Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 22.01.2020
Parte I - Testo 1

CdS **Edilizia** ☐ CdS **AdC** ☐ CdS **SdA** ☐

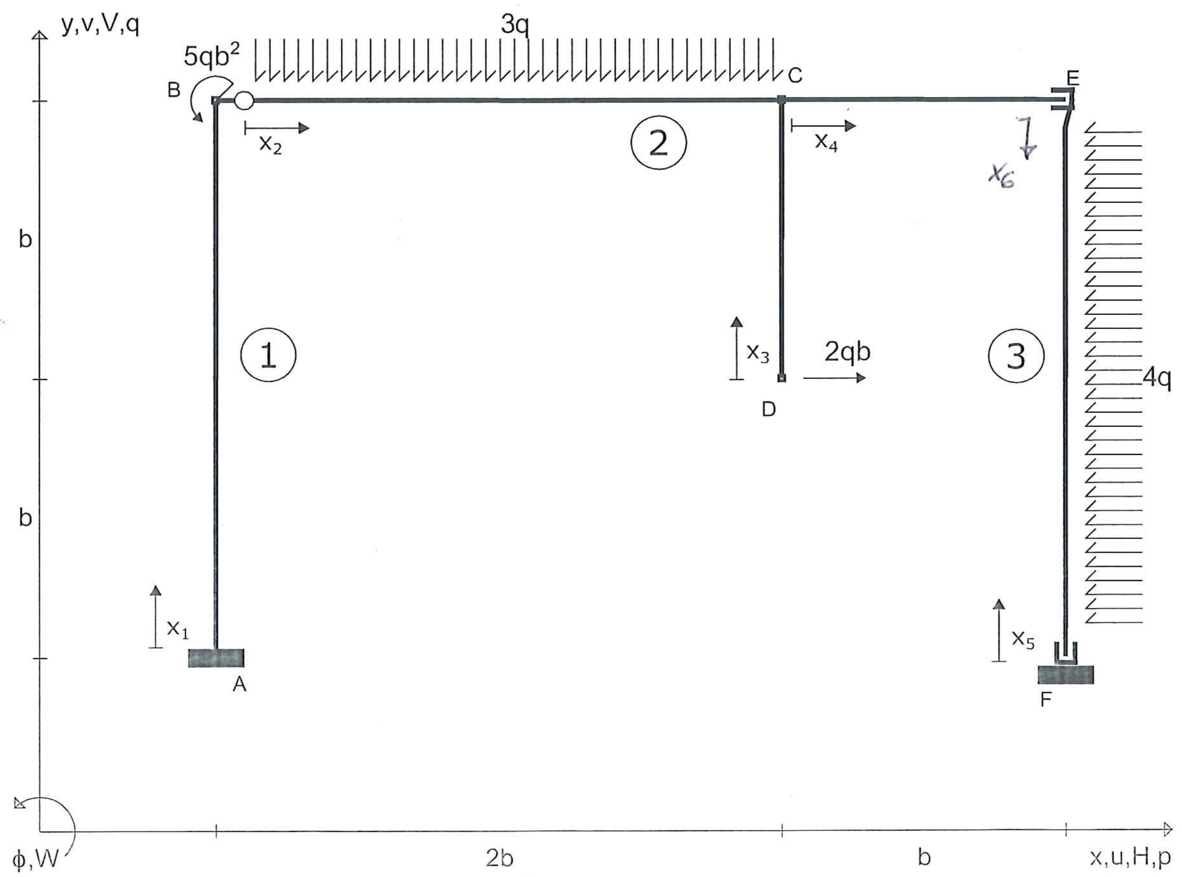
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:..e-mail:........................ Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 22.01.20*001



Eq. ausiliarie: $M_{z(B)}^{(1)} = 0$

$R_x^{(3)} = 0$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

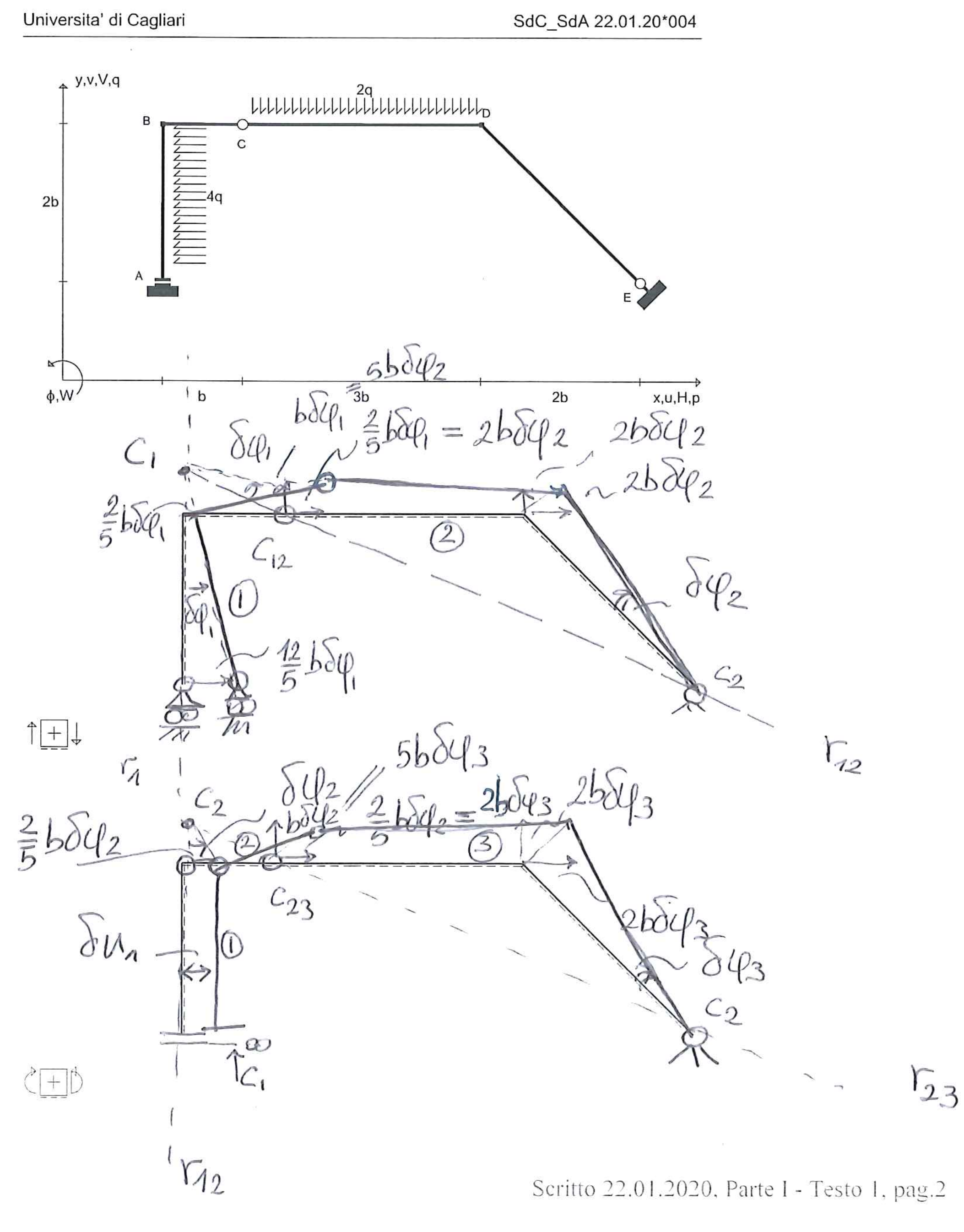
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto B, M_B.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CDE*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\frac{2}{5}b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$$

$$\boxed{\delta\varphi_2 = \frac{1}{5}\delta\varphi_1}$$

$$\frac{2}{5}b\delta\varphi_2 = 2b\delta\varphi_3$$

$$\boxed{\delta\varphi_3 = \frac{1}{5}\delta\varphi_2}$$

M_A (⇗) = $+\frac{77}{5}qb^2$; C₁ = (0, $\frac{12}{5}b$); C₂ = ($6b$, 0); C₁₂ = (b, $2b$);

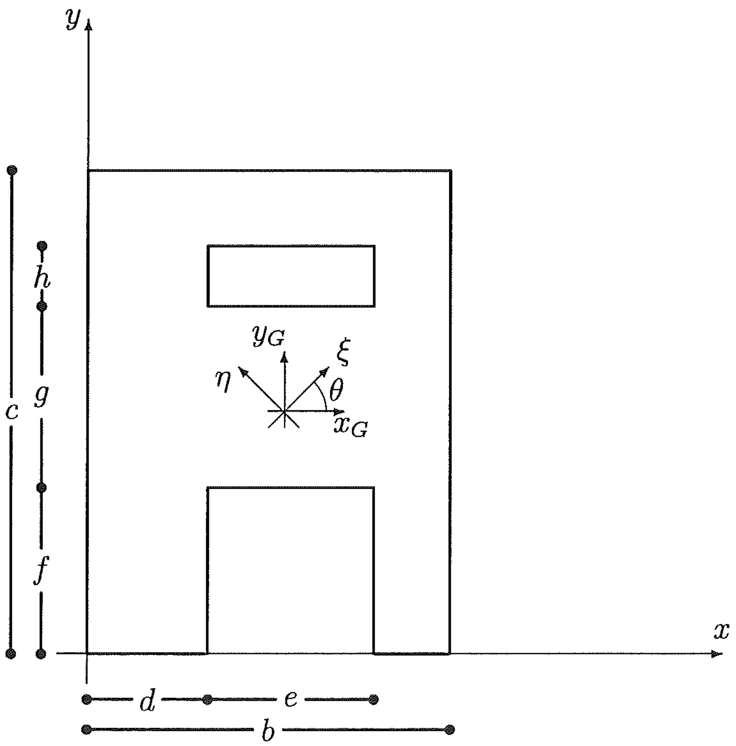
v_C = $b\delta\varphi_1 = 5b\delta\varphi_2$; u_D = $\frac{2}{5}b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$;

M_B (⇖□⇗) = $-\frac{37}{5}qb^2$; v_C = $b\delta\varphi_2 = 5b\delta\varphi_3$; u_B = $\frac{2}{5}b\delta\varphi_2 = \delta u_1$;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: <u>*Si noti che il disegno non è in scala!*</u>) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 6a$; $d = a$; $e = 2a$; $f = a$; $g = a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



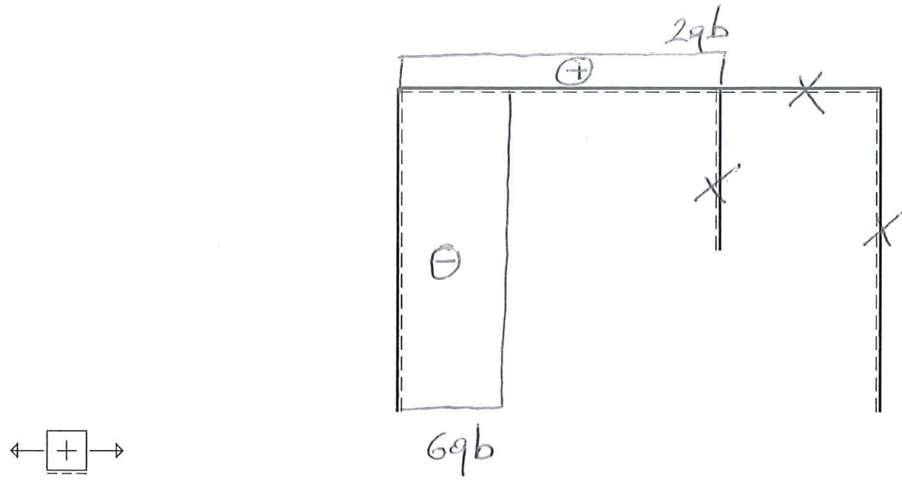
S_x = $32\,a^3$; S_y = $11\,a^3$;

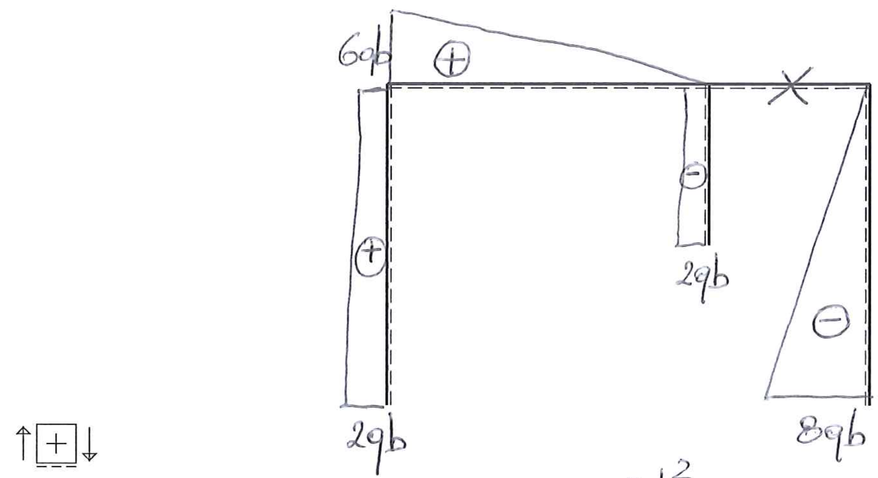
x_G = $11/10\,a = 1{,}1000\,a$; y_G = $16/5\,a = 3{,}2000\,a$;

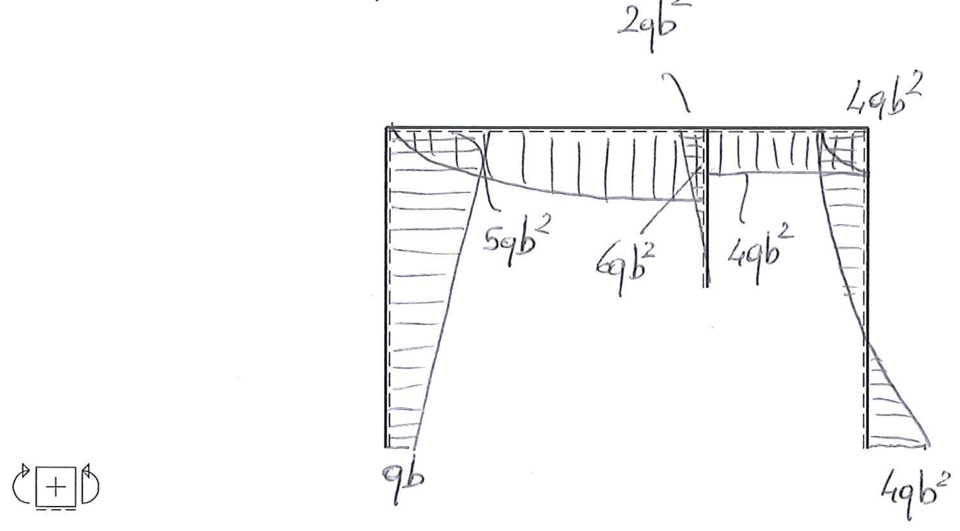
J_{xG} = $524/15\,a^4 = 34{,}9333\,a^4$; J_{yG} = $217/30\,a^4 = 7{,}2333\,a^4$;

J_{xGyG} = $9/5\,a^4 = 1{,}8000\,a^4$; tan 2θ = $-0{,}1299$;

$J_\xi = J_{max}$ = $35{,}0438\,a^4$; $J_\eta = J_{min}$ = $7{,}1168\,a^4$;







H_A (⇨) = $-2qb$; V_A (⇧) = $6qb$; M_A = $-qb^2$; H_F (⇨) = $8qb$; M_F = $-4qb^2$;

N_{AB} = $-6qb$; T_{AB} = $2qb$; M_{AB} = $qb^2 + 2qbx_1$;

N_{BC} = $+2qb$; T_{BC} = $6qb - 3qx_2$; M_{BC} = $6qbx_2 - \frac{3}{2}qx_2^2$;

N_{DC} = 0 ; T_{DC} = $-2qb$; M_{DC} = $2qbx_3$;

N_{CE} = 0 ; T_{CE} = 0 ; M_{CE} = $4qb^2$;

N_{FE} = 0 ; T_{FE} = $\begin{cases} -8qb + 4qx_5 \\ -4qx_6 \end{cases}$; M_{FE} = $\begin{cases} -4qb^2 + 8qbx_5 - 2qx_5^2 \\ 4qb^2 - 2qx_6^2 \end{cases}$;

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 22.01.2020
Parte I - Testo 2

CdS **Edilizia** □ CdS **AdC** □ CdS **SdA** □

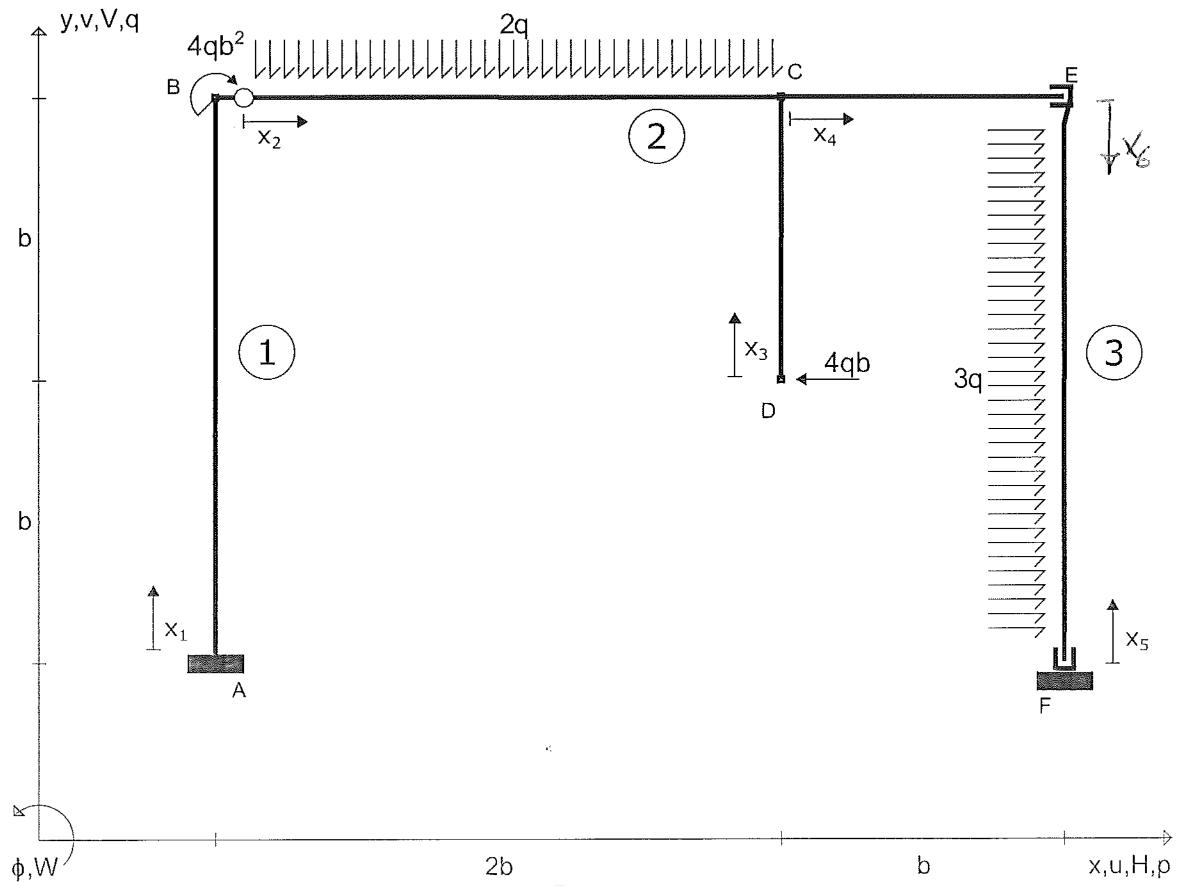
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:....................................e-mail:....................... Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 22.01.20*002



Eq. ausiliarie: $M^{(1)}_{z(B)} = 0$
$R^{(3)}_{x} = 0$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

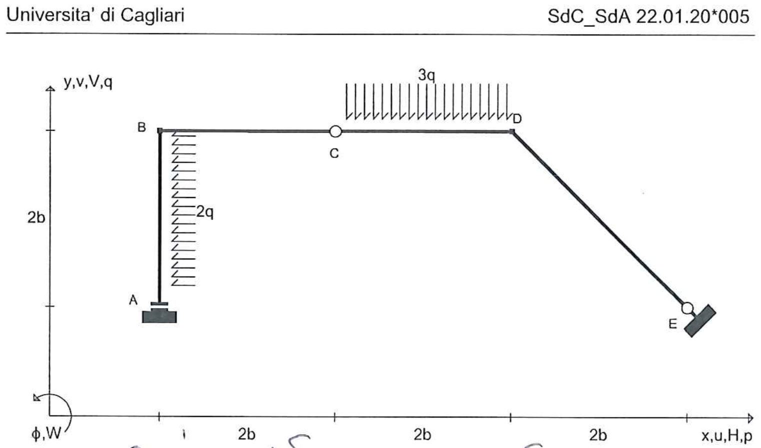
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto B, M_B.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CDE*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

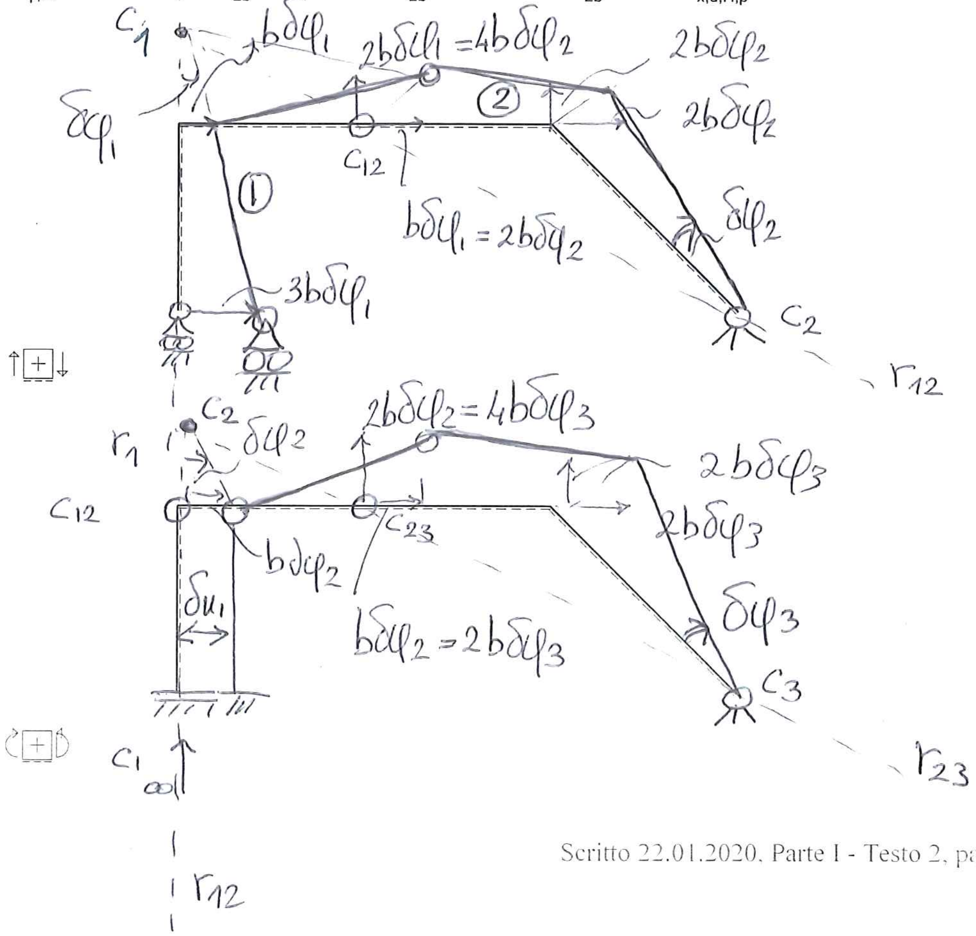


$b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2}$

$2b\delta\varphi_2 = 4b\delta\varphi_3$

$\boxed{\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_3}$



M_A (⟲) = +17 qb^2; C_1 = (0, 3b); C_2 = (6b, 0); C_{12} = (2b, 2b);

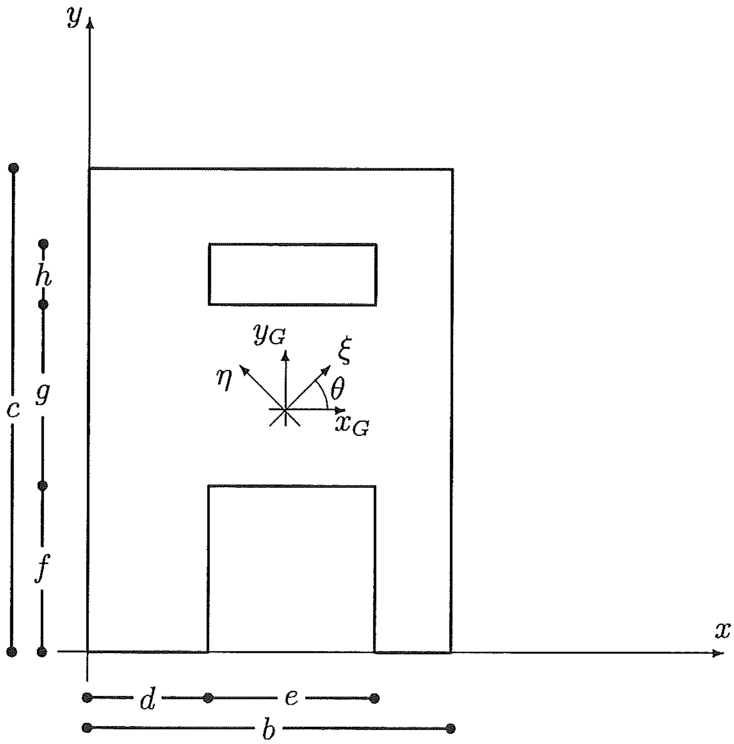
v_C = $2b\delta\varphi_1 = 4b\delta\varphi_2$; u_D = $2b\delta\varphi_2 = b\delta\varphi_1$

M_B (⟲□⟳) = $-13qb^2$; v_C = $2b\delta\varphi_2 = 4b\delta\varphi_3$; u_B = $b\delta\varphi_2 = \delta u_1$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: <u>*Si noti che il disegno non è in scala!*</u>) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 6a$; $d = a$; $e = 2a$; $f = 2a$; $g = a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



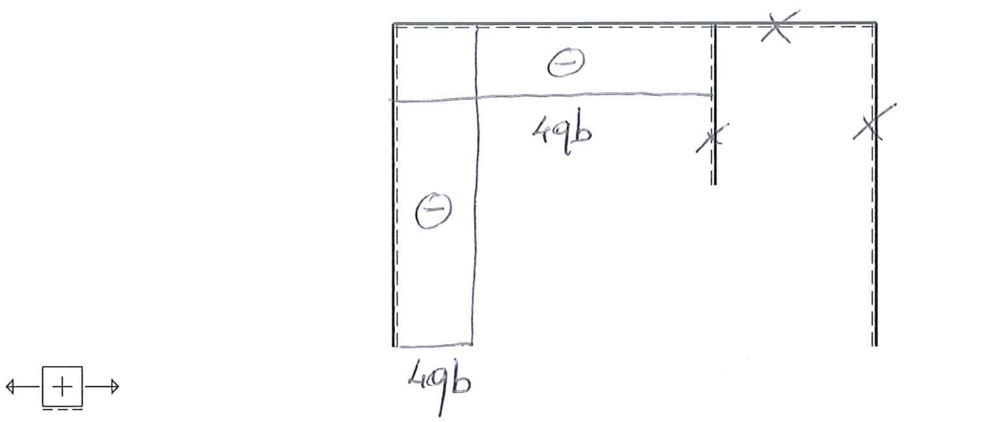
S_x = $34\,a^3$; S_y = $11\,a^3$;

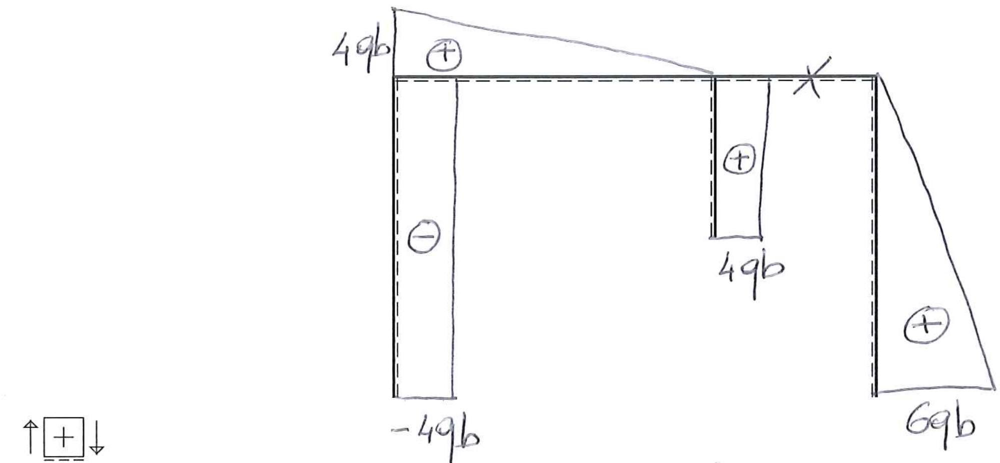
x_G = $11/10\,a = 1{,}1000\,a$; y_G = $17/5\,a = 3{,}4000\,a$;

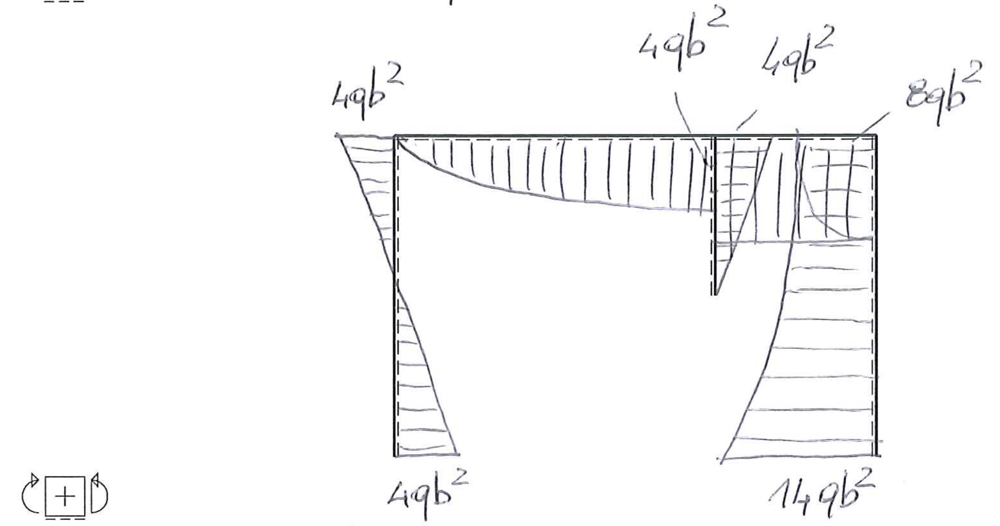
J_{xG} = $446/15\,a^4 = 29{,}7333\,a^4$; J_{yG} = $217/30\,a^4 = 7{,}2333\,a^4$;

J_{xGyG} = $18/5\,a^4 = 3{,}6000\,a^4$; tan 2θ = $-8/25 = -0{,}3200$;

$J_\xi = J_{max}$ = $30{,}2952\,a^4$; $J_\eta = J_{min}$ = $6{,}6713\,a^4$;







H_A (⇨) = $4qb$; V_A (⇧) = $4qb$; M_A = $-4qb^2$; H_F (⇨) = $-6qb$; M_F = $14qb^2$;

N_{AB} = $-4qb$; T_{AB} = $-4qb$; M_{AB} = $4qb^2 - 4qbx_1$;

N_{BC} = $-4qb$; T_{BC} = $4qb - 2qx_2$; M_{BC} = $4qbx_2 - qx_2^2$;

N_{DC} = 0 ; T_{DC} = $+4qb$; M_{DC} = $-4qbx_3$;

N_{CE} = 0 ; T_{CE} = 0 ; M_{CE} = $+8qb^2$;

N_{FE} = 0 ; T_{FE} = $\begin{cases} 6qb - 3qx_5 \\ 3qx_6 \end{cases}$; M_{FE} = $\begin{cases} 14qb^2 - 6qbx_5 + \frac{3}{2}qx_5^2 \\ 8qb^2 + \frac{3}{2}qx_6^2 \end{cases}$;

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 22.01.2020

Parte I - Testo 3

CdS **Edilizia** □ CdS **AdC** □ CdS **SdA** □

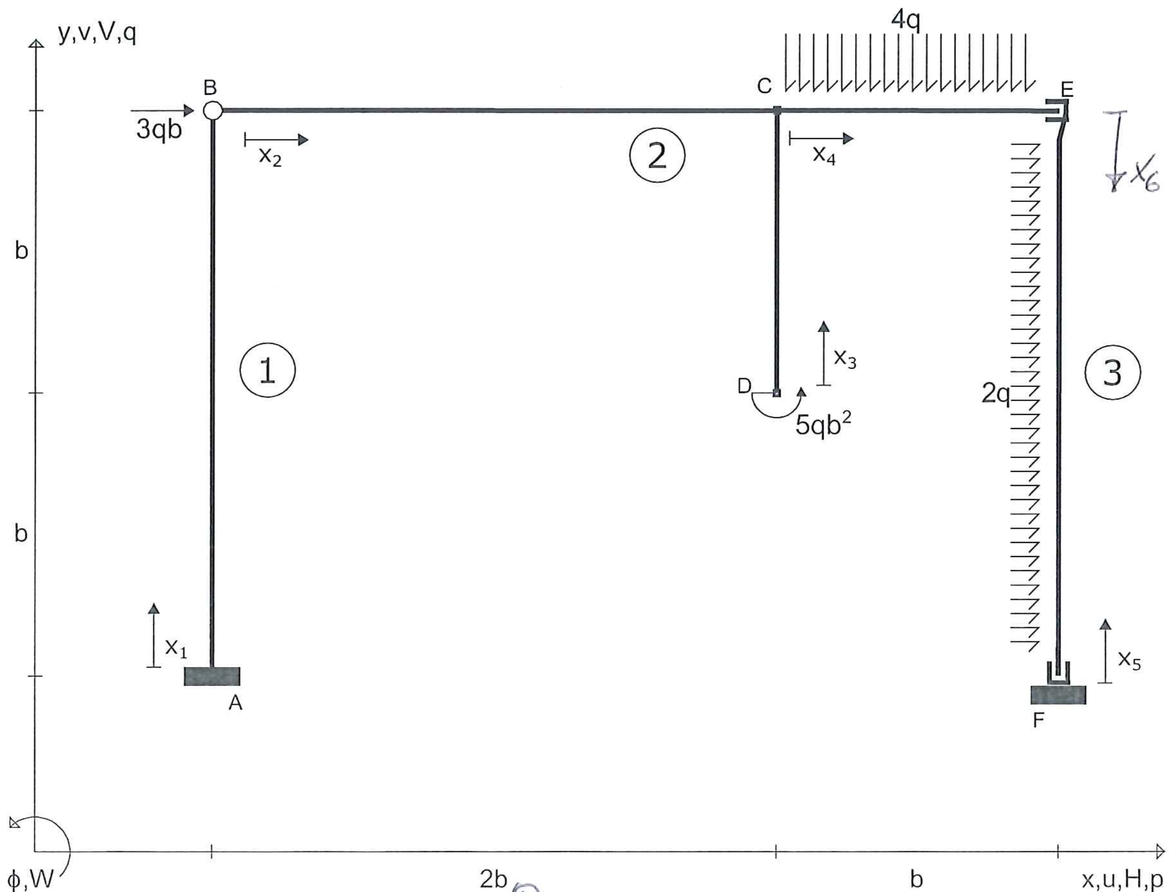
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:.................................e-mail:...................... Matricola:......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 22.01.20*003



Eq. ausiliarie: $M_{Z(B)}^{(1)} = 0$

$R_x^{(3)} = 0$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

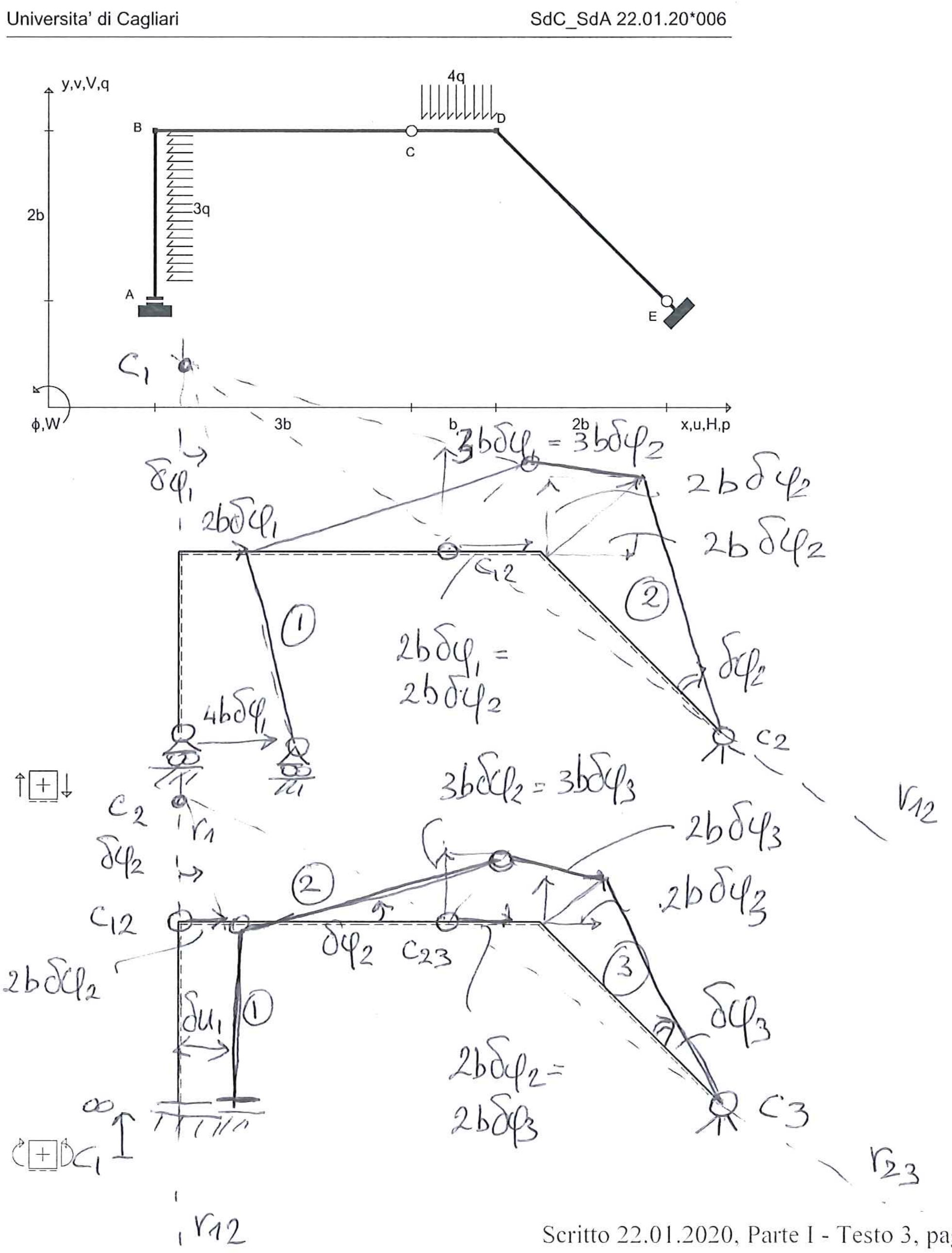
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto B, M_B.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CDE*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$2b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2}$

$2b\delta\varphi_2 = 2b\delta\varphi_3$

$\boxed{\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3}$

M_A (↺) = +28 qb^2; C_1 = (0, 4b); C_2 = (6b, 0); C_{12} = (3b, 2b);

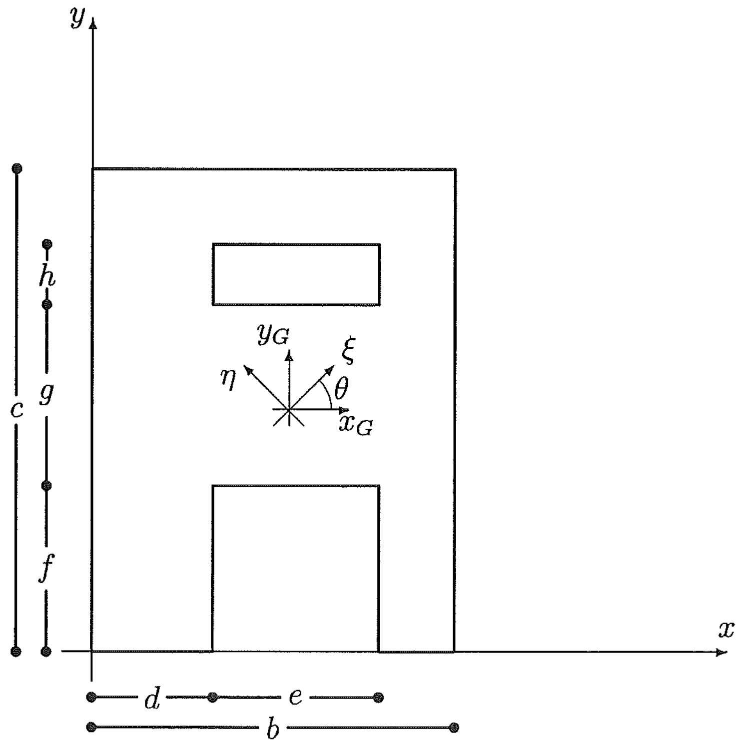
v_C = $3b\delta\varphi_1 = 3b\delta\varphi_2$; u_D = $2b\delta\varphi_2 = 2b\delta\varphi_1$

M_B (↻□↺) = $-22\,qb^2$; v_C = $3b\delta\varphi_2 = 3b\delta\varphi_3$; u_B = $\delta u_1 = 2b\delta\varphi_2$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: <u>*Si noti che il disegno non è in scala!*</u>) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 6a$; $d = a$; $e = 2a$; $f = 3a$; $g = a$; $h = a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



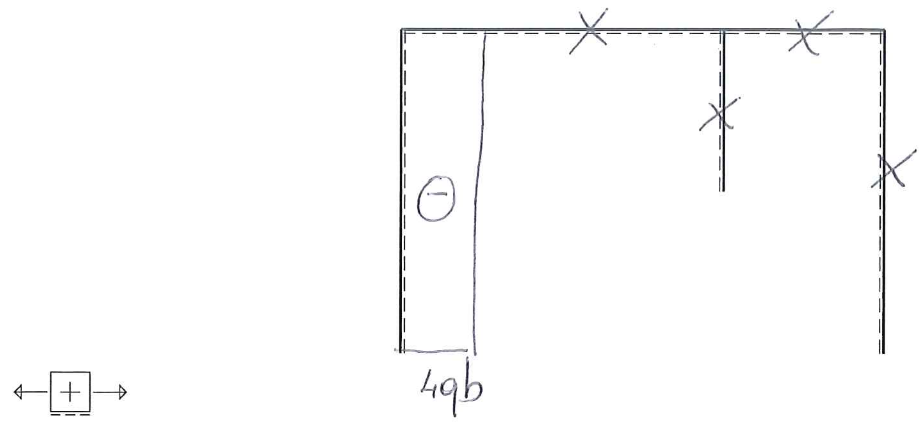
S_x = 36 a^3; S_y = 11 a^3;

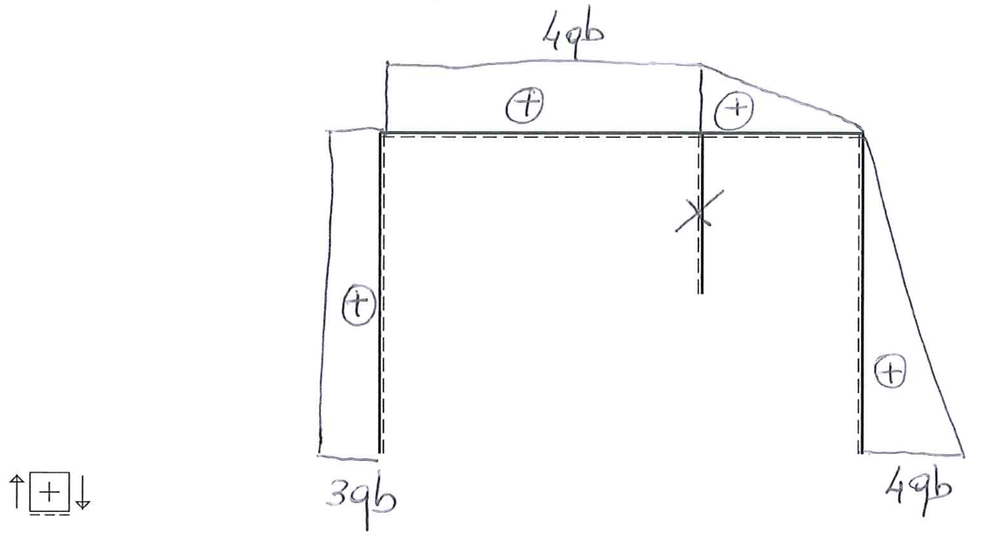
x_G = 11/10 a = 1,1000 a; y_G = 18/5 a = 3,6000 a;

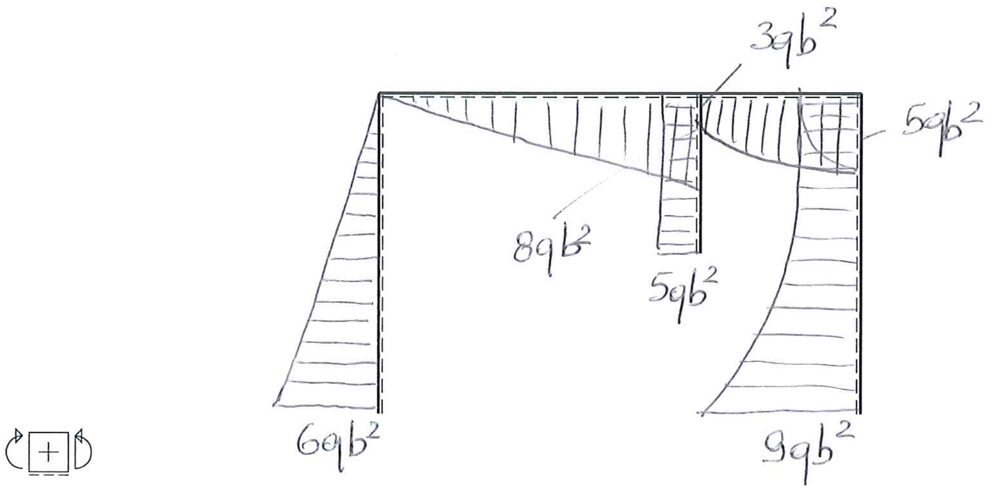
J_{xG} = 416/15 a^4 = 27,7333 a^4; J_{yG} = 217/30 a^4 = 7,2333 a^4;

J_{xGyG} = 27/5 a^4 = 5,4000 a^4; tan 2θ = −108/205 = −0,5268;

$J_\xi = J_{max}$ = 23,0687 a^4; $J_\eta = J_{min}$ = 5,8878 a^4;







H_A (⇨) = $-3qb$; V_A (⇧) = $4qb$; M_A = $6qb^2$; H_F (⇨) = $-4qb$; M_F = $9qb^2$;

$N_{AB} = -4qb$; $T_{AB} = +3qb$; $M_{AB} = -6qb^2 + 3qbx_1$;

$N_{BC} = 0$; $T_{BC} = +4qb$; $M_{BC} = 4qbx_2$;

$N_{DC} = 0$; $T_{DC} = 0$; $M_{DC} = 5qb^2$;

$N_{CE} = 0$; $T_{CE} = 4qb - 4qx_4$; $M_{CE} = 3qb^2 + 4qbx_4 - 2qx_4^2$;

$N_{FE} = 0$; $T_{FE} = \begin{cases} 4qb - 2qx_5 \\ 2qx_6 \end{cases}$; $M_{FE} = \begin{cases} 9qb^2 - 4qbx_5 + qx_5^2 \\ 5qb^2 + qx_6^2 \end{cases}$;