

fig.11.13

Scegliamo come trave principale la trave incastrata in A e libera in B; consideriamo cioè come vincolo sovrabbondante l'incastrato in B; mettiamo perciò in evidenza le reazioni iperstatiche X , Y e Z (vedi fig.11.14).

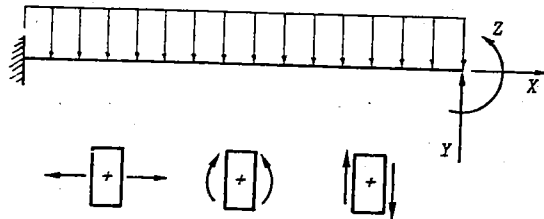


fig.11.14

Poichè sappiamo che in B l'incastrato non consente nè spostamenti nè rotazioni all'estremità B della trave, possiamo affermare:

- 1°) che la componente orizzontale dello spostamento di B è nulla;
- 2°) che la componente verticale dello spostamento dello stesso punto è pure nulla;
- 3°) che la rotazione della sezione in B è anch'essa nulla.

Usiamo del principio dei lavori virtuali per tradurre in equazioni queste affermazioni.

Cominciamo perciò con lo studiare la travatura principale caricata dalle forze date e dalle reazioni iperstatiche incognite.

$$H_A = -X$$

$$V_A = q l - Y$$

$$M_A = -\frac{q l^2}{2} + Y l + Z$$

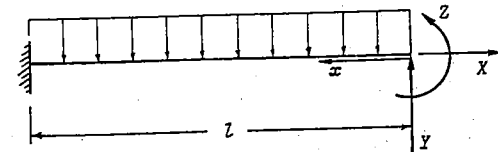


fig.11.15

I parametri dell'azione interna sono espressi dalle relazioni:

$$N = X$$

$$M = -\frac{q x^2}{2} + Z + Y x$$

$$T = q x - Y$$

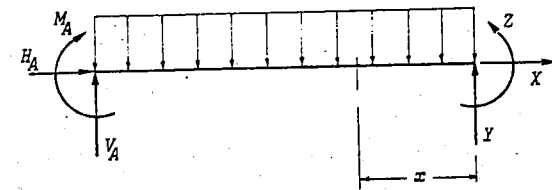


fig.11.16

Otterremo così

$$d\epsilon = \frac{N dx}{EA} = X \frac{dx}{EA}$$

$$d\phi = \frac{M dx}{EJ} = (Z + Y x - \frac{q x^2}{2}) \frac{dx}{EJ}$$

$$d\gamma = x \frac{T dx}{GA} = x (q x - Y) \frac{dx}{GA}$$

Prendiamo ora in considerazione la travatura principale caricata solo da una forza orizzontale unitaria e determiniamo le reazioni e le azioni interne che ne conseguono:

$$\begin{aligned} H'_A &= -1 \\ V'_A &= 0 \\ M'_A &= 0 \\ N'_A &= 1 \\ M'_x &= 0 \\ T'_x &= 0 \end{aligned}$$

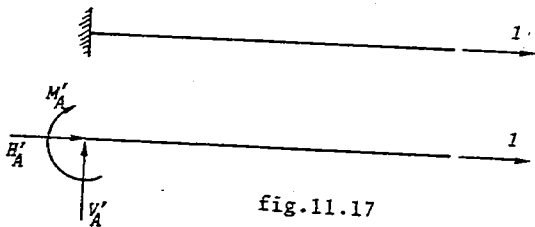


fig.11.17

Possiamo ora dire con un'equazione che è nullo lo spostamento orizzontale di B:

$$1 \cdot 0 + H'_A \cdot 0 = \int_0^L N'_x d\varepsilon \quad (*)$$

Carichiamo ora la travatura con la forza verticale unitaria applicata in B e calcoliamo al solito reazioni ed azioni interne ad essa dovute:

$$\begin{aligned} H''_A &= 0 \\ V''_A &= -1 \\ M''_A &= 1 \cdot L \\ N''_x &= 0 \\ M''_x &= 1 \cdot x \\ T''_x &= -1 \end{aligned}$$

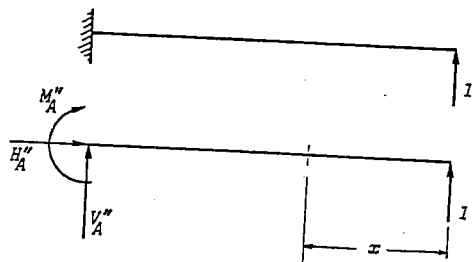


fig.11.18

L'equazione che afferma essere nullo lo spostamento verticale di B si scrive:

$$1 \cdot 0 + V''_A \cdot 0 + M''_A \cdot 0 = \int_0^L M''_x d\phi + \int_0^L (-1) \cdot x \cdot (q \cdot x - Y) \frac{dx}{GA} \quad (**)$$

Infine consideriamo la trave principale sottoposta alla sola coppia unitaria applicata in B:

$$\begin{aligned} H'''_A &= 0 \\ V'''_A &= 0 \\ M'''_A &= 1 \\ N'''_x &= 0 \\ M'''_x &= 1 \\ T'''_x &= 0 \end{aligned}$$

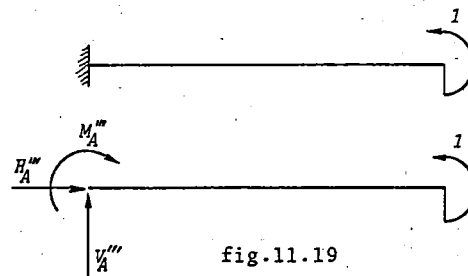


fig.11.19

L'equazione che traduce il fatto che è nulla la rotazione della sezione terminale B è la seguente:

$$1 \cdot 0 = \int_0^L M'''_x d\phi \quad (***)$$

Le tre equazioni (*), (**), (***) formano un sistema la cui soluzione consente di calcolare X, Y e Z.

Spesso l'effetto del taglio sugli spostamenti è trascurabile; in questa ipotesi le equazioni si semplificano così:

$$\begin{cases} X = 0 \\ \int_0^L (-\frac{q}{2}x^3 + Zx + Yx^2) \frac{dx}{EJ} = 0 \\ \int_0^L (-\frac{q}{2}x^2 + Z + Yx) \frac{dx}{EJ} = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} X = 0 \\ -\frac{q}{8}L^4 + Z\frac{L^2}{2} + Y\frac{L^3}{3} = 0 \\ -\frac{q}{6}L^3 + ZL + Y\frac{L^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Con facili passaggi si ottiene

$$r = \frac{qL}{2}$$

risultato prevedibile con considerazioni di simmetria, e infine

$$z = -\frac{qL^2}{12}$$

Determinati così i valori delle iperstatiche, la travatura principale può essere ormai pensata come caricata da forze tutte conosciute e perciò le equazioni di equilibrio consentono di determinare anche le tre reazioni in A e le azioni interne definitive N , M e T :

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{qL}{2}$$

$$M_A = -\frac{qL^2}{12}$$

$$N = 0$$

$$M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{12}$$

$$T = qx - \frac{qL}{2}$$

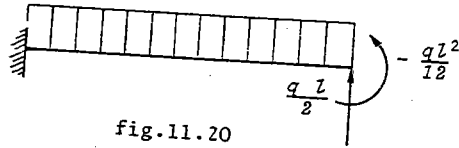


fig.11.20

Sono spesso assai utili i diagrammi delle azioni interne che nel nostro caso sono, per il momento flettente e per il taglio rispettivamente, i seguenti:

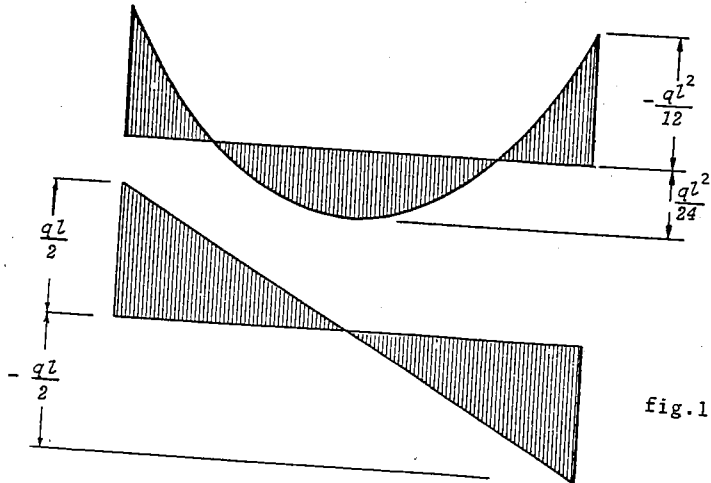


fig.11.21

Il procedimento che abbiamo seguito in questi esempi ha validità generale; infatti è sempre possibile scrivere tante equazioni di congruenza quante sono le reazioni dei vincoli sovrabbondanti.

Per calcolare gli sforzi effettivi si possono sempre utilizzare, come abbiamo già visto in un esempio, i risultati dei calcoli fatti con le situazioni fittizie di carico. Infatti per sovrapposizione di effetti si può scrivere:

$$M = M_0 + X M' + Y M'' + \dots$$

similmente per le altre componenti dell'azione interna.

e corrispondentemente N_0 e T_0 , rappresentano le azioni interne sulla trave principale isostatica causate dai soli carichi dati.

Il momento flettente dovuto ad ogni iperstatica X_i (e lo stesso si può dire anche per l'azione assiale e per il taglio) vale ovviamente X_i volte quello dovuto alla $X_i = 1$, cioè M'_i (e N'_i e T'_i); dunque è $M_{X_i} = X_i M'_i$ (e corrispondentemente $N_{X_i} = X_i N'_i$, $T_{X_i} = X_i T'_i$).

Consideriamo un ultimo esempio.

Sia data la struttura rappresentata in fig.11.22: essa è quattro volte iperstatica. Mettiamo in evidenza queste iperstatiche praticando, ad esempio, un taglio nella sezione Z e togliendo l'asta rettilinea.

Sulla struttura resa così isostatica agiranno, oltre ai carichi dati P, le reazioni iperstatiche X_1 , X_2 , X_3 e X_4 (fig.11.23).

Sappiamo calcolare le azioni interne che si determinano sulla travatura principale per effetto di P, X_1 , X_2 , X_3 e X_4 .

I valori delle iperstatiche sono incogniti, ma sappiamo che le due facce della sezione Z restano unite e che la deformazione dell'asta rettilinea è congruente con quella del cerchio.

E' bene precisare che non conosciamo gli spostamenti assoluti dei punti a cui sono applicate le iperstatiche, ma conosciamo gli spostamenti relativi.