TRAVI VINCOLATE: EFFETTO DEL NUMERO DEI GDV E DELLA DISPOSIZIONE DEI VINCOLI SULLA RISOLUBILITÀ DELLE EQUAZIONI CARDINALI.

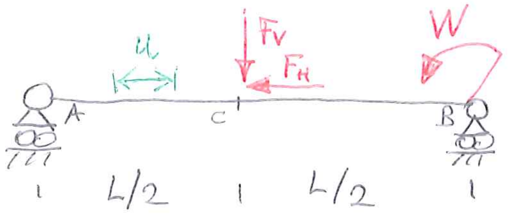
SI STUDIA LA STRUTTURA ALGEBRICA DEL SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI GENERATO DALLE EQUAZIONI CARDINALI DI EQUILIBRIO PER DETERMINARE SE

- QUESTE SONO RISOLUBILI ⇒ SE ESISTE SOLUZIONE, L'EQUILIBRIO È POSSIBILE
- QUESTE NON SONO RISOLUBILI ⇒ SE NON ESISTE SOLUZIONE, L'EQUILIBRIO NON È POSSIBILE.

NEL PRIMO CASO SI DEVE INOLTRE COMPRENDERE SE

- SOLUZIONE È UNICA (DETERMINATA) ⇒ REAZIONI VINCOLARI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE DAI CARICHI APPLICATI
- SOLUZIONE NON È UNICA (INDETERMINATA) ⇒ REAZIONI VINCOLARI SONO SOLO PARZIALMENTE DETERMINATE DAI CARICHI APPLICATI: RESTANO DELLE QUANTITÀ INDETERMINABILI.

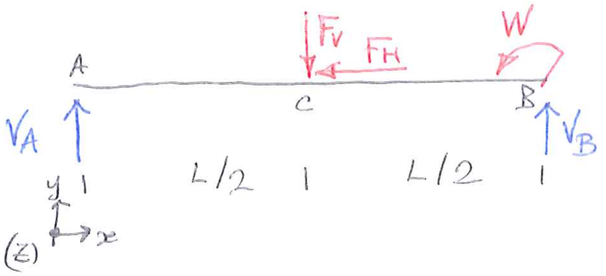
A) TRAVE IPOSTATICA (GDV < GDL)



$$\Rightarrow \begin{cases} GDV = 1(A) + 1(B) = 2 \quad [= M] \\ GDL = 3 \quad [= N] \end{cases} \Rightarrow GDV < GDL$$

I VINCOLI SONO INSUFFICIENTI A INIBIRE SPOSTAMENTI RIGIDI: RESTANO POSSIBILITÀ DI SPOSTAMENTO RIGIDO: IN QUESTO CASO TRASLAZIONE ORIZZONTALE, u

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



EQUAZIONI CARDINALI DI EQUILIBRIO: LE INCOGNITE SONO INDICATE IN BLU; LE QUANTITÀ NOTE IN ROSSO

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad -F_H = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - F_V + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad -F_V \frac{L}{2} + W + V_B L = 0 \end{cases} \qquad [1]$$

IL SISTEMA [1] PUÒ ESSERE RISCRITTO SEPARANDO LE INCOGNITE (REAZIONI VINCOLARI) MOLTIPLICATE DA OPPORTUNI COEFFICIENTI DAI TERMINI NOTI (CARICHI APPLICATI):

$$\begin{cases} 0 = F_H \\ V_A + V_B = F_V \\ V_B L = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot V_A + 0 \cdot V_B = F_H \\ 1 \cdot V_A + 1 \cdot V_B = F_V \\ 0 \cdot V_A + L\, V_B = F_V \cdot \frac{L}{2} - W \end{cases} \quad [1']$$

E SI NOTA CHE IL SISTEMA È COSTITUITO DA N EQUAZIONI (QUANTI SONO I GDL) IN M INCOGNITE (QUANTI SONO I GDV).
IN FORMA MATRICIALE SI PUÒ SCRIVERE LA [1'] COSÌ:

$$\underset{(N,M)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix}} \underset{(M,1)}{\begin{Bmatrix} V_A \\ V_B \end{Bmatrix}} = \underset{(N,1)}{\begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_V \frac{L}{2} - W \end{Bmatrix}} \quad [1'']$$

↑ MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE

↑ MATRICE COLONNA (VETTORE) DELLE INCOGNITE

↑ MATRICE COLONNA (VETTORE) DEI TERMINI NOTI

SI VERIFICA FACILMENTE CHE IL SISTEMA [1'] SI OTTIENE MOLTIPLICANDO RIGHE PER COLONNE LE DUE MATRICI CHE COMPAIONO A PRIMO MEMBRO DELLA [1'']. LA CONFORMITÀ GARANTISCE CHE MOLTIPLICANDO UNA MATRICE (N, M) PER UNA (M,1) SI OTTIENE UNA MATRICE (N,1).

↑ ↑ n° colonne

N° righe

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE È RETTANGOLARE POICHÉ $N \neq M$; INOLTRE È RETTANGOLARE ALTA (PIÙ RIGHE CHE COLONNE) DATO CHE $M < N$

IN QUESTE CIRCOSTANZE LA CONDIZIONE DI RISOLUBILITÀ DEL SISTEMA È DATA DAL TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI:

IL SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE LINEARI AMMETTE SOLUZIONE SE IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE È EGUALE AL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA (MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE ORLATA DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI); SE LE 2 MATRICI HANNO RANGO DIVERSO, NON AMMETTE SOLUZIONE.

SI RICORDA CHE

RANGO DI UNA MATRICE È IL MASSIMO ORDINE DEI MINORI NON NULLI ESTRAIBILI DALLA MATRICE STESSA

MINORE DI UNA MATRICE È IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE (NECESSARIAMENTE QUADRATA) OTTENIBILE DALLA MATRICE DATA PER ELIMINAZIONE DI RIGHE E/O DI COLONNE.

NEL CASO PRESENTE, DETTA $\mathcal{A}$ LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE E CON $\mathcal{C}$ LA MATRICE COMPLETA (MATRICE $\mathcal{A}$ ORLATA DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI) RISULTA:

$$\mathcal{A}_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \qquad \mathcal{C}_{(3,3)} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & F_H \\ 1 & 1 & F_V \\ 0 & L & F_V \frac{L}{2} - W \end{array}\right]$$

$$\mathrm{DET}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \end{smallmatrix}\right) = L \neq 0$$

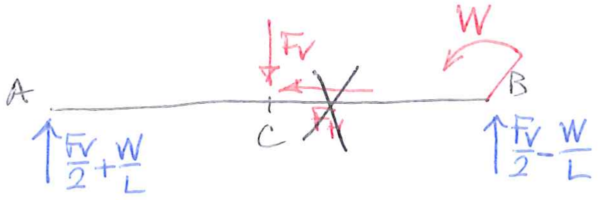
DA $\mathcal{A}$ SI PUÒ ESTRARRE UN UNICO MINORE DI ORDINE 2 (QUELLO INDICATO); PERTANTO $\mathrm{RANGO}(\mathcal{A}) = 2$; DA $\mathcal{C}$ SI PUÒ INVECE ESTRARRE ANCHE UN MINORE DI ORDINE 3, CORRISPONDENTE AL SUO DETERMINANTE; SVILUPPANDO RISPETTO AGLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA SI TROVA $\mathrm{DET}(\mathcal{C}) = F_H L$.

PERTANTO, SE $F_H \neq 0$ SI HA $\mathrm{DET}(\mathcal{C}) \neq 0$, $\underset{\substack{\| \\ 3}}{\mathrm{RANGO}(\mathcal{C})} \neq \underset{\substack{\| \\ 2}}{\mathrm{RANGO}(\mathcal{A})}$ E IL SISTEMA È IMPOSSIBILE (NON AMMETTE SOLUZIONI)

SE INVECE $F_H = 0$ SI TROVA $\mathrm{DET}(\mathcal{C}) = 0$ E $\underset{\substack{\| \\ 2}}{\mathrm{RANGO}(\mathcal{C})} = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\mathrm{RANGO}(\mathcal{A})}$ E IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE.

TUTTAVIA LA CONDIZIONE INDICATA ($F_H = 0$) RIGUARDA I CARICHI ESTERNI: SE LA CONDIZIONE È SODDISFATTA LA PRIMA EQUAZIONE DELLE [1] È VERIFICATA COME UN'IDENTITÀ, E LE RESTANTI DUE FORNISCONO:

$$V_B = \frac{F_V}{2} - \frac{W}{L} \; ; \; V_A = \frac{F_V}{2} + \frac{W}{L} \; ,$$ QUINDI GRAFICAMENTE:



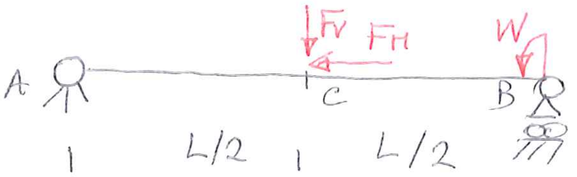
SE $F_H \neq 0$ L'EQUILIBRIO È IMPOSSIBILE PERCHÉ I VINCOLI NON POSSONO FORNIRE REAZIONE CHE LA BILANCI, ANNULLANDONE L'EFFETTO.

CIÒ COMPORTA CHE LA TRAVE DATA PUÒ STARE IN EQUILIBRIO SOLO PER PARTICOLARI SISTEMI DI CARICHI ESTERNI, NON PER TUTTI: QUALUNQUE FORZA ESTERNA ORIZZONTALE SFRUTTA MOBILITÀ DELLA TRAVE E RENDE

IMPOSSIBILE L'EQUILIBRIO.

LA CIRCOSTANZA ORA EVIDENZIATA È VERA PER TUTTE LE TRAVI (E, IN GENERALE, PER TUTTE LE STRUTTURE) IPOSTATICHE: L'EQUILIBRIO È POSSIBILE SOLO PER PARTICOLARI SISTEMI DI CARICHI ESTERNI, CHE NON SFRUTTANO LA LABILITÀ DELLA TRAVE/STRUTTURA SODDISFACENDO COME IDENTITÀ LE EQUAZIONI CARDINALI IN CUI NON COMPAIONO REAZIONI VINCOLARI.

B) TRAVE ISOSTATICA (GDV = GDL) A VINCOLI BEN DISPOSTI, <u>NON LABILE</u>

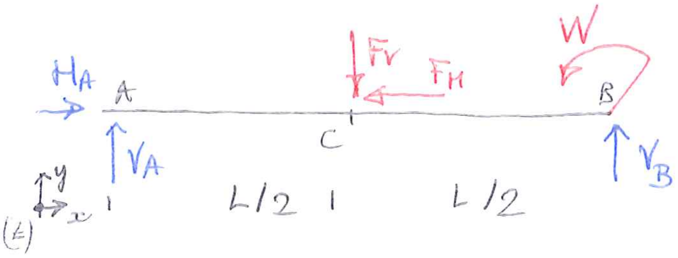


$$\begin{cases} GDV = 2(A) + 1(B) = 3 \, [= M] \\ GDL = 3 \, [= N] \end{cases} \Rightarrow GDV = GDL$$

PER QUANTO GIÀ ACCENNATO NELLA LEZIONE PRECEDENTE, I VINCOLI, OLTRE A ESSERE IN NUMERO SUFFICIENTE A BLOCCARE TUTTI I GDL SONO ANCHE <u>BEN DISPOSTI</u>: LA ROTAZIONE φ LASCIATA LIBERA DALLA CERNIERA IN A ~~PRODURREB~~ PRODURREBBE IN B (LIMITANDOSI A CONSIDERARE ROTAZIONI DI AMPIEZZA INFINITESIMA) UNO SPOSTAMENTO VERTICALE; QUESTO VIENE NEUTRALIZZATO DAL CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE COLLOCATO IN B, CHE BLOCCA LO SPOSTAMENTO VERTICALE IN B.

SI NOTI CHE PER VALUTARE LA CORRETTA POSIZIONE DEI VINCOLI I CARICHI ESTERNI NON SI CONSIDERANO!

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO È:



LE EQUAZIONI CARDINALI DI EQUILIBRIO FORNISCONO QUESTA VOLTA:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - F_H = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - F_V + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -F_V \dfrac{L}{2} + W + V_B L = 0 \end{cases} \qquad [2]$$

COME IN PRECEDENZA H_A, V_A E F_H NON DANNO CONTRIBUTO A $M_{z(A)}$ POICHÉ O SONO APPLICATE IN Ⓐ (H_A, V_A) O LA LORO RETTA D'AZIONE PASSA PER Ⓐ (F_H); IN ENTRAMBI I CASI IL BRACCIO DELLA FORZA RISPETTO AD Ⓐ È NULLO

PROCEDENDO COME NEL CASO PRECEDENTE SI RISCRIVE IL SISTEMA [2] NELLA FORMA:

$$\begin{cases} H_A = F_H \\ V_A + V_B = F_V \\ V_B L = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot H_A + 0 \cdot V_A + 0 \cdot V_B = F_H \\ 0 \cdot H_A + 1 \cdot V_A + 1 \cdot V_B = F_V \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot V_A + L \cdot V_B = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \quad [2']$$

E QUINDI SI PERVIENE ALLA FORMA MATRICIALE, OSSERVANDO CHE QUESTA VOLTA È $M = N$

$$\underset{(N,N)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}} \underset{(N,1)}{\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix}} = \underset{(N,1)}{\begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_V \frac{L}{2} - W \end{Bmatrix}} \quad [2'']$$

A = MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE

VETTORE DELLE INCOGNITE

VETTORE DEI TERMINI NOTI

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, A, È QUADRATA E A RANGO PIENO (NON SINGOLARE: $\det(A) = L \neq 0$) LA MATRICE COMPLETA, ORLATA DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI:

$$\mathcal{C}_{(3,4)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & F_H \\ 0 & 1 & 1 & F_V \\ 0 & 0 & L & F_V \frac{L}{2} - W \end{array} \right]$$

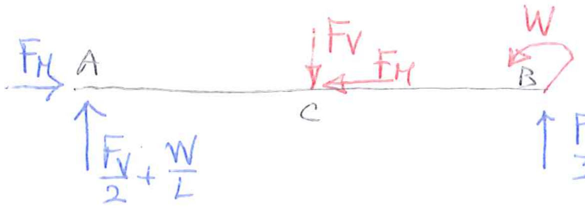
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A_{(3,3)}}$$

È UNA MATRICE RETTANGOLARE BASSA, IL CUI RANGO NON PUÒ ESSERE > 3; DI CONSEGUENZA $\text{RANGO}(\mathcal{C}) = \text{RANGO}(A) = 3$ E IL SISTEMA, PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI AMMETTE SOLUZIONI.
PER IL TEOREMA DI CRAMER LA SOLUZIONE RISULTA UNIVOCAMENTE DETERMINATA PER OGNI VETTORE DEI TERMINI NOTI.

NE RISULTA CHE PER UNA TRAVE ISOSTATICA A VINCOLI BEN DISPOSTI (NON LABILE) È SEMPRE POSSIBILE, PER OGNI SISTEMA DI CARICHI APPLICATI, AVERE EQUILIBRIO. IL RISULTATO È GENERALIZZABILE A STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI.
LA SOLUZIONE RISULTA ESSERE QUINDI:

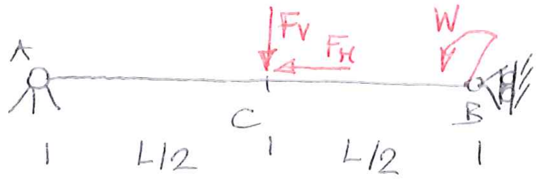
$$H_A = F_H; \quad V_B = \frac{F_V}{2} - \frac{W}{L}; \quad V_A = \frac{F_V}{2} + \frac{W}{L}.$$

GRAFICAMENTE LA SITUAZIONE È QUESTA:



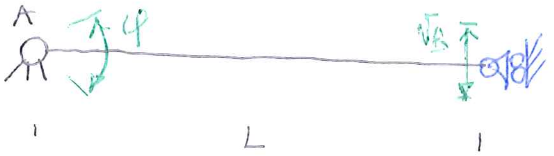
E DUNQUE L'EQUILIBRIO È POSSIBILE PER QUESTO (E PER OGNI ALTRO SISTEMA DI CARICHI). DUNQUE NELLE STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI L'EQUILIBRIO È SEMPRE POSSIBILE E LE REAZIONI VINCOLARI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINABILI (= LA SOLUZIONE È UNICA).

C) TRAVE ISOSTATICA (GDV = GDL) A VINCOLI MAL DISPOSTI, LABILE



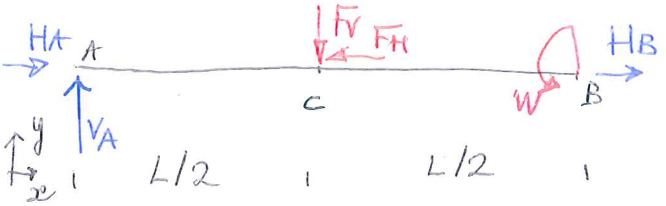
$$\begin{cases} GDV = 2(A)+1(B) = 3\ [= M] \\ GDL = 3\ [= N] \end{cases} \Rightarrow GDV = GDL$$

IN QUESTO CASO, TUTTAVIA, COME GIÀ ACCENNATO NELLA LEZIONE PRECEDENTE, I VINCOLI SONO IN NUMERO SUFFICIENTE MA SONO DISPOSTI MALE, OVVERO NON COOPERANO EFFICACEMENTE A ELIMINARE TUTTI GLI SPOSTAMENTI RIGIDI.



IL VINCOLO IN Ⓐ LASCIA LIBERA LA ROTAZIONE, φ; QUESTA PRODUCE IN Ⓑ, SE CI SI LIMITA A CONSIDERARE ROTAZIONI INFINITESIME, UNO SPOSTAMENTO VERTICALE, v_B (DIRETTO SECONDO LA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO L E CENTRO IN Ⓐ). IL VINCOLO IN Ⓑ SI LIMITA A CONTRASTARE LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE (PERALTRO GIÀ IMPEDITO DALLA CERNIERA POSTA IN Ⓐ) ED È QUINDI INEFFICACE: LA TRAVE MANTIENE POSSIBILITÀ DI SPOSTARSI = È LABILE!

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



LE EQUAZIONI CARDINALI DI EQUILIBRIO FORNISCONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A - F_H + H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - F_V = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad -F_V \cdot \frac{L}{2} + W = 0 \end{cases} \qquad [3]$$

DOVE, OVVIAMENTE H_A, V_A, F_H E H_B NON DANNO CONTRIBUTO A $M_{z(A)}$ O PERCHÉ APPLICATE IN Ⓐ O PERCHÉ LA LORO RETTA D'AZIONE PASSA PER Ⓐ.

PROCEDENDO COME GIA' VISTO IL SISTEMA [3] DIVIENE:

$$\begin{cases} H_A + H_B = F_H \\ V_A = F_V \\ 0 = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot H_A + 1\cdot H_B + 0\cdot V_A = F_H \\ 0\cdot H_A + 0\cdot H_B + 1\cdot V_A = F_V \\ 0\cdot H_A + 0\cdot H_B + 0\cdot V_A = F_V\frac{L}{2} - W \end{cases} \qquad [3']$$

E DA' LUOGO A QUESTA FORMA MATRICIALE, ANCORA CON $M = N$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(N,N)} \underbrace{\begin{Bmatrix} H_A \\ H_B \\ V_A \end{Bmatrix}}_{(N,1)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_V\frac{L}{2} - W \end{Bmatrix}}_{(N,1)} \qquad [3'']$$

$\mathcal{A}$ = MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE	VETTORE DELLE INCOGNITE	VETTORE DEI TERMINI NOTI

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, $\mathcal{A}$, È QUADRATA MA CON DETERMINANTE NULLO (UNA RIGA DI ZERI); DUNQUE RANGO$(\mathcal{A}) \neq 3$; SE SI ELIMINANO LA PRIMA COLONNA E L'ULTIMA RIGA SI OTTIENE UN MINORE NON NULLO (GLI ELEMENTI CHE LO COMPONGONO SONO INDICATI A TRATTEGGIO), PER CUI RANGO$(\mathcal{A}) = 2$. LA MATRICE COMPLETA, ORLATA DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI DIVIENE:

$$\mathcal{C}_{(3,4)} = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathcal{A}_{(3,3)}} \;\middle|\; \begin{matrix} F_H \\ F_V \\ F_V\frac{L}{2} - W \end{matrix} \right]$$

MATRICE RETTANGOLARE BASSA, IL CUI RANGO NON PUÒ ESSERE >3; TUTTAVIA SE SI ELIMINA LA PRIMA COLONNA SI OTTIENE DA $\mathcal{C}$ UN MINORE DI ORDINE 3 E DI VALORE $= F_V\frac{L}{2} - W$.

PERTANTO SE $F_V\frac{L}{2} - W \neq 0$ (CIOÈ SE $W \neq F_V\frac{L}{2}$) È RANGO$(\mathcal{C}) = 3 \neq$ RANGO$(\mathcal{A}) = 2$; PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI IL SISTEMA È IMPOSSIBILE, CIOÈ NON AMMETTE SOLUZIONI $\Rightarrow$ NON È POSSIBILE EQUILIBRIO.

SE INVECE $F_V\frac{L}{2} - W = 0$ (CIOÈ SE $W = F_V\frac{L}{2}$) È RANGO$(\mathcal{C}) = 2 =$ RANGO$(\mathcal{A})$ E IL SISTEMA È RISOLUBILE: QUESTO PERÒ RICHIEDE CHE I CARICHI

APPLICATI SODDISFINO UNA CONDIZIONE PARTICOLARE. NELLA SOSTANZA, PER CARICHI ESTERNI GENERICI L'EQUILIBRIO NON È POSSIBILE; PER CONDIZIONI DI CARICO PARTICOLARI (IN QUESTO CASO, QUANDO F_V E W RENDONO SODDISFATTA COME UNA IDENTITÀ L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI) L'EQUILIBRIO DIVIENE POSSIBILE.

IN QUESTO UNA TRAVE ISOSTATICA MA LABILE SI COMPORTA COME UNA TRAVE IPOSTATICA (VEDI PRECEDENTE CASO A]); TUTTAVIA A DIFFERENZA DI QUEL CASO, LA SOLUZIONE NON È UNIVOCAMENTE DETERMINATA.

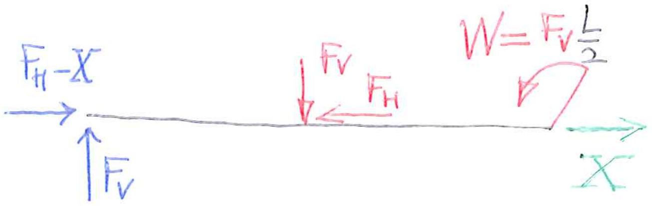
INFATTI RIPRENDENDO IL SISTEMA [3], L'ULTIMA EQUAZIONE VA SCARTATA E LE RESTANTI 2 FORNISCONO:

$$\begin{cases} H_A + H_B = F_H \\ V_A = F_V \end{cases}$$

E DUNQUE H_A E H_B NON POSSONO ESSERE SIMULTANEAMENTE DETERMINATE, SE SI PONE $H_B = X$ (PARAMETRO) SI TROVA:

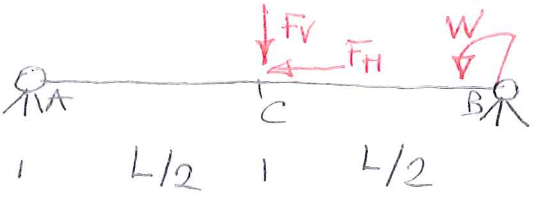
$$H_A = F_H - X \; ; \qquad V_A = F_V$$

E QUESTO RIVELA CHE ESISTONO ∞ SOLUZIONI IN DIPENDENZA DEL PARAMETRO INDETERMINATO X. L'INDETERMINATEZZA RIGUARDA QUI SOLO PARTE DELLA SOLUZIONE (V_A È DETERMINATO)
LA SITUAZIONE GRAFICA È LA SEGUENTE:



IN GENERALE SI PUÒ CONCLUDERE CHE PER UNA TRAVE ISOSTATICA LABILE LA SOLUZIONE ESISTE SOLO PER PARTICOLARI VALORI DEI CARICHI ESTERNI, E IN QUESTI CASI NON È UNICA, CIOÈ UNIVOCAMENTE DETERMINABILE. QUESTA CIRCOSTANZA PUÒ ESSERE GENERALIZZATA ALLE STRUTTURE ISOSTATICHE LABILI.

D) TRAVE IPERSTATICA (GDV > GDL) A VINCOLI BEN DISPOSTI(*) (NON LABILE)

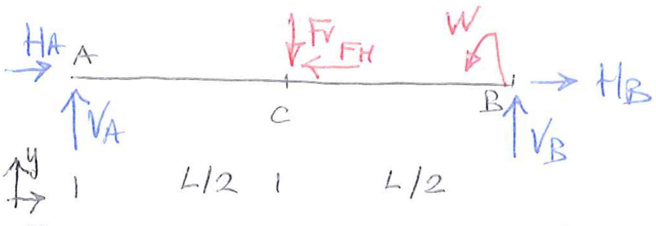


$$\begin{cases} GDV = 2(A) + 2(B) = 4 \; [= M] \\ GDL = 3 \; [= N] \end{cases} \Rightarrow GDV > GDL$$

(*) OVVIAMENTE SI POSSONO AVERE STRUTTURE IPERSTATICHE LABILI! SI RICADE NEL CASO C]

DAL PUNTO DI VISTA CINEMATICO SI OSSERVA CHE LA CERNIERA POSTA IN Ⓑ OLTRE A IMPEDIRE LO SPOSTAMENTO v_B LASCIATO LIBERO DA Ⓐ IMPEDISCE ANCHE (UNA SECONDA VOLTA) LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE u_B IN Ⓑ, SPOSTAMENTO CHE E' GIA' IMPEDITO DALLA CERNIERA Ⓐ.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DIVIENE:



E LE EQUAZIONI CARDINALI FORNISCONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A - F_H + H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - F_V + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad -F_V \frac{L}{2} + W + V_B L = 0 \end{cases} \qquad [4]$$

DOVE AL SOLITO H_A E V_A (APPLICATE IN Ⓐ), F_H E H_B (LA CUI RETTA D'AZIONE PASSA PER Ⓐ) NON DANNO CONTRIBUTO ALL'EQUAZIONE $M_{z(A)}$.

PROCEDENDO COME GIA' VISTO SI TROVA

$$\begin{cases} H_A + H_B = F_H \\ V_A + V_B = F_V \\ V_B L = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot H_A + 1 \cdot H_B + 0 \cdot V_A + 0 \cdot V_B = F_H \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 1 \cdot V_A + 1 \cdot V_B = F_V \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 0 \cdot V_A + L \cdot V_B = F_V \frac{L}{2} - W \end{cases} \qquad [4']$$

E, SEGUITANDO, LA FORMA MATRICIALE DIVIENE:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix}_{(N,M)} \begin{Bmatrix} H_A \\ H_B \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix}_{(M,1)} = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_V \frac{L}{2} - W \end{Bmatrix}_{N,1} \qquad [4'']$$

A = MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE

VETTORE DELLE INCOGNITE

VETTORE DEI TERMINI NOTI

LA MATRICE $A_{(3,4)}$ È UNA MATRICE RETTANGOLARE BASSA (PIÙ COLONNE CHE RIGHE) E QUINDI AL MASSIMO SI PUÒ AVERE RANGO$(A) = 3$; QUESTO E' IL CASO, COME SI PUÒ FACILMENTE VERIFICARE CONSIDERANDO IL MINORE DI A OTTENUTO ELIMINANDO LA PRIMA COLONNA: IL VALORE E' PARI A $L \neq 0$.

LA MATRICE COMPLETA, ORLATA DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI È INVECE:

$$\mathcal{C}_{(3,5)} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{matrix}}_{\mathcal{A}_{(3,4)}} \begin{matrix} F_H \\ F_V \\ F_V \frac{L}{2} - W \end{matrix} \right]$$

ANCORA UNA MATRICE RETTANGOLARE BASSA, CHE NON PUÒ AVERE RANGO MAGGIORE DEL NUMERO DI RIGHE (3); ANZI, È PROPRIO RANGO $(\mathcal{C}) = 3$, PER ESEMPIO COSTRUENDO IL MINORE CORRISPONDENTE A UNA DELLE 2 SOTTOMATRICI INDICATE: NEL PRIMO CASO SI TROVA DET (☐) = $L \neq 0$ NEL SECONDO, DET (☐) = $F_H L$, $\neq 0$ SE $F_H \neq 0$

PERTANTO RANGO $(\mathcal{A})$ = RANGO $(\mathcal{C}) = 3$ E QUINDI IL SISTEMA È RISOLUBILE, OVVERO SUSSISTE L'EQUILIBRIO, SEMPRE IN BASE AL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI.

TUTTAVIA POICHÉ IL NUMERO DI INCOGNITE, M, SUPERA IL NUMERO DI EQUAZIONI, N, NON È POSSIBILE DETERMINARE UNIVOCAMENTE TUTTE LE INCOGNITE.

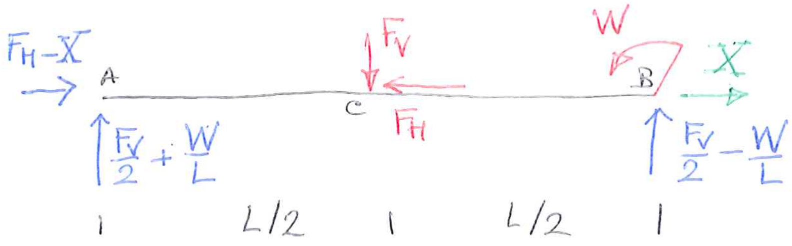
QUESTA CIRCOSTANZA È DEL TUTTO GENERALE E VALE ANCHE PER LE STRUTTURE IPERSTATICHE NON LABILI: LA SOLUZIONE ESISTE SEMPRE MA NON È UNICA. QUESTO COMPORTA CHE L'EQUILIBRIO SUSSISTE SEMPRE (PER QUALSIASI SISTEMA DI CARICHI APPLICATI) MA NON TUTTE LE REAZIONI VINCOLARI POSSONO ESSERE DETERMINATE.

NEL CASO IN ESAME, RISOLVENDO LE [4] ASSUMENDO $H_B = X$ (PARAMETRO) SI HA:

$$H_A = F_H - X; \qquad V_A = F_V \frac{1}{2} + \frac{W}{L}; \qquad V_B = F_V \frac{1}{2} - \frac{W}{L}$$

E SI VEDE CHE V_A E V_B SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE, MENTRE H_A PUÒ ASSUMERE ∞ VALORI AL VARIARE DEL PARAMETRO INDETERMINATO X.

GRAFICAMENTE SI TROVA:



IN SINTESI DALLO STUDIO ESEGUITO SI POSSONO TRARRE QUESTE CONCLUSIONI.

- STRUTTURE IPOSTATICHE ($\mathcal{A}_{(N,M)}$ $N>M$)
  - $\rightarrow$ RANGO$[\mathcal{C}] \neq$ RANGO$[\mathcal{A}]$ SOLUZIONE IMPOSSIBILE ⇒ EQUILIBRIO NON SUSSISTE
  - $\rightarrow$ RANGO$[\mathcal{C}] =$ RANGO$[\mathcal{A}]$ SOLUZIONE POSSIBILE E DETERMINATA ⇒ EQUILIBRIO SUSSISTE, MA SOLO PER PARTICOLARI SISTEMI DI CARICHI; REAZIONI UNIVOCAMENTE DETERMINABILI

- STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI (È SEMPRE RANGO$[\mathcal{C}] =$ RANGO$[\mathcal{A}]$) ($\mathcal{A}_{(N,N)}$)
  SOLUZIONE POSSIBILE SEMPRE E UNIVOCAMENTE DETERMINATA ⇒ EQUILIBRIO SUSSISTE PER QUALSIASI SISTEMA DI CARICHI; REAZIONI UNIVOCAMENTE DETERMINABILI

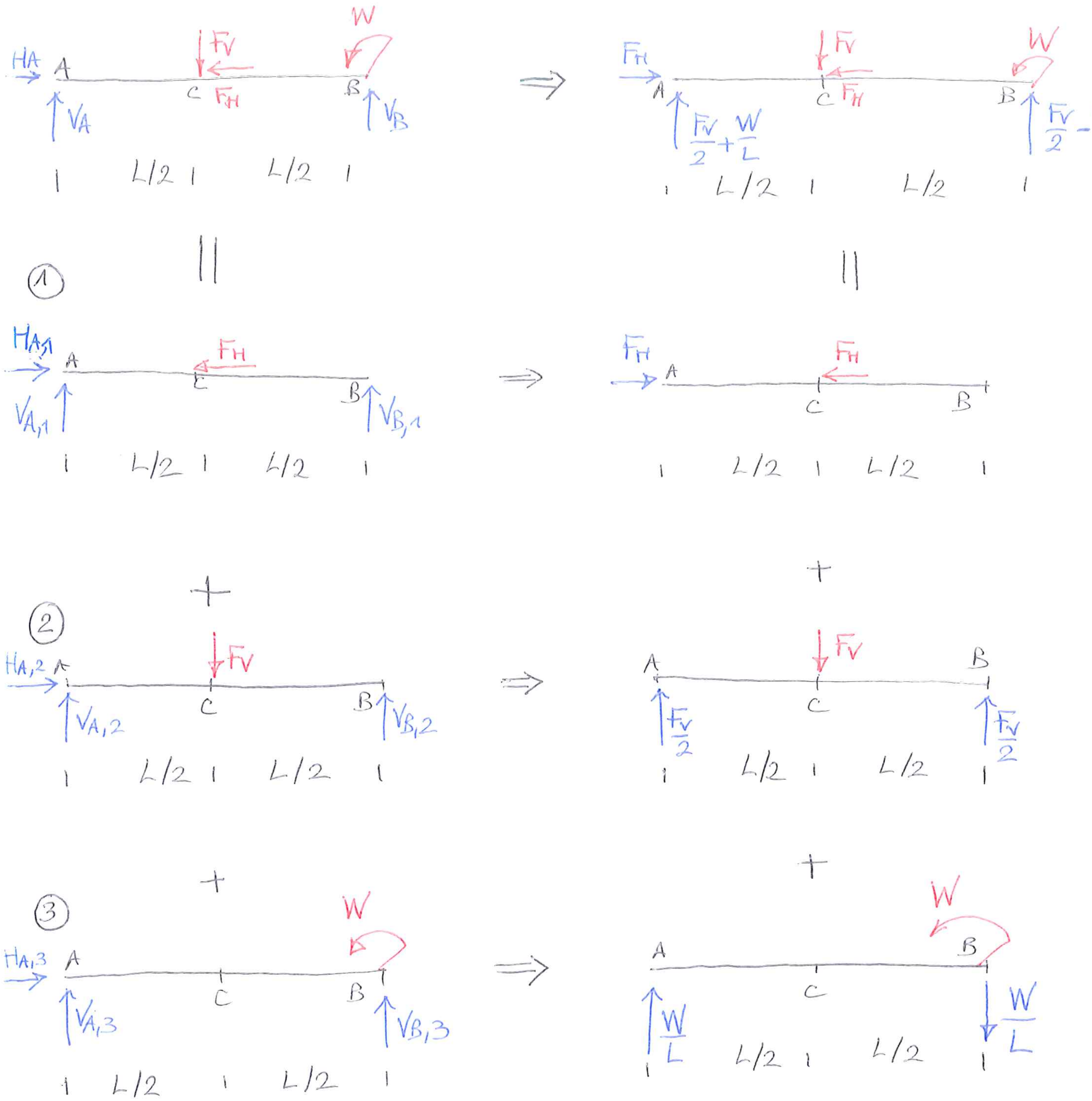
- STRUTTURE ISOSTATICHE LABILI ($\mathcal{A}_{(N,N)}$ MA $\det(\mathcal{A}) = 0$)
  - $\rightarrow$ RANGO$[\mathcal{C}] \neq$ RANGO$[\mathcal{A}]$ SOLUZIONE IMPOSSIBILE ⇒ EQUILIBRIO NON SUSSISTE
  - $\rightarrow$ RANGO$[\mathcal{C}] =$ RANGO$[\mathcal{A}]$ SOLUZIONE POSSIBILE MA INDETERMINATA ⇒ EQUILIBRIO SUSSISTE SOLO PER PARTICOLARI SISTEMI DI CARICHI; REAZIONI SOLO IN PARTE UNIVOCAMENTE DETERMINABILI.

- STRUTTURE IPERSTATICHE (RANGO$[\mathcal{C}] =$ RANGO$[\mathcal{A}]$) ($\mathcal{A}_{(N,M)}$ $N<M$)
  SOLUZIONE SEMPRE POSSIBILE MA INDETERMINATA
  ⇒ EQUILIBRIO SUSSISTE PER QUALSIASI SISTEMA DI CARICHI; REAZIONI SOLO IN PARTE UNIVOCAMENTE DETERMINABILI.

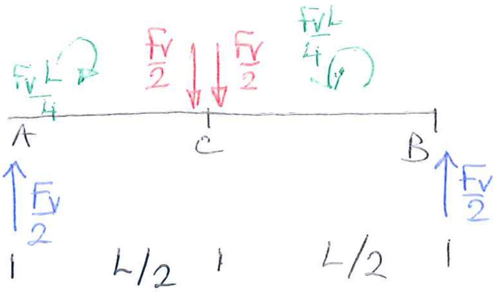
LE _UNICHE_ STRUTTURE PER LE QUALI L'EQUILIBRIO SUSSISTE PER OGNI SISTEMA DI CARICHI APPLICATE E PER LE QUALI LE REAZIONI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINABILI SONO LE STRUTTURE _ISOSTATICHE_, _NON LABILI_.

NOTA 1.

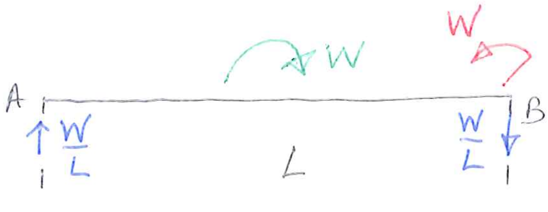
PER LA LINEARITA' DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO E' POSSIBILE STUDIARE LA RISPOSTA DI UNA TRAVE (E INGENERALE DI UNA STRUTTURA) CONSIDERANDO I CARICHI AGENTI UNO PER VOLTA E SOMMANDONE GLI EFFETTI.
PER ESEMPIO, RIPRENDENDO LA TRAVE DEL CASO B] SI TROVA QUANTO SEGUE:



E CON GLI ULTIMI 2 SCHEMI È IMMEDIATA LA VERIFICA GRAFICA DELL'EQUILIBRIO:



LE 2FORZE VERTICALI $\frac{F_V}{2}$ APPLICATE IN Ⓐ E Ⓒ PRODUCONO UNA COPPIA ORARIA ↻ DI VALORE $\frac{F_V L}{4}$ CHE BILANCIA LA COPPIA ANTIORARIA ↺ DOVUTA ALLE 2FORZE $\frac{F_V}{2}$ APPLICATE IN Ⓒ E IN Ⓑ



LE 2 FORZE $\frac{W}{L}$ APPLICATE IN Ⓐ E Ⓑ PRODUCONO UNA COPPIA ORARIA $W=\frac{W}{L}\cdot L$ ↻ CHE BILANCIA LA COPPIA ESTERNA ANTIORARIA

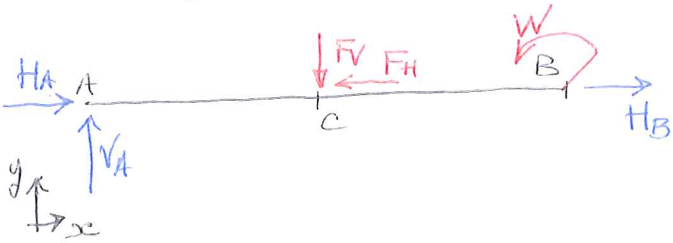
NOTA 2

NEI CASI A], B], C], D] SI SONO USATE LE MEDESIME EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, $R_x = 0$; $R_y = 0$; $M_{z(A)} = 0$ E DUNQUE I TERMINI NOTI, CHE DIPENDONO SOLTANTO DAI CARICHI ESTERNI E DALLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO UTILIZZATE, SONO I MEDESIMI.

LE MATRICI DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DIPENDONO INVECE DALLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO UTILIZZATE E DAI VINCOLI PRESENTI E QUINDI, SE QUESTI SONO DIFFERENTI, LE MATRICI RISULTERANNO DIFFERENTI. TUTTAVIA IL RANGO DELLE MATRICI DEI COEFFICIENTI NON MUTA SE, A PARITÀ DI VINCOLI, SI CAMBIANO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO UTILIZZATE.

PER ESEMPIO, NEL CASO C] SI UTILIZZINO QUESTE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, CAMBIANDO IL POLO RISPETTO AL QUALE SI VALUTA M_z:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - F_H + H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - F_V = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(B)} = 0 & -V_A L + F_V \frac{L}{2} + W = 0 \end{cases} \qquad [3\ bis]$$



SI OSSERVI CHE F_V DA' IN QUESTO CASO UN CONTRIBUTO POSITIVO AL MOMENTO RISULTANTE SE LO SI CALCOLA RISPETTO A Ⓑ.

PROCEDENDO COME DI CONSUETO SI TROVA:

$$\begin{cases} H_A + H_B = F_H \\ V_A = F_V \\ V_A L = F_V \frac{L}{2} + W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot H_A + 1 \cdot H_B + 0 \cdot V_A = F_H \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 1 \cdot V_A = F_V \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + L \cdot V_A = F_V \frac{L}{2} + W \end{cases} \qquad [3bis']$$

DOVE L'ULTIMA EQUAZIONE SI OTTIENE PORTANDO $V_A \cdot L$ A 2° MEMBRO E LEGGENDO L'EQUAZIONE DA DESTRA A SINISTRA, SCAMBIANDO ORDINATAMENTE IL PRIMO E IL SECONDO MEMBRO, COME SEGUE:

$$-V_A L + F_V \frac{L}{2} + W = 0 \Rightarrow \underbrace{F_V \frac{L}{2} + W} = \underbrace{V_A L} \Rightarrow V_A L = F_V \frac{L}{2} + W.$$

SI GIUNGE COSÌ ALLA FORMA ALGEBRICA:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&L\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}H_A\\H_B\\V_A\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_H\\F_V\\F_V\frac{L}{2}+W\end{Bmatrix} \qquad [3\,bis'']$$

$A =$ MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE — VETTORE DELLE INCOGNITE — VETTORE DEI TERMINI NOTI.

CONFRONTANDO LE EQ. [3"] e [3 bis"] SI VEDE CHE I VETTORI DELLE INCOGNITE SONO EGUALI, POICHÉ EGUALI SONO I VINCOLI; I VETTORI DEI TERMINI NOTI SONO CAMBIATI NELLA TERZA COMPONENTE (NEL PRIMO CASO I 2 TERMINI $F_V\frac{L}{2}$ E W SONO SOTTRATTI, NEL SECONDO SONO SOMMATI), COME CONSEGUENZA DEL FATTO CHE LA TERZA EQUAZIONE CARDINALE È STATA RIFERITA, NEL SECONDO CASO, A UN DIVERSO POLO, Ⓑ ANZICHÉ Ⓐ. ANCHE LA MATRICE A DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE È DIVERSA IN QUESTO CASO NELL'ULTIMA RIGA, PER EFFETTO DELLA DIFFERENTE EQUAZIONE CARDINALE UTILIZZATA.

TUTTAVIA IL RANGO DELLA MATRICE $[A]$ NON CAMBIA. NELLA [3"] È IMMEDIATO VEDERE CHE $DET[A]=0$ POICHÉ È PRESENTE UNA RIGA DI ZERI, SICCHÉ $RANGO[A]=2$.

NELLA [3 bis"] SI OSSERVA CHE L'ULTIMA RIGA È LINEARMENTE DIPENDENTE DALLE ALTRE DUE, SICCHÉ È ESPRIMIBILE COME UNA COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ELEMENTI DELLE 2 RIGHE: IN PARTICOLARE, SE SI PRENDONO GLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA MOLTIPLICATI PER 0 E LI SI SOMMA, TERMINE A TERMINE, A QUELLI DELLA SECONDA RIGA MOLTIPLICATI PER L SI OTTENGONO QUELLI DELLA TERZA RIGA.

INFATTI

$$\begin{array}{ccc} 0\cdot 1 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \;+ \\ L\cdot 0 & L\cdot 0 & L\cdot 1 \;= \\ \hline 0 & 0 & L \end{array}$$

PRIMA RIGA MOLTIPLICATA PER ZERO

SECONDA RIGA MOLTIPLICATA PER L

TERZA RIGA

IL FATTO CHE LE RIGHE (O LE COLONNE) DI UNA MATRICE NON SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI COSTITUISCE CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHÉ SI ANNULLI IL SUO DETERMINANTE.

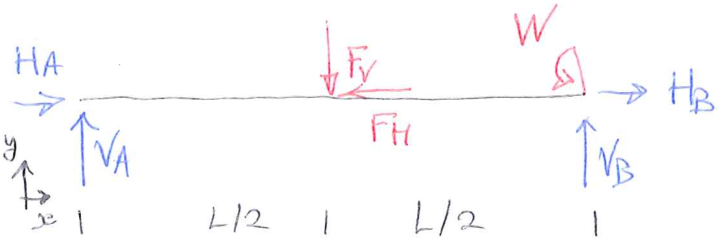
NE SEGUE, NEL CASO [3 bis"] $DET[A]=0$ E DUNQUE $RANGO[A]=2$, C.V.D.

NOTA 3.

SI È GIÀ DETTO CHE NEL CASO PIANO (2D) PER UN CORPO RIGIDO IL NUMERO DI EQUAZIONI CARDINALI È 3. CIÒ SIGNIFICA CHE SI POSSONO SCRIVERE SOLO 3 EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI; OGNI ALTRA EQUAZIONE, OTTENUTA PER ESEMPIO MUTANDO IL POLO NELL'EQUAZIONE DEL MOMENTO RISULTA COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRIME TRE E NON FORNISCE INFORMAZIONI AGGIUNTIVE.

SI CONSIDERI IL CASO D] E SI VOGLIANO SCRIVERE QUESTE 4 EQUAZIONI, OTTENUTE DUPLICANDO (RISPETTO A UN DIVERSO POLO) L'EQUAZIONE $M_{z(\cdot)} = 0$:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - F_H + H_B = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - F_V + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -F_V \frac{L}{2} + W + V_B L = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(B)} = 0 & -V_A L + F_V \frac{L}{2} + W = 0 \end{cases} \qquad [4\ bis]$$



CON IL CONSUETO PROCEDIMENTO SI TROVA

$$\begin{cases} H_A + H_B = F_H \\ V_A + V_B = F_V \\ V_B L = F_V \frac{L}{2} - W \\ V_A L = F_V \frac{L}{2} + W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot H_A + 1 \cdot H_B + 0 \cdot V_A + 0 \cdot V_B = F_H \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 1 \cdot V_A + 1 \cdot V_B = F_V \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + 0 \cdot V_A + L \cdot V_B = F_V \frac{L}{2} - W \\ 0 \cdot H_A + 0 \cdot H_B + L \cdot V_A + 0 \cdot V_B = F_V \frac{L}{2} + W \end{cases} \quad [4\ bis']$$

CIOÈ QUESTA FORMA ALGEBRICA

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & L & 0 \end{bmatrix}} \overset{\text{VETTORE INCOGNITE}}{\begin{Bmatrix} H_A \\ H_B \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix}} = \overset{\text{VETTORE TERMINI NOTI}}{\begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ F_V \frac{L}{2} - W \\ F_V \frac{L}{2} + W \end{Bmatrix}} \qquad [4\ bis'']$$

NELLA [4bis''] LA MATRICE $\mathcal{A}$ E' DIVENUTA QUADRATA, $\mathcal{A}_{(4,4)}$, MENTRE NELLA [4''] ERA RETTANGOLARE BASSA, $\mathcal{A}_{(3,4)}$.

TUTTAVIA NEL CASO PRESENTE LA QUARTA RIGA DI $\mathcal{A}$ E' OTTENIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA SECONDA RIGA MOLTIPLICATA PER L, E DELLA TERZA, MOLTIPLICATA PER −1: INFATTI

$$\begin{array}{ccccc} L\cdot 0 & L\cdot 0 & L\cdot 1 & L\cdot 1 & + \\ -1\cdot 0 & -1\cdot 0 & -1\cdot 0 & -1\cdot L & = \\ \hline 0 & 0 & L & 0 & \end{array}$$

SECONDA RIGA MOLTIPLICATA PER L

TERZA RIGA MOLTIPLICATA PER −1

QUARTA RIGA

$$\begin{array}{c} L\cdot F_V \quad + \\ -1\left(F_V\frac{L}{2}-W\right) = \\ \hline F_V\frac{L}{2}+W \end{array}$$

DI CONSEGUENZA DET $(\mathcal{A}) = 0$ E RANGO $(\mathcal{A}) = 3$.

LA STESSA COMBINAZIONE LINEARE SI RISCONTRA NEGLI ELEMENTI DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI (VEDI SOPRA) E DUNQUE LA MATRICE COMPLETA $\mathcal{C}$ OTTENUTA ORLANDO $\mathcal{A}$ CON IL VETTORE DEI TERMINI NOTI DIVIENE

$$\mathcal{C}_{(4,5)}\left[\underbrace{\begin{matrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&L\\0&0&L&0\end{matrix}}_{\mathcal{A}_{(4,4)}}\;\middle|\;\begin{matrix}F_H\\F_V\\F_V\frac{L}{2}-W\\F_V\frac{L}{2}+W\end{matrix}\right]$$

ED E' FACILE VEDERE CHE RANGO $[\mathcal{C}] = 3$.

LE 2 MATRICI HANNO RANGO EGUALE, MA PER LA RISOLUZIONE UNA DELLE EQUAZIONI VA SCARTATA E SI RICADE NEL CASO D]: SOLUZIONE DEL SISTEMA ESISTE MA NON E' UNICA.

LA CONSEGUENZA DI QUANTO APPENA VISTO E' CHE NON SI POSSONO DETERMINARE UNIVOCAMENTE LE REAZIONI VINCOLARI DI UNA TRAVE IPERSTATICA (E, PIÙ IN GENERALE, DI UNA STRUTTURA IPERSTATICA) CON SOLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO.