Politecnico di Milano - Corso di Laurea in Architettura (N.O.)

Campus Mantova

CORSO DI T. E P. DI COSTRUZIONI E STRUTTURE

A.A. 2000-01

Secondo compito scritto in aula del 04.07.2001

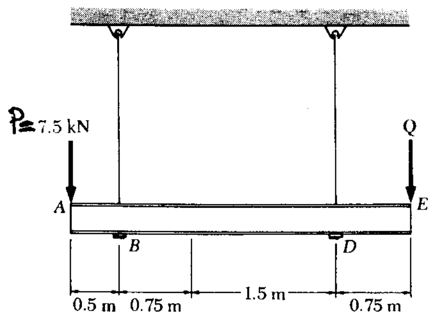
Testo ....

Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:... Matricola:.......

Esercizio n.1 (4 punti)

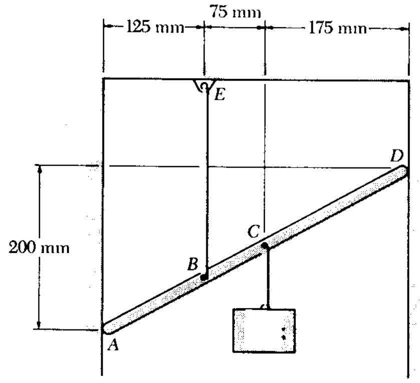
I due carichi P = 7.5 kN e Q sono applicati alla trave priva di peso, sostenuta da cavi agganciati nei punti B e D indicati in Figura. Sapendo che il *tiro massimo sopportabile* da ogni cavo è pari a .... kN, determinare il valore *minimo*, Q_{min}, e il valore massimo, Q_{max}, del carico Q che la struttura può sopportare in sicurezza.



Q_{min} = ... kN
Q_{max} = ... kN

Esercizio n.2 (6 punti)

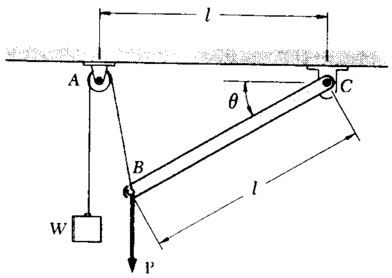
Una barra priva di peso è sospesa mediante il cavo BE e sostiene in C un blocco del peso di .... N. Le estremità A e D sono vincolate a scorrere su pareti prive d'attrito, perfettamente verticali. Determinare il tiro nel cavo BE e le reazioni (orizzontali) in A e D, come indicato in Figura.



T_{BE} = ... N; H_A = ... N; H_D = ... N

Esercizio n.3 (6 punti)

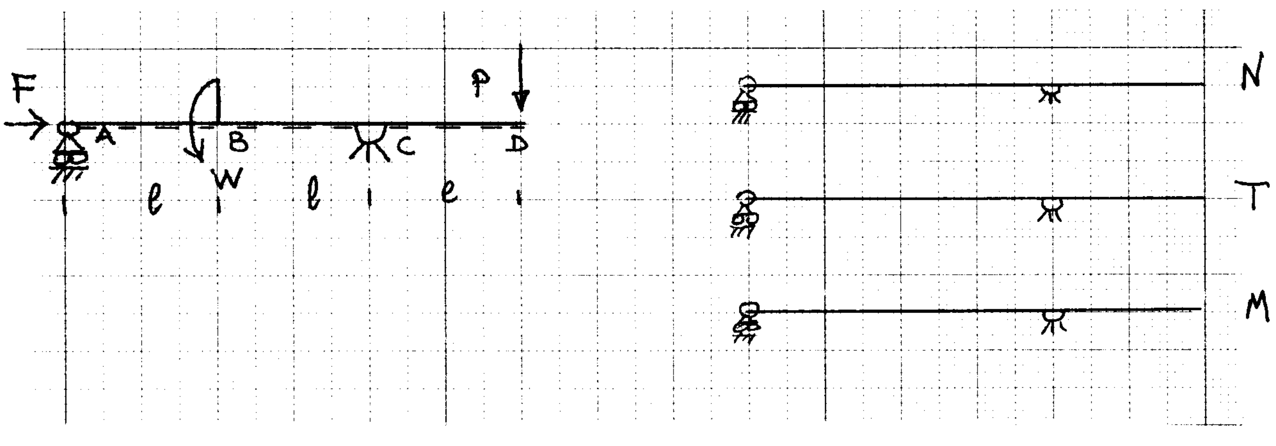
Un carico verticale **P** è applicato all'estremità B della barra rigida BC. Trascurando il peso della barra e considerando che il triangolo ACB è *isoscele* (vedi Figura), determinare l'espressione dell'angolo θ in funzione dei parametri *P* (modulo del vettore **P**), *l* e del contrappeso *W* in condizioni di equilibrio. Si determini poi, quando *P* = ...*W* il valore dell'angolo θ in condizioni di equilibrio.
(*Suggerimento*: si tenga presente che una fune che passa per una carrucola trasmette *inalterato* il modulo di una forza!)



θ = ... (generico); θ = ... (caso part.)

Esercizio n.4 (6 punti)

Risolvere la trave indicata in Figura, calcolando le espressioni delle reazioni vincolari e delle azioni interne e riportare in grafico, negli spazi predisposti, queste ultime. Si ricordi che *il momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese*



$V_A =$ .... $V_C =$ ....

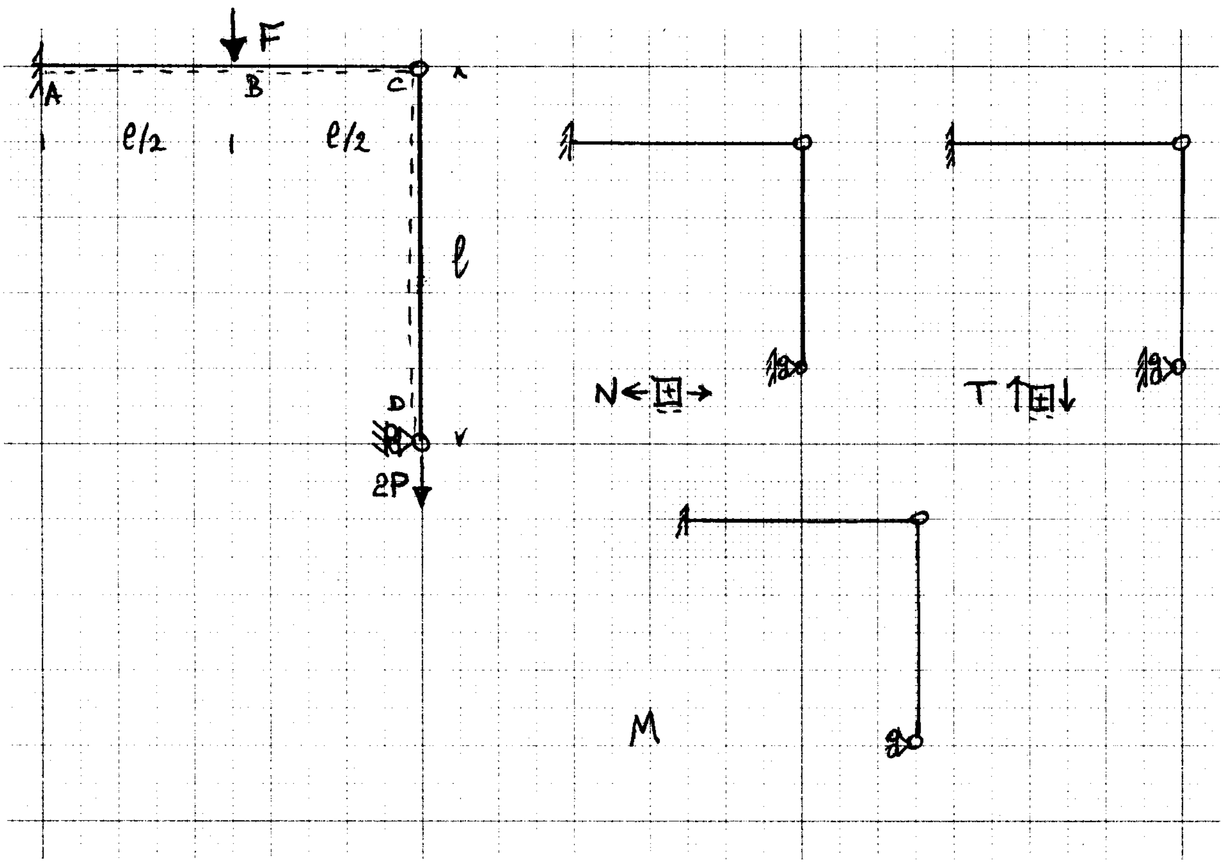
$N_{AB} =$ ....; $N_{CD} =$ ....;

$T_{AB} =$ ....; $T_{CD} =$ ....;

$M_{AB} =$ ....; $M_{BC} =$ ....; $M_{CD} =$ ....;

Esercizio n.5 (8 punti)

Risolvere la struttura articolata indicata in Figura, calcolando le espressioni delle reazioni vincolari e delle azioni interne e riportare in grafico, negli spazi predisposti, queste ultime. Si ricordi che *il momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese*



$H_A =$ .... $V_A =$ .... $M_A =$ .... $H_D =$ ....

$N_{AB} =$ ....; $N_{BC} =$ ....; $N_{CD} =$ ....;

$T_{AB} =$ ....; $T_{BC} =$ ....; $T_{CD} =$ ....;

$M_{AB} =$ ....; $M_{BC} =$ ....; $M_{CD} =$ ....;

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

Per la trave in Figura determinare quale fra i diagrammi del momento flettente proposto è quello corretto, e indicare almeno uno degli errori presenti nei rimanenti diagrammi.

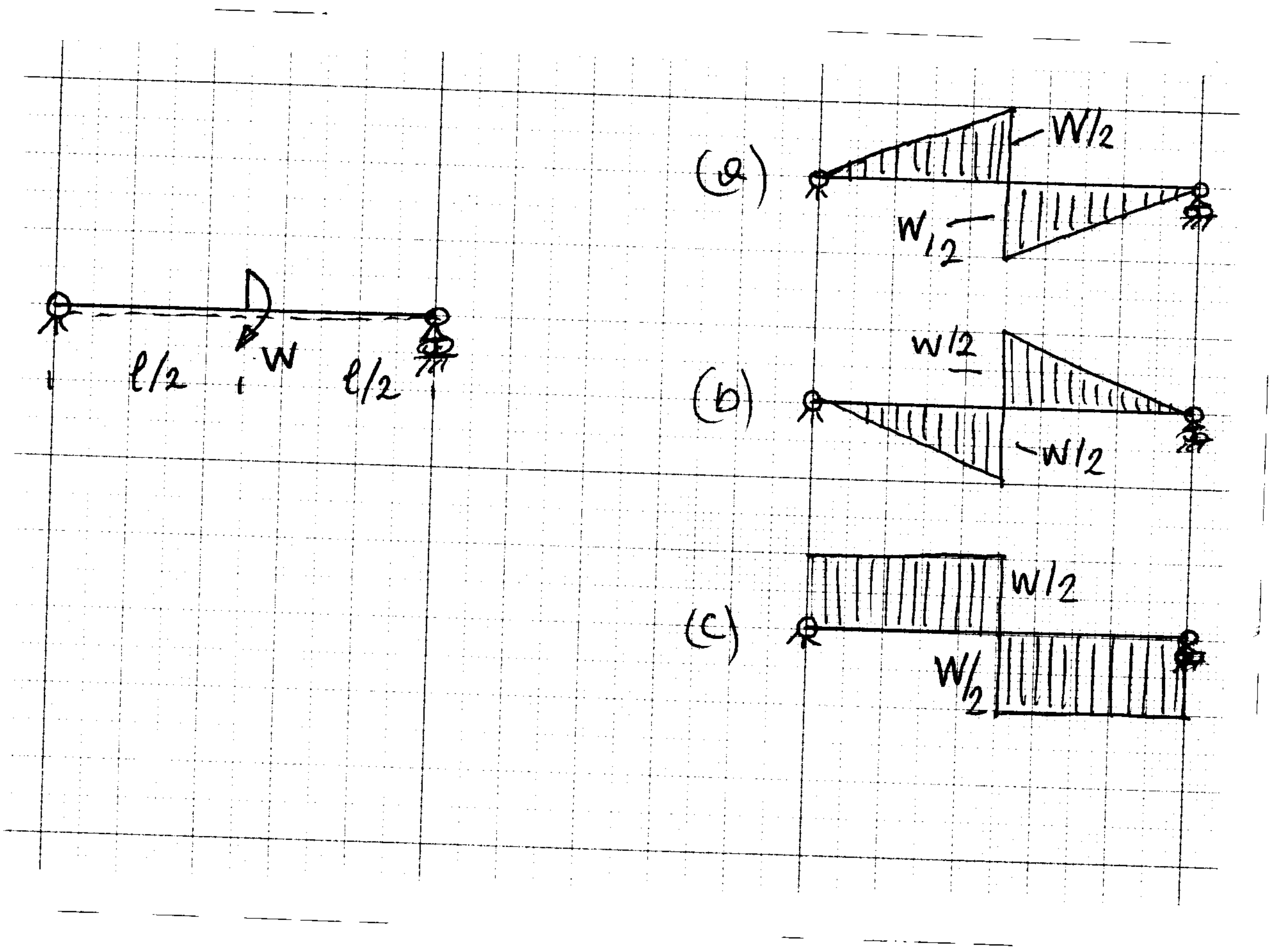
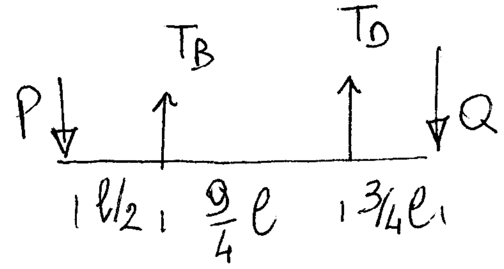


Diagramma (a) **corretto / errato** poiché ....
Diagramma (b) **corretto / errato** poiché ....
Diagramma (c) **corretto / errato** poiché ....

I



$\frac{l}{2} = 0.5\ m$

$R_y = 0 \qquad T_B + T_D = P + Q$

$M_{z(B)} = 0 \qquad P \cdot \frac{l}{2} + T_D \cdot \frac{9}{4}l - Q \cdot 3l = 0$

$$T_D = \left(3Q\cancel{l} - \frac{P}{2}\cancel{l}\right)\frac{4}{9\cancel{l}} = \frac{4}{3}Q - \frac{2}{9}P = \frac{12Q - 2P}{9}$$

$$T_B = P + Q - \frac{12Q-2P}{9} = \frac{11P - 3Q}{9}$$

Deve chiaramente risultare:

$$\begin{cases} T_B \leq T_0 \\ T_D \leq T_0 \end{cases} \qquad \left(\text{e inoltre } \begin{matrix} T_B > 0 \\ T_D > 0 \end{matrix}\right)$$

$$\frac{11P - 3Q}{9} \leq T_0 \quad \rightarrow \quad 9T_0 \geq 11P - 3Q \qquad Q \geq \frac{11}{3}P - 3T_0$$

$$\frac{12Q - 2P}{9} \leq T_0 \quad \rightarrow \quad 9T_0 \geq 12Q - 2P \qquad Q \leq \frac{3}{4}T_0 + \frac{1}{6}P$$

Deve quindi essere $\quad \frac{11}{3}P - 3T_0 \leq Q \leq \frac{3}{4}T_0 + \frac{1}{6}P$

D'altra parte dovrebbe risultare:

$T_B \geq 0 \qquad 11P - 3Q \geq 0 \qquad Q \leq \frac{11}{3}P$

$T_D \geq 0 \qquad 12Q - 2P \geq 0 \qquad Q \geq \frac{1}{6}P$

e quindi deve essere $\frac{1}{6}P \leq Q \leq \frac{11}{3}P$

Pertanto si ottengono i seguenti valori

1] $P = 7.5$ kN $\quad T_0 = 12$ kN

$-8.50\,kN \leq Q \leq 10.25\,kN \qquad 1,25\,kN \leq Q \leq 27,50\,kN$

2] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 18$ kN $\qquad$ " " "

$-26,50\,kN \leq Q \leq 14,75\,kN$

3] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 15$ kN $\qquad$ " " "

$-17,50\,kN \leq Q \leq 12,50\,kN$

4] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 13$ kN

$-11,50\,kN \leq Q \leq 11,00\,kN \qquad$ " " "

5] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 17$ kN

$-23,50\,kN \leq Q \leq 14,00\,kN \qquad$ " " "

6] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 14$ kN

$-14,50\,kN \leq Q \leq 11,75\,kN \qquad$ " " "

7] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 16$ kN

$-20,50\,kN \leq Q \leq 13,25\,kN \qquad$ " " "

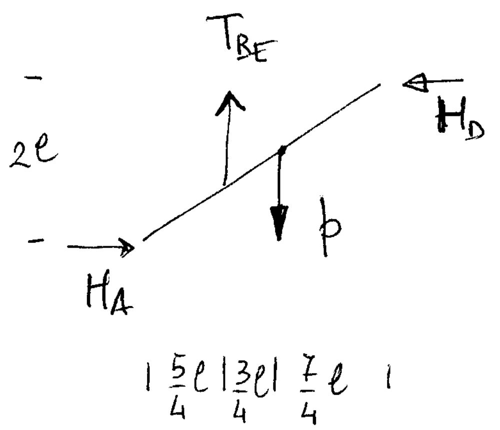
8] $P = 7,5$ kN $\quad T_0 = 19$ kN

$-29,50\,kN \leq Q \leq 15,50\,kN \qquad$ " " "

9] $P = 7.5$ kN $\quad T_0 = 20$ kN

$-32,50\,kN \leq Q \leq 16,25\,kN \qquad$ " " "

$\boxed{2}$



$R_x = 0 \quad H_A - H_D = 0 \qquad H_A = H_D$

$R_y = 0 \quad T_{BE} - p = 0 \qquad T_{BE} = p$

$M_{z(A)} = 0 \quad H_D \cdot 2l - p \cdot \frac{3}{4} l = 0 \qquad H_D = \frac{3}{8} p$

1] $p = 200$ N $\quad T_{BE} = 200$ N $\quad H_D = 75$ N

2] $p = 250$ N $\quad T_{BE} = 250$ N $\quad H_D = 93.75$ N

3] $p = 300$ N $\quad T_{BE} = 300$ N $\quad H_D = 112.50$ N

4] $p = 210$ N $\quad T_{BE} = 210$ N $\quad H_D = 78.75$ N

5] $p = 270$ N $\quad T_{BE} = 270$ N $\quad H_D = 101.25$ N

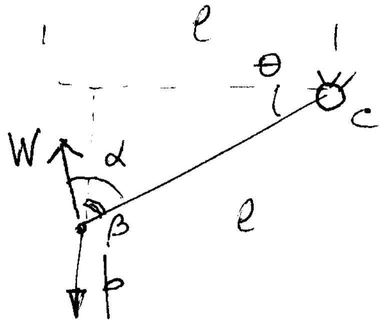
6] $p = 240$ N $\quad T_{BE} = 240$ N $\quad H_D = 90$ N

7] $p = 260$ N $\quad T_{BE} = 260$ N $\quad H_D = 97.50$ N

8] $p = 290$ N $\quad T_{BE} = 290$ N $\quad H_D = 108.75$ N

9] $p = 100$ N $\quad T_{BE} = 100$ N $\quad H_D = 37.5$ N

3



$$2\alpha+\theta=\pi \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\alpha-\beta=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta/2$$

$$M_{z(c)}=0 \qquad p\ell\cos\theta - W\cos\frac{\theta}{2}\cdot\ell\cos\theta - W\sin\frac{\theta}{2}\cdot\ell\sin\theta=0$$

$$p\ell\cos\theta - W\ell\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)=0$$

$$p\cos\theta - W\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)=0$$

$$p\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right)-W\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\cos 2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$

$$\therefore\quad 2p\cos^2\frac{\theta}{2}-W\cos\frac{\theta}{2}-1p=0$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=x \quad\Rightarrow\quad 2px^2-Wx-1p=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-\frac{W}{2p}x-\frac{1}{2}=0$$

$$x=\frac{W\pm\sqrt{W^2+8p^2}}{4p}=\frac{W}{4p}\pm\sqrt{\frac{W^2}{16p^2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{W}{p}\pm\sqrt{\frac{W^2}{p^2}+8}\right]$$

ovvero $$x=\frac{\frac{W}{2p}\pm\sqrt{\frac{W^2}{4p^2}+2}}{2}=\frac{W}{4p}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{W^2}{p^2}+8}$$

$$x=\frac{1}{4}\left[\frac{W}{p}\pm\sqrt{\frac{W^2}{p^2}+8}\right]$$

e si deve prendere la soluzione con il $+$ poiché si vuole che $\cos\frac{\theta}{2}>0$

ne segue

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\left[\frac{W}{P} + \sqrt{\frac{W^2}{P^2}+8}\right]$$

ovvero $$\frac{\theta}{2} = \arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{W}{P}+\sqrt{\frac{W^2}{P^2}+8}\right)\right\}$$

$$\theta = 2\cdot\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{W}{P}+\sqrt{\frac{W^2}{P^2}+8}\right)\right\}$$

In particolare

1] $P = 2W$ $$\theta = 2\cdot\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+8}\right)\right\} =$$
$$2\arccos\left\{\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right)\right\} = 65°.068$$

2] $P = 3W$ $$\theta = 2\cdot\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{73}\right)\right\} =$$
$$2\arccos\left\{\frac{1}{12}\left(1+\sqrt{73}\right)\right\} = 74°626$$

3] $P = 4W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{129}\right)\right\} =$$
$$2\arccos\left\{\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{129}\right)\right\} = 78°.867$$

4] $P = 5W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{201}\right)\right\} =$$
$$2\arccos\left\{\frac{1}{20}\left(1+\sqrt{201}\right)\right\} = 81°.270$$

5] $P = 6W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{24}\left(1+\sqrt{289}\right)\right\} = 82°.819$$

6] $P = 7W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{28}\left(1+\sqrt{393}\right)\right\} = 83°.901$$

7] $P = 8W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{32}\left(1+\sqrt{513}\right)\right\} = 84°.699$$

8] $P = 9W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{36}\left(1+\sqrt{649}\right)\right\} = 85°.313$$

9] $P = W$ $$\theta = 2\arccos\left\{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{9}\right)\right\} = 0°.000$$

Politecnico di Milano - Corso di Laurea in Architettura (N.O.)

Campus Mantova

CORSO DI T. E P. DI COSTRUZIONI E STRUTTURE

A.A. 2001-02

Secondo compito scritto in aula del 03.07.2002

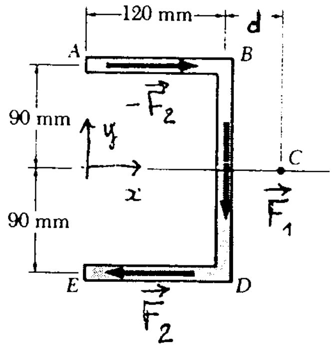
Testo 6

Nota: I risultati numerici vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..	Matricola:.......

Esercizio n.1 (6 punti)

Le sollecitazioni di taglio applicate alla sezione trasversale di un profilo metalico a forma di C possono essere rappresentate, come indicato in Figura, da una forza verticale di modulo F_1 = 810 N e da due forze orizzontali, eguali e opposte (non allineate), di modulo F_2 = 225 N.
Sostituire il sistema di forze assegnato con un unica forza **F** (della quale sono richieste le componenti F_x e F_y rispetto agli assi x e y indicati) applicata nel punto C, e determinare la distanza d di questo punto dalla linea BD.

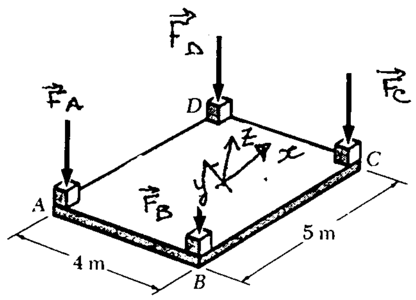


F_x =	0	N
F_y =	-810	N
d =	50	mm

6/1

Esercizio n.2 (6 punti)

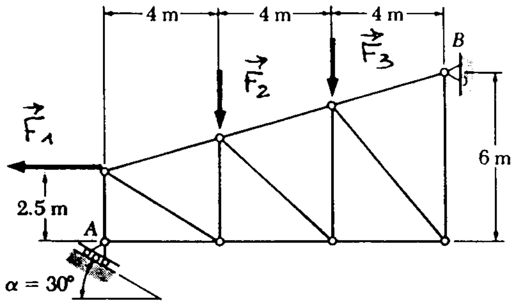
La fondazione rettangolare indicata in Figura sostiene quattro pilastri, ciascuno dei quali trasmette il carico verticale indicato. F_A = 80 kN; F_B = 120 kN; F_C = 200 kN; F_D = …160 kN
Valutare la risultante **R** e il momento $\mathbf{M}_{(O)}$ rispetto al centro della fondazione.
Determinare poi le coordinate (x_P, y_P) del punto P di applicazione della risultante rispetto al sistema di assi indicato. Si noti che il punto di applicazione della risultante è tale che $\mathbf{M}_{(P)} = \mathbf{0}$.



R = …$-560\ \vec{k}$… kN; $\mathbf{M}_{(O)}$ = …$160\ \vec{i} + 400\ \vec{j}$… kN·m;	
x_P = …0.71429… m ;	y_P = …-0.28571… m;

Esercizio n.3 (6 punti)

Determinare le reazioni vincolari della struttura reticolare indicata in Figura, da trattare come un unico corpo rigido, vincolato in A mediante un carrello con piano di scorrimento inclinato, e in B mediante una cerniera. Si tenga conto che sin 30° = ½, cos 30° = √3/2.
I moduli delle forze sono: F_1 = .24… kN, F_2 = …36.. kN, F_3 = …48.. kN.



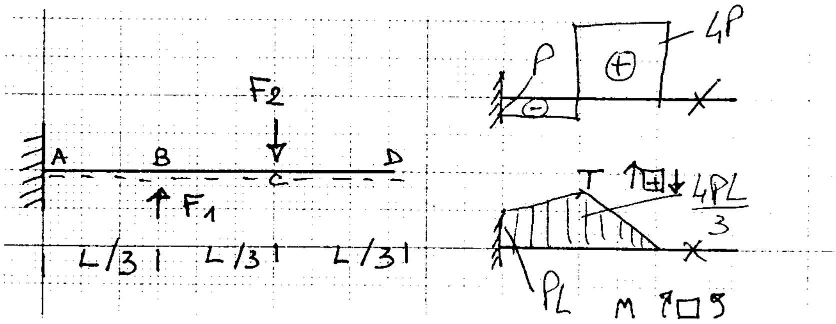
37.60770

R_A = …53.56922… kN; H_B = …-2.78461… kN; V_B = …~~[illegible]~~… kN;

6/2

Esercizio n.4 (6 punti)

Risolvere la trave indicata in Figura, con F_1 = .5P.. ; F_2 = 4P... calcolando le espressioni delle reazioni vincolari e delle azioni interne e riportare in grafico, negli spazi predisposti, queste ultime. Si ricordi che *il momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese*



V_A = ...−P......

M_A = ...+PL......

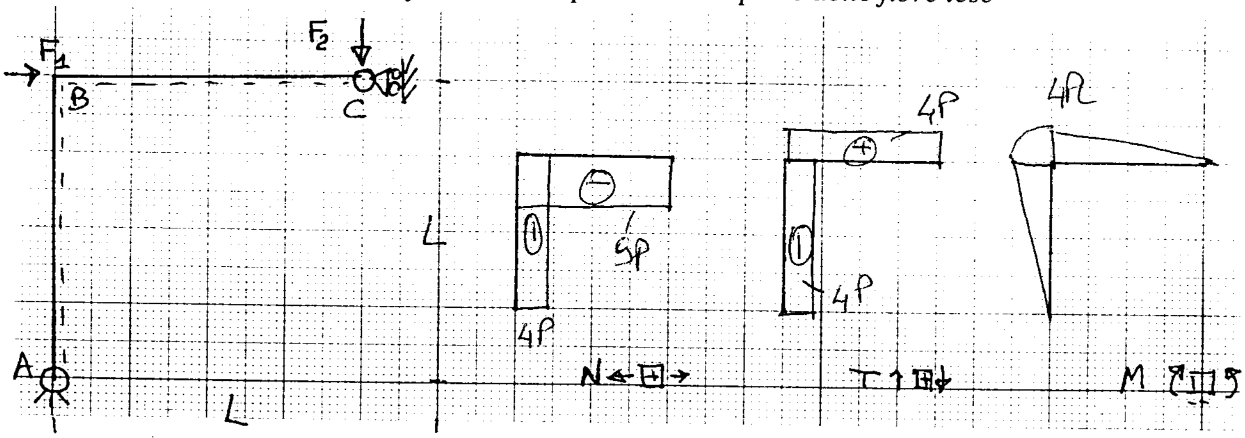
T_{AB} = ...−P...... ; T_{BC} = ...4P...... ; T_{CD} = ...0...... ;

M_{AB} = ...$-PL - Px$...... ; M_{BC} = ...$\begin{cases} -4PL/3 + 4Px' \\ -8PL/3 + 4Px \end{cases}$...... ; M_{CD} = ...0...... ;

Esercizio n.5 (6 punti)

Risolvere la struttura indicata in Figura, calcolando le espressioni delle reazioni vincolari e delle azioni interne e riportare in grafico, negli spazi predisposti, queste ultime; F_1 = 5P.. ; F_2 = .4P..

Si ricordi che *il momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese*



H_A = ...4P...... ; V_A = ...4P...... ; H_C = ...9P...... ;

N_{AB} = ...−4P...... ; T_{AB} = ...−4P...... ; M_{AB} = ...$-4Px_1$...... ;

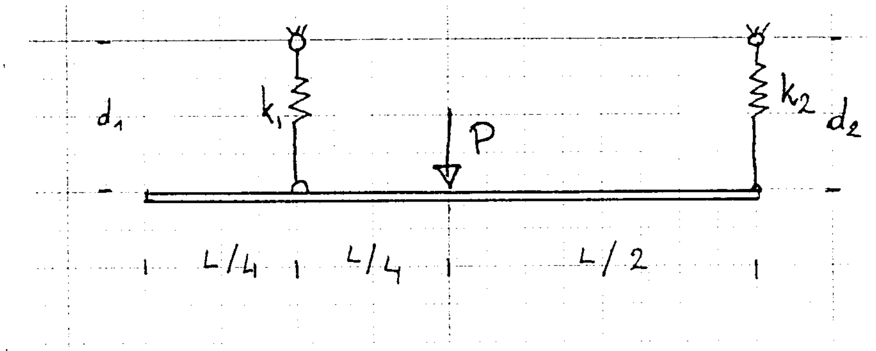
N_{BC} = ...−9P...... ; T_{BC} = ...4P...... ; M_{BC} = ...$\begin{cases} -4PL + 4Px_2 \\ -4Px_2' \end{cases}$...... ;

6/3

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

La trave rigida rappresentata in Figura è sostenuta mediante 2 molle verticali aventi lunghezza a riposo nulle e costanti elastiche rispettivamente pari a k_1 e k_2.
Si rchiede di:

1. Determinare gli allungamenti d_1 e d_2 delle due molle nel caso che si abbia $k_1 = k_2 = 5P/(1000\ L)$;
2. Determinare quale deve essere il rapporto fra le costanti elastiche k_1 / k_2 se si vuole che gli allungamenti delle due molle siano eguali, $d_1 = d_2$.



1. $d_1 = (2000/15)L = 133.333L$;	$d_2 = (1000/15)L = 66.667L$;
2. $k_1 / k_2 =$ 2	;

6/4

03.07.02

(1)

$$F_x = 0 \qquad e = \frac{\overline{BD}}{2}$$

$$F_y = -F_1$$

$$\vec{M}_{(B)} = -F_2 \cdot 2e\,\vec{k}$$

$$\vec{M}'_{(B)} = -F_1\, d\,\vec{k} \qquad \Rightarrow d = \frac{2F_2 e}{F_1}$$

(2)

$$\vec{R} = (F_A + F_B + F_C + F_D)\vec{k}$$

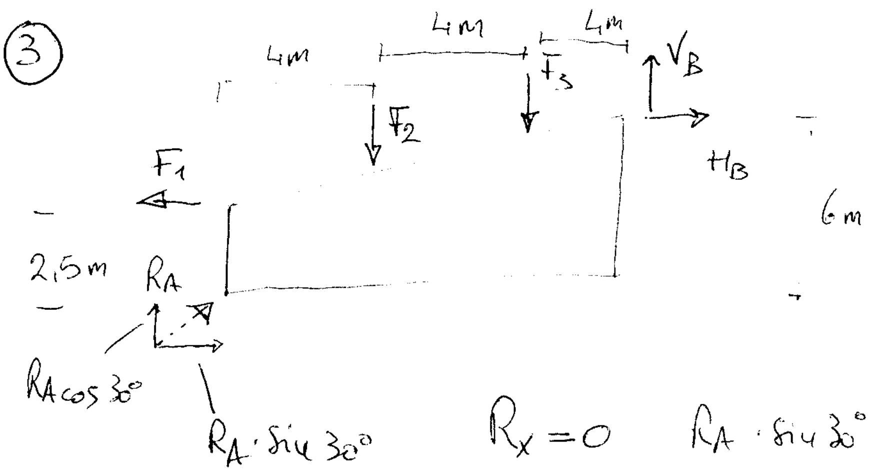
$$\vec{M}_{(O)} = \left(-F_A\, L/2 - F_B \cdot \frac{L}{2} + F_C \cdot \frac{L}{2} + F_D \cdot \frac{L}{2}\right)\vec{j} + \left[(F_B + F_C)\cdot\frac{B}{2} - (F_A + F_D)\frac{B}{2}\right]\vec{i}$$

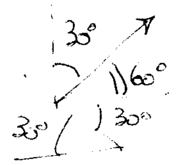
$$\vec{M}_{(O)} = \left[(F_B + F_C) - (F_A + F_D)\right]\frac{B}{2}\vec{i} + \left[(F_C + F_D) - (F_A + F_B)\right]\frac{L}{2}\vec{j}$$

$$M'_{(O)} = -R\,y_P\,\vec{i} + R\,x_P\,\vec{j}$$

$$x_P = \frac{(F_C + F_D) - (F_A + F_B)}{R}\frac{L}{2} \qquad y_P = \frac{(F_A + F_D) - (F_B + F_C)}{R}\frac{B}{2}$$

(3)





$$R_x = 0 \qquad R_A \cdot \sin 30° + H_B - F_1 = 0 \qquad \frac{1}{2}R_A + H_B = F_1$$

$$R_y = 0 \qquad R_A \cdot \cos 30° + V_B - F_2 - F_3 = 0 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}R_A + V_B = F_2 + F_3$$

$$M_{z(B)} = 0 \qquad -R_A \cos 30° \cdot 12 + R_A \sin 30° \cdot 6 - F_1 \cdot 3{,}5 + F_2 \cdot 8 + F_3 \cdot 4 = 0$$

$$-12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_A + 6 \cdot \frac{R_A}{2} = 3{,}5F_1 - 8F_2 - 4F_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} R_A + H_B = F_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} R_A + V_B = F_2 + F_3 \\ 6(1-2\sqrt{3}) R_A = 7F_1 - 16F_2 - 8F_3 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{(7F_1 - 16F_2 - 8F_3)}{6(1-2\sqrt{3})} \cdot \frac{(1+2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})} = \frac{(7F_1 - 16F_2 - 8F_3)(1+2\sqrt{3})}{6[1-12]}$$

$$R_A = \frac{(7F_1 - 16F_2 - 8F_3)(1+2\sqrt{3})}{-66} = \frac{(16F_2 + 8F_3 - 7F_1)(1+2\sqrt{3})}{66}$$

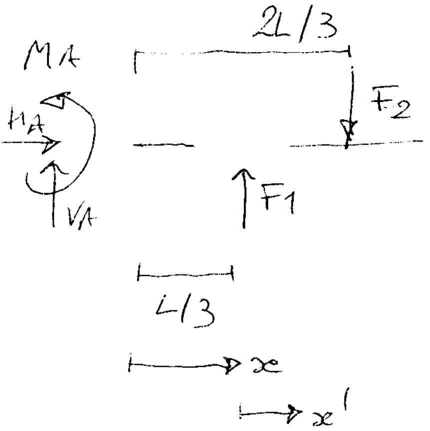
$$H_B = F_1 - \frac{R_A}{2} = F_1 - \frac{(16F_2 + 8F_3 - 7F_1)(1+2\sqrt{3})}{132}$$

$$V_B = F_2 + F_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} R_A = F_2 + F_3 - \frac{(16F_2 + 8F_3 - 7F_1)(\sqrt{3}+6)}{132}$$

(4)

$$V_A = F_2 - F_1$$

$$M_A = 2F_2 L/3 - F_1 \cdot L/3 = (2F_2 - F_1) L/3$$



$$T_{AB} = F_2 - F_1$$

$$M_{AB} = -(2F_2 - F_1) L/3 + (F_2 - F_1) x$$

$$T_{BC} = F_2$$

$$M_{BC} = -(2F_2 - F_1) L/3 + (F_2 - F_1)(L/3 + x') + F_1 x'$$

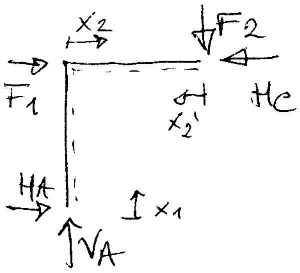
$$M_{BC} = [-(2F_2 - F_1) + (F_2 - F_1)] L/3 + F_2 x'$$

$$M_{BC} = -F_2 L/3 + F_2 x'$$

$$M_{BC} = -(2F_2 - F_1) L/3 + (F_2 - F_1) x + F_1 (x - L/3)$$

$$M_{BC} = -2F_2 L/3 + F_2 x$$

(5)



$$\begin{cases} H_A - H_C + F_1 = 0 \\ V_A - F_2 = 0 \\ (H_C - F_1) L - F_2 L = 0 \end{cases}$$

$$H_A = H_C - F_1 = F_2$$

$$V_A = F_2$$

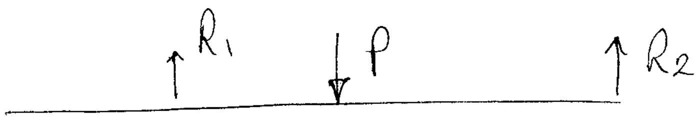
$$H_C = F_1 + F_2$$

$$N_{AB} = -F_2 \qquad N_{BC} = -(F_2 + F_1) \qquad N_{CB} = -(F_1 + F_2)$$

$$T_{AB} = -F_2 \qquad T_{BC} = F_2 \qquad T_{CB} = F_2$$

$$M_{AB} = -F_2 x_1 \qquad M_{BC} = -F_2 L + F_2 x_2 \qquad M_{CB} = -F_2 x_2'$$

(6)



$$R_y = 0 \quad \left\{ R_1 + R_2 = P \right.$$
$$M_{z(1)} = 0 \quad \left. -PL/4 + \frac{3L}{4} R_2 = 0 \right\} \Rightarrow \quad R_2 = P/3, \quad R_1 = \frac{2P}{3}$$

1.) $R_1 = k_1 d_1$

$R_2 = k_2 d_2$

1, $d_1 = \frac{R_1}{k_1} = \frac{2P/3}{k_1} = 2\cancel{P}/3 \cdot \frac{1000L}{\cancel{k}P} = \frac{2000L}{3k}$

$d_2 = \frac{R_2}{k_2} = \frac{P/3}{k_2} = \cancel{P}/3 \cdot \frac{1000L}{kP} = \frac{1000L}{3k}$

2. $d_1 = d_2$

$d_1 = \frac{R_1}{k_1} = \frac{2P/3}{k_1}$

$d_2 = \frac{R_2}{k_2} = \frac{P/3}{k_2}$

$\left\} \quad \frac{2\cancel{P/3}}{k_1} = \frac{\cancel{P/3}}{k_2} \right.$

$\frac{2}{k_1} = \frac{1}{k_2} \qquad 2k_2 = k_1 \qquad k_2 = \frac{k_1}{2} \qquad \frac{k_1}{k_2} = 2.$

Politecnico di Milano - Corso di Laurea in Architettura (N.O.)

Campus Mantova

CORSO DI T. E P. DI COSTRUZIONI E STRUTTURE

A.A. 2003-04

Prima esercitazione scritta del 01.04.2004
(da riconsegnare entro le 17:30 del 15.04.2004)

Nota: I risultati numerici (in forma frazionaria o con 3 cifre decimali) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati su fogli in formato A4 bianchi o a quadretti.

Allievo:.. Matricola:.......

Esercizio n.1 (6 punti)

Le seguenti forze, misurate in N, agiscono su una particella P:

$\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_4 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Calcolare la risultante **F** delle forze, il modulo F della risultante e tracciare il grafico di **F** nel sistema di riferimento (O, x, y, z).

$\mathbf{F}$ = ...; $F = \lvert\mathbf{F}\rvert$ = ...;

Esercizio n.2 (6 punti)

Dati i quattro vettori

$\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{A}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{A}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{A}_4 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;

trovare gli scalari m, n, p tali che $\mathbf{A}_4 = m\mathbf{A}_1 + n\mathbf{A}_2 + p\mathbf{A}_3$

m = ...; n = ...; p = ...;

Esercizio n.3 (5 punti)

Le diagonali di un parallelogramma sono date dai seguenti vettori: $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Dimostrare che il parallelogramma è un rombo e determinarne la lunghezza l dei lati, gli angoli θ_1 e θ_2 e l'area S.

l = ...; θ_1 = ...; θ_2 = ...; S = ...;

Esercizio n.4 (7 punti)

Trovare il versore **u** parallelo al piano xy (quindi con componente $u_z = 0$) e perpendicolare al vettore $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

u = ...;

Esercizio n.5 (6 punti)

Dati i tre vettori:

$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;

calcolare le seguenti quantità

(a) $|(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}|$; (b) $|\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})|$; (c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$;
(d) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$; (e) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$; (f) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$;

(a) ....;	(b) ....;	(c) ....;
(d) ....;	(e) ....;	(f) ....;

Esercizio n.6 (bonus, 3 punti)

Si considerino due generici vettori bidimensionali $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}$.
Si dimostri:

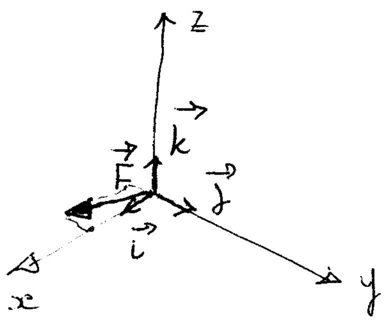
(a) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$; (b) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$;

Perché $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$:

Perché $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$:

I ESERCITAZIONE SCRITTA 01.04.04

(1)
$$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$$
$$\vec{F}_2 = -5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{F}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{F}_4 = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$\vec{F} = (2-5+1+4)\vec{i} + (3+1-2-3)\vec{j} + (-5+3+4-2)\vec{k}$$
$$\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} + 0\cdot\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} \quad N$$
$$|\vec{F}| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5} = 2.236 \quad N$$



(2)
$$\vec{A}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{A}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{A}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{A}_4 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

se $\vec{A}_4 = m\vec{A}_1 + n\vec{A}_2 + p\vec{A}_3$

allora
$$3 = 2m + n - 2p$$
$$2 = -m + 3n + p$$
$$5 = m - 2n - 3p$$

ne segue:
$$m = 2n + 3p + 5$$
$$2 = -2n - 3p - 5 + 3n + p \Rightarrow n = 2p + 7$$
$$3 = 4n + 6p + 10 + n - 2p \Rightarrow 3 = 5n + 4p + 10$$
$$-7 = 10p + 35 + 4p \Rightarrow p = -\frac{42}{14}$$

$\therefore$ $p = -3$; $n = -6 + 7 = 1$; $m = 2 - 9 + 5 = -2$

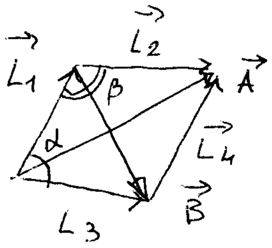
pertanto $m = -2$; $n = 1$; $p = -3$

③ $\vec{d}_1 = \vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$

$d_2 = \vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

Se è un rombo, $\vec{A}$ e $\vec{B}$ devono essere $\perp \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0$

$\vec{A} \times \vec{B} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + (-1)(-6) = 6 - 12 + 6 = 0$



$\vec{L}_2 = \vec{L}_3$

$\vec{L}_1 = \vec{L}_4$

$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{A}$

$\vec{L}_1 - \vec{L}_3 = \vec{B}$

$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{A}$
$\vec{L}_1 - \vec{L}_2 = \vec{B}$
$\Rightarrow \begin{cases} 2\vec{L}_1 = \vec{A} + \vec{B} \\ 2\vec{L}_2 = \vec{A} - \vec{B} \end{cases}$

$\vec{L}_1 = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{5}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{7}{2}\vec{k}$

$\vec{L}_2 = \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{7}{2}\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$

$|\vec{L}_1| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 1 + 49} = \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$|\vec{L}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 49 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = L = 4.330$

$\vec{L}_1 \times \vec{L}_3 = |\vec{L}_1||\vec{L}_2| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{L}_1 \times \vec{L}_3}{L^2}$

$\vec{L}_1 \times \vec{L}_3 = \vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} - \frac{35}{4} = -\frac{23}{4}$

$\cos\alpha = \frac{-\frac{23}{4}}{\frac{75}{4}} = -\frac{23}{75} = -0.30667$ $\quad \alpha = \arccos\left(\frac{-23}{75}\right) = 107^\circ.858$

$-\vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = |\vec{L}_1||\vec{L}_2| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{-\vec{L}_1 \times \vec{L}_2}{L^2}$

$-\vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = -\frac{5}{4} - \frac{7}{4} + \frac{35}{4} = +\frac{23}{4}$ $\quad \beta = \arccos$

$\cos\beta = \frac{\frac{23}{4}}{\frac{75}{4}} = \frac{23}{75} = +0.30667$ $\quad \beta = \arccos\left(\frac{23}{75}\right) = 72^\circ.142$

Si ha quindi $\theta_1 = \beta = 72^\circ.142$ e $\theta_2 = \alpha = 107^\circ.858$

$S = |\vec{L}_3 \wedge \vec{L}_1|$

$$\vec{L}_3 \wedge \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \wedge \vec{L}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} -7/2 & 5/2 \\ -1/2 & -7/2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 5/2 & -7/2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1/2 & -7/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{49}{4} + \frac{5}{4}\right)\vec{i} - \left(-\frac{7}{4} - \frac{25}{4}\right)\vec{j} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{35}{4}\right)$$

$$= \frac{54}{4}\vec{i} + \frac{32}{4}\vec{j} + \frac{34}{4}\vec{k} = \frac{27}{2}\vec{i} + \frac{16}{2}\vec{j} + \frac{17}{2}\vec{k}$$

$$S = |\vec{L}_3 \wedge \vec{L}_1| = \frac{1}{2}\sqrt{729 + 256 + 289} = \frac{1}{2}\sqrt{1274} = 17{,}847$$

(4) $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$

Con $\sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1$ $\qquad u_y^2 = 1 - u_x^2 \qquad u_y = \pm\sqrt{1-u_x^2}$

$\vec{u} = u_x \vec{i} \pm \sqrt{1-u_x}\,\vec{j}$

$\vec{u} \perp \vec{A} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{A} = 0 \qquad \vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$u_x A_x + u_y A_y + 0 . A_z = 0$

$4u_x - 3u_y = 0$

$4u_x \mp 3\sqrt{1-u_x^2} = 0 \qquad 16 u_x^2 = 9(1-u_x^2) \qquad 25 u_x^2 = 9$

$u_x^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow u_x = \pm\frac{3}{5}$

Se $u_x = +\frac{3}{5}$ $\quad u_y = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

Se $u_x = -\frac{3}{5}$ $\quad u_y = -\frac{4}{5}$ $\quad \vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

(5) $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
$\vec{C} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2+3) - \vec{j}(5) + \vec{k}(5) = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{B}\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(5) = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

b.

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-10+9) - \vec{j}(5+3) + \vec{k}(3+2)$$

$$= -\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})| = \sqrt{1+64+25} = \sqrt{90} = 9.486$$

a. $$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(10-15) - \vec{j}(-15) + \vec{k}(15+5)$$

$$= -5\vec{i} + 15\vec{j} + 20\vec{k}$$

$$|(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}| = \sqrt{25+225+400} = \sqrt{650} = 25.495$$

c. $\vec{A}\times(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k})\wedge(\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 1 - 6 - 15 = -20$

d. $(\vec{A}\wedge\vec{B})\times\vec{C} = (5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})\wedge(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = 5 - 15 - 10 = -20$

e. $$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}(-40) - \vec{j}(20) + \vec{k}(20)$$

$$= -40\vec{i} - 20\vec{j} + 20\vec{k}$$

f. $(\vec{A}\wedge\vec{B})(\vec{B}\times\vec{C}) = (5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})(2+3+2) = 35\vec{i} - 35\vec{j} + 35\vec{k}$

ESERCIZIO N. 6

Dati: 2 generici vettori bidimensionali: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$ e $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$

? = dimostrare che
$$|\vec{A}+\vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$$
$$|\vec{A}-\vec{B}| \geq |\vec{A}| - |\vec{B}|$$

- $|\vec{A}+\vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

$$|(A_x+B_x)\vec{i} + (A_y+B_y)\vec{j}| \leq \sqrt{A_x^2+A_y^2} + \sqrt{B_x^2+B_y^2}$$
$$\sqrt{(A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2} \leq \sqrt{A_x^2+A_y^2} + \sqrt{B_x^2+B_y^2}$$

Posso elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione in quanto il primo membro è una radice, quindi quantità sicuramente maggiore di zero, mentre il secondo membro è somma di radici, quindi quantità maggiore di zero.

$$\cancel{A_x^2} + \cancel{B_x^2} + 2A_xB_x + \cancel{A_y^2} + \cancel{B_y^2} + 2A_yB_y \leq \cancel{A_x^2} + \cancel{A_y^2} + \cancel{B_x^2} + \cancel{B_y^2} + 2\sqrt{(A_x^2+A_y^2)\cdot(B_x^2+B_y^2)}$$

$$2A_xB_x + 2A_yB_y \leq 2\sqrt{A_x^2B_x^2 + A_x^2B_y^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2 + B_y^2}$$

Se il primo membro della disequazione $(2A_xB_x + 2A_yB_y)$ è una quantità negativa o uguale a zero, la disequazione è <u>VERIFICATA</u>.
Se la suddetta quantità è maggiore o uguale a zero, posso elevare al quadrato e continuare l'operazione.

Elevo entrambi i membri al quadrato:

$$\cancel{4A_x^2B_x^2} + \cancel{4A_y^2B_y^2} + 8A_xA_yB_xB_y \leq \cancel{4A_x^2B_x^2} + 4A_x^2B_y^2 + 4A_y^2B_x^2 + \cancel{4A_y^2B_y^2}$$

$$4A_x^2B_y^2 + 4A_y^2B_x^2 - 8A_xA_yB_xB_y \geq 0$$

$$(2A_xB_y - 2A_yB_x)^2 \geq 0 \qquad \boxed{\text{VERIFICATO}}$$

in quanto un quadrato è sicuramente e sempre maggiore o uguale a zero.

- $|\vec{A} - \vec{B}| \geq |\vec{A}| - |\vec{B}|$

$$|(A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j}| \geq \sqrt{A_x^2 + A_y^2} - \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} \geq \sqrt{A_x^2 + A_y^2} - \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

Posso elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione in quanto il primo membro è una radice, quindi quantità sicuramente maggiore di zero, mentre il secondo membro è differenza di radici, quantità che può anche essere minore di zero.

$$\cancel{A_x^2} + \cancel{B_x^2} - 2A_xB_x + \cancel{A_y^2} + \cancel{B_y^2} - 2A_yB_y \geq \cancel{A_x^2} + \cancel{A_y^2} + \cancel{B_x^2} + \cancel{B_y^2} - 2\sqrt{(A_x^2 + A_y^2)(B_x^2 + B_y^2)}$$

$$-2A_xB_x - 2A_yB_y \geq -2\sqrt{(A_x^2 + A_y^2)(B_x^2 + B_y^2)}$$

$$2A_xB_x + 2A_yB_y \leq +2\sqrt{A_x^2B_x^2 + A_x^2B_y^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2B_y^2}$$

Disequazione uguale al caso precedente; procedo elevando entrambi i membri al quadrato:

$$\cancel{4A_x^2B_x^2} + \cancel{4A_y^2B_y^2} + 8A_xA_yB_xB_y \leq \cancel{4A_x^2B_x^2} + 4A_x^2B_y^2 + 4A_y^2B_x^2 + \cancel{4A_y^2B_y^2}$$

$$4A_x^2B_y^2 + 4A_y^2B_x^2 - 8A_xA_yB_xB_y \geq 0$$

$$(2A_xB_y - 2A_yB_x)^2 \geq 0 \qquad \boxed{\text{VERIFICATO}}$$

in quanto un quadrato è sicuramente e sempre maggiore o uguale a zero.

Politecnico di Milano - Corso di Laurea in Architettura (N.O.)

Campus Mantova

CORSO DI T. E P. DI COSTRUZIONI E STRUTTURE

A.A. 2003-04

I Prova in Itinere – 29.04.2004

Nota: I risultati numerici (in forma frazionaria o con 3 cifre decimali) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti.

Allievo:.. Matricola:.......

<u>FILA 1</u>

Esercizio n.1 (6 punti)

Due lati di un triangolo sono formati dai vettori:

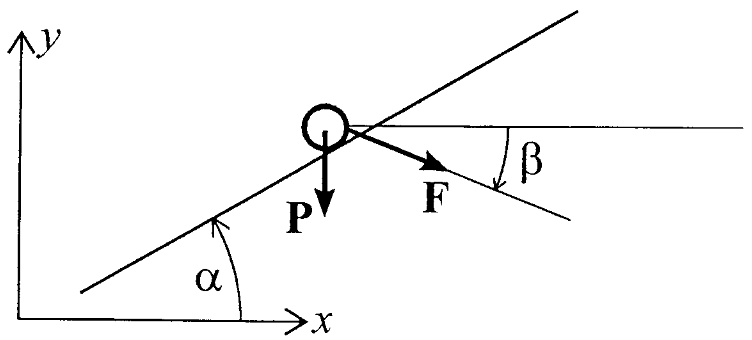
$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}; \qquad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k};$$

Determinare i coseni degli angoli α, β e γ che i tre lati formano tra loro

$\cos\alpha =$ ....; $\cos\beta =$ ....; $\cos\gamma =$ ....

Esercizio n.2 (8 punti)

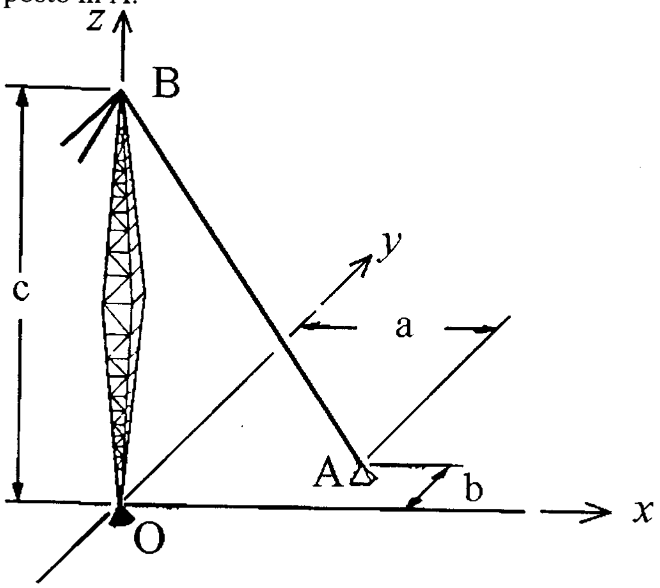
Una particella di massa m = 300 kg (quindi soggetta alla forza peso P = mg) è posta su un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ su cui scorre senza attrito.
La particella è sollecitata da una forza **F** inclinata di un angolo β rispetto alla direzione orizzontale x. Calcolare, al variare dell'angolo β, l'espressione del modulo F e l'espressione vettoriale **F**, della forza necessaria per garantire l'equilibrio della particella. Calcolare inoltre l'angolo β_{min} per cui il modulo della forza F risulta minimo.



F = ...; **F** = ...; β_{min} = ...

Esercizio n.3 (8 punti)

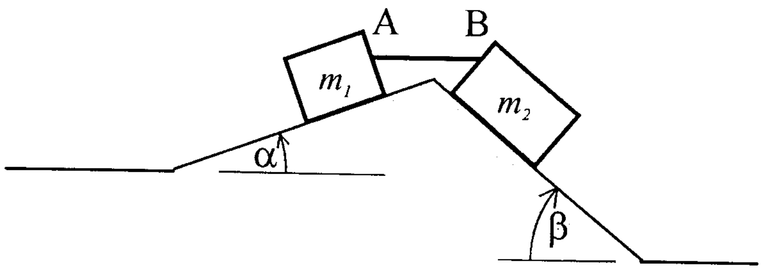
La gru in figura è ancorata per mezzo di un cavo fissato nei punti A e B.
La tensione del cavo vale $T = 400$ N.
Le dimensioni geometriche del problema sono: a = 12 m; b = 5 m; c = 20 m.
Determinare i coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ tra il cavo AB e gli assi x, y, z e verificare che $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
Determinare il modulo F e l'espressione vettoriale **F** della forza agente sull'ancoraggio posto in A.



$\cos\alpha =$ ....;	$\cos\beta =$ ....;	$\cos\gamma =$ ....
$\cos^2\alpha =$ ....;	$\cos^2\beta =$ ....;	$\cos^2\gamma =$ ....
$F =$ ....;	**F** = ...;	

Esercizio n.4 (7 punti)

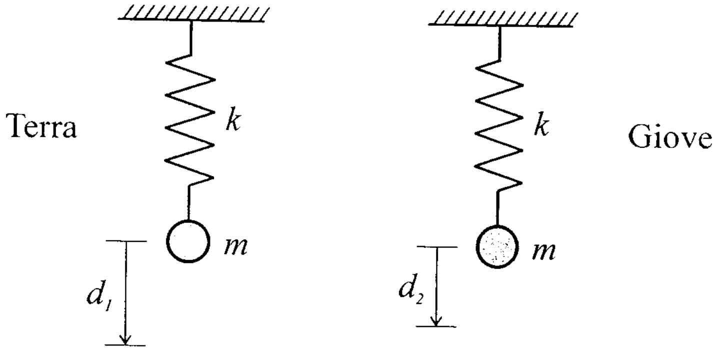
I due blocchi in figura, soggetti al proprio peso, sono posizionati su due piani inclinati su cui possono scorrere senza attrito.
Le inclinazioni dei due piani sono: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. I blocchi sono mantenuti in equilibrio dalla fune AB che risulta in posizione orizzontale.
Il primo blocco ha massa $m_1 = 100$ kg. Determinare il valore della tensione T nel cavo e la massa m_2 del secondo blocco.



T = ...; m_2 = ...

Esercizio n.5 (3 punti)

Si consideri il sistema in figura composto da una massa m e da una molla di costante elastica k.



Sapendo che la massa della particella vale $m = 120$ kg e che sulla terra lo spostamento vale $d_1 = 0.2$ m, calcolare lo spostamento d_2 che si avrebbe sul pianeta Giove e la costante della molla k.
Si ricorda che l'accelerazione di gravità g_i di un pianeta è data da:

$$g_i = h\frac{M_i}{R_i^2}$$

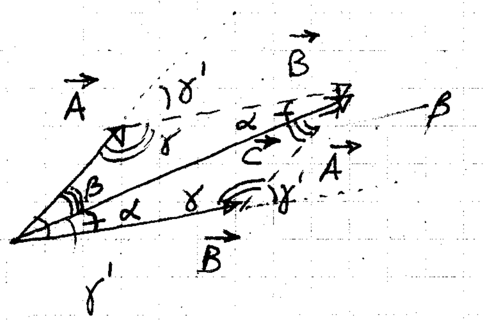
dove h è la costante di gravitazione universale, M_i è la massa del pianeta e R_i il suo raggio.
Il rapporto tra la massa M_2 di Giove e quella M_1 della Terra e il rapporto tra il raggio R_2 di Giove e quello R_1 della Terra valgono rispettivamente:

$$\frac{M_2}{M_1} = 320; \qquad \frac{R_2}{R_1} = 11.$$

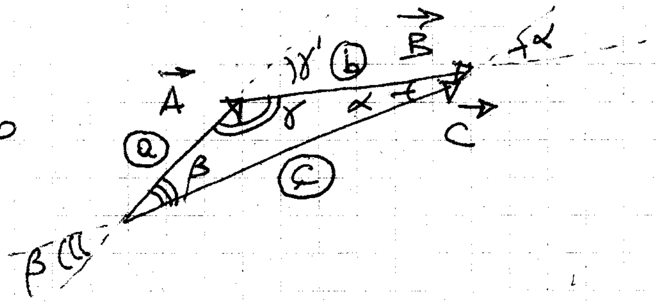
d_2 ....; k = ...;

I PROVA SCRITTA DEL 29.04.04

①



ovvero



Si ha: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ (vedi figure)

α = angolo compreso fra i lati ⓑ e ⓒ

β = angolo compreso fra i lati ⓐ e ⓒ

γ = angolo compreso fra i lati ⓐ e ⓑ

Si osserva che α = angolo compreso fra $\vec{B}$ e $\vec{C}$

β = angolo compreso fra $\vec{A}$ e $\vec{C}$

γ' = angolo compreso fra $\vec{A}$ e $\vec{B}$

D'altra parte $\gamma + \gamma' = \pi$, per cui: $\gamma = \pi - \gamma'$

$$\cos\gamma = \cos(\pi - \gamma') = \underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\gamma' + \underbrace{\sin\pi}_{0}\sin\gamma' = -\cos\gamma'$$

Si considera poi che

$$\vec{B} \times \vec{C} = |\vec{B}||\vec{C}| \cos\alpha \quad \therefore \quad \cos\alpha = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B}||\vec{C}|}$$

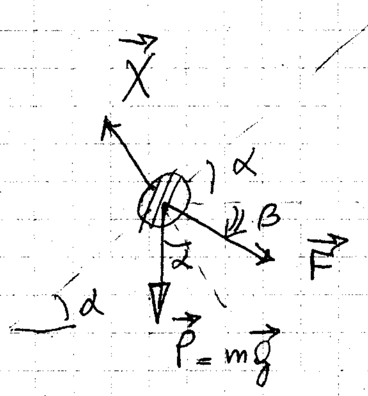
$$\vec{A} \times \vec{C} = |\vec{A}||\vec{C}| \cos\beta \quad \therefore \quad \cos\beta = \frac{\vec{A} \times \vec{C}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\gamma' \quad \therefore \quad \cos\gamma' = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\gamma = -\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Testo	$\vec{C}$	$\lvert\vec{A}\rvert$	$\lvert\vec{B}\rvert$	$\lvert\vec{C}\rvert$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
1	$7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$	7	$\sqrt{26}$	$\sqrt{75}$	$\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$	$\frac{7}{5\sqrt{3}}$	0
		7.000	5.099	8.660	0.589	0.808	0.000
2	$5\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{59}$	$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{59}}$	$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{59}}$	0
		6,708	3,742	7,681	0,487	0,873	0.000
3	$5\vec{i}+4\vec{j}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{41}$	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}$	$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{41}}$	0
		5,916	2.449	6,403	0,383	0,924	0,000
4	$3\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{41}$	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}$	$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{41}}$	0
		5,916	2,449	6,403	0,383	0,924	0,000
5	$\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k}$	$\sqrt{53}$	3	$\sqrt{62}$	$\frac{3}{\sqrt{62}}$	$\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{62}}$	0
		7.280	3.000	7.874	0,381	0,925	0,000
6	$5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$	$\sqrt{43}$	$\sqrt{22}$	$\sqrt{65}$	$\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{65}}$	$\frac{\sqrt{43}}{\sqrt{65}}$	0
		6.557	4.690	8.062	0.582	0,813	0.000

② Diagramma di corpo libero



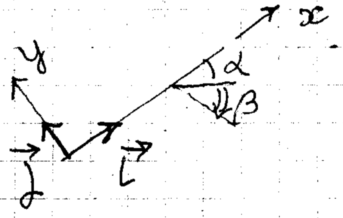
Per equilibrio:

$$\vec R = \vec 0$$

$$\vec F + \vec P + \vec X = \vec 0$$

Risoluzione per componenti

a) con asse x diretto come il piano inclinato:



$\vec F = F\cos(\alpha+\beta)\,\vec i - F\sin(\alpha+\beta)\,\vec j$ $\qquad F = |\vec F|$

$\vec X = X\,\vec j$ $\qquad X = |\vec X|$

$\vec P = -mg\sin\alpha\,\vec i - mg\cos\alpha\,\vec j$ $\qquad g = |\vec g|$

$R_x = 0 \quad -mg\sin\alpha + F\cos(\alpha+\beta) = 0$ [eq. pura]

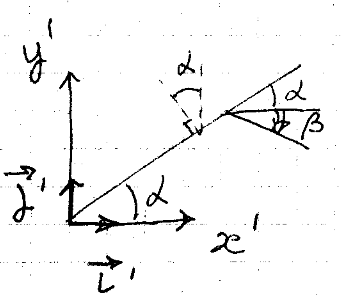
$R_y = 0 \quad -mg\cos\alpha + X - F\sin(\alpha+\beta) = 0$ [contiene reaz. vinc.]

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \quad [*] \qquad X = mg\cos\alpha + F\sin(\alpha+\beta) = mg\left[\cos\alpha + \sin\alpha\tan(\alpha+\beta)\right]$$

F deve essere > 0; pertanto per $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ deve essere, limitandosi a considerare $\alpha+\beta \ge 0$: $\underline{0 \le \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}}$ (escluso l'estremo!)

D'altra parte, per $0 \le \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ è $\cos(\alpha+\beta) \le 1$, dove il segno $=$ vale solo per $\alpha+\beta = 0$. Segue immediatamente che $F_{min} = F|_{\beta=-\alpha} = mg\sin\alpha \Rightarrow \beta_{min} = -\alpha$ in quanto diversamente il numeratore $mg\sin\alpha$ nella [*] viene diviso per un numero positivo inferiore a 1, dando luogo a un valore di $F > F_{min}$.

b) con asse x' orizzontale (scelta meno vantaggiosa)



$$\vec{F} = F\cos\beta\,\vec{i}' - F\sin\beta\,\vec{j}' \qquad F = |\vec{F}|$$
$$\vec{X} = -X\sin\alpha\,\vec{i}' + X\cos\alpha\,\vec{j}' \qquad X = |\vec{X}|$$
$$\vec{P} = -mg\,\vec{j}' \qquad g = |\vec{g}|$$

$$\left.\begin{array}{ll} R_{x'} = 0 & F\cos\beta - X\sin\alpha = 0 \\ R_{y'} = 0 & -F\sin\beta + X\cos\alpha - mg = 0 \end{array}\right\} \text{ nessuna eq. è facile!}$$

$$X = \frac{mg}{\cos\alpha} + \frac{F\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$F\cos\beta - (mg + F\sin\beta)\tan\alpha = 0$$

$$F(\cos\beta - \sin\beta\tan\alpha) = mg\tan\alpha$$

$$F = \frac{mg\tan\alpha}{\cos\beta - \sin\beta\tan\alpha} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\left(\cos\beta - \sin\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$$

dove l'ultima espressione si ricava ricordando che $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Si è così ritrovata la [*] dalla quale si riconosce ancora che $F_{min} = mg\sin\alpha$, corrispondente a $\beta_{min} = -\alpha$.

③ $\overrightarrow{B-A} = (B-A)_x \vec{i} + (B-A)_y \vec{j} + (B-A)_z \vec{k}$

$B \equiv (0, 0, c)$

$A \equiv (a, b, 0)$

$$\overrightarrow{B-A} = -a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{B-A}| = \left[(\overrightarrow{B-A}) \times (\overrightarrow{B-A})\right]^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{B-A}) \times \vec{i}}{|\overrightarrow{B-A}|} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{(\overrightarrow{B-A}) \times \vec{j}}{|\overrightarrow{B-A}|} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

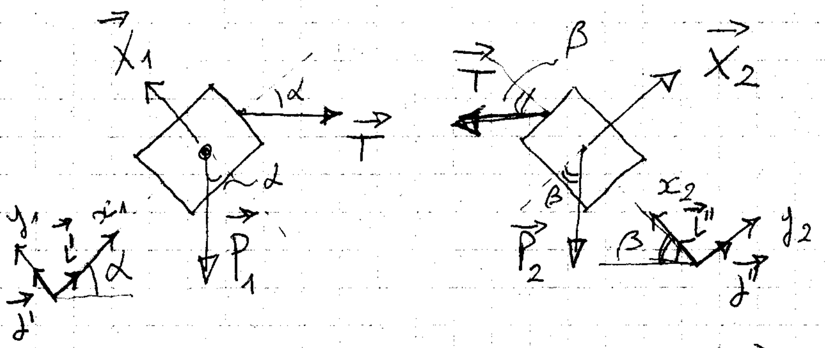
$$\cos\gamma = \frac{(\overrightarrow{B-A}) \times \vec{k}}{|\overrightarrow{B-A}|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1.$$

$$\vec{T}_{BA} = T\,\frac{\overrightarrow{B-A}}{|\overrightarrow{B-A}|} = T\,(-a\vec{i} - b\vec{j} + c\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\vec{F} = \vec{T}_{BA} \quad \Rightarrow \quad F = |\vec{F}| = T$$

④ Diagrammi di corpo libero



$X_1 = |\vec{X}_1|$; $g = |\vec{g}|$;

$X_2 = |\vec{X}_2|$; $T = |\vec{T}|$

Per il blocco ① si ha: $\vec{X}_1 + \vec{T} + \vec{P}_1 = \vec{0}$

$\vec{X}_1 = X_1 \vec{j}'$; $\vec{P}_1 = -m_1 g \sin\alpha\, \vec{i}' - m_1 g \cos\alpha\, \vec{j}'$

$\vec{T} = T\cos\alpha\, \vec{i}' - T\sin\alpha\, \vec{j}'$

$$\begin{cases} R_{x_1} = 0 & -m_1 g \sin\alpha + T\cos\alpha = 0 \quad [*] \quad [\text{eq. pura}] \\ R_{y_1} = 0 & X_1 - T\sin\alpha - m_1 g\cos\alpha = 0 \quad [\text{eq. non pura}] \end{cases}$$

Dalla [*] segue immediatamente

$$T = m_1 g \tan\alpha \qquad [\circ]$$

Per il blocco 2 si ha invece: $\vec{X}_2 + \vec{T} + \vec{P}_2 = \vec{0}$

$$\vec{X}_2 = X_2 \vec{j}''$$
$$\vec{P}_2 = -m_2 g \sin\beta\, \vec{i}'' - m_2 g\cos\beta\, \vec{j}''$$
$$\vec{T} = T\cos\beta\, \vec{i}'' - T\sin\beta\, \vec{j}''$$

$$\begin{cases} R_{x_2} = 0 & -m_2 g \sin\beta + T\cos\beta = 0 \quad [**] \quad [\text{eq. pura}] \\ R_{y_2} = 0 & X_2 - m_2 g\cos\beta - T\sin\beta = 0 \quad [\text{eq. non pura}] \end{cases}$$

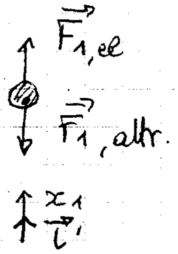
Dalla [**] si ottiene:

$$T = m_2 g \tan\beta \qquad [\circ\circ]$$

La [∘] permette di determinare il valore di T; la [∘∘], noto T determina il valore di m_2: si ha infatti

$$m_1 \cancel{g} \tan\alpha = m_2 \cancel{g} \tan\beta \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}.$$

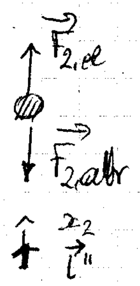
(5) Nella situazione 1 si ha: $\vec{F}_{1,el} + \vec{F}_{1,altr} = \vec{0}$



$$\vec{F}_{1,el} = k d_1 \vec{i}'$$
$$\vec{F}_{1,altr} = -m g_1 \vec{i}'$$

$$\Rightarrow k d_1 - m g_1 = 0$$
$$k = +m \frac{g_1}{d_1}$$

Nella situazione 2 si ha: $\vec{F}_{2,el} + \vec{F}_{2,altr} = \vec{0}$



$$\vec{F}_{2,el} = k d_2 \vec{i}''$$
$$\vec{F}_{2,altr} = -m g_2 \vec{i}''$$

$$\Rightarrow k d_2 - m g_2 = 0$$

$$d_2 = \frac{m g_2}{k} = \frac{\cancel{m} g_2}{\cancel{m} g_1} d_1$$
$$d_2 = \frac{g_2}{g_1} d_1$$

(6)

D'altra parte è noto che

$$g_1 = k \frac{M_1}{R_1^2} \qquad g_2 = k \frac{M_2}{R_2^2}$$

pertanto $$\frac{g_2}{g_1} = \frac{\cancel{k} \frac{M_2}{R_2^2}}{\cancel{k} \frac{M_1}{R_1^2}} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{\frac{M_2}{M_1}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

Dunque $$d_2 = d_1 \frac{\frac{M_2}{M_1}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

Esercizio 1		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
A_x		3	3	3	1	-1	3
A_y		6	6	5	5	6	-5
A_z		-2	0	-1	3	-4	3
B_x		4	2	2	2	2	2
B_y		-1	-1	-1	-1	-1	3
B_z		3	3	1	1	-2	3
C_x		**7**	**5**	**5**	**3**	**1**	**5**
C_y		**5**	**5**	**4**	**4**	**5**	**-2**
C_z		**1**	**3**	**0**	**4**	**-6**	**6**
A^2		**49**	**45**	**35**	**35**	**53**	**43**
B^2		**26**	**14**	**6**	**6**	**9**	**22**
C^2		**75**	**59**	**41**	**41**	**62**	**65**
A×B		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
B×C		**26**	**14**	**6**	**6**	**9**	**22**
A×C		**49**	**45**	**35**	**35**	**53**	**43**
cos α		**0.58878**	**0.48712**	**0.38255**	**0.38255**	**0.38100**	**0.58177**
cos β		**0.80829**	**0.87333**	**0.92394**	**0.92394**	**0.92457**	**0.81335**
cos γ		**0.00000**	**0.00000**	**0.00000**	**0.00000**	**0.00000**	**0.00000**

Esercizio 2		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
m	[kg]	300	200	400	100	500	600
α	[°]	30	45	60	45	30	60
mg	**[N]**	**2943**	**1962**	**3924**	**981**	**4905**	**5886**
β_min	**[°]**	**-30**	**-45**	**-60**	**-45**	**-30**	**-60**

Esercizio 3		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
a	[m]	12	3	12	6	16	12
b	[m]	5	4	9	8	12	5
c	[m]	20	12	15	20	12	15
T	[N]	400	500	200	120	600	300
cos α		**-0.50307**	**-0.23077**	**-0.56569**	**-0.26833**	**-0.68599**	**-0.60455**
cos β		**-0.20961**	**-0.30769**	**-0.42426**	**-0.35777**	**-0.51450**	**-0.25190**
cos γ		**0.83844**	**0.92308**	**0.70711**	**0.89443**	**0.51450**	**0.75569**
F_x	**[N]**	**-201.22647**	**-115.38462**	**-113.13708**	**-32.19938**	**-411.59660**	**-181.36538**
F_y	**[N]**	**-83.84436**	**-153.84615**	**-84.85281**	**-42.93251**	**-308.69745**	**-75.56891**
F_z	**[N]**	**335.37745**	**461.53846**	**141.42136**	**107.33126**	**308.69745**	**226.70672**

Esercizio 4		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
m_1	[kg]	100	300	200	400	200	500
α	[°]	45	30	30	45	30	30
β	[°]	60	60	45	45	45	60
T	**[N]**	**981.000**	**1699.142**	**1132.761**	**3924.000**	**1132.761**	**2831.903**
m_2	**[kg]**	**57.735**	**100.000**	**115.470**	**400.000**	**115.470**	**166.667**

Esercizio 5		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
m	[kg]	120	130	150	80	60	40
d_1	[m]	0.2	0.1	0.4	0.6	0.4	0.2
g_1	[m/s^2]	9.81	9.81	9.81	9.81	9.81	9.81
[M_2/M_1]	[-]	320	320	320	320	320	320
[R_2/R_1]	[-]	11	11	11	11	11	11
k	[N/m]	**5886.000**	**12753.000**	**3678.750**	**1308.000**	**1471.500**	**1962.000**
d_2	[m]	**0.529**	**0.264**	**1.058**	**1.587**	**1.058**	**0.529**

Politecnico di Milano - Corso di Laurea in Architettura (N.O.)

Campus Mantova

CORSO DI T. E P. DI COSTRUZIONI E STRUTTURE
A.A. 2003-04

I Prova in Itinere – 03.05.2004

Nota: I risultati numerici (in forma frazionaria o con 3 cifre decimali) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti.

Allievo:.. Matricola:.......

FILA 1

Esercizio n.1 (6 punti)

Dati i due vettori

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k};$$

trovare un vettore **C** di modulo 5 perpendicolare sia ad **A** che a **B**
Si calcolino poi i vettori

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}; \qquad \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}.$$

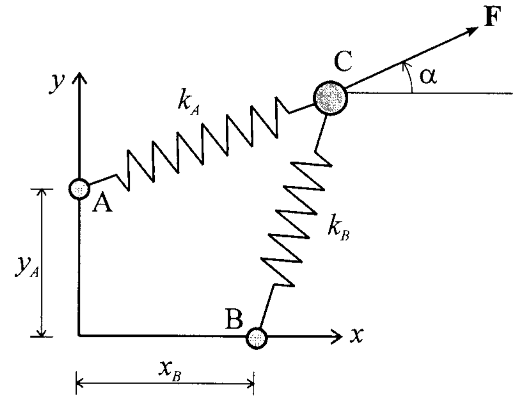
Determinare i coseni dell'angolo α tra i vettori **B** e **D** e dell'angolo β tra i vettori **A** ed **E**.

C = ...; cos α = ...; cos β = ...

Esercizio n.2 (8 punti)

Si consideri il sistema dato in figura. Le due molle hanno lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k_A = k$, $k_B = 2k$. Le molle esercitano, nel punto C, due reazioni elastiche $\mathbf{R}_1$ ed $\mathbf{R}_2$ in equilibrio con la forza $\mathbf{F}$ nota.
Calcolare l'espressione vettoriale di $\mathbf{F}$, la posizione $C = (x_c, y_c)$ di equilibrio del sistema ed i moduli R_1 ed R_2 delle azioni elastiche esercitate dalle due molle.
Dati:

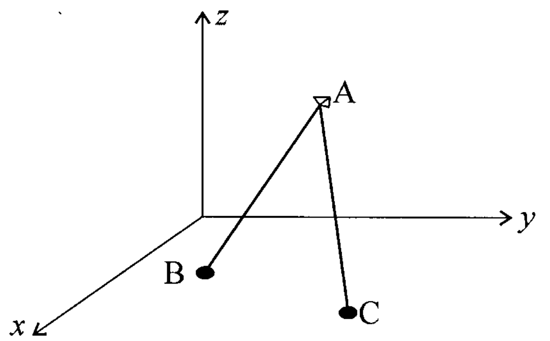
F = 300N; $\alpha = 30°$; $y_A = 6$ m; $x_A = 9$m.



F = ...; C = (..........................;...........................);
R_1 = ...; $R2$ =.. .

Esercizio n.3 (7 punti)

Un cavo collega i punti B e C passando dal punto A, dove e' vincolato con un passante.



Le coordinate dei tre punti sono:

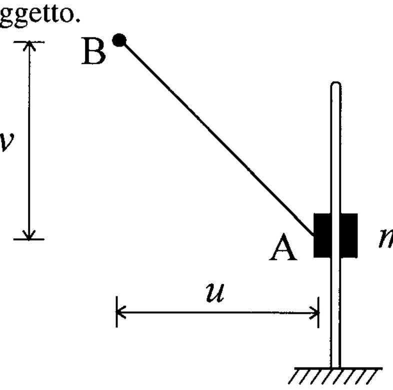
A = (0,6,7); B = (4,2,0); C = (12,6,0).

Il cavo esercita le forze $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{AC}$ nel punto A. Sapendo che i moduli di tali forze valgono $F_{AB} = F_{AC} = 200$ N, determinare il modulo F e l'espressione vettoriale $\mathbf{F}$ della forza totale esercitata dal passante in A sul cavo.

F = ...; **F** = ...

Esercizio n.4 (8 punti)

Un oggetto di massa m = 300 kg è libero di scivolare, soggetto al proprio peso, lungo una barra verticale. Il blocco è mantenuto in equilibrio da una fune che si estende da A a B, con u = 3m e v = 4m.
Calcolare il modulo T e l'espressione vettoriale **T** della tensione esercitata nel punto A dalla fune.
Calcolare inoltre il modulo X e l'espressione vettoriale **X** della reazione esercitata dalla barra verticale sull'oggetto.



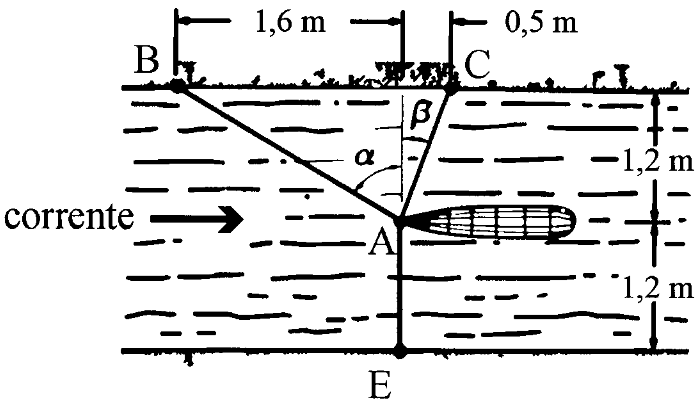
T = ...;	**T** = ...;
X = ...;	**X** = ...

Esercizio n.5 (3 punti)

Per il progetto di un nuovo tipo di barca a vela si vuole determinare la forza di resistenza fluidodinamica che essa esercita ad una data velocità. Per ottenere tale valore un modello dello scafo viene posto in un canale e la sua prua viene mantenuta nella linea centrale del canale mediante i tre cavi AB, AC ed AE.
Particolari apparecchiature rilevano che ad una certa velocità le tensioni nei cavi AB ed AE sono, rispettivamente :

$$T_{AB} = 200 \text{ N}; \qquad T_{AE} = 300 \text{ N}.$$

Determinare la tensione T_{AC} nel cavo AC e la forza di resistenza fluidodinamica F.



T_{AC} = ...;	F = ...

I SCRITTO DEL 03.05.04

① $\vec{C}' = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$$\vec{C} = 5\frac{\vec{C}'}{|\vec{C}'|} = 5\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}$$

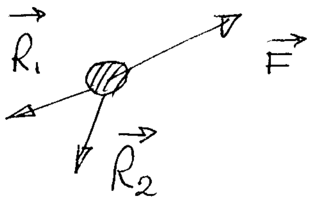
$$\vec{D} = \vec{A}\wedge\vec{C} = \frac{5}{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}\vec{A}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

$$\vec{E} = \vec{B}\wedge\vec{C} = \frac{5}{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

$$\vec{B}\times\vec{D} = |\vec{B}||\vec{D}|\cos\alpha \quad \therefore \quad \cos\alpha = \frac{\vec{B}\times\vec{D}}{|\vec{B}|\,|\vec{D}|}$$

$$\vec{A}\times\vec{E} = |\vec{A}||\vec{E}|\cos\beta \quad \therefore \quad \cos\beta = \frac{\vec{A}\times\vec{E}}{|\vec{A}||\vec{E}|}.$$

② Diagramma di corpo libero:



$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{F} = F\cos\alpha\,\vec{\imath} + F\sin\alpha\,\vec{\jmath} \qquad F = |\vec{F}|$$

$$\vec{R}_1 = -k_A(\overrightarrow{C-A}) = -k_A x_c\,\vec{\imath} - k_A(y_c - y_A)\vec{\jmath}$$

$$\vec{R}_2 = -k_B(\overrightarrow{B-A}) = -k_B(x_c - x_B)\vec{\imath} - k_B y_c\,\vec{\jmath}$$

in quanto $(\overrightarrow{C-A}) = (x_c - x_A)\vec{\imath} + (y_c - y_A)\vec{\jmath} = x_c\vec{\imath} + (y_c - y_A)\vec{\jmath}$

$(\overrightarrow{C-B}) = (x_c - x_B)\vec{\imath} + (y_c - y_B)\vec{\jmath} = (x_c - x_B)\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath}$

Si ha quindi $\vec{R} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} F\cos\alpha - k_A x_c - k_B(x_c - x_B) = 0 \\ F\sin\alpha - k_A(y_c - y_A) - k_B y_c = 0 \end{cases} \boxed{1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_c\,(k_A+k_B) = F\cos\alpha + k_B x_B \\ y_c\,(k_A+k_B) = F\sin\alpha + k_A y_A \end{cases}$$

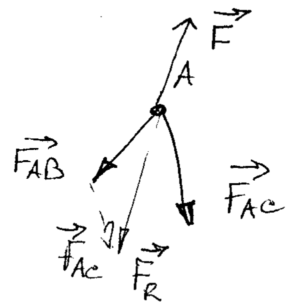
$$x_c = \frac{F\cos\alpha + k_B x_B}{k_A + k_B} \qquad y_c = \frac{F\sin\alpha + k_A y_A}{k_A + k_B}$$

$$\vec{R}_1 = -k_A \frac{F\cos\alpha + k_B x_B}{k_A+k_B}\vec{i} - k_A\left(\frac{F\sin\alpha + k_A y_A}{k_A+k_B} - y_A\right)\vec{j}$$

$$\vec{R}_2 = -k_B\left(\frac{F\cos\alpha + k_B x_B}{k_A+k_B} - x_B\right)\vec{i} - k_B \frac{F\sin\alpha + k_A y_A}{k_A+k_B}\vec{j}$$

(3)

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\cdot\frac{\overrightarrow{B-A}}{|\overrightarrow{B-A}|}\ ; \quad F_{AB} = |\vec{F}_{AB}|$$



$A \equiv (0,6,7)$
$B \equiv (4,2,0)$
$C \equiv (12,6,0)$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\,\frac{\overrightarrow{C-A}}{|\overrightarrow{C-A}|}\ ; \quad F_{AC} = |\vec{F}_{AC}|$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$$

$$\overrightarrow{B-A} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\overrightarrow{C-A} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k} = 12\vec{i} - 7\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{B-A}| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\overrightarrow{C-A}| = \sqrt{144+49} = \sqrt{193}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\cdot\left(\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{7}{9}\vec{k}\right)$$

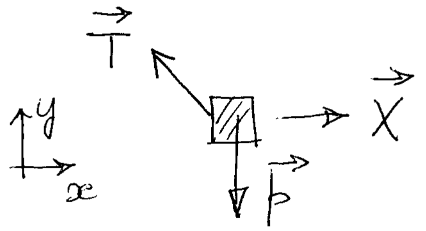
$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\left(\frac{12}{\sqrt{193}}\vec{i} - \frac{7}{\sqrt{193}}\vec{k}\right)$$

$$\vec{F}_R = \left(\frac{4}{9}F_{AB} + \frac{12}{\sqrt{193}}F_{AC}\right)\vec{i} - \frac{4}{9}F_{AB}\vec{j} - \left(\frac{7}{9}F_{AB} + \frac{7}{\sqrt{193}}F_{AC}\right)\vec{k}$$

La forza che il pesante esercita sul cavo è chiaramente eguale e opposta a $\vec{F}_R$, sicché

$$\vec{F} = -\vec{F}_R$$

(4) Diagramma di corpo libero:



$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{X} + \vec{p} = \vec{0}$$

$$\vec{X} = X\,\vec{i} \quad ; \quad X = |\vec{X}|$$

$$\vec{p} = -mg\,\vec{j} \quad ; \quad p = |\vec{p}|$$

$$\vec{T} = T\,\frac{\overrightarrow{B-A}}{|\overrightarrow{B-A}|} \quad ; \quad T = |\vec{T}|$$

$$\overrightarrow{B-A} = -u\,\vec{i} + v\,\vec{j} \qquad |\overrightarrow{B-A}| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\overrightarrow{B-A}}{|\overrightarrow{B-A}|} = -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{j}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} R_x = 0 & T\left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) + X = 0 \\ R_y = 0 & T\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) - mg = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{mg\sqrt{u^2+v^2}}{v}$$

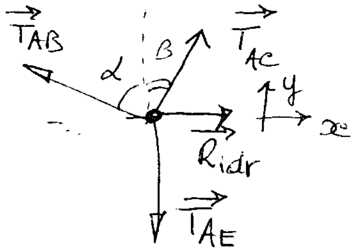
$$X = \frac{mg\cancel{\sqrt{u^2+v^2}}}{v}\left(+\frac{u}{\cancel{\sqrt{u^2+v^2}}}\right) = \frac{u}{v}\,mg$$

pertanto

$$\vec{T} = -mg\,\frac{u}{v}\,\vec{i} + mg\,\vec{j}$$

$$\vec{X} = \frac{u}{v}\,mg\,\vec{i}$$

(5) Diagramma di corpo libero:



La resistenza idrodinamica $\vec{R}_{idr}$ è chiaramente opposta al moto (// alla corrente)

Per equilibrio deve risultare:

$$\vec{R} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AE} + \vec{R}_{idr} = \vec{0} \quad = \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{T}_{AB} = -T_{AB}\sin\alpha\,\vec{i} + T_{AB}\cos\alpha\,\vec{j} \qquad T_{AB} = |\vec{T}_{AB}|$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC}\sin\beta\,\vec{i} + T_{AC}\cos\beta\,\vec{j} \qquad T_{AC} = |\vec{T}_{AC}|$$

$$\vec{T}_{AE} = -T_{AE}\,\vec{j} \qquad T_{AE} = |\vec{T}_{AE}|$$

$$\vec{R}_{idr} = +R_{idr}\,\vec{i} \qquad R_{idr} = |\vec{R}_{idr}|$$

$$\sin\alpha = \frac{1.6}{\sqrt{(1.2)^2+(1.6)^2}} = \frac{1.6}{\sqrt{1.44+2.56}} = \frac{1.6}{\sqrt{4.00}} = \frac{1.6}{2.00} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{1.2}{\sqrt{(1.2)^2+(1.6)^2}} = \frac{1.2}{\sqrt{1.44+2.56}} = \frac{1.2}{\sqrt{4.00}} = \frac{1.2}{2.00} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\beta = \frac{0.5}{\sqrt{(1.2)^2+(0.5)^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.44+0.25}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.69}} = \frac{0.5}{1.3} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{1.2}{\sqrt{(1.2)^2+(0.5)^2}} = \frac{1.2}{\sqrt{1.44+0.25}} = \frac{1.2}{\sqrt{1.69}} = \frac{1.2}{1.3} = \frac{12}{13}$$

$$R_x = 0 \quad -T_{AB}\sin\alpha + T_{AC}\sin\beta + R_{idr} = 0 \qquad -\frac{4}{5}T_{AB} + \frac{5}{13}T_{AC} + R_{idr} = 0$$

$$R_y = 0 \quad T_{AB}\cos\alpha + T_{AC}\cos\beta - T_{AE} = 0 \qquad \frac{3}{5}T_{AB} + \frac{12}{13}T_{AC} - T_{AE} = 0$$

$$T_{AC} = \frac{13}{12}\left(T_{AE} - \frac{3}{5}T_{AB}\right) = \frac{13}{12}T_{AE} - \frac{13}{20}T_{AB}$$

$$R_{idr} = +\frac{4}{5}T_{AB} - \frac{5}{13}T_{AC} = +\frac{4}{5}T_{AB} - \frac{5}{12}T_{AE} + \frac{5}{20}T_{AB} = -\frac{5}{12}T_{AE} + \frac{21}{20}T_{AB}$$

Esercizio 1	Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
A_x	2	1	3	-1	-3	-2
A_y	1	2	1	3	2	1
A_z	-3	-1	-2	-1	-1	-1
B_x	1	2	1	3	1	4
B_y	-2	-1	-1	-2	-3	-2
B_z	1	3	2	1	2	3
C'_x	**-5**	**5**	**0**	**1**	**1**	**1**
C'_y	**-5**	**-5**	**-8**	**-2**	**5**	**2**
C'_z	**-5**	**-5**	**-4**	**-7**	**7**	**0**
C'^2	**75**	**75**	**80**	**54**	**75**	**5**
|C'|	**8.660**	**8.660**	**8.944**	**7.348**	**8.660**	**2.236**
C_x	**-2.887**	**2.887**	**0.000**	**0.680**	**0.577**	**2.236**
C_y	**-2.887**	**-2.887**	**-4.472**	**-1.361**	**2.887**	**4.472**
C_z	**-2.887**	**-2.887**	**-2.236**	**-4.763**	**4.041**	**0.000**
|C|	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
D_x	**-11.547**	**-8.660**	**-11.180**	**-15.650**	**10.970**	**4.472**
D_y	**14.434**	**0.000**	**6.708**	**-5.443**	**11.547**	**-2.236**
D_z	**-2.887**	**-8.660**	**-13.416**	**-0.680**	**-9.815**	**-11.180**
|D|	**18.708**	**12.247**	**18.708**	**16.583**	**18.708**	**12.247**
|A|	**3.742**	**2.449**	**3.742**	**3.317**	**3.742**	**2.449**
E_x	**8.660**	**11.547**	**11.180**	**10.887**	**-17.898**	**-13.416**
E_y	**0.000**	**14.434**	**2.236**	**14.969**	**-2.887**	**6.708**
E_z	**-8.660**	**-2.887**	**-4.472**	**-2.722**	**4.619**	**22.361**
|E|	**12.247**	**18.708**	**12.247**	**18.708**	**18.708**	**26.926**
|B|	**2.449**	**3.742**	**2.449**	**3.742**	**3.742**	**5.385**
B×D	**-43.301**	**-43.301**	**-44.721**	**-36.742**	**-43.301**	**-11.180**
A×E	**43.301**	**43.301**	**44.721**	**36.742**	**43.301**	**11.180**
cos α	**-0.94491**	**-0.94491**	**-0.97590**	**-0.59216**	**-0.61859**	**-0.16952**
cos β	**0.94491**	**0.94491**	**0.97590**	**0.59216**	**0.61859**	**0.16952**

Esercizio 2		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
y_A	[m]	6	9	2	3	4	6
x_B	[m]	9	6	3	2	6	4
F	[N]	300	300	200	200	100	100
k_A/k	[-]	1	2	3	1	2	3
k_B/k	[-]	2	1	1	3	3	2
α	[°]	30	60	30	60	30	60
F_x	**[N]**	**259.808**	**150.000**	**173.205**	**100.000**	**86.603**	**50.000**
F_y	**[N]**	**150.000**	**259.808**	**100.000**	**173.205**	**50.000**	**86.603**
x_C,1*(k_A+k_B)	**[N]**	**259.808**	**150.000**	**173.205**	**100.000**	**86.603**	**50.000**
x_C,2	**[m]**	**6.000**	**2.000**	**0.750**	**1.500**	**3.600**	**1.600**
y_C,1*(k_A+k_B)	**[N]**	**150.000**	**259.808**	**100.000**	**173.205**	**50.000**	**86.603**
y_C,2	**[m]**	**2.000**	**6.000**	**1.500**	**0.750**	**1.600**	**3.600**

Esercizio 3		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
F_AB	[N]	200	300	400	150	250	350
F_AC	[N]	200	300	400	150	250	350
F_x	**[N]**	**261.645**	**392.467**	**523.289**	**196.234**	**327.056**	**457.878**
F_y	**[N]**	**-88.889**	**-133.333**	**-177.778**	**-66.667**	**-111.111**	**-155.556**
F_z	**[N]**	**-256.330**	**-384.495**	**-512.660**	**-192.247**	**-320.412**	**-448.577**
|F|	**[N]**	**376.914**	**565.371**	**753.828**	**282.685**	**471.142**	**659.599**

Esercizio 4		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
m	[kg]	300	200	100	400	500	600
u	[m]	3	4	8	6	5	12
v	[m]	4	3	6	8	12	5
T	**[N]**	**3678.750**	**3270.000**	**1635.000**	**4905.000**	**5313.750**	**15303.600**
X	**[N]**	**2207.250**	**2616.000**	**1308.000**	**2943.000**	**2043.750**	**14126.400**

Esercizio 5		Testo 1	Testo 2	Testo 3	Testo 4	Testo 5	Testo 6
T_AB	[N]	200	180	220	150	50	120
T_AE	[N]	300	270	330	225	75	180
T_AC	**[N]**	**195.000**	**175.500**	**214.500**	**146.250**	**48.750**	**117.000**
R_idr	**[N]**	**85.000**	**76.500**	**93.500**	**63.750**	**21.250**	**51.000**