FLESSIONE RETTA

INTEGRAZIONE DELLE ε_{ij}

SU S_0, $\vec{n}=(0,0,-1)$

E SU S_L, $\vec{n}=(0,0,+1)$

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = +/- \dfrac{\bar{M}_x}{J_x} y \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

PER IL LEGAME:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\dfrac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y \\ \varepsilon_z = \dfrac{\bar{M}_x}{E J_x} y \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

SU S_L, $\vec{n}(\alpha_x, \alpha_y, 0)$

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = 0 \\ p_z = 0 \end{cases}$$

INTEGRANDO LE EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ CINEMATICA SI RICAVANO GLI SPOSTAMENTI u, v, w:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y \quad [1]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E J_x} y \quad [2]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\bar{M}_x}{E J_x} y \quad [3]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad [4]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad [5]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad [6]$$

INTEGRANDO LA [3] SI OTTIENE: $w(x,y,z) = \dfrac{\bar{M}_x}{E J_x} yz + w_0(x,y)$ [3']

LA [5] PUÒ ESSERE SCRITTA COME: $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$

TENENDO CONTO DELLA [3']: $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$

SI RICAVA INTEGRANDO: $u(x,y,z) = -\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + u_0(x,y)$ [5']

ANALOGAMENTE LA [6]: $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\partial w}{\partial y}$

TENENDO CONTO DELLA [3']: $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\bar{M}_x}{E J_x} z - \dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$

SI RICAVA INTEGRANDO: $v(x,y,z) = -\dfrac{\bar{M}_x}{2E J_x} z^2 - \dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + v_0(x,y)$ [6']

INSERENDO NELLA [1] L'ESPRESSIONE DI $u(x,y,z)$ RICAVATA NELLA [5']:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$$

IL TERMINE NOTO $-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$ NON CONTIENE z, ALLORA IL TERMINE $-\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} z$ DEVE ESSERE NULLO

SI OTTIENE: $$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$$

INTEGRANDO: $$u_0(x,y) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} yx + f_1(y) \quad [7]$$

ANALOGAMENTE, INSERENDO NELLA [2] L'ESPRESSIONE DI $v(x,y,z)$ RICAVATA NELLA [6']:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y \rightsquigarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$$

IL TERMINE NOTO $-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$ NON CONTIENE z, ALLORA IL TERMINE $-\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z$ DEVE ESSERE NULLO

SI OTTIENE: $$\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} y$$

INTEGRANDO: $$v_0(x,y) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{2EJ_x} y^2 + f_2(x) \quad [8]$$

INSERENDO NELLA [5'] IL VALORE DI $u_0(x,y)$ RICAVATO NELLA [7] SI OTTIENE:

$$u(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z - \frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} yx + f_1(y) \quad [9]$$

ANALOGAMENTE, INSERENDO NELLA [6'] IL VALORE DI $v_0(x,y)$ RICAVATO NELLA [8] SI OTTIENE:

$$v(x,y,z) = -\frac{\bar{M}_x}{2EJ_x} z^2 - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + \frac{\nu \bar{M}_x}{2EJ_x} y^2 + f_2(x) \quad [10]$$

INSERENDO NELLA [4] I VALORI DI $u(x,y,z)$ RICAVATO NELLA [9] E DI $v(x,y,z)$ RICAVATO NELLA [10]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z - \frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x + \frac{d f_1(y)}{dy} - \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y \partial x} z + \frac{d f_2(x)}{dx} = 0$$

RAGGRUPPANDO: $$-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x - 2\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{d f_1(y)}{dy} + \frac{d f_2(x)}{dx} = 0$$

IL TERMINE NOTO $-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x$ NON CONTIENE z, ALLORA IL TERMINE $-\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z$ DEVE ESSERE NULLO

SEPARANDO LE VARIABILI DEI TERMINI RIMANENTI: $$-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x + \frac{d f_2(x)}{dx} = -\frac{d f_1(y)}{dy} \quad [11]$$

2 FUNZIONI DIPENDENTI DA 2 VARIABILI DIVERSE (x,y) SONO UGUALI SOLO SE SONO COSTANTI:

$$-\frac{\nu \bar{M}_x}{EJ_x} x + \frac{d f_2(x)}{dx} = \alpha \quad [11'] \qquad \text{E} \qquad \frac{d f_1(y)}{dy} = -\alpha \quad [11'']$$ CON α = COSTANTE

w_0 DIPENDE DA x E y MA NON DA z, TUTTE LE SUE DERIVATE SECONDE SONO NULLE:

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

ALLORA w_0 HA LA FORMA DI 1 POLINOMIO COMPLETO: $w_0(x,y) = a + bx + cy$ [12]

INTEGRANDO LA [11'] SI OTTIENE LA FORMA GENERALE DI $f_2(x)$:

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\nu \overline{M}_x}{EJ_x} x + \alpha \rightsquigarrow f_2(x) = \frac{\nu \overline{M}_x}{2EJ_x} x^2 + \alpha x + d \quad [13]$$

E INTEGRANDO LA [11''] SI OTTIENE LA FORMA GENERALE DI $f_1(y)$:

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\alpha \rightsquigarrow f_1(y) = -\alpha y + e \quad [14]$$

QUINDI LE ESPRESSIONI DI u, v, w SONO:

$$u(x,y,z) = -\frac{\nu \overline{M}_x}{EJ_x} xy - bz - \alpha y + e \quad [15]$$

$$v(x,y,z) = \frac{\overline{M}_x}{EJ_x}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2) - cz + \alpha x + d \quad [16]$$

$$w(x,y,z) = \frac{\overline{M}_x}{EJ_x} yz + a + bx + cy \quad [17]$$

LE [15], [16] E [17] SONO LE ESPRESSIONI COMPLETE DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u, v, w

È POSSIBILE NOTARE CHE I TERMINI $-bz - \alpha y + e$ DELLA [15] DIPENDONO SOLO DA (y,z)

POSSIAMO DEFINIRE UNA FUNZIONE: $u_1(y,z) = (-bz - \alpha y + e)$

LA [15] DIVENTA: $u(x,y,z) = -\frac{\nu \overline{M}_x}{EJ_x} xy + u_1(y,z)$ [15']

ANALOGAMENTE I TERMINI $-cz + \alpha x + d$ DELLA [16] DIPENDONO SOLO DA (x,z)

POSSIAMO DEFINIRE UNA FUNZIONE $v_1(x,z) = (-cz + \alpha x + d)$

LA [16] DIVENTA: $v(x,y,z) = \frac{\overline{M}_x}{EJ_x}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2) + v_1(x,z)$ [16']

E I TERMINI $a + bx + cy$ DELLA [17] DIPENDONO SOLO DA (x,y)

POSSIAMO DEFINIRE UNA FUNZIONE $w_1(x,y) = (a + bx + cy)$

LA [17] DIVENTA: $w(x,y,z) = \frac{\overline{M}_x}{EJ_x} yz + w_1(x,y)$ [17']

LE FUNZIONI $u_1(y,z)$, $v_1(x,z)$ E $w_1(x,y)$ NON PRODUCONO DEFORMAZIONI, INFATTI:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \; , \; \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \; , \; \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \; , \; \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\alpha + \alpha = 0 \; ; \; \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = -b + b = 0 \; ; \; \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} = -c + c = 0$$

u_1, v_1 E w_1 SONO MOTI RIGIDI, POSSONO ESSERE TRASCURATI