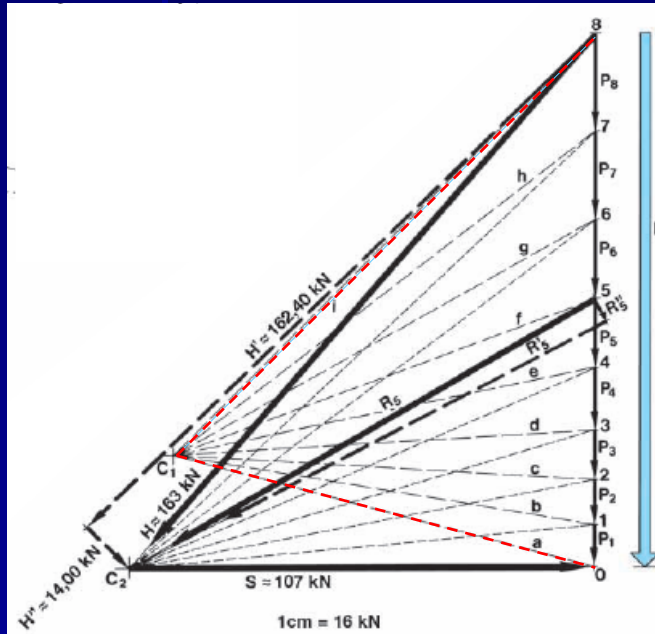


Tabella 3

Concio	Peso del concio (kN)	Peso della striscia (kN)	Peso totale (kN)
I	2,89	6,88	$P_1 = 9,77$
II	2,89	7,50	$P_2 = 10,39$
III	2,89	8,84	$P_3 = 11,73$
IV	2,89	10,67	$P_4 = 13,56$
V	2,89	12,87	$P_5 = 15,76$
VI	2,89	15,27	$P_6 = 18,16$
VII	2,89	17,82	$P_7 = 20,71$
VIII	2,89	19,90	$P_8 = 22,79$
			$R = \Sigma P = 122,87$

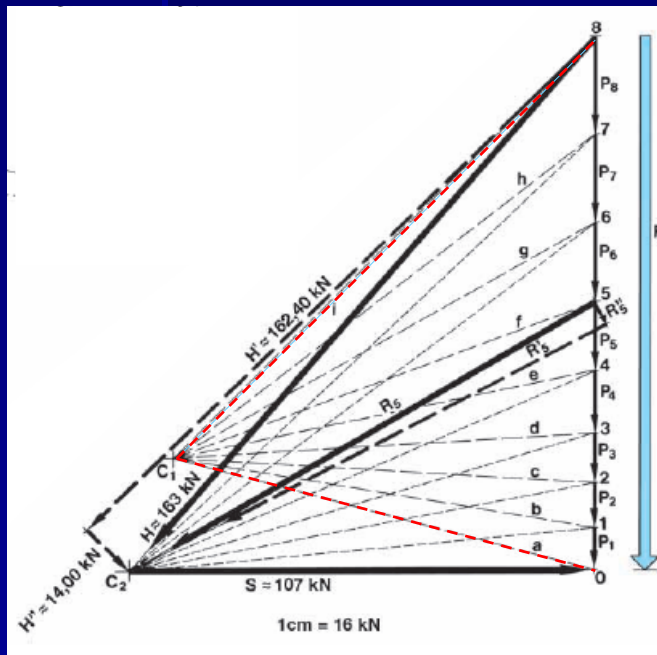
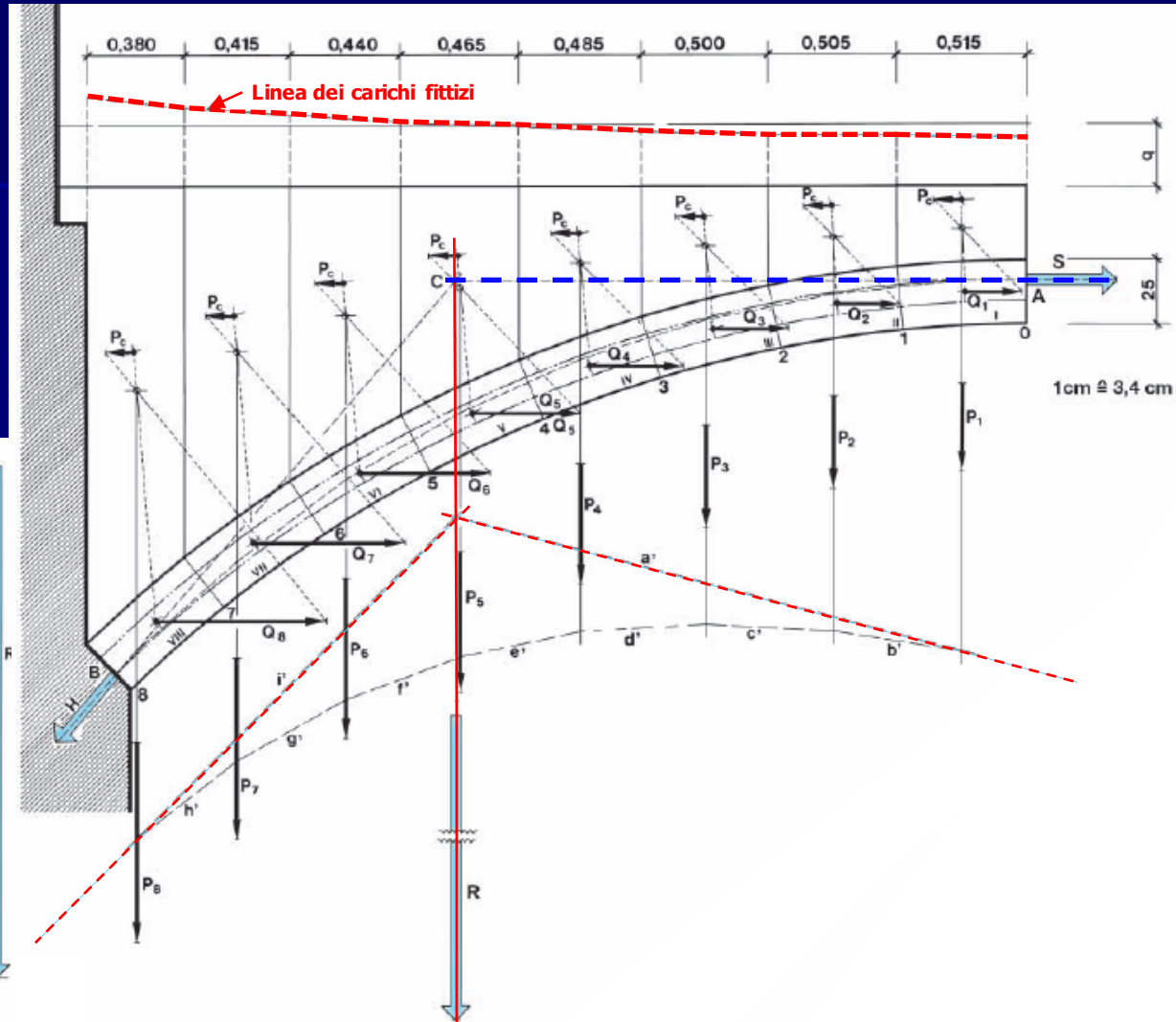
Analisi statica di una volta a botte (13/20)

Col poligono funicolare di polo C_1 si individua la retta d'azione della risultante R dei carichi.



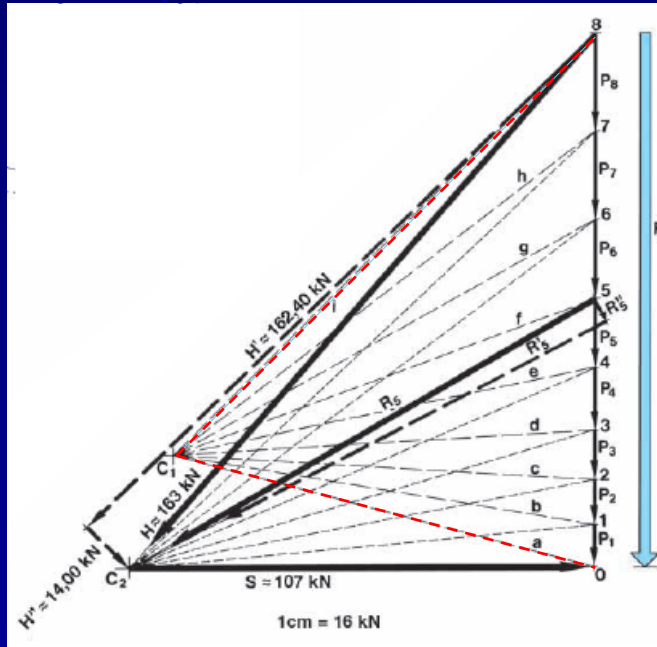
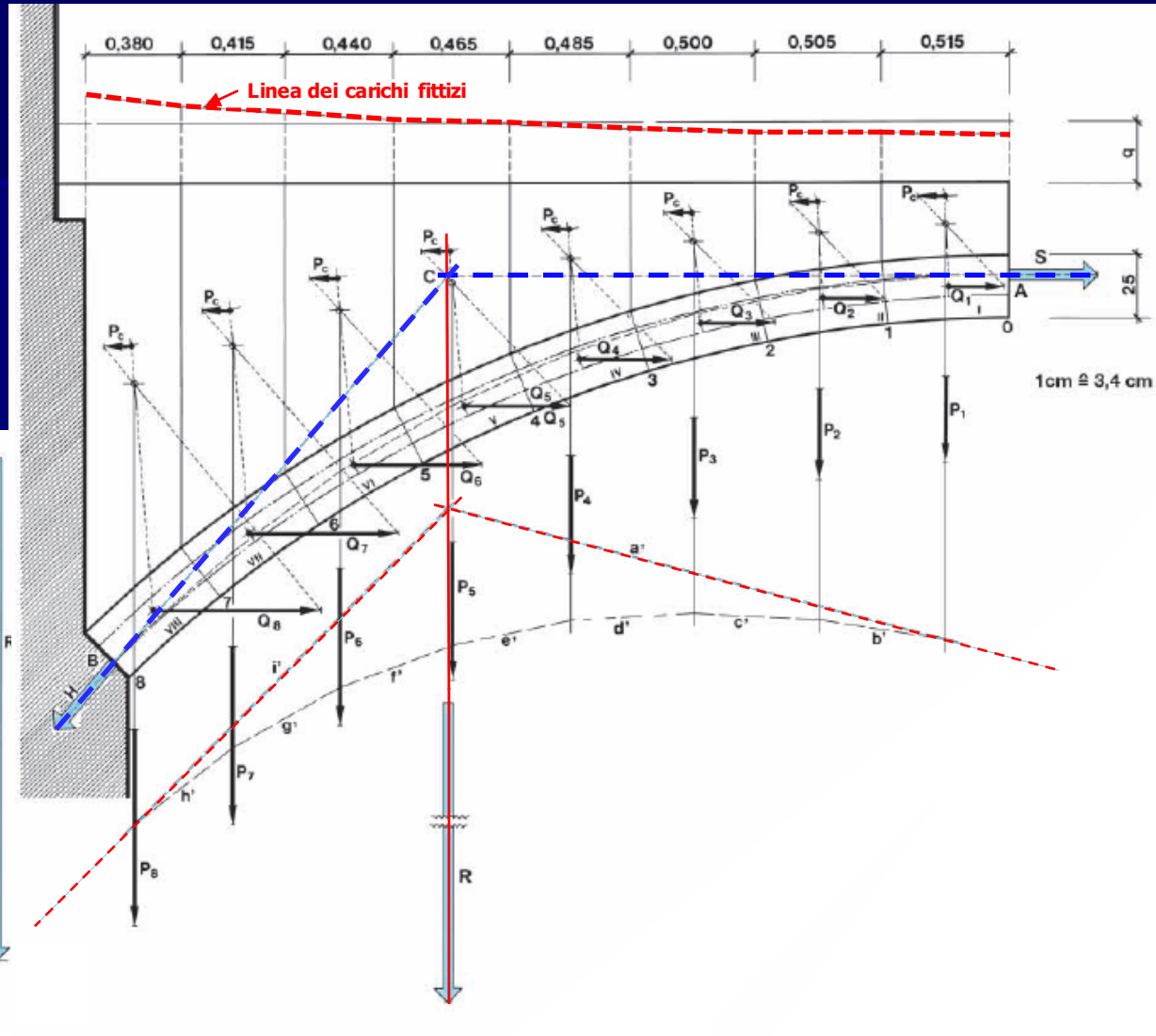
Analisi statica di una volta a botte (14/20)

Il prolungamento della retta d'azione di S , applicata in chiave nel terzo medio superiore, interseca la retta d'azione della risultante R in C .



Analisi statica di una volta a botte (15/20)

La congiungente il punto **C** con il terzo medio inferiore della sezione di imposta definisce la retta d'azione della spinta **H**.

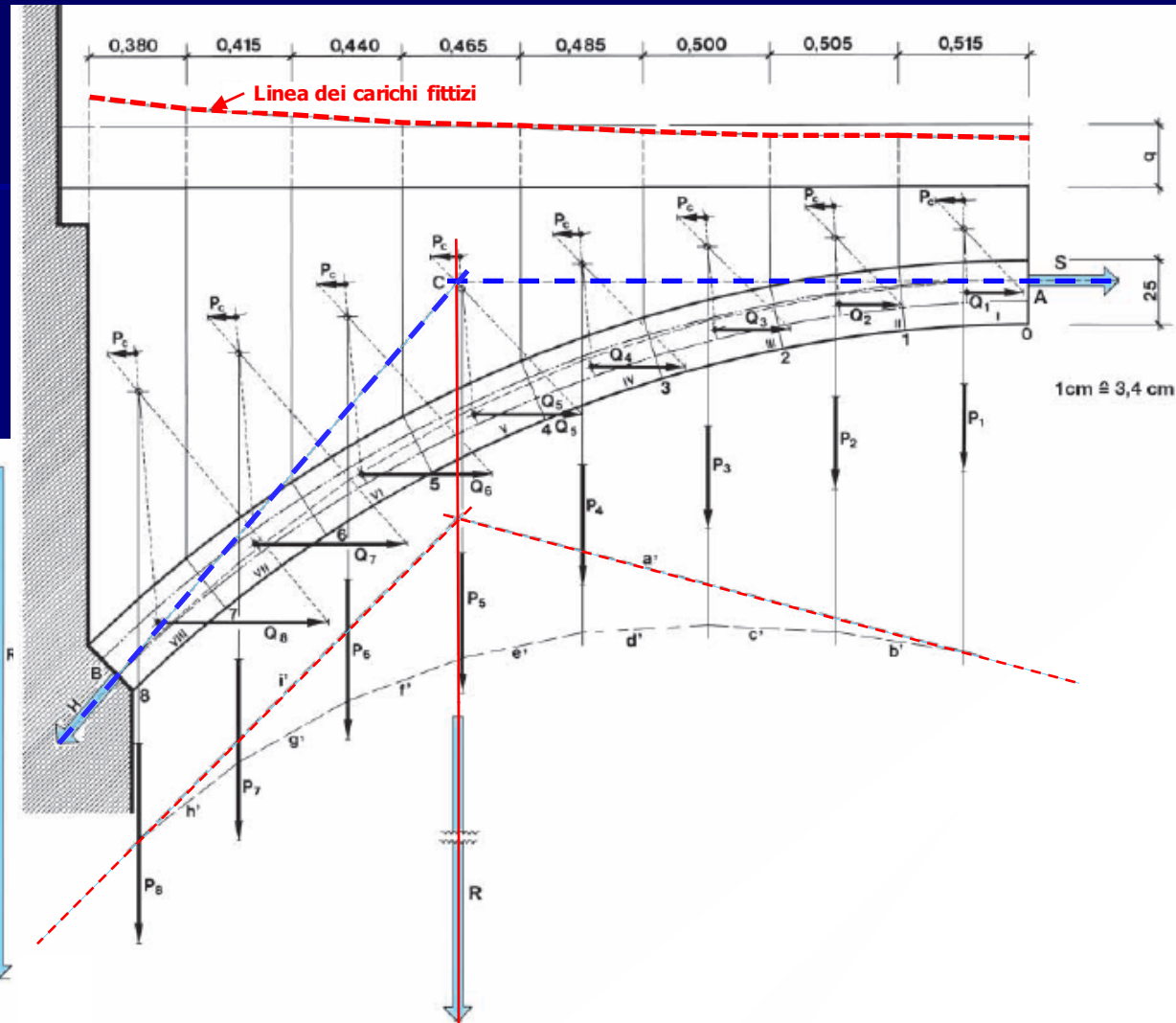
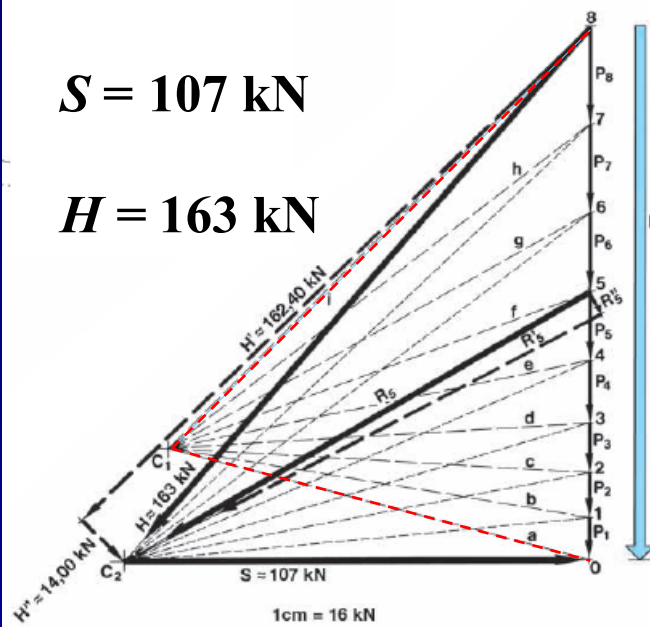


Analisi statica di una volta a botte (16/20)

Scomponendo la risultante R nelle direzioni di S ed H si determinano, nella scala grafica delle forze, le intensità:

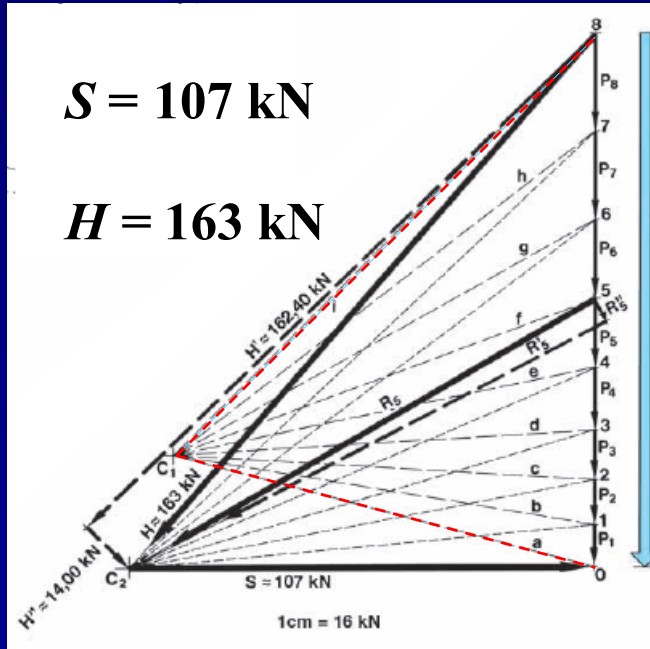
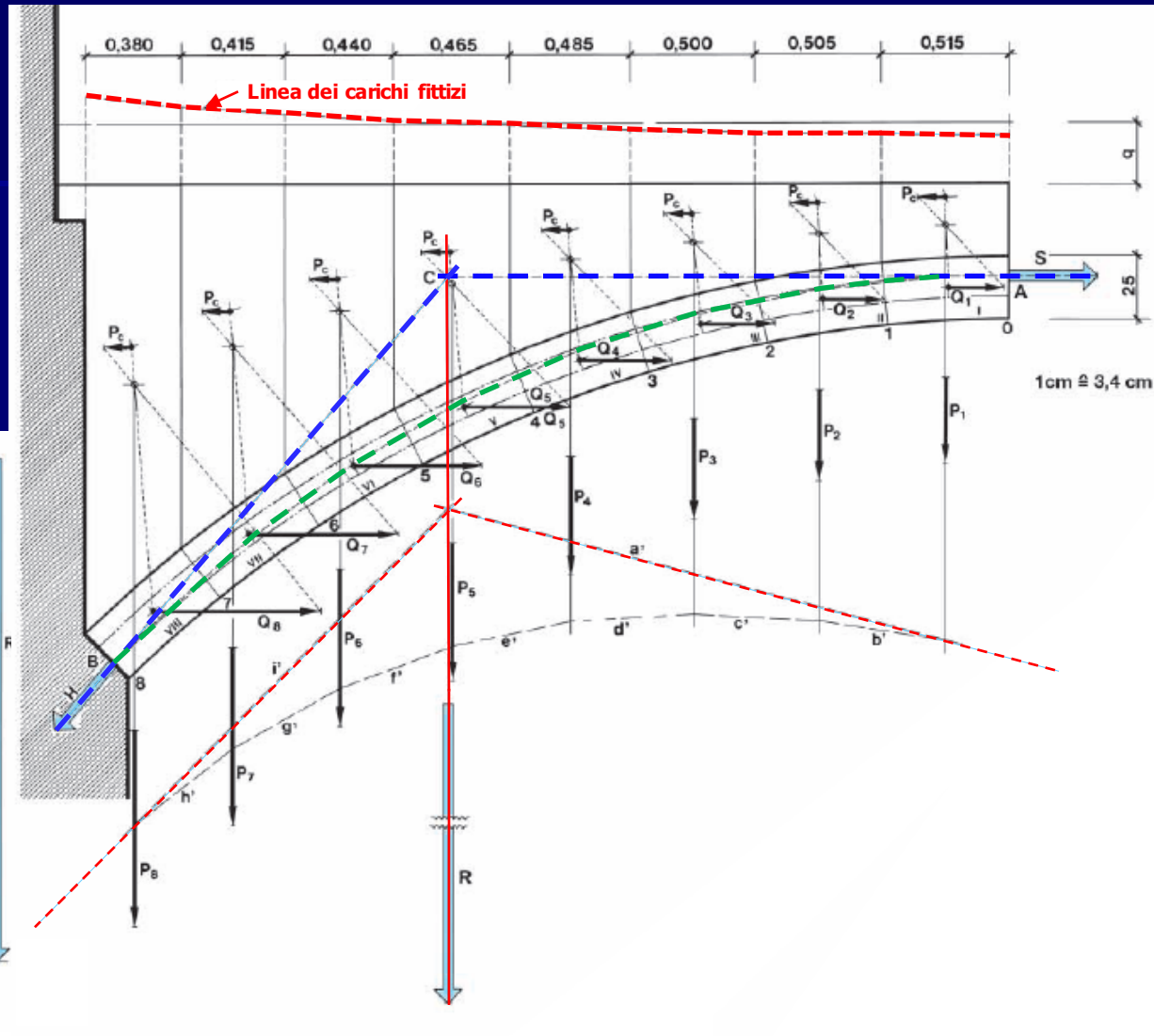
$$S = 107 \text{ kN}$$

$$H = 163 \text{ kN}$$



Analisi statica di una volta a botte (17/20)

Assumendo C_2 come nuovo polo si traccia il **poligono funicolare delle pressioni**, che deve cadere tutto all'interno del terzo medio perché la sezione sia ovunque tutta compressa.



Analisi statica di una volta a botte (19/20)

Si fa notare che, anche adottando una scala ridotta, esigenze grafiche impongono di non suddividere la volta o l'arco in conci troppo numerosi (n compreso fra 6 e 10), che complicherebbero il calcolo grafico, con conseguente maggiore facilità di commettere errori.

Pertanto può risultare, come si rileva nel concio I, che un piccolo tratto finale del primo lato del poligono funicolare risulti fuori dalla fascia del terzo medio; ciò è dovuto soltanto al fatto che i conci hanno una certa lunghezza, mentre teoricamente dovrebbero essere piccolissimi.

Altro è invece il caso in cui il poligono delle pressioni esca dal terzo medio lungo il suo sviluppo, per cui risulterebbe necessario aumentare lo spessore della volta o dell'arco.

Analisi statica di una volta a botte (20/20)

Determinate le spinte in chiave e all'imposta si devono effettuare le verifiche.

La sezione **0** in chiave è soggetta a pressoflessione dalla forza S , mentre la sezione **8** all'imposta è soggetta a pressoflessione e taglio per effetto della forza H .

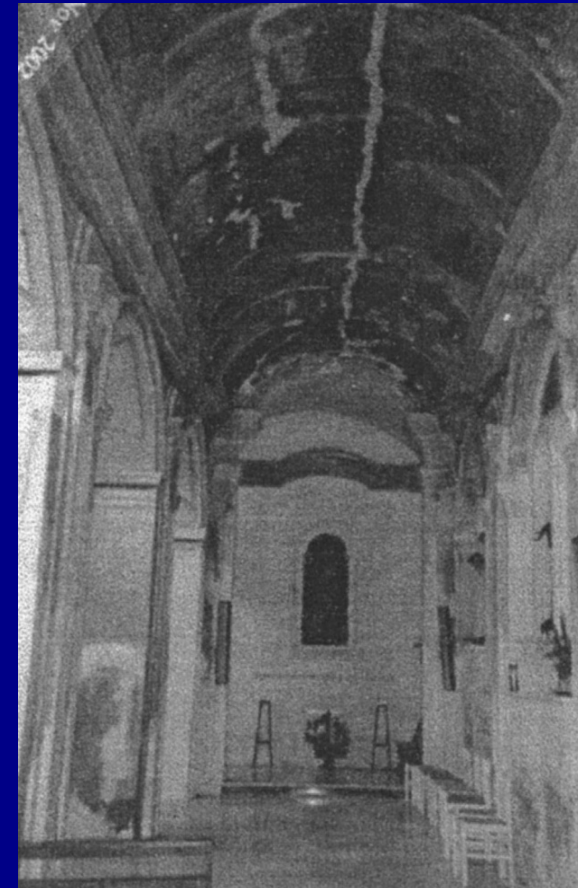
Quest'ultima sezione è la più sollecitata e quindi per questa vengono effettuate le verifiche; è necessario scomporre la H nelle due componenti $H' = 162,40$ kN, perpendicolare alla sezione, che produce la sollecitazione di pressoflessione, e $H'' = 14,00$ kN, giacente nel piano della sezione, che produce la sollecitazione di taglio. Tenuto conto dell'eccentricità di H' rispetto al baricentro, pari a $e = 0.042$ m le azioni interne all'imposta sono: $N = H'$, $M = H' \cdot e$, $T = H''$

Analisi statica di una volta a botte (1/5)

Si considera una volta a botte a sezione circolare realizzata in tufo e soggetta solo al proprio peso.

I dati sono i seguenti:

Lunghezza: $L = 8.40 \text{ m}$,
Raggio di curvatura: $R_0 = 3.20 \text{ m}$,
Spessore: $s = 0.30 \text{ m}$,
Peso specifico: $\gamma_m = 17000 \text{ N/m}^3$.



Analisi statica di una volta a botte (1/5)

Il peso proprio vale dunque:

$$g = \gamma_m s = \mathbf{5100} \text{ N/m}^2;$$

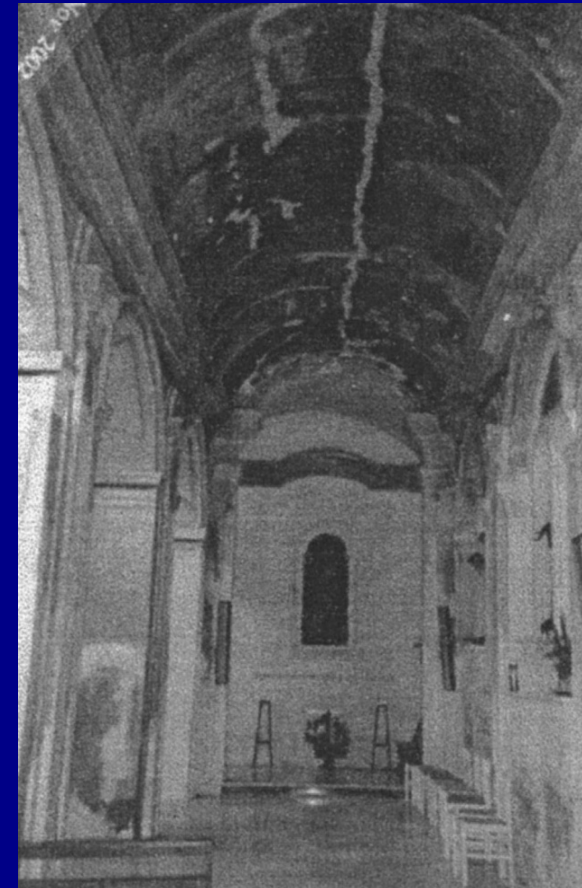
gli sforzi valgono invece:

$$S_1 = (g/R_0)(x^2 - \ell^2) \cos \theta,$$

$$S_2 = -g R_0 \cos \theta,$$

$$T_{12} = -2g x \sin \theta.$$

Le tabelle seguenti riportano i valori degli sforzi e i loro diagrammi in alcune sezioni significative.



Analisi statica di una volta a botte (2/5)

$$g = \gamma_{\text{muratura}} \cdot s = 5100 \text{ N/m}^2.$$

Di seguito saranno riportati i valori degli sforzi S_1 , S_2 e T , e i loro diagrammi.

Le lunghezze sono state misurate in m, le forze in N, gli sforzi in N/m.

θ°	x = 0 m			x = 1,40 m		
	S_1	S_2	T	S_1	S_2	T
0	-28114	-16320	0	-24990	-16320	0
10	-27687	-16072	0	-24610	-16072	-2480
20	-26418	-15336	0	-23483	-15336	-4884
30	-24347	-14134	0	-21642	-14134	-7140
40	-21536	-12502	0	-19143	-12502	-9179
50	-18071	-10490	0	-16063	-10490	-10939
60	-14057	-8160	0	-12495	-8160	-12367
70	-9615	-5582	0	-8547	-5582	-13419
80	-4882	-2834	0	-4339	-2834	-14063
90	0	0	0	0	0	-14280

θ°	x = 2,80 m			x = 4,20 m		
	S_1	S_2	T	S_1	S_2	T
0	-15619	-16320	0	0	-16320	0
10	-15381	-16072	-4959	0	-16072	-7439
20	-14677	-15336	-9768	0	-15336	-14652
30	-13526	-14134	-14280	0	-14134	-21420
40	-11965	-12502	-18358	0	-12502	-27537
50	-10040	-10490	-21878	0	-10490	-32817
60	-7809	-8160	-24734	0	-8160	-37101
70	-5342	-5582	-26838	0	-5582	-40256
80	-2712	-2834	-28126	0	-2834	-42189
90	0	0	-28560	0	0	-42840

Analisi statica di una volta a botte (3/5)

Diagramma S_1 , S_2 , T per $x = 0$ m.

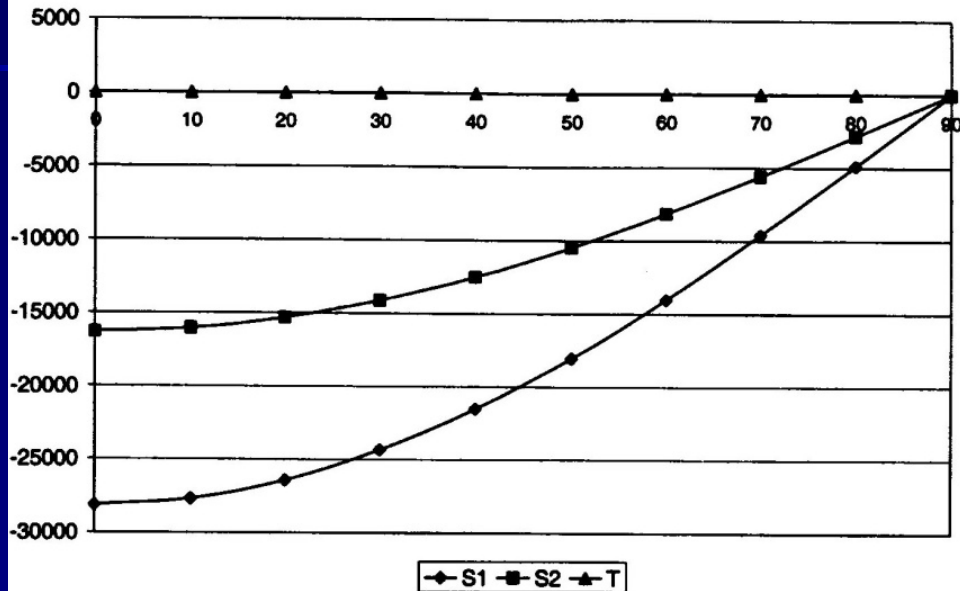
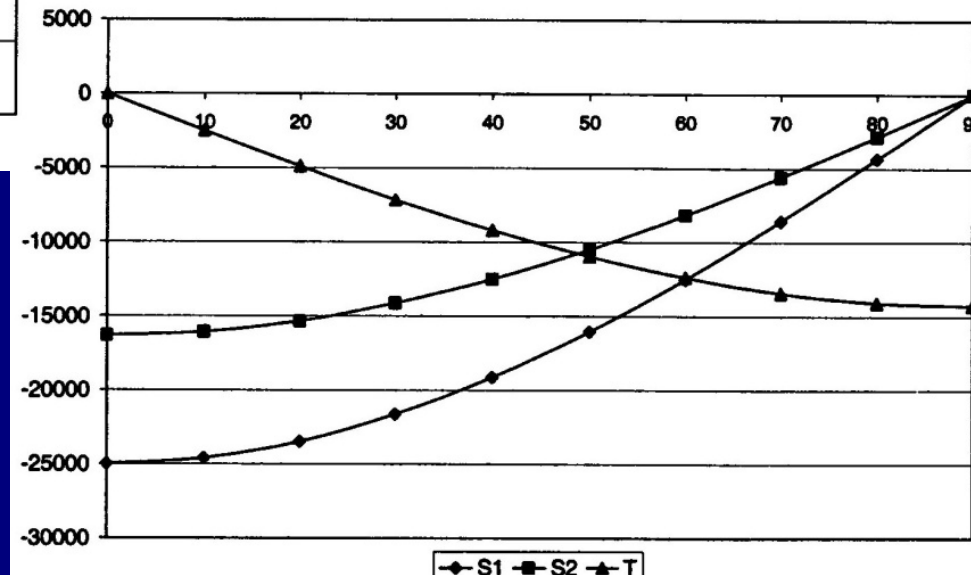


Diagramma S_1 , S_2 , T per $x = 1,40$ m.



Analisi statica di una volta a botte (4/5)

Diagramma S_1 , S_2 , T per $x = 2,80$ m.

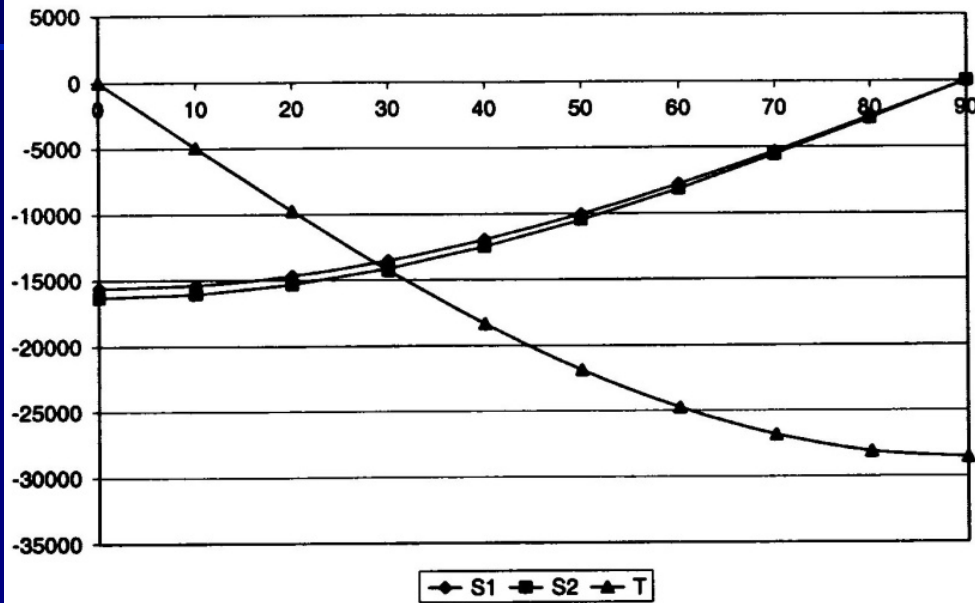
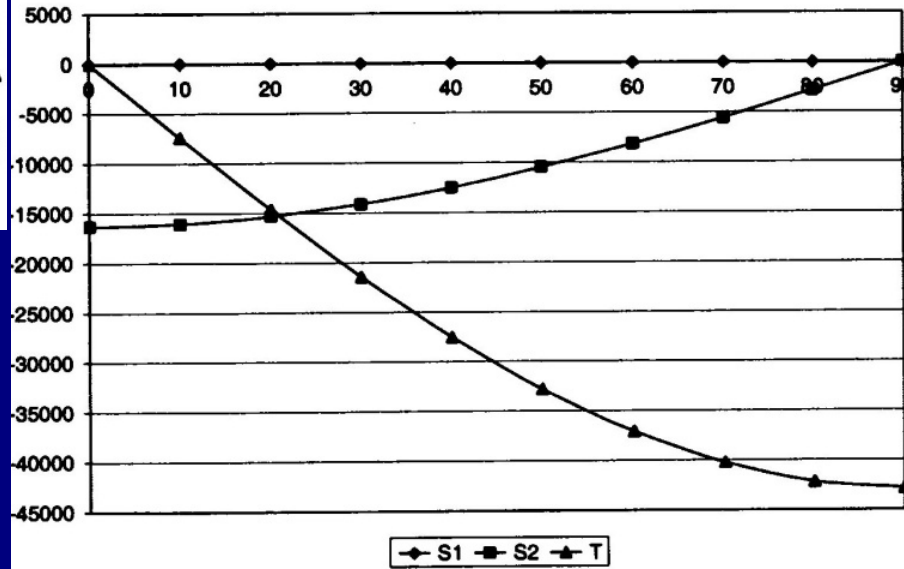


Diagramma S_1 , S_2 , T per $x = 4,20$ m.



Analisi statica di una volta a botte (5/5)

Per quanto attiene la verifica di resistenza nel materiale, le azioni interne principali assumono i valori:

$$S_{\xi} = (S_1 + S_2)/2 + (1/2)[(S_1 - S_2)^2 + 4(T_{12})^2]^{1/2};$$
$$S_{\eta} = (S_1 + S_2)/2 - (1/2)[(S_1 - S_2)^2 + 4(T_{12})^2]^{1/2}.$$

Da qui si debbono valutare le tensioni (sforzi locali), considerando che:

$$\sigma_{\xi} = S_{\xi}/s$$
$$\sigma_{\eta} = S_{\eta}/s$$

e occorre verificare che le massime tensioni ottenute siano compatibili con le caratteristiche meccaniche del materiale utilizzato.

Nel caso in esame, deve risultare:

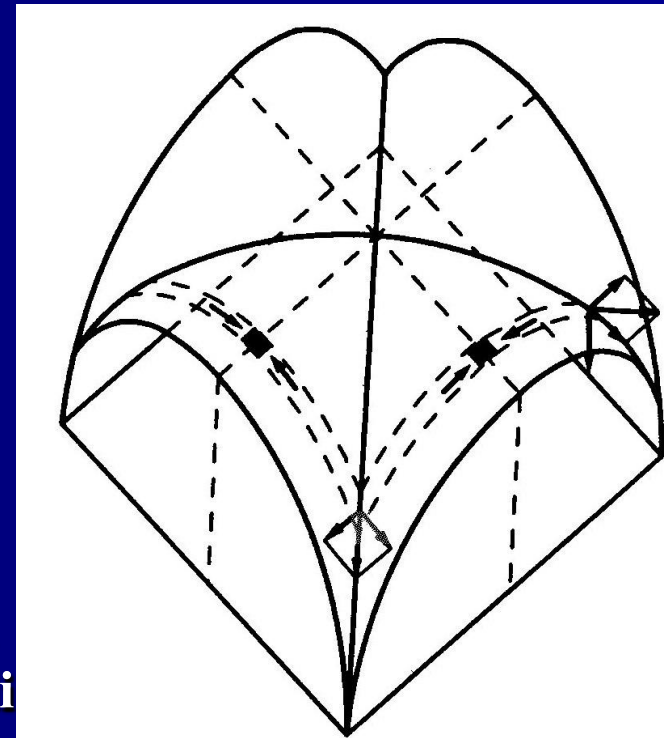
$$\min(\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}) < \sigma_{amm, c} ;$$
$$\max(\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}) < \sigma_{amm, t} .$$

Analisi statica semplificata di una volta a crociera (1/5)

La volta a crociera considerata, soggetta al peso proprio e al peso del rinfiango ha le seguenti caratteristiche:

- lunghezza in pianta: $L_1 = 4.30 \text{ m}$
- larghezza in pianta: $L_2 = 4.15 \text{ m}$
- spessore: $s = 0.30 \text{ m}$
- peso specifico: $\gamma_m = 22000 \text{ N/m}^3$
- peso specifico rinfiango:
 - $\gamma_r = 14000 \text{ N/m}^3$

La struttura portante è costituita dagli archi diagonali, che hanno il compito di trasferire le azioni derivanti dai 4 spicchi di volta a botte alle strutture sottostanti.



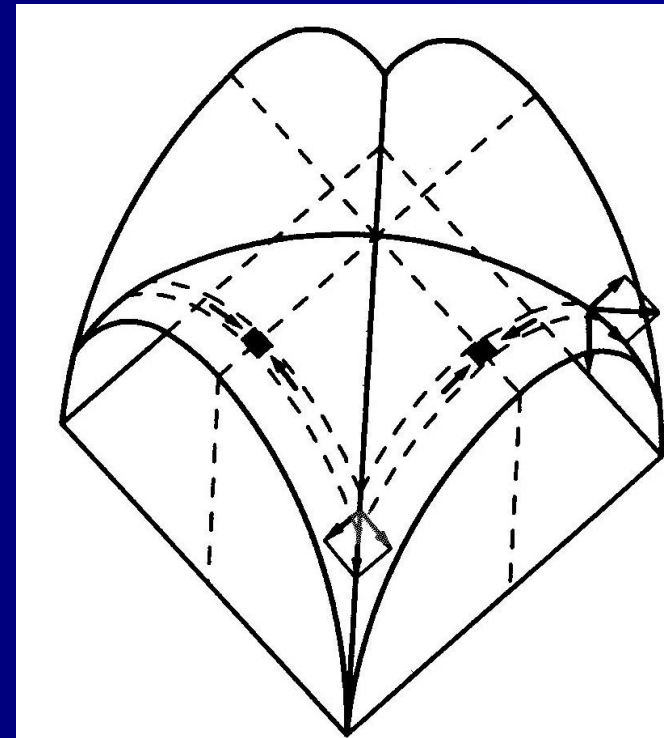
Modello statico di volta a crociera.

Analisi statica semplificata di una volta a crociera (1/5)

La volta, realizzata in muratura è supposta soggetta al peso proprio e al carico dovuto al rinfianco.

Non si considerano altri carichi in quanto la zona sovrastante è supposta non praticabile (una copertura indipendente la protegge da effetti dovuti a vento o neve) .

Si analizzano separatamente le due volte a botte e si compongono poi le sollecitazioni sugli archi diagonali.



Modello statico di volta a crociera.

Analisi statica semplificata di una volta a crociera (2/5)

Il peso proprio vale:

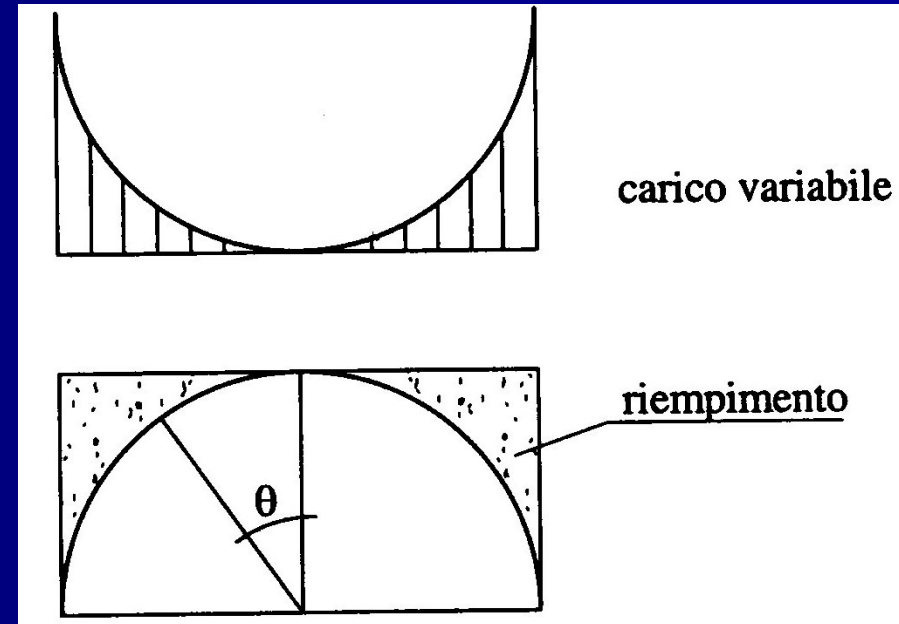
$$g = \gamma_m s = 11000 \text{ N/m}^2;$$

gli sforzi su ciascuna volta a botte valgono:

$$S_1 = - (g/R_0)(l^2 - x^2) \cos \theta,$$

$$S_2 = - g R_0 \cos \theta,$$

$$T_{12} = - 2g x \sin \theta.$$



Analisi statica semplificata di una volta a crociera (2/5)

Il carico dovuto al riempimento non ha andamento costante ma varia secondo una legge del tipo seguente:

$$y = (R_0^2 - r^2)^{1/2} = R_0(1 - \sin^2 \theta)^{1/2},$$

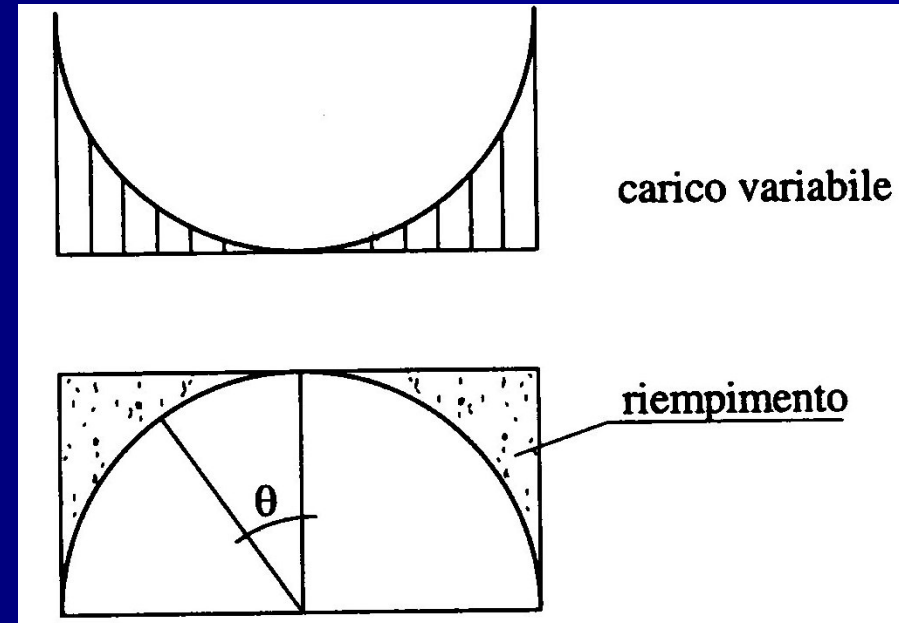
in quanto $r = R_0 \sin \theta$. Il carico verticale per unità di proiezione orizzontale vale quindi:

$V = \gamma_r y \cos \theta = \gamma_r R_0(1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \cos \theta$
e le componenti Cartesiane del carico sono:

$$Z = -\gamma_r R_0(1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \cos^2 \theta;$$

$$Y = \gamma_r R_0(1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \cos \theta;$$

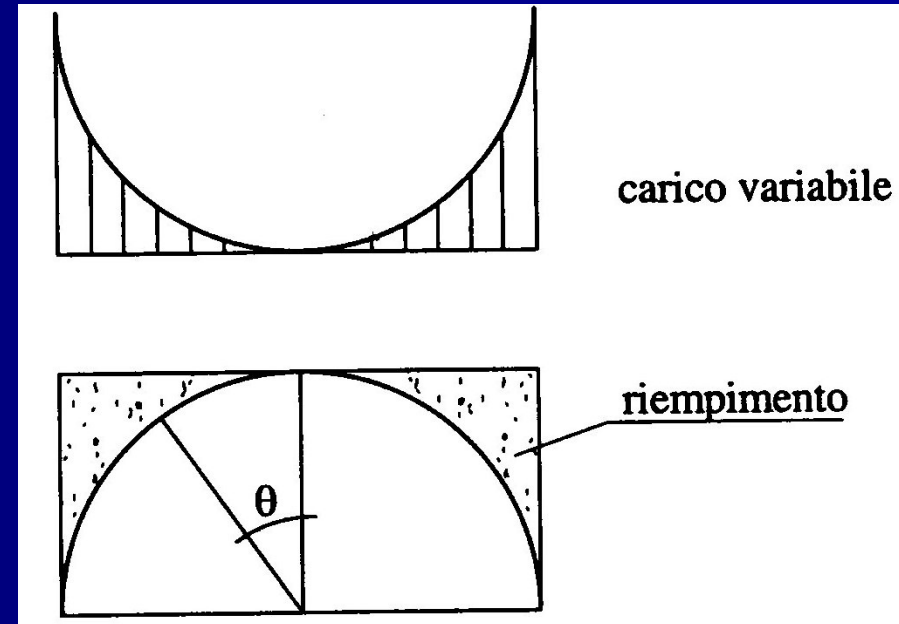
$$X = 0.$$



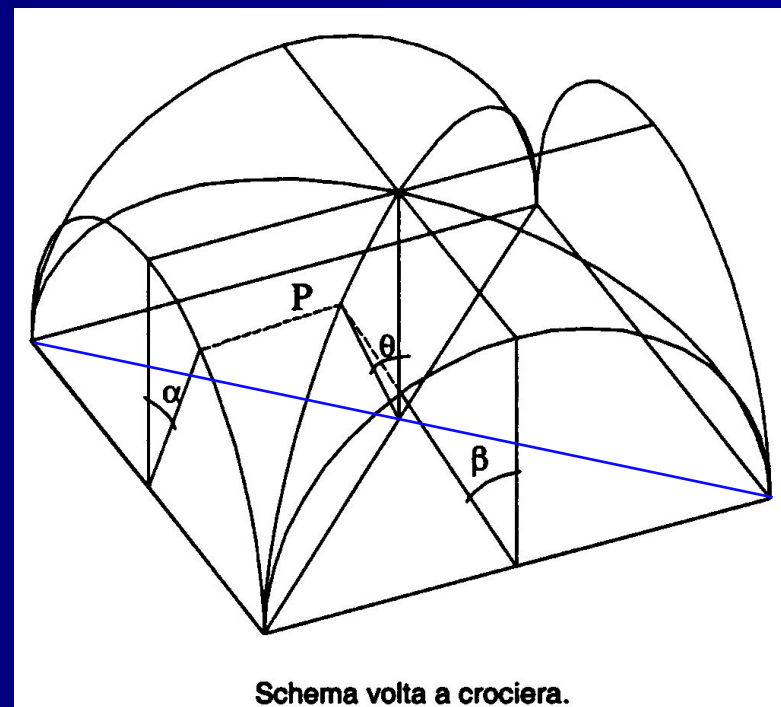
Analisi statica semplificata di una volta a crociera (3/5)

Da questi valori seguono facilmente i valori degli sforzi membranali causati dal riempimento:

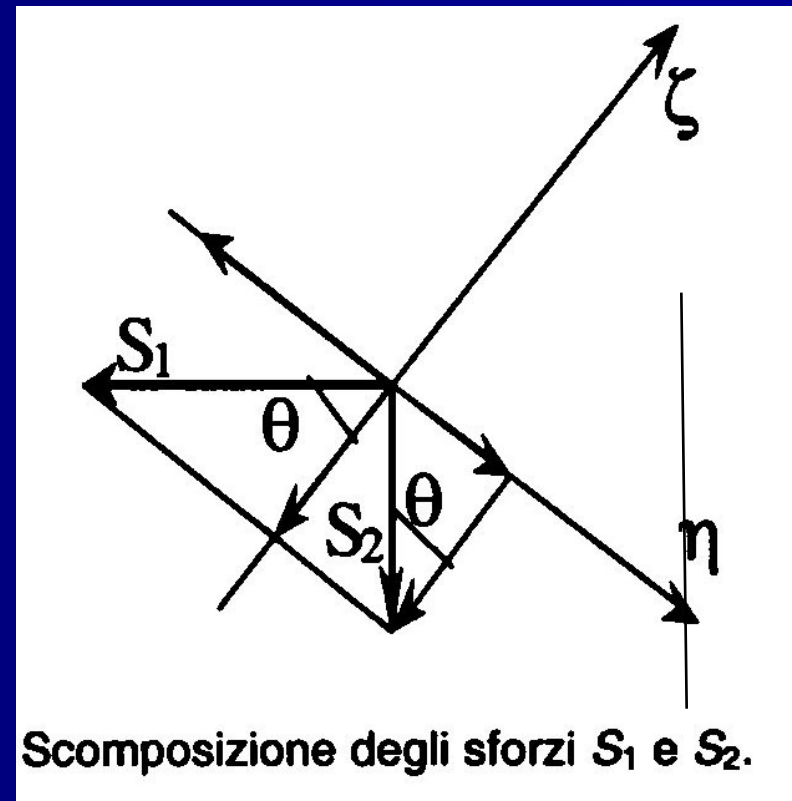
$$S_2 = -\gamma_r R_o^2 (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \cos^2 \theta,$$
$$T_{12} = -3\gamma_r x R_o (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \cos^2 \theta,$$
$$S_1 = - (3 V/2)(\ell^2 - x^2) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$



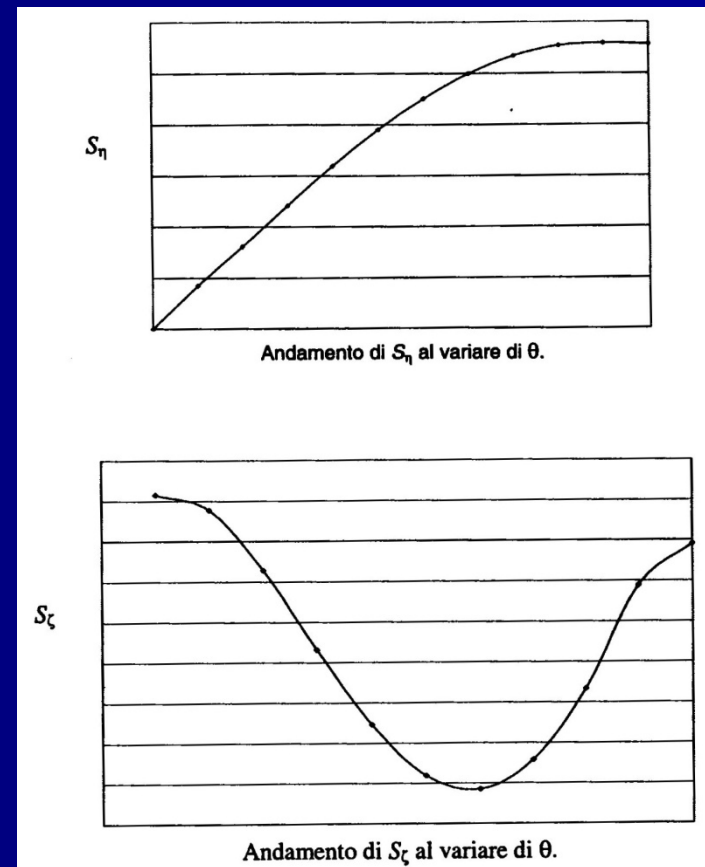
Analisi statica semplificata di una volta a crociera (2/5)



Analisi statica semplificata di una volta a crociera (3/5)



Analisi statica semplificata di una volta a crociera (4/5)



Analisi statica di una volta a botte (1/5)

