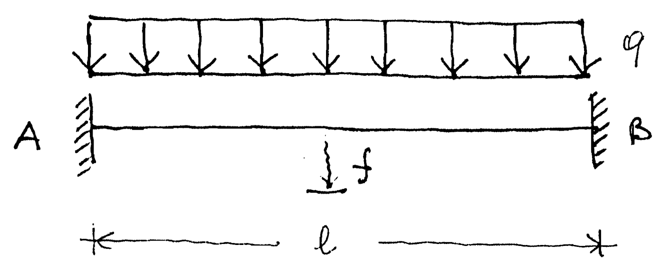
Calcolo di spostamenti di strutture iperstatiche con il P.L.V.

Esempio 1

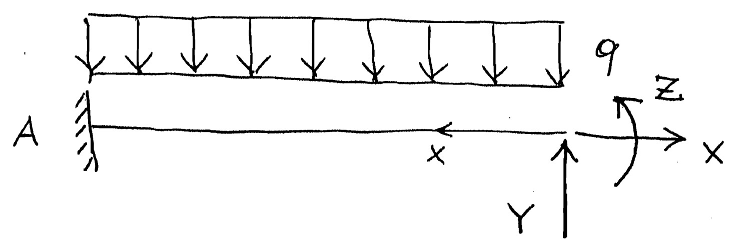


determinare la freccia f in mezzeria.

a) Sistema principale

Adottiamo come sistema principale la trave incastrata in A e libera in B.

Mettiamo in evidenza le reazioni iperstatiche X, Y, Z



L'incastro non consente né spostamenti né rotazioni.

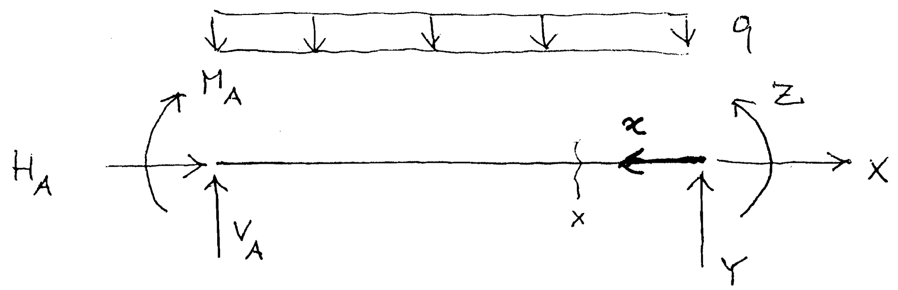
Quindi:

a) Componente orizzontale dello spost. in B è nullo.

b) Componente verticale dello spost. in B è nullo

c) Rotazione della sezione in B è nulla.

• Calcolo delle reazioni vincolari:



$$H_A = -X$$

$$V_A = ql - Y$$

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + Yl + Z$$

Calcolo delle azioni interne:

$$N(x) = X$$

$$T(x) = qx - Y$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Yx + Z$$

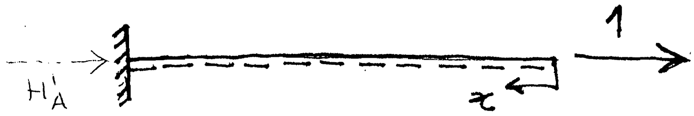
Calcolo delle deformazioni elementari:

$$d\varepsilon = \frac{N(x)\,dx}{EA} = \frac{X}{EA}\,dx$$

$$d\gamma = \chi\frac{T(x)\,dx}{GA} = \chi\frac{(qx - Y)}{GA}\,dx$$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ}\,dx = \frac{\left(-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z\right)}{EJ}\,dx$$

1° sistema equilibrato.



Reazioni

$H'_A = -1$

$V'_A = 0$

$M'_A = 0$

Azioni interne

$N'(x) = 1$

$T'(x) = 0$

$M'(x) = 0$

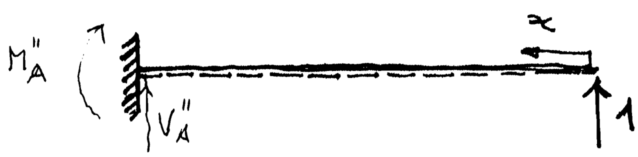
Con l'equazione dei lavori virtuali si impone che lo spostamento orizzontale è nullo:

$$1 \cdot 0 = \int_0^l N'(x) \, d\varepsilon$$

$$\boxed{0 = \int_0^l \frac{X}{EA} \, dx}$$

1ª equazione

2° sistema equilibrato



Reazioni

$H''_A = 0$

$V''_A = -1$

$M''_A = 1 \cdot l$

Azioni interne

$N'' = 0$

$T'' = -1$

$M'' = 1 \cdot x$

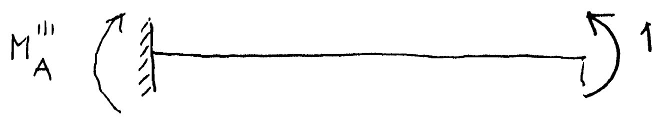
Imponiamo che lo spostamento verticale del punto B sia nullo:

$$1\cdot 0 = \int_0^{l} T''(x)\,d\gamma + \int_0^{l} M''(x)\,d\varphi$$

$$\boxed{0 = \int_0^{l} (-1)\,\chi\,\frac{(qx - Y)}{GA}\,dx + \int_0^{l} (1\cdot x)\left(\frac{-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z}{EJ}\right)dx}$$

2ª equazione

3) sistema equilibrato



Reazioni	Azioni interne
$H'''_A = 0$	$N'''(x) = 0$
$V'''_A = 0$	$M'''(x) = 1$
$M'''_A = 1$	$T'''(x) = 0$

Imponiamo che la rotazione in B sia nulla

$$1\cdot 0 = \int_0^{l} M'''(x)\,d\varphi$$

$$\boxed{0 = \int_0^{l} (1)\,\frac{\left(-\frac{qx^2}{2} + Yx + Z\right)}{EJ}\,dx}$$

3ª equazione

Le equazioni così ricavate ~~consentono di~~ costituiscono un sistema che consente di determinare le incognite iperstatiche X, Y e Z:

$$\begin{cases} X = 0 \\ \dfrac{1}{EJ}\displaystyle\int_0^l \left(-\dfrac{qx^3}{2} + Yx^2 + Zx\right) dx = 0 \\ \dfrac{1}{EJ}\displaystyle\int_0^l \left(-\dfrac{qx^2}{2} + Yx + Z\right) dx = 0 \end{cases}$$

si possono semplificare

Questo sistema è stato scritto nell'ipotesi di poter trascurare l'effetto del taglio sugli spostamenti, e assumendo E e J costanti lungo x.

Risulta allora:

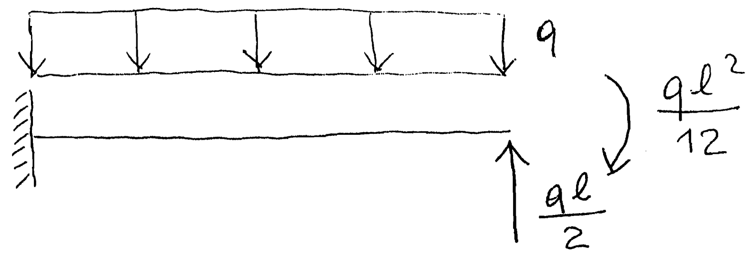
$$\begin{cases} X = 0 \\ -\dfrac{ql^4}{8} + Y\dfrac{l^3}{3} + Z\dfrac{l^2}{2} = 0 \\ -\dfrac{ql^3}{6} + Y\dfrac{l^2}{2} + Zl = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

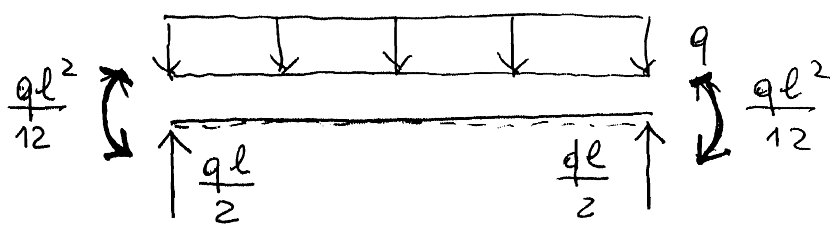
$Y = \frac{ql}{2}$ $\rightarrow$ risultato prevedibile da considerazioni di simmetria.

$Z_1 = -\frac{ql^2}{12}$

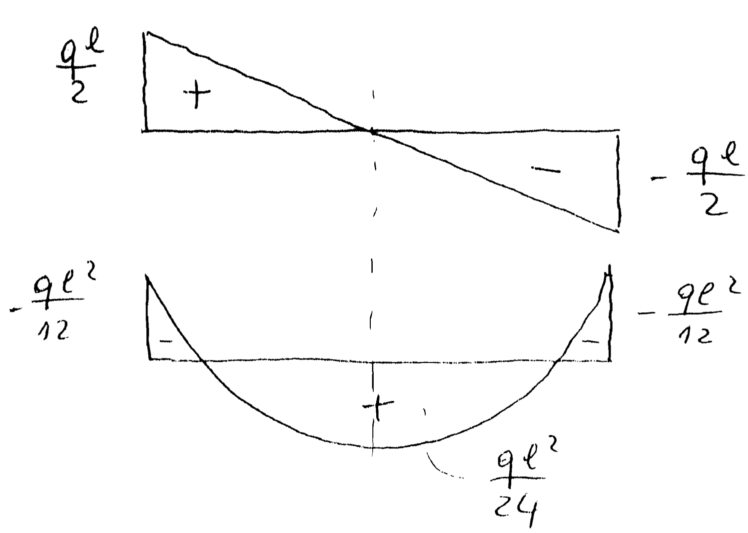
Pertanto:



Da cui si ricavano (in virtù delle espressioni date in precedenza) le reazioni vincolari:



ed i diagrammi delle azioni interne:

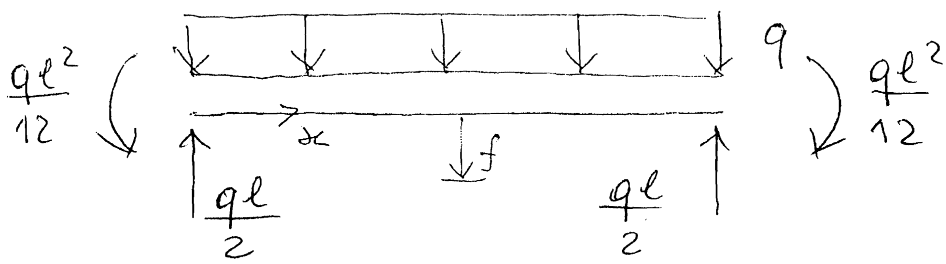


Una volta risolta la struttura iperstatica si tratta di determinare lo spostamento incognito.

Nel P.L.V. si assume come sistema congruente il sistema reale.

Invece il sistema equilibrato gode di tanti gradi di arbitrarietà quante sono le incognite iperstatiche.
E' infatti possibile scegliere valori arbitrari per le iperstatiche senza che siano violate le condizioni di equilibrio.
In virtù di tale arbitrarietà si assumeranno i valori più comodi per le iperstatiche.
In generale conviene assumere valori nulli per tutte le iperstatiche.
Ci si riduce, in questo modo, al calcolo di componenti di spostamento di strutture isostatiche.

Sistema congruente:



Dobbiamo determinare quantità cinematiche.

Azioni interne:

$$N(x) = 0$$

$$T(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{12}$$

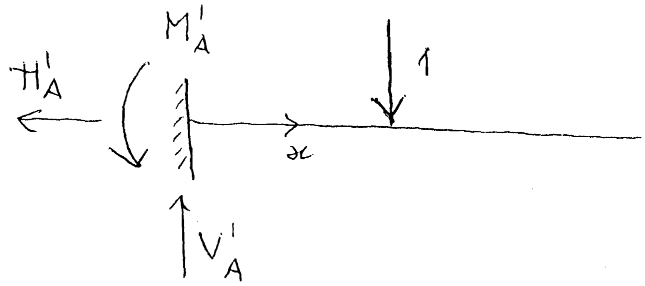
Deformazioni elementari:

$$d\varepsilon = \frac{N(x)}{EA}dx = 0$$

$$d\gamma = \chi \frac{T(x)}{GA}dx = \chi \frac{\left(\frac{ql}{2} - qx\right)}{GA}dx$$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ}dx = \frac{\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{12}\right)}{EJ}dx$$

• Sistema equilibrato.



Dobbiamo determinare quantità statiche.

Reazioni vincolari:

$$H'_A = 0$$

$$V'_A = 1$$

$$M'_A = 1 \cdot \frac{l}{2}$$

Azioni interne:

$$N'(x) = 0$$

$$T'(x) = \begin{cases} = 1 & \text{per } 0 \le x \le l/2 \\ = 0 & \text{per } \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

$$M'(x) = \begin{cases} = -1\left(\frac{l}{2} - x\right) & 0 \le x < l/2 \\ = 0 & l/2 \le x \le l \end{cases}$$

- Equazione dei lavori virtuali:

$$1 \cdot f = \int_0^l N'(x)\, d\varepsilon + \int_0^l T'(x)\, d\gamma + \int_0^l M'(x)\, d\varphi$$

ovvero:

$$f = \int_0^{l/2} 1 \cdot \chi \, \frac{\left(\frac{ql}{2} - qx\right)}{GA}\, dx + \int_0^{l/2} -\left(\frac{l}{2} - x\right) \frac{\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{12}\right)}{EJ}\, dx .$$

$$f = \frac{\chi q}{GA} \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x\right) dx + \ldots$$

$$\boxed{f = \frac{\chi q l^2}{4GA} + \frac{q l^4}{384\, EJ}}$$

Trascurando l'azione tagliante negli spostamenti:

$$f = \frac{q l^2}{384\, EJ}$$

(per coerenza a quanto fatto in precedenza).