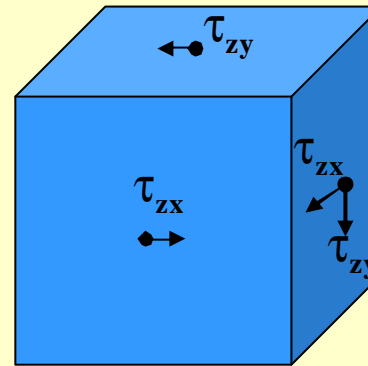
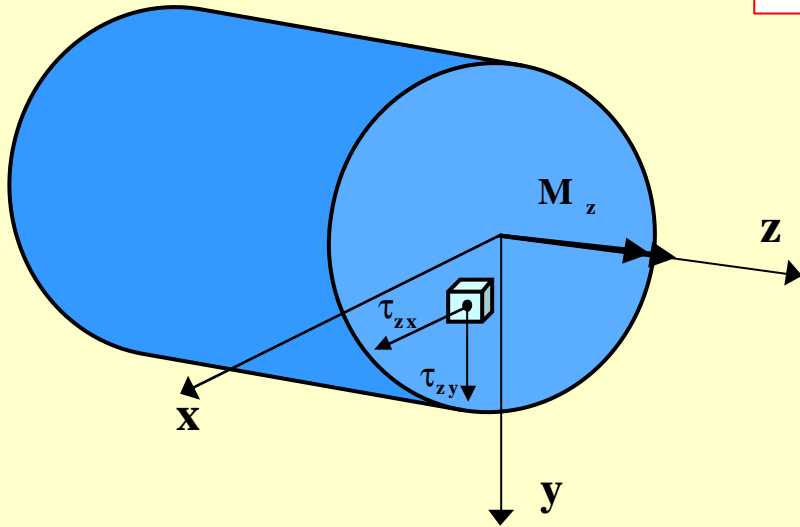


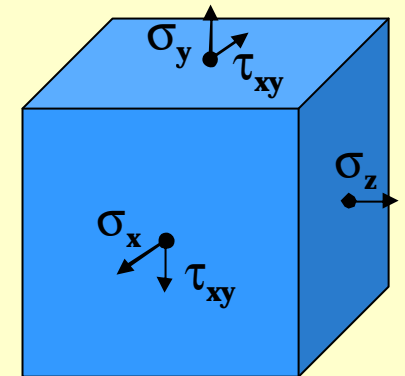
SOLIDO DI SAINT VENANT: TORSIONE

La particolarità del problema di Saint-Venant consente di determinare in modo semplice le soluzioni del problema dell'equilibrio elastico. Nel caso della **torsione semplice** si è in uno stato tensionale puramente tangenziale:

$$\tau_{zx} \neq 0; \quad \tau_{zy} \neq 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$



Componenti
non nulle



Componenti
nulle

Applicando il **metodo degli spostamenti**, sono soddisfatte dapprima le equazioni indefinite di compatibilità:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_x(y, z); \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_y(x, z); \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z(x, y);$$

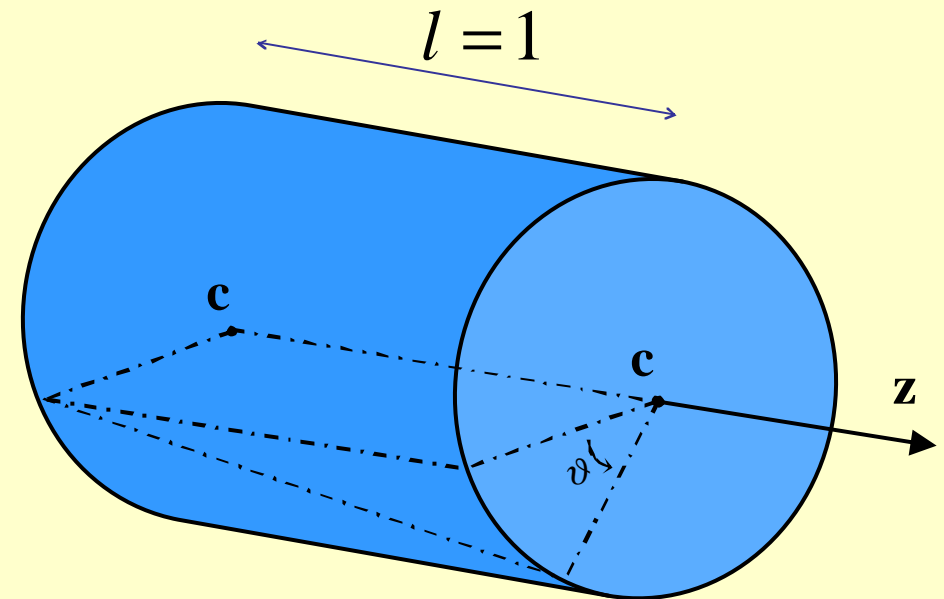
$$\frac{\partial u_x(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, z)}{\partial x} = 0$$

SOLIDO DI SAINT VENANT: TORSIONE

Nello spirito del metodo semi-inverso, è possibile ipotizzare che la soluzione abbia la seguente forma:

$$u_x = -\vartheta(y - y_c)z \quad u_y = \vartheta(x - x_c)z$$

$$u_z = \vartheta[\omega_G(x, y) - y_c x + x_c y]$$



essendo:

ϑ Angolo unitario di torsione, che esprime la rotazione relativa tra due sezioni trasversali poste a distanza unitaria

$\omega_G(x, y)$ Funzione di ingobbamento, che definisce come si ingobba la sezione trasversale

(x_c, y_c) Coordinate del centro di torsione C

SOLIDO DI SAINT VENANT: TORSIONE

Una volta definita la forma della soluzione in termini di spostamento si ottiene dalle **equazioni costitutive**:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \vartheta \left[\frac{\partial \omega_G(x, y)}{\partial x} - y \right] = \frac{\tau_{zx}}{G}; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \vartheta \left[\frac{\partial \omega_G(x, y)}{\partial y} + x \right] = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

Sostituendo le precedenti relazioni nelle **equazioni indefinite di equilibrio** si ha:

$$\frac{\partial \tau_{zx}(x, y)}{\partial z} = G \frac{\partial \gamma_{zx}(x, y)}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}(x, y)}{\partial z} = G \frac{\partial \gamma_{zy}(x, y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \omega_G(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_G(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Equazione di Laplace}$$

Associando all'equazione di Laplace le condizioni al contorno:

$$\tau_{zx}(x, y)n_x + \tau_{zy}(x, y)n_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega_G(x, y)}{\partial x}n_x + \frac{\partial \omega_G(x, y)}{\partial y}n_y = yn_x - xn_y$$

si definisce il cosiddetto **Problema di Neumann**, che ammette soluzione unica a meno di una costante arbitraria (basi libere). In tal modo la soluzione ω_G è una *funzione armonica* e risulta completamente definita.

TORSIONE: SEZIONE CIRCOLARE

le sezioni trasversali si mantengono piane $\omega_G(x, y) = 0$

In questo caso per la simmetria polare si avrà: $x_c = y_c = 0$.

Le componenti dello spostamento assumono la forma

$$u_x = -J yz \quad u_y = J xz \quad u_z = 0$$

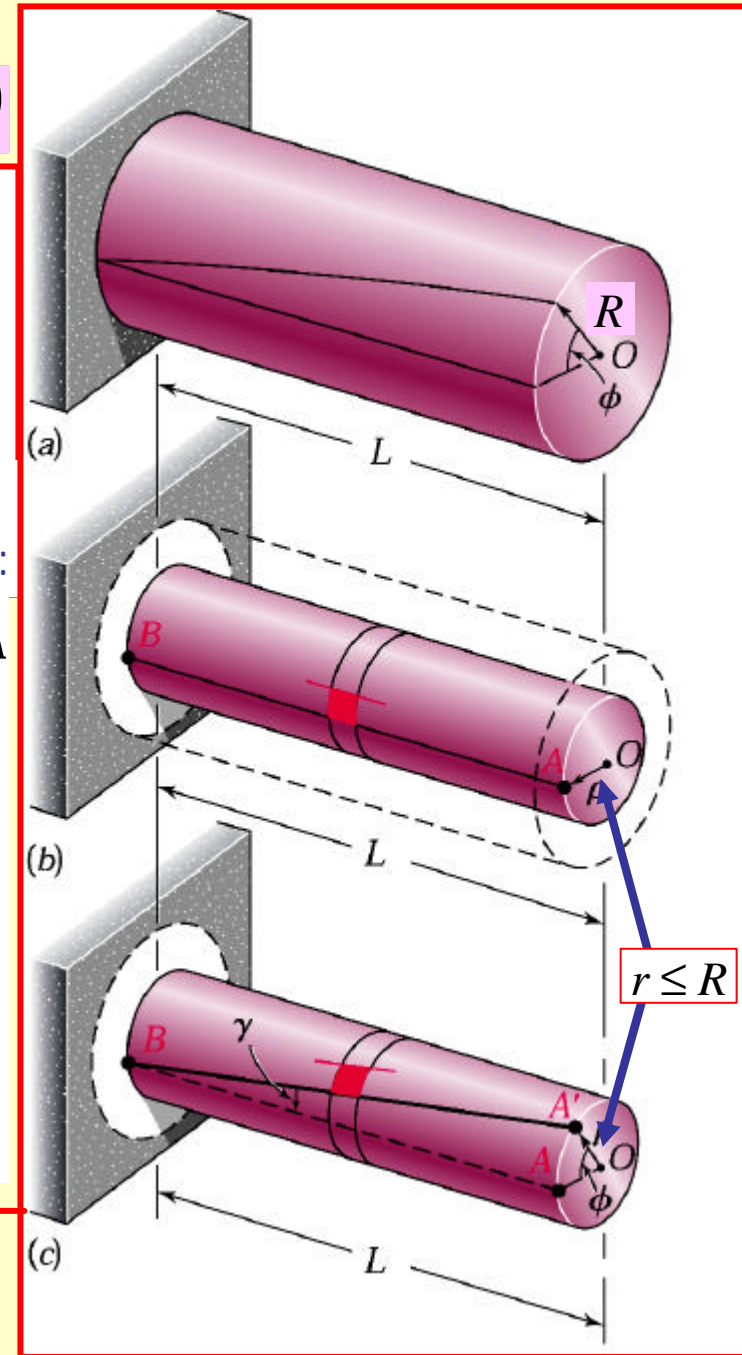
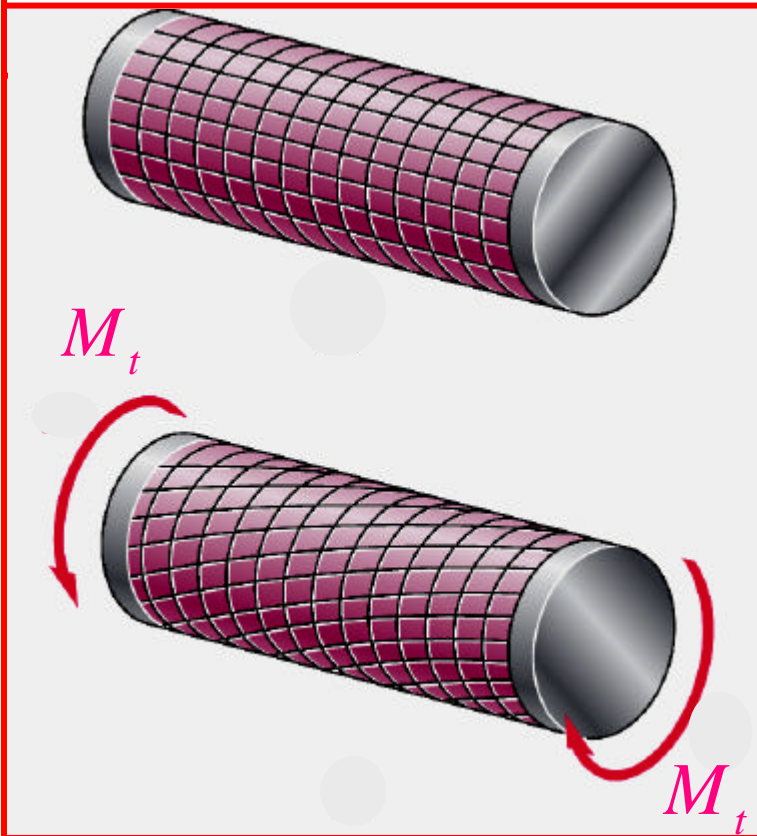
Dalla condizione di equivalenza sulle basi segue:

$$\mathbf{M}_z = M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= G \int_A \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) x - \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) y \right] dA$$

$$= G \vartheta \int_A (x^2 + y^2) dA = G \vartheta I_p$$

$$J = \frac{M_t}{GI_p}; \quad f = J\mathcal{L}$$



TORSIONE: SEZIONE CIRCOLARE

(le sezioni trasversali si mantengono piane)

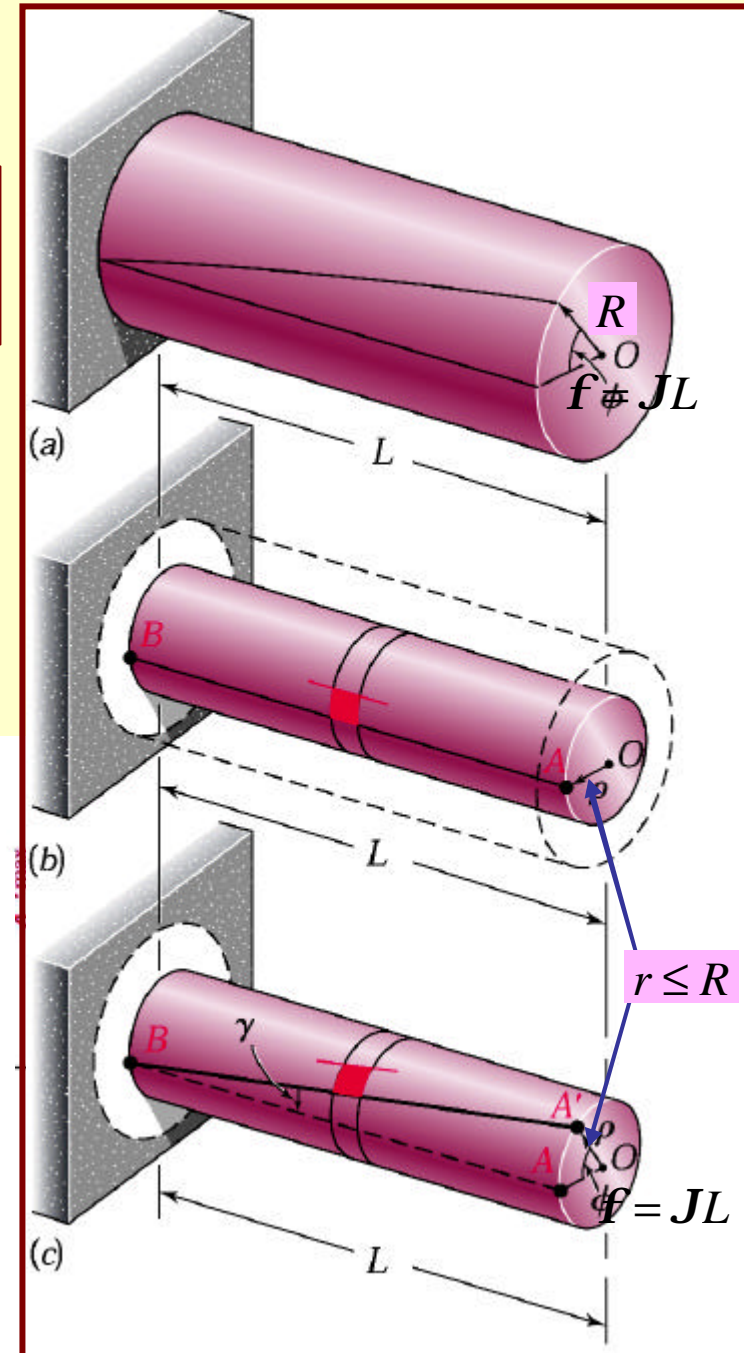
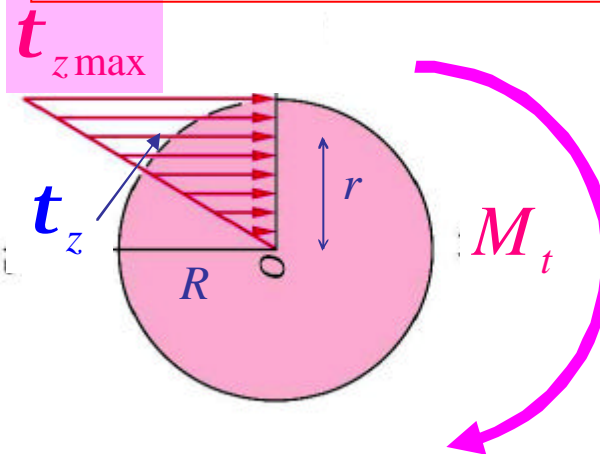
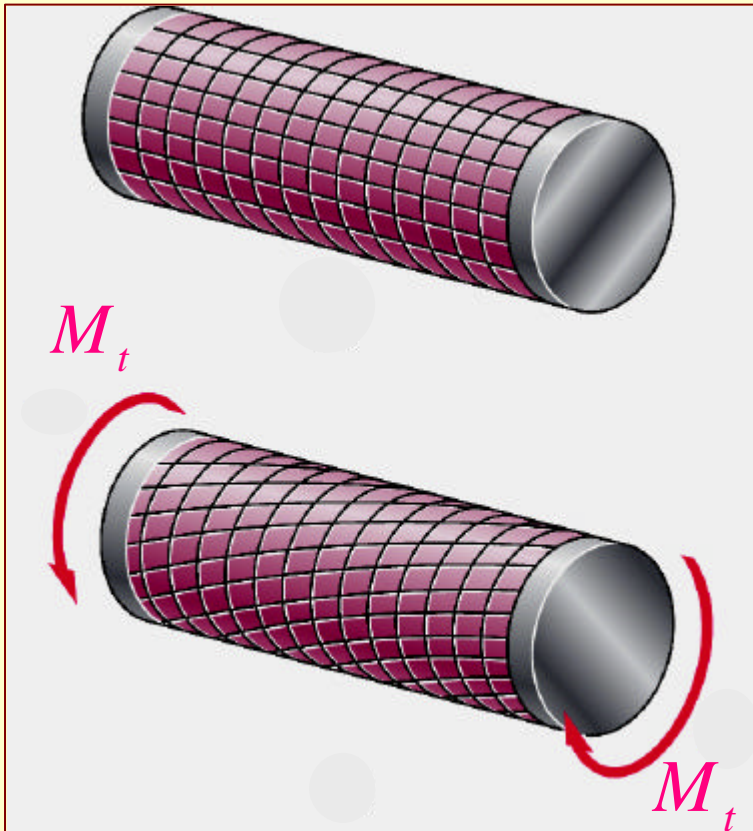
$$J = \frac{M_t}{GI_p}; \quad \phi = JL$$

$$t_{zx} = -GJy = -\frac{M_t}{I_p}y; \quad t_{yz} = GJx = \frac{M_t}{I_p}x$$

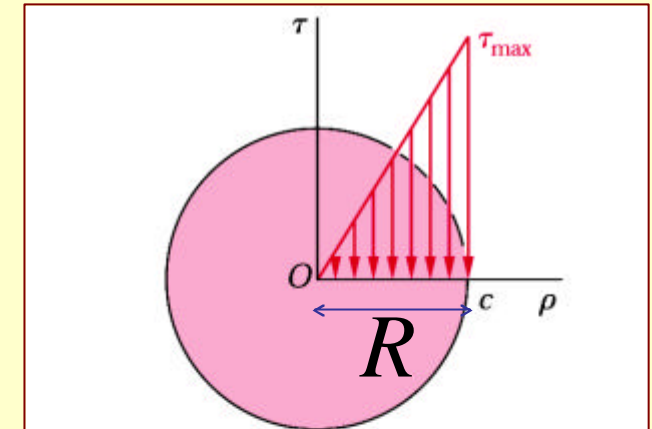
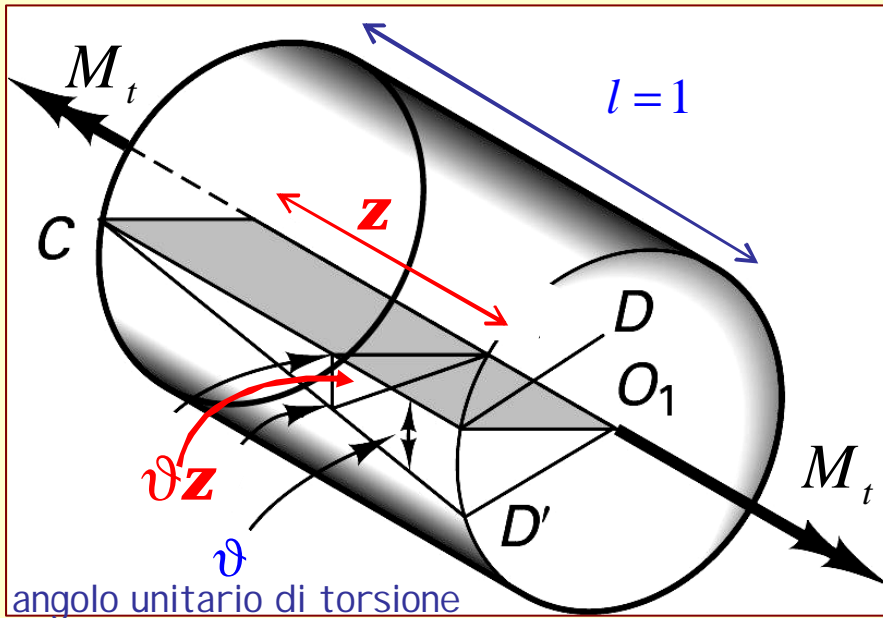
$$t_z = \sqrt{t_{zx}^2 + t_{zy}^2} = \frac{M_t}{I_p}r$$

sezione circolare piena

$$t_{z \max} = \frac{2M_t}{pR^3}; \quad I_p = \frac{pR^4}{2}$$



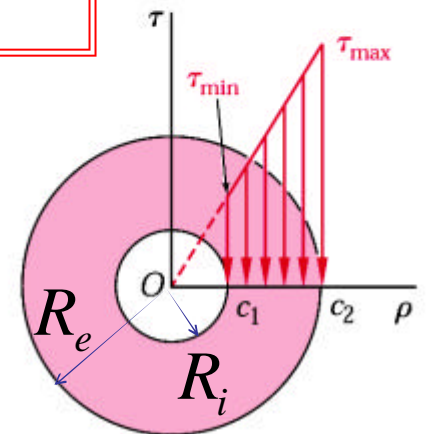
TORSIONE: SEZIONE CIRCOLARE



sezione circolare piena :

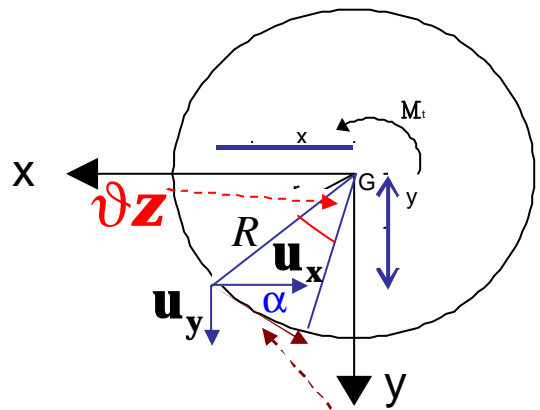
$$t_{z\max} = \frac{2M_t}{pR^3}; I_p = \frac{pR^4}{2}$$

(a)



sezione circolare cava:

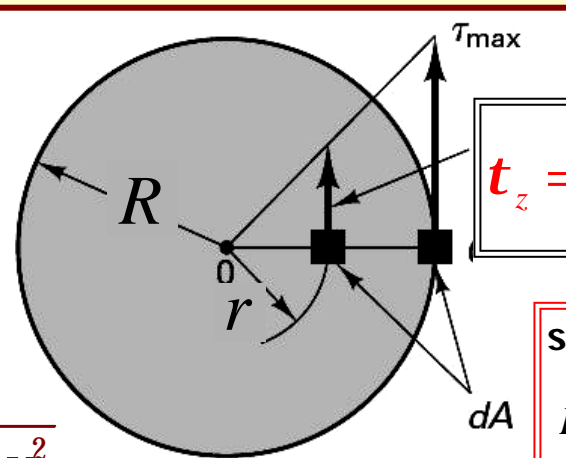
$$I_p = \frac{p}{2}(R_e^4 - R_i^4), t_{z\max} = \frac{2M_t}{p(R_e^4 - R_i^4)} R_e$$



$$\mathbf{u} = R\vartheta = \vartheta\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{u}_x = u \cos\alpha = -\vartheta yz; \quad \mathbf{u}_y = u \sin\alpha = \vartheta xz$$

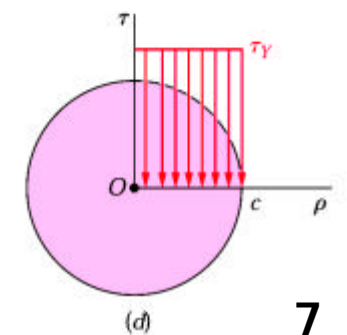
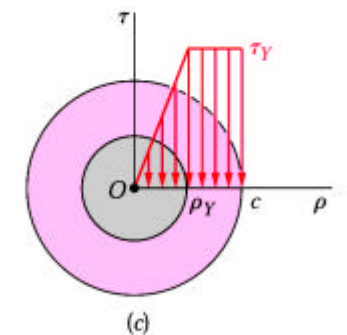
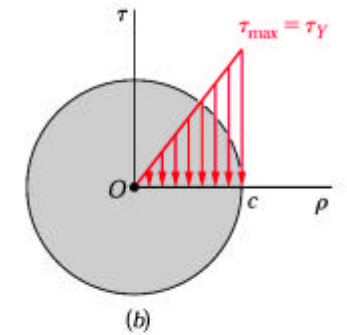
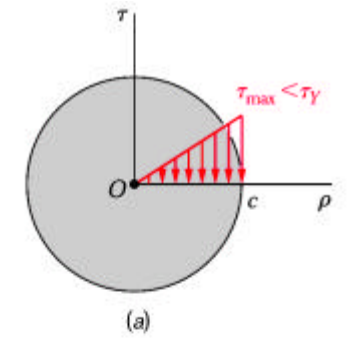
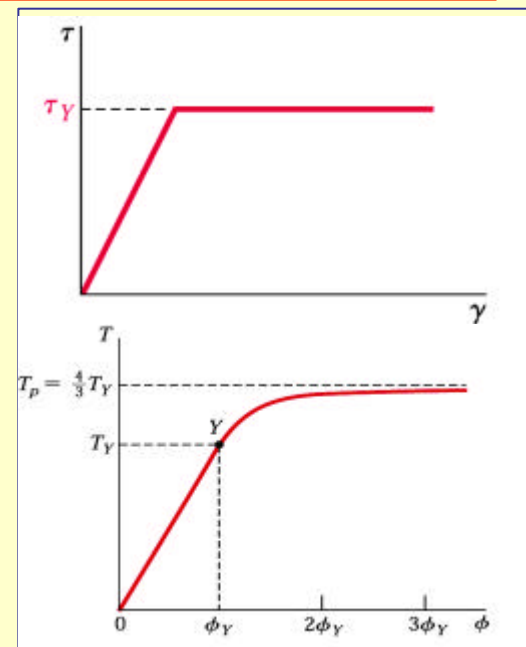
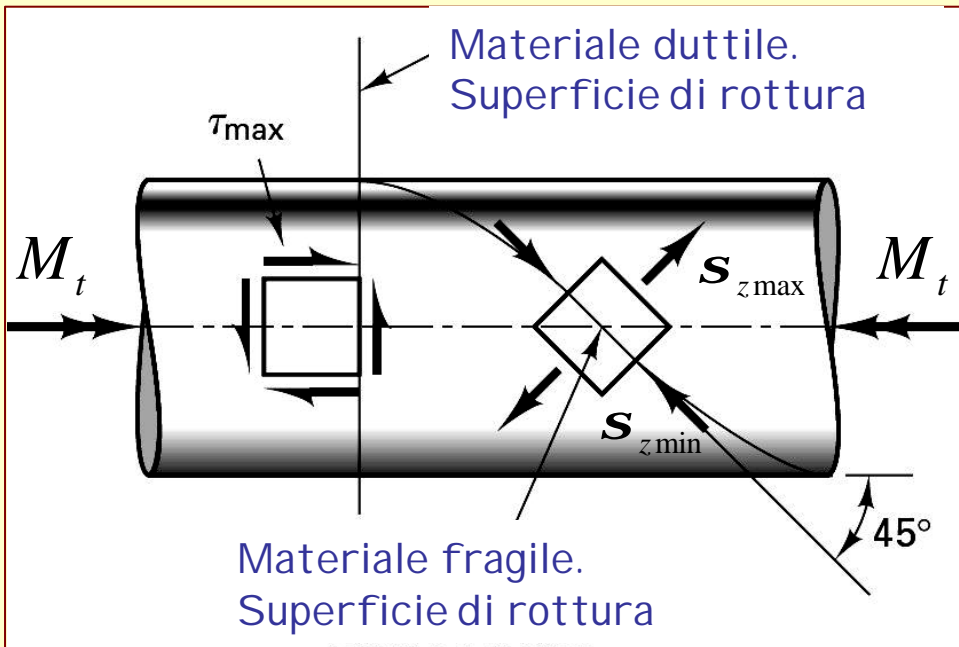
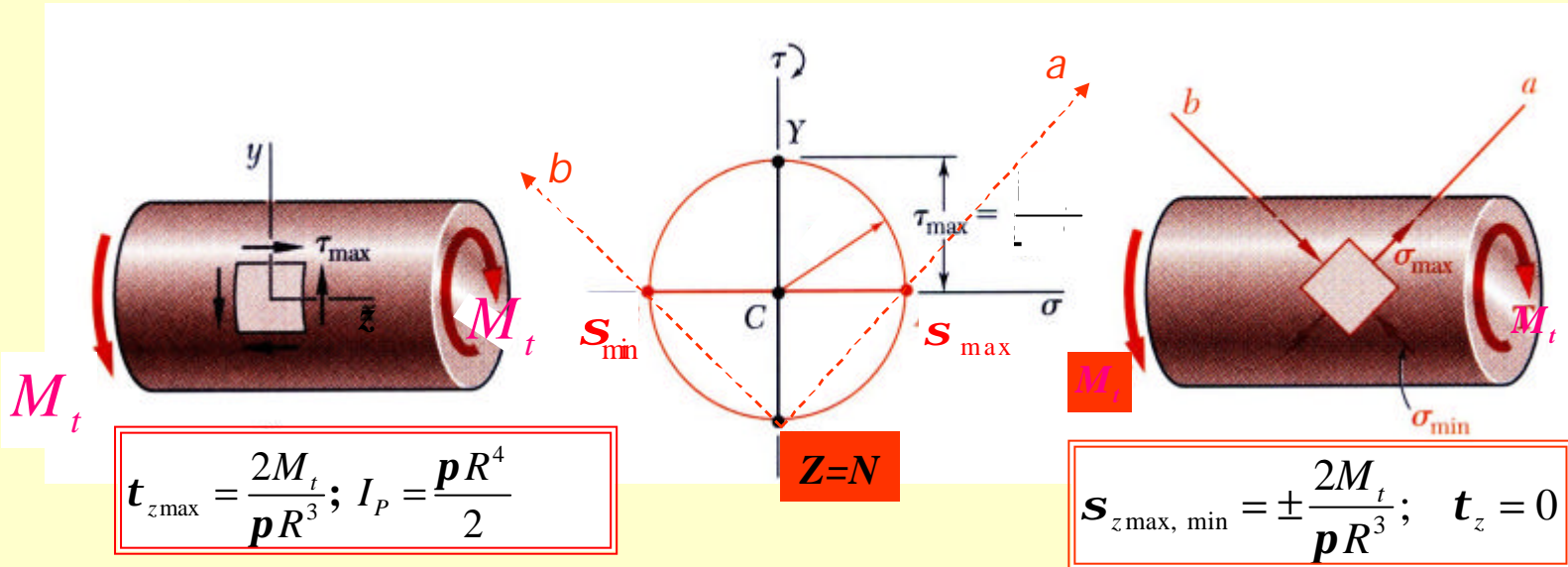
ϑ si calcola dalla condizione di equivalenza sulle basi



$$t_z = \frac{r}{R} t_{\max}$$

TORSIONE: plasticità - rottura

Cerchio del Mohr:



TORSIONE: SEZIONE RETTANGOLARE

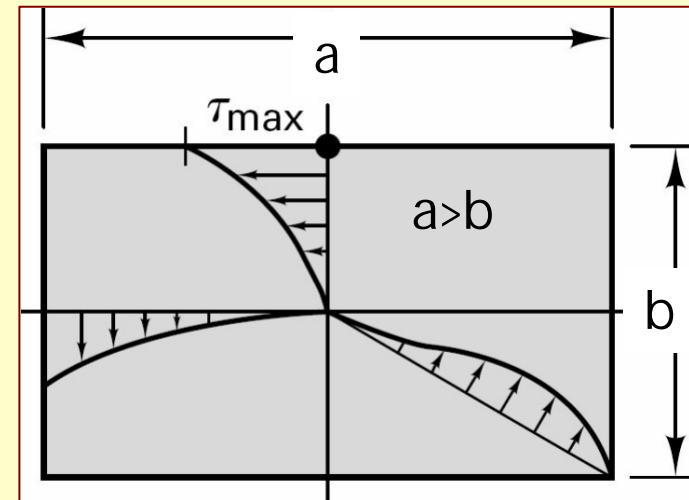
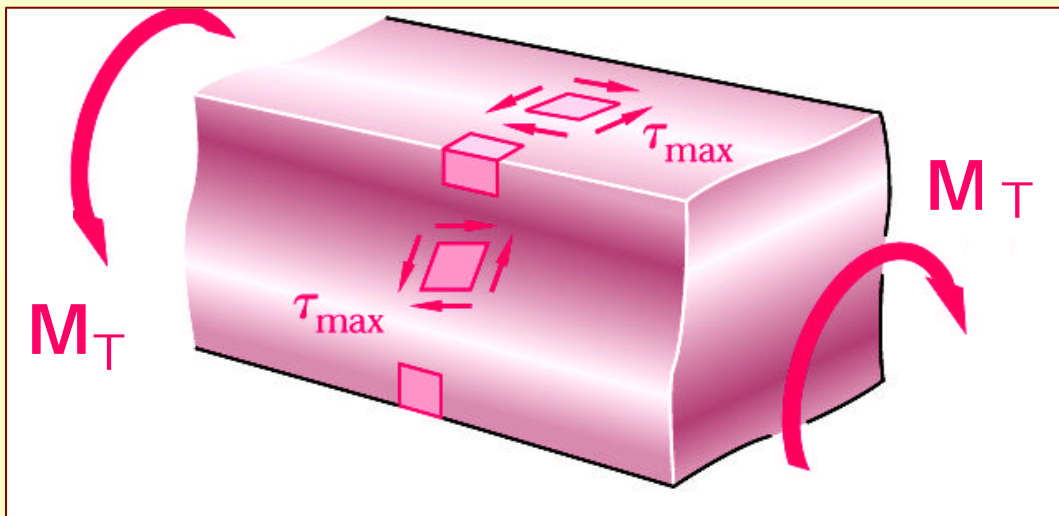
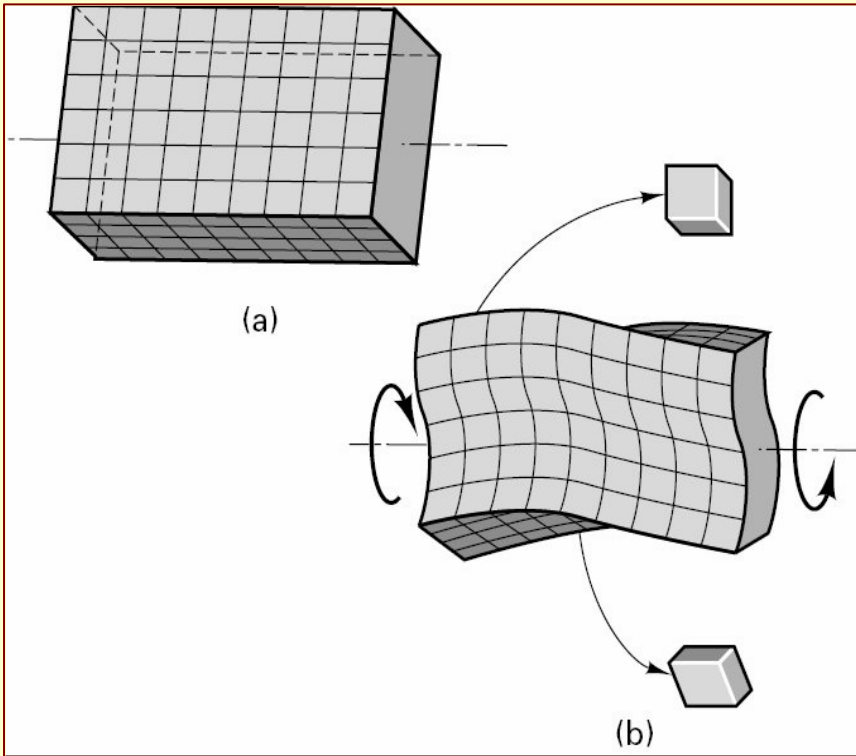
Le sezioni **non** si mantengono piane: $\omega_G(x, y) \neq 0$

SOLUZIONE APPROSSIMATA:

$$|t_z| = \frac{2M_t}{I_t} y \Rightarrow t_{z\max} = \frac{M_t}{I_t} b = \mathbf{a} \frac{M_t}{ab^2}; \quad I_t = \mathbf{b}ab^3$$

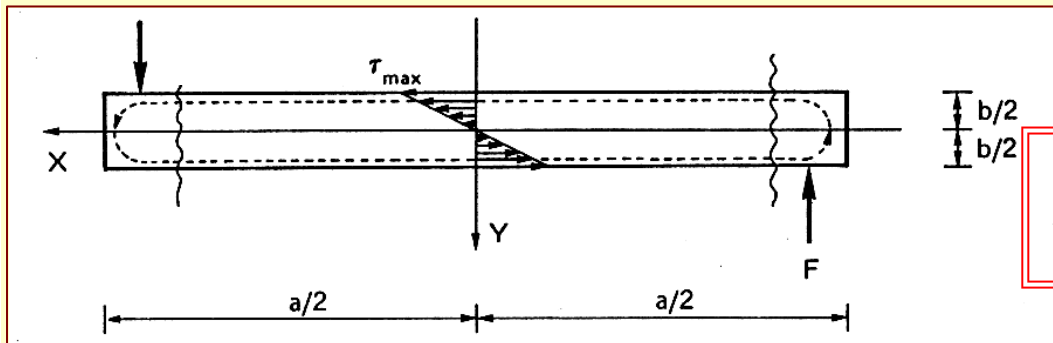
I_t fattore di rigidezza torsionale $[L^4]$

a/b	1	1.5	2	3	10	∞
α	4.80	4.33	4.06	3.74	3.20	3
β	0.141	0.196	0.229	0.263	0.312	1/3



TORSIONE

SEZIONI APERTE A SPESSORE SOTTILE: soluzioni approssimate

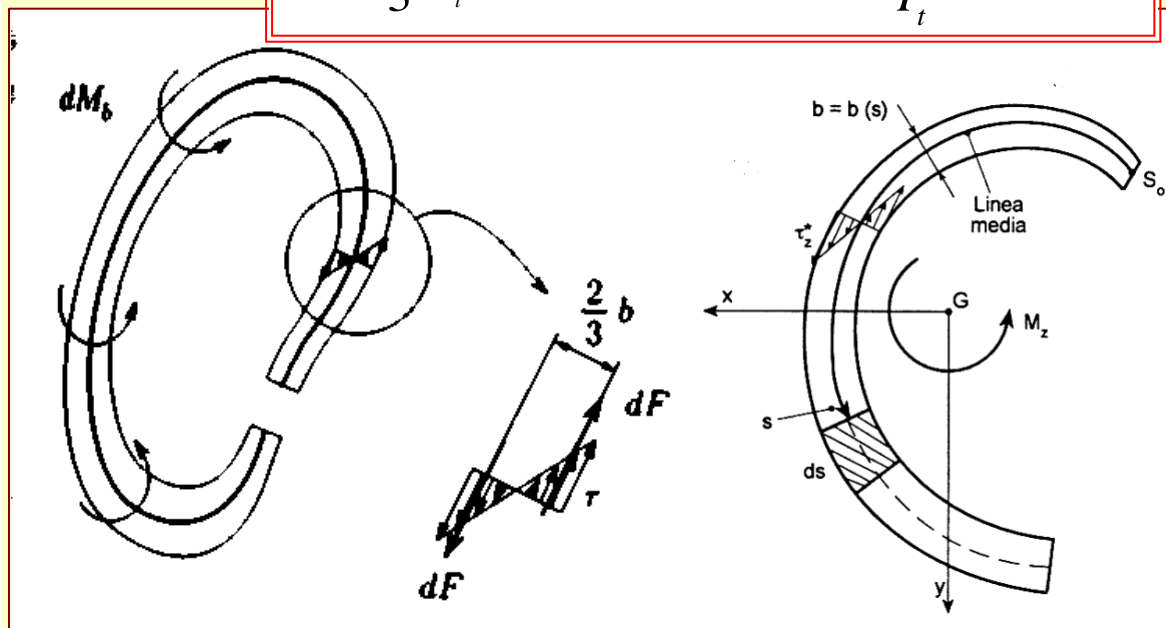


Sezioni rettangolari allungate

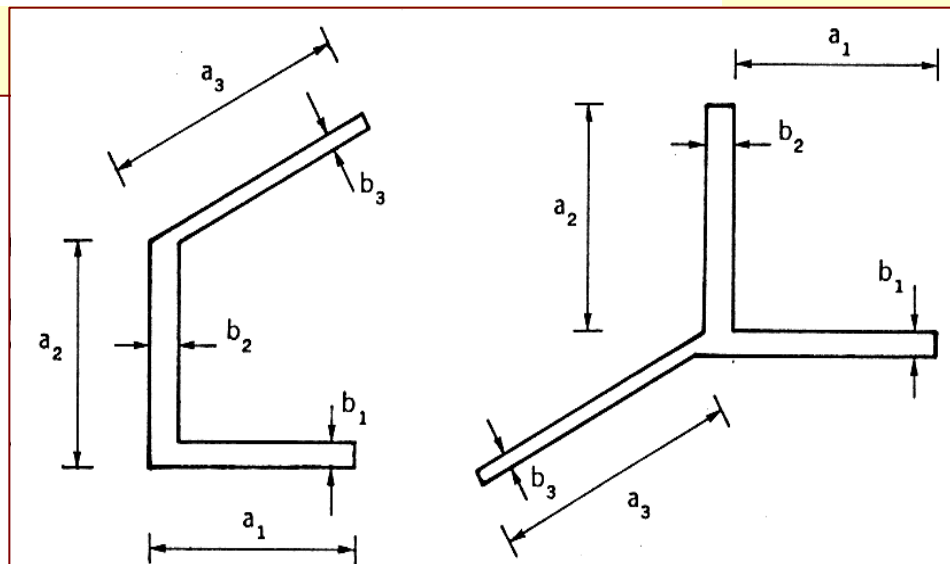
$$I_t = \frac{1}{3} ab^3; \quad t_{z_{\max}} = a \frac{M_t}{ab^2} = 3 \frac{M_t}{ab^2};$$

Le sezioni **non** si mantengono piane:

$$I_t = \frac{1}{3} \int_{s_l} b^3(s) ds \Rightarrow t_{z_{\max}} = \frac{M_t}{I_t} b(s)_{\max};$$



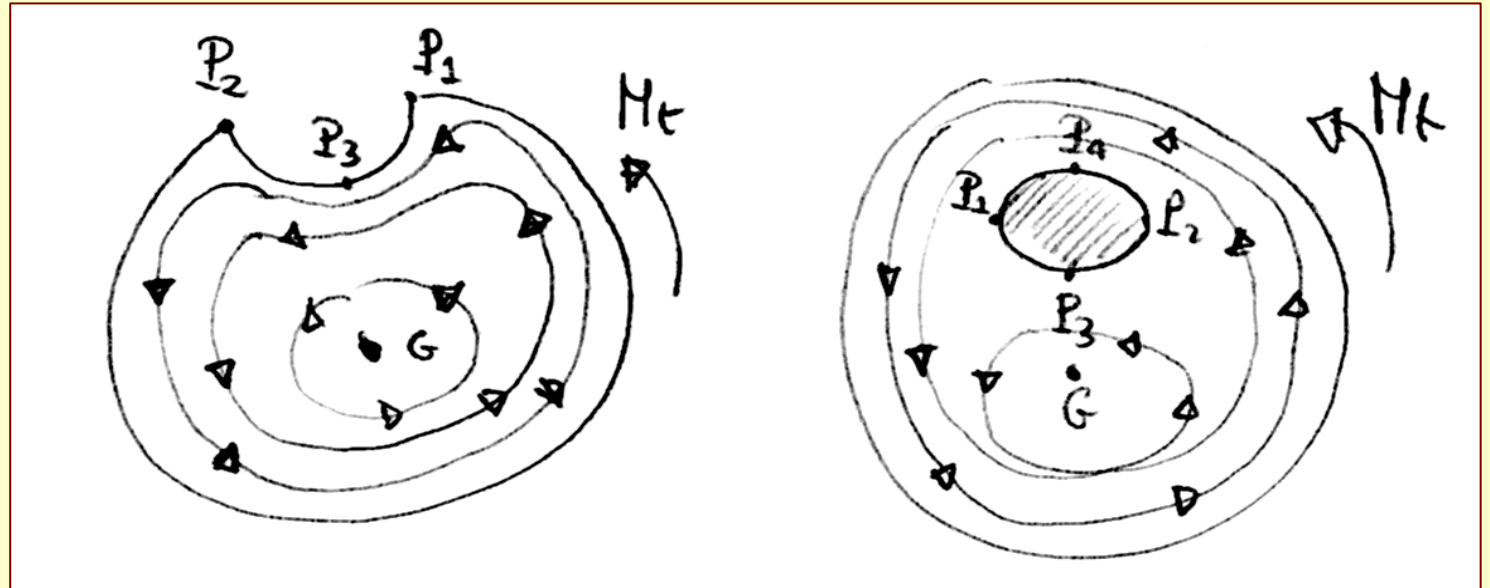
Sezioni di forma qualunque



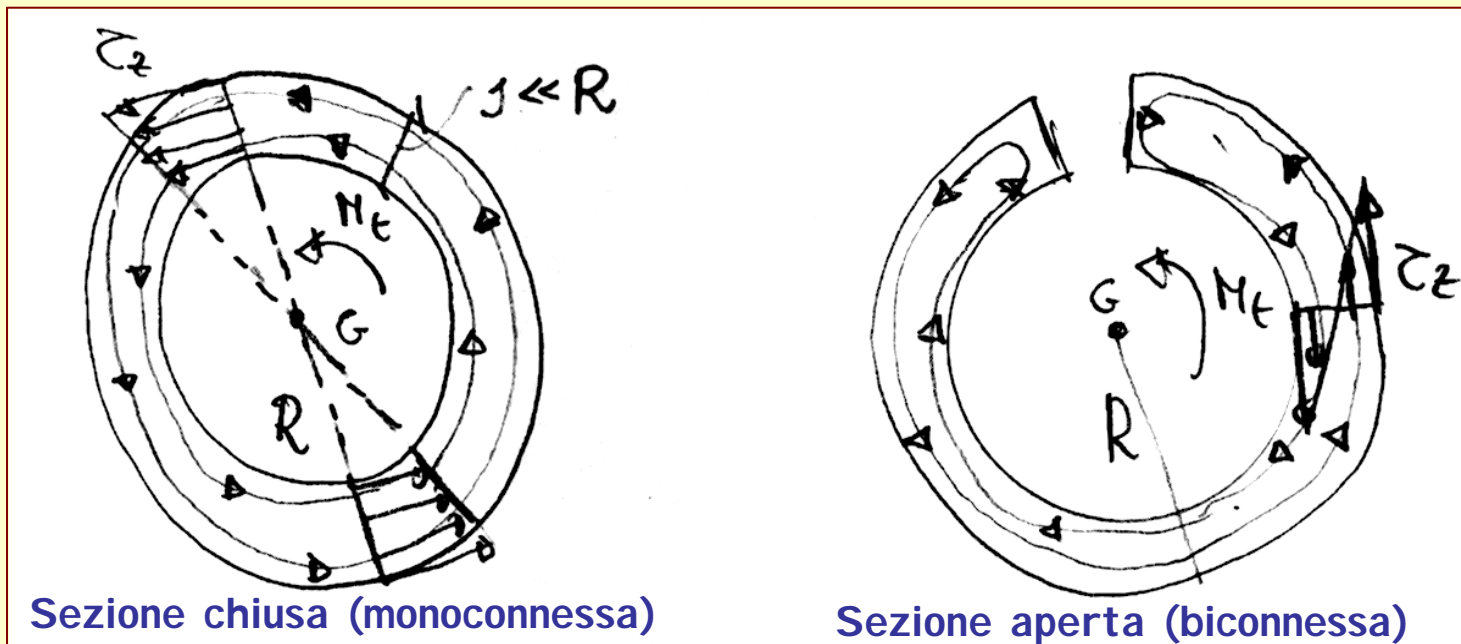
$$I_t^i = \frac{1}{3} a_i b_i^3; \quad I_t = \sum I_t^i \Rightarrow t_{z_{\max}} = \frac{M_t}{I_t} b_{i,\max};$$

TORSIONE: ANALOGIA IDRODINAMICA

L'ANALOGIA IDRODINAMICA è stata introdotta per comprendere qualitativamente l'andamento delle tensioni tangenziali nella torsione.



Incremento delle tensioni in corrispondenza di restringimenti della sezione: intagli o fori.

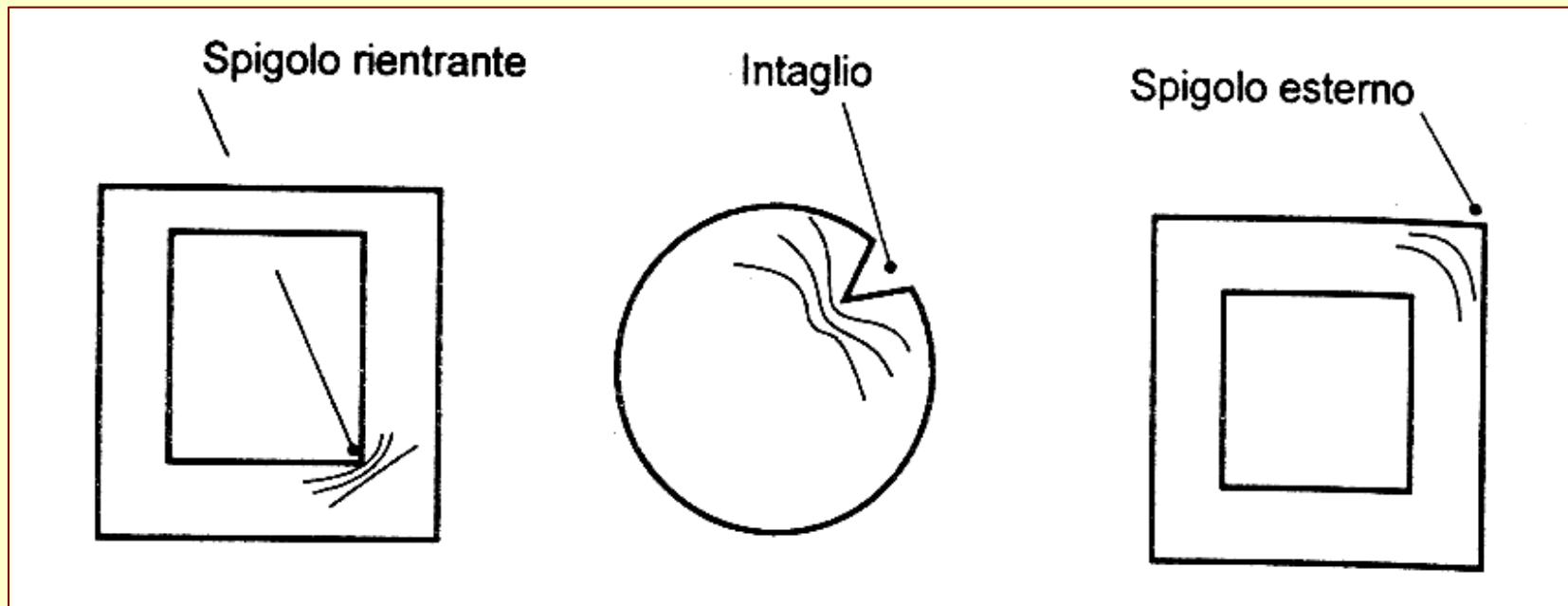
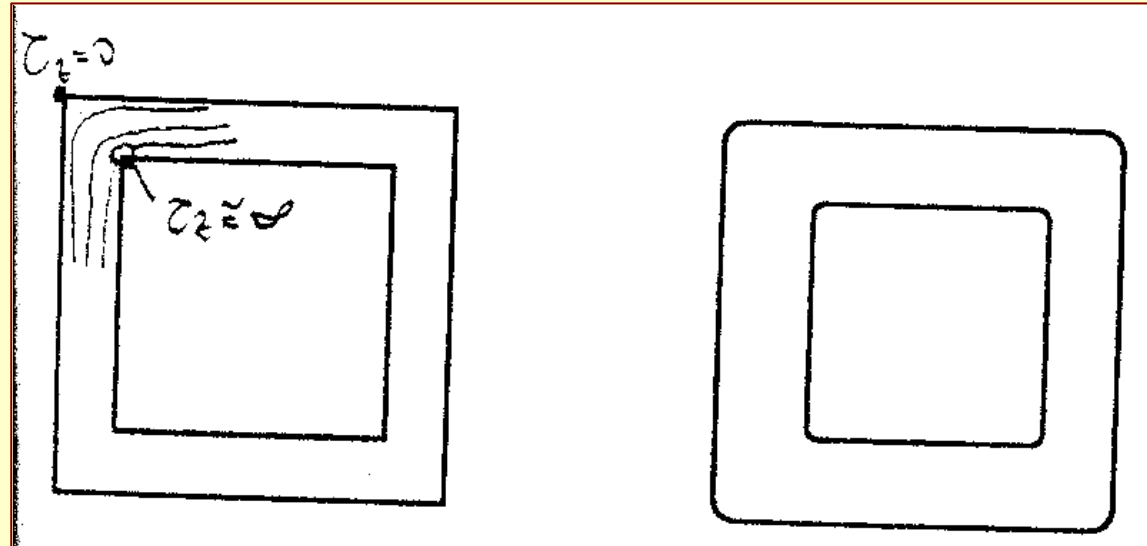


Andamento completamente diverso delle tensioni tangenziali nei casi di sezione aperte o chiuse.

TORSIONE: ANALOGIA IDRODINAMICA

Tensioni tangenziali quasi nulle in vicinanza di spigoli esterni (sporgenti).

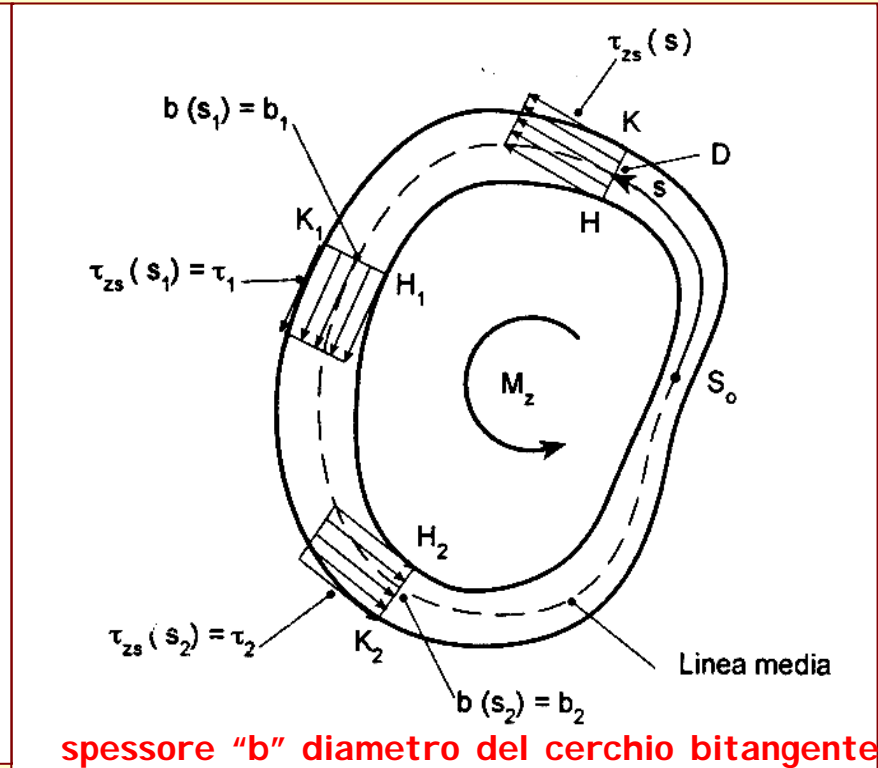
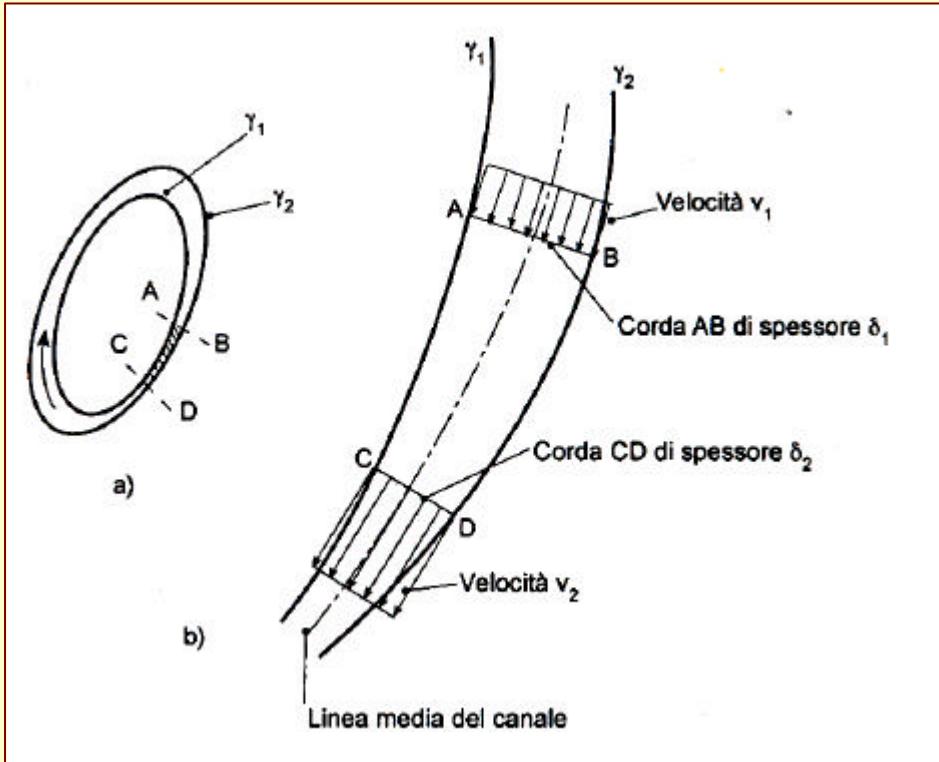
Viceversa tensioni elevate in corrispondenza di spigoli interni (rientranti).



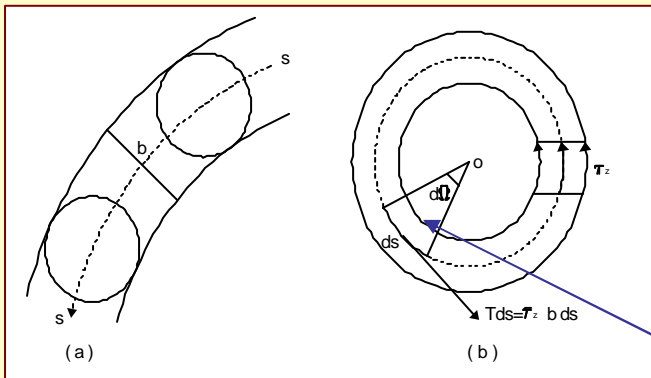
Per evitare concentrazioni di tensioni elevate o spreco dei materiali gli spigoli vengono arrotondati.

TORSIONE: ANALOGIA IDRODINAMICA

formula approssimata di BREDT: sezioni chiuse a spessore sottile



Le sezioni non si mantengono piane:



$$M_t = \int_{s_1} r(s) T ds; \quad T = t_z(s) b(s) = \text{costante} \Rightarrow t_z(s) = \frac{M_t}{2\Omega b(s)}$$

$$d\Omega = r(s) ds / 2 \Rightarrow r(s) ds = 2d\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{1}{2} \int_{s_1} r(s) ds$$