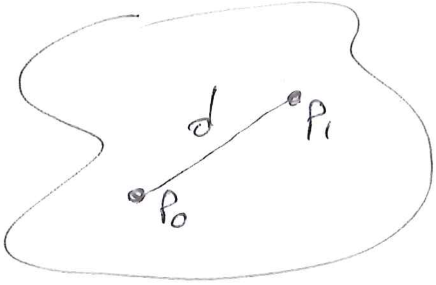
CORPO RIGIDO: CARATTERIZZAZIONE CINEMATICA.

- AGGREGATO DI PUNTI MATERIALI, OVVERO DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA AVENTE DIMENSIONI FINITE (NON PUNTIFORMI)
- CARATTERIZZATO DAL VINCOLO DI RIGIDITÀ: LA DISTANZA FRA 2 PUNTI <u>QUALSIASI</u> È INVARIABILE, QUALUNQUE SIANO LE AZIONI APPLICATE AL CORPO

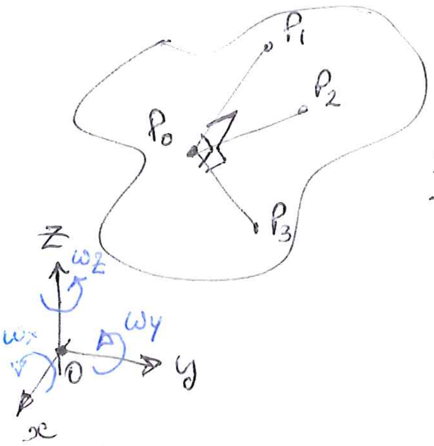


$$\overline{P_0P_1} = d = \text{const}$$

IN VIRTÙ DI QUESTA PROPRIETÀ LA POSIZIONE DI TUTTI I PUNTI DI UN CORPO RIGIDO E I RELATIVI SPOSTAMENTI (CHE SI ASSUMONO, PER SEMPLICITÀ, <u>INFINITESIMI</u>) SONO INDIVIDUATI DA UN NUMERO <u>FINITO</u> DI PARAMETRI, CHE RAPPRESENTANO I GRADI DI LIBERTÀ (G.D.L.) DEL CORPO RIGIDO.

NEL CASO 3-D: <u>6 PARAMETRI</u> = 6 G.D.L.

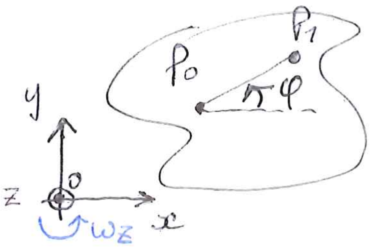
PER ESEMPIO: <u>POSIZIONE</u>: LE COORDINATE DI UN PUNTO $P_0 (x_0, y_0, z_0)$
GLI ANGOLI DI EULERO CHE 3 SEGMENTI MUTUAMENTE ORTOGONALI, $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_0P_3}$ FORMANO CON GLI ASSI COORDINATI $(\varphi, \vartheta, \psi)$



<u>SPOSTAMENTO</u> (INFINITESIMO): LE COMPONENTI RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI DELLO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO $P_0 (u_0, v_0, w_0)$; LE ROTAZIONI INFINITESIME RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

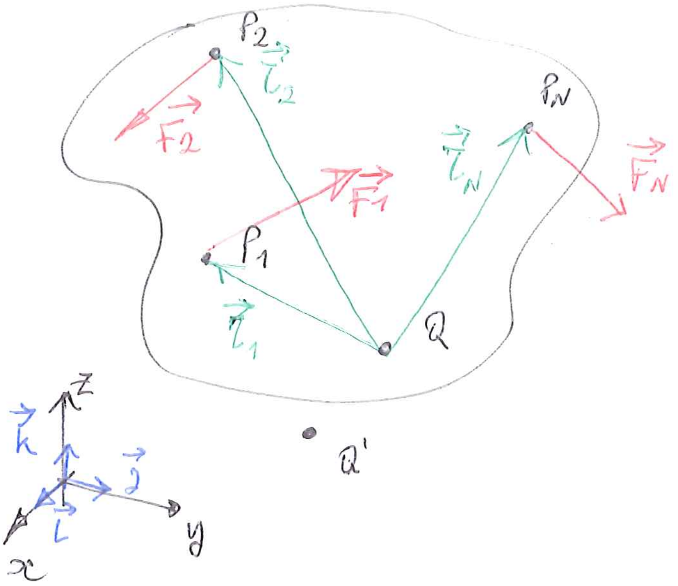
NEL CASO 2-D: <u>3 PARAMETRI</u> = 3 G.D.L.

PER ESEMPIO: <u>POSIZIONE</u>: LE COORDINATE DI UN PUNTO $P_0 (x_0, y_0)$
L'ANGOLO CHE UN SEGMENTO $\overline{P_0P_1}$ FORMA CON UNO DEGLI ASSI COORDINATI, φ



<u>SPOSTAMENTO</u> (INFINITESIMO): LE COMPONENTI RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI DELLO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO $P_0 (u_0, v_0)$; LA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z, PERPENDICOLARE AL PIANO, ω_z

CORPO RIGIDO: CARATTERIZZAZIONE STATICA (CONDIZIONI DI EQUILIBRIO)



$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(Q)} = \vec{0} \quad (\forall Q)\end{array}}$$

RISULTANTE

MOMENTO RISULTANTE

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA DEL CORPO RIGIDO (C.N.E.S. DI EQUILIBRIO)

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \qquad [1]$$

$$\vec{M}_{(Q)} = \underbrace{(\overrightarrow{P_1 - Q})}_{\vec{r}_1} \wedge \vec{F_1} + \underbrace{(\overrightarrow{P_2 - Q})}_{\vec{r}_2} \wedge \vec{F_2} + \dots + \underbrace{(\overrightarrow{P_N - Q})}_{\vec{r}_N} \wedge \vec{F_N}$$

VETTORI POSIZIONE DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DELLE FORZE RISPETTO AL POLO, Q.

$$\vec{M}_{(Q)} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F_1} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F_2} + \dots + \vec{r}_N \wedge \vec{F_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F_i} \qquad [2]$$

NOTA: PER IL CALCOLO DEL MOMENTO L'ORDINE DEI VETTORI È ESSENZIALE INQUANTO È COINVOLTO UNA MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE: SI RICORDI CHE $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$, INQUANTO $\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

SE SI SVILUPPANO LE ESPRESSIONI DELLE FORZE PER COMPONENTI SI TROVA:

$$\vec{F_1} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$$
$$\vec{F_2} = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$$
$$\vdots$$
$$\vec{F_N} = F_{Nx}\vec{i} + F_{Ny}\vec{j} + F_{Nz}\vec{k}$$

e, in generale:

$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$$

DOVE F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} SONO LE PROIEZIONI DI $\vec{F_1}$ RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI: SONO DOTATE DI SEGNO PER INDICARE SE SONO CONCORDI O DISCORDI RISPETTO AL VERSO POSITIVO DEGLI ASSI; ANALOGA INTERPRETAZIONE PER F_{2x}, ECC.

IN BASE AL CALCOLO VETTORIALE SI HA CHE

$$F_{1x} = \vec{F}_1 \times \vec{i} = |\vec{F}_1| \cdot \underbrace{|\vec{i}|}_{=1} \cdot \cos\theta_x = |\vec{F}_1| \cos\theta_x$$

$$F_{1y} = \vec{F}_1 \times \vec{j} = |\vec{F}_1| \cdot \underbrace{|\vec{j}|}_{=1} \cos\theta_y = |\vec{F}_1| \cos\theta_y$$

$$F_{1z} = \vec{F}_1 \times \vec{k} = |\vec{F}_1| \cdot \underbrace{|\vec{k}|}_{=1} \cdot \cos\theta_z = |\vec{F}_1| \cos\theta_z$$

CON θ_x, θ_y, θ_z ANGOLI FORMATI DAL VETTORE $\vec{F}_1$ E DAGLI ASSI x, y, z.

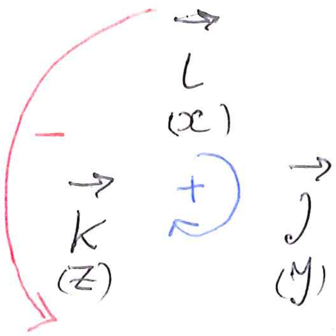
PERTANTO LE COMPONENTI F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} SI OTTENGONO MOLTIPLICANDO SCALARMENTE IL VETTORE $\vec{F}_1$ PER I <u>VERSORI</u> (CIOÈ VETTORI DI MODULO UNITARIO) DEGLI ASSI, INDICATI CONVENZIONALMENTE CON $\vec{i}$ (VERSORE ASSE x), $\vec{j}$ (VERSORE ASSE y), $\vec{k}$ (VERSORE ASSE z).

SE GLI ASSI x, y, z FORMANO UNA TERNA DESTRA, ALLORA VALGONO QUESTE PROPRIETÀ (CICLICHE)

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \; ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \; ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \; ; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \; ; \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

CHE SI PUÒ RIASSUMERE IN QUESTO SCHEMA:



RITORNANDO ALLA [1] SI TROVA:

$$\vec{R} = (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}) + \ldots + (F_{Nx}\vec{i} + F_{Ny}\vec{j} + F_{Nz}\vec{k}) = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny})\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz})\vec{k}$$

E POICHÈ $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$

SI OTTIENE:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz} = \sum_{i=1}^{N} F_{iz}$$

DUNQUE

$$\vec{R} = \vec{0} \iff \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} F_{ix}\right) = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iy}\right) = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{N} F_{iz}\right) = 0 \end{cases} \quad [1']$$

1 EQ. VETTORIALE — 3 EQ. PER COMPONENTI.

IN MODO ANALOGO, SE SI SVILUPPANO LE ESPRESSIONI PER COMPONENTI DEI VETTORI POSIZIONE $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ E SI TIENE CONTO CHE LE COORDINATE DEI PUNTI INTERESSATI SONO: $Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$; $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$; $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$; ...; $P_N \equiv (x_N, y_N, z_N)$ SI HA:

$$\vec{r}_1 = r_{1x}\vec{i} + r_{1y}\vec{j} + r_{1z}\vec{k} = \overrightarrow{(P_1 - Q)} = \underbrace{(x_1 - x_Q)}_{r_{1x}}\vec{i} + \underbrace{(y_1 - y_Q)}_{r_{1y}}\vec{j} + \underbrace{(z_1 - z_Q)}_{r_{1z}}\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = r_{2x}\vec{i} + r_{2y}\vec{j} + r_{2z}\vec{k} = \overrightarrow{(P_2 - Q)} = \underbrace{(x_2 - x_Q)}_{r_{2x}}\vec{i} + \underbrace{(y_2 - y_Q)}_{r_{2y}}\vec{j} + \underbrace{(z_2 - z_Q)}_{r_{2z}}\vec{k}$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N = r_{Nx}\vec{i} + r_{Ny}\vec{j} + r_{Nz}\vec{k} = \overrightarrow{(P_N - Q)} = \underbrace{(x_N - x_Q)}_{r_{Nx}}\vec{i} + \underbrace{(y_N - y_Q)}_{r_{Ny}}\vec{j} + \underbrace{(z_N - z_Q)}_{r_{Nz}}\vec{k}$$

PER CALCOLARE I DIVERSI ADDENDI DELLA [2] SI SFRUTTA LA PROPRIETA' PER LA QUALE IL PRODOTTO VETTORIALE DI 2 VETTORI, ESPRESSI PER COMPONENTI, SI PUÒ ESPRIMERE COME SVILUPPO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3x3, COSÌ COSTRUITA:

- PRIMA RIGA: VERSORI DEGLI ASSI (NELL'ORDINE x, y, z)
- SECONDA RIGA: COMPONENTI DEL 1° VETTORE (SECONDO GLI ASSI x, y, z)
- TERZA RIGA: COMPONENTI DEL 2° VETTORE (SECONDO GLI ASSI x, y, z)

DUNQUE, PER IL PRIMO ADDENDO DELLA [2] SI HA:

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \vec{M}^{(1)}_{(Q)}$$

A QUESTO PUNTO, SE SI SVILUPPA IL DETERMINANTE SECONDO GLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA, SI TROVA:

$$\vec{\tau}_1 \wedge \vec{F}_1 = +\vec{i}\underbrace{\begin{vmatrix} \tau_{1y} & \tau_{1z} \\ F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix}}_{\text{I}} - \vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix} \tau_{1x} & \tau_{1z} \\ F_{1x} & F_{1z} \end{vmatrix}}_{\text{II}} + \vec{k}\underbrace{\begin{vmatrix} \tau_{1x} & \tau_{1y} \\ F_{1x} & F_{1y} \end{vmatrix}}_{\text{III}}$$

POSIZIONE PARI = SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA E NUMERO PARI (1+1=2) ⇒ CI VUOLE SEGNO (+)

POSIZIONE DISPARI = SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA È NUMERO DISPARI (1+2=3) ⇒ CI VUOLE SEGNO (−)

POSIZIONE PARI = SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA È NUMERO PARI (1+3=4) ⇒ CI VUOLE SEGNO (+)

SI OSSERVI CHE LE MATRICI 2x2 INDICATE CON (I), (II) E (III) SONO OTTENUTE DALLA ORIGINALE MATRICE 3x3 ELIMINANDO, RISPETTIVAMENTE LA PRIMA RIGA E LA PRIMA COLONNA (I); LA PRIMA RIGA E LA SECONDA COLONNA (II); LA PRIMA RIGA E LA TERZA COLONNA (III).

SI PROCEDE POI A SVILUPPARE I TRE DETERMINANTI DELLE 3 MATRICI 2x2 SOPRA INDICATI E SI OTTIENE:

$$\vec{\tau}_1 \wedge \vec{F}_1 = (\tau_{1y}F_{1z} - \tau_{1z}F_{1y})\vec{i} - (\tau_{1x}F_{1z} - \tau_{1z}F_{1x})\vec{j} + (\tau_{1x}F_{1y} - \tau_{1y}F_{1x})\vec{k} = \vec{M}^{(1)}_{(Q)}$$

RIPORTANDO IL SEGNO ENTRO LA ( )

O ANCHE:

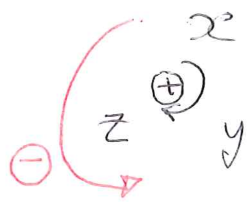
$$\vec{M}^{(1)}_{(Q)} = \underbrace{(\tau_{1y}F_{1z} - \tau_{1z}F_{1y})}_{M^{(1)}_{(Q)x}}\vec{i} + \underbrace{(\tau_{1z}F_{1x} - \tau_{1x}F_{1z})}_{M^{(1)}_{(Q)y}}\vec{j} + \underbrace{(\tau_{1x}F_{1y} - \tau_{1y}F_{1x})}_{M^{(1)}_{(Q)z}}\vec{k}$$

DOVE LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{M}^{(1)}_{(Q)} = M^{(1)}_{(Q)x}\vec{i} + M^{(1)}_{(Q)y}\vec{j} + M^{(1)}_{(Q)z}\vec{k}$ RISULTANO COSIFFATTE:

$$M^{(1)}_{(Q)x} = \tau_{1y}F_{1z} - \tau_{1z}F_{1y}$$

$$M^{(1)}_{(Q)y} = \tau_{1z}F_{1x} - \tau_{1x}F_{1z}$$

$$M^{(1)}_{(Q)z} = \tau_{1x}F_{1y} - \tau_{1y}F_{1x}$$



SI OSSERVA CHE LA COMPONENTE x DI $\vec{M}^{(1)}_{(Q)}$ È DATA DA UNA COMBINAZIONE DELLE COMPONENTI y E z DI $\vec{\tau}_1$ E DI $\vec{F}_1$, (PRIMO E SECONDO VETTORE) PRESE IN MODO TALE CHE GLI INDICI SIANO DIVERSI. IL SEGNO DELLA COMBINAZIONE È (+) SE SI SEGUE LA SEQUENZA NATURALE $x-y-z-x-y$ ECC; È (−) SE SI SEGUE LA SEQUENZA INVERSA $z-y-x-z-y$ ECC. ANALOGHE

CONSIDERAZIONI VALGONO PER LE COMPONENTI y E z DI $\vec{M}^{(1)}_{(Q)}$.
RIPETENDO QUANTO FATTO PER $\vec{M}^{(2)}_{(Q)} = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$; ...; $\vec{M}^{(N)}_{(Q)} = \vec{r}_N \wedge \vec{F}_N$ SI GIUNGE AL RISULTATO:

$$\vec{M}_{(Q)} = \vec{M}^{(1)}_{(Q)} + \vec{M}^{(2)}_{(Q)} + \dots + \vec{M}^{(N)}_{(Q)}$$

CHE ESPRIME IL MOMENTO RISULTANTE $\vec{M}_{(Q)}$ COME SOMMA DEI CONTRIBUTI DOVUTI ALLE N FORZE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ APPLICATE RISPETTIVAMENTE AI PUNTI $P_1, P_2, \dots, P_N$

QUINDI $\vec{M}_{(Q)} = M_{(Q)x}\vec{i} + M_{(Q)y}\vec{j} + M_{(Q)z}\vec{k}$, DOVE

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(Q)} = &\left[(r_{1y}F_{1z} - r_{1z}F_{1y}) + (r_{2y}F_{2z} - r_{2z}F_{2y}) + \dots + (r_{Ny}F_{Nz} - r_{Nz}F_{Ny})\right]\vec{i} + \\ &\left[(r_{1z}F_{1x} - r_{1x}F_{1z}) + (r_{2z}F_{2x} - r_{2x}F_{2z}) + \dots + (r_{Nz}F_{Nx} - r_{Nx}F_{Nz})\right]\vec{j} + \\ &\left[(r_{1x}F_{1y} - r_{1y}F_{1x}) + (r_{2x}F_{2y} - r_{2y}F_{2x}) + \dots + (r_{Nx}F_{Ny} - r_{Ny}F_{Nx})\right]\vec{k}\end{aligned}$$

E PERTANTO SI OTTIENE:

$$M_{(Q)x} = (r_{1y}F_{1z} - r_{1z}F_{1y}) + (r_{2y}F_{2z} - r_{2z}F_{2y}) + \dots + (r_{Ny}F_{Nz} - r_{Nz}F_{Ny}) = \sum_{i=1}^{N}(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy})$$

$$M_{(Q)y} = (r_{1z}F_{1x} - r_{1x}F_{1z}) + (r_{2z}F_{2x} - r_{2x}F_{2z}) + \dots + (r_{Nz}F_{Nx} - r_{Nx}F_{Nz}) = \sum_{i=1}^{N}(r_{iz}F_{ix} - r_{ix}F_{iz})$$

$$M_{(Q)z} = (r_{1x}F_{1y} - r_{1y}F_{1x}) + (r_{2x}F_{2y} - r_{2y}F_{2x}) + \dots + (r_{Nx}F_{Ny} - r_{Ny}F_{Nx}) = \sum_{i=1}^{N}(r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{ix})$$

IN CONCLUSIONE

$$\vec{M}_{(Q)} = \vec{0} \iff \begin{cases} M_{(Q)x} = 0 \\ M_{(Q)y} = 0 \\ M_{(Q)z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{N}(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy})\right] = 0 \\ \left[\sum_{i=1}^{N}(r_{iz}F_{ix} - r_{ix}F_{iz})\right] = 0 \\ \left[\sum_{i=1}^{N}(r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{ix})\right] = 0 \end{cases} \quad [2']$$

1 EQ. VETTORIALE

3 EQ. PER COMPONENTI.

I RISULTATI [1] E [2], OVVERO [1'] E [2'] VALGONO NEL CASO GENERALE, 3-D. SE CI SI LIMITA A CONSIDERARE SISTEMI

PIANI, NEI QUALI SI HA CHE TUTTE LE FORZE $\vec{F}_i$ STANNO IN UN PIANO x-y E I PUNTI P_i E Q APPARTENGONO AL MEDESIMO PIANO, SI TROVA CHE

$$F_{iz} = 0 \quad \forall i \qquad ; \qquad r_{iz} = 0 \quad \forall i.$$

PERTANTO LA CONDIZIONE $R_z = 0$ È AUTOMATICAMENTE SODDISFATTA FRA LE [1']; ANALOGAMENTE SI TROVA

$$r_{iy} \cancelto{0}{F_{iz}} - \cancelto{0}{r_{iz}} F_{iy} = 0 \quad \forall i \quad ; \quad \cancelto{0}{r_{iz}} F_{ix} - r_{ix} \cancelto{0}{F_{iz}} = 0 \quad \forall i$$

E QUINDI FRA LE [2'] SONO AUTOMATICAMENTE SODDISFATTE LE CONDIZIONI $M_{(Q)x} = 0$ E $M_{(Q)y} = 0$.

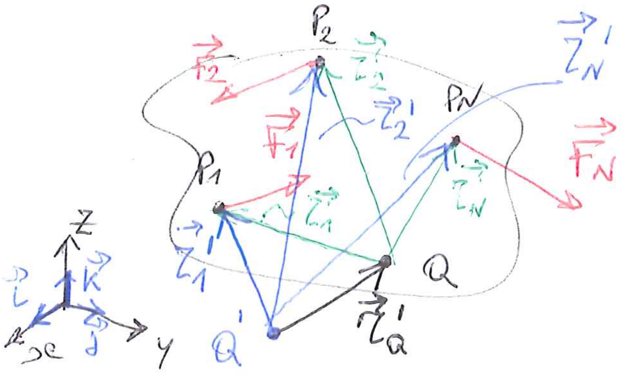
QUINDI NEL CASO PIANO (2-D) LE 2 EQUAZIONI VETTORIALI [1] e [2] SI RIDUCONO A QUESTE 3 EQUAZIONI SCALARI:

$$R_x = 0$$
$$R_y = 0$$
$$M_{(Q)z} = 0$$

SI OSSERVI CHE SIA NEL CASO GENERALE (3-D) CHE IN QUELLO PIANO (2-D) C'È ESATTA CORRISPONDENZA FRA IL NUMERO DI EQUAZIONI SCALARI DI EQUILIBRIO E IL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ.

QUESTA CORRISPONDENZA È ALLA BASE DEL DUALISMO STATICO-CINEMATICO CHE RICORRERÀ FREQUENTEMENTE NEL SEGUITO.

NOTA: LE EQUAZIONI CARDINALI VALGONO COMUNQUE SIA SCELTO IL POLO Q. CHE SUCCEDE SE SI SCEGLIE UN DIVERSO POLO, Q'?



SI OSSERVA CHE IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE CHE FORNISCE IL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AL POLO Q' SI ESPRIME COSÌ:

$$\vec{M}_{(Q')} = \vec{r}_1{}' \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2{}' \wedge \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_N{}' \wedge \vec{F}_N$$

CON $\vec{r}_1{}' = (\overrightarrow{P_1 - Q'})$; $\vec{r}_2{}' = (\overrightarrow{P_2 - Q'})$, $\vec{r}_N{}' = (\overrightarrow{P_N - Q'})$

D'ALTRA PARTE È EVIDENTE CHE SI PUÒ SCRIVERE

$$\vec{r}_1^{\,\prime} = \vec{r}_1 + \vec{r}_a^{\,\prime} \qquad \text{CIOÈ} \qquad \overrightarrow{(P_1-Q')} = \overrightarrow{(P_1-Q)} + \underbrace{\overrightarrow{(Q-Q')}}_{\vec{r}_a^{\,\prime}}$$

$$\vec{r}_2^{\,\prime} = \vec{r}_2 + \vec{r}_a^{\,\prime} \qquad \text{CIOÈ} \qquad \overrightarrow{(P_2-Q')} = \overrightarrow{(P_2-Q)} + \underbrace{\overrightarrow{(Q-Q')}}_{\vec{r}_a^{\,\prime}}$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N^{\,\prime} = \vec{r}_N + \vec{r}_a^{\,\prime} \qquad \text{CIOÈ} \qquad \overrightarrow{(P_N-Q')} = \overrightarrow{(P_N-Q)} + \underbrace{\overrightarrow{(Q-Q')}}_{\vec{r}_Q^{\,\prime}}$$

EGUALE ADDENDO PER TUTTI I TERMINI

E DUNQUE

$$\vec{M}_{(Q')} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_a^{\,\prime}) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_a^{\,\prime}) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{r}_N + \vec{r}_a^{\,\prime}) \wedge \vec{F}_N$$

OVVERO, RIORDINANDO I TERMINI DOPO AVERE RIDISTRIBUITO I PRODOTTI VETTORIALI [TENENDO CONTO CHE $(\vec{A}+\vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{C}$ E CHE $\vec{D} \wedge \vec{E} + \vec{D} \wedge \vec{F} = \vec{D} \wedge (\vec{E}+\vec{F})$]:

$$\vec{M}_{(Q')} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_N \wedge \vec{F}_N + \vec{r}_Q^{\,\prime} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N)$$

CIOÈ

$$\vec{M}_{(Q')} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i + r_Q^{\prime} \wedge \sum_{i=1}^{N} F_i$$

D'ALTRA PARTE, PER LA [1] $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{R}$ E PER LA [2]

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_{(Q)}$$

SI PUÒ INTERPRETARE COME SEGUE: MOMENTO RISULTANTE RISPETTO A NUOVO POLO (Q') È EGUALE A MOMENTO RISULTANTE RISPETTO A VECCHIO POLO (Q) PIÙ TERMINE CORRETTIVO DATO DA MOMENTO DELLA RISULTANTE PENSATA APPLICATA NEL VECCHIO POLO.

NE SEGUE QUINDI

$$\vec{M}_{(Q')} = \vec{M}_{(Q)} + r_Q^{\prime} \wedge \vec{R}$$

E PERTANTO SE $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_{(Q)} = 0$ È ANCHE SEMPRE $\vec{M}_{(Q')} = \vec{0}$.

QUESTO COMPORTA COME CONSEGUENZA CHE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DEL MOMENTO RISULTANTE SCRITTE RISPETTO A POLI DIVERSI (Q, Q') <u>NON</u> SONO INDIPENDENTI.

LE EQUAZIONI CARDINALI FORMULATE IN PRECEDENZA:

$$\vec{R} = \vec{0}$$
$$\vec{M}_{(Q)} = \vec{0}$$

VALGONO PER UN CORPO RIGIDO LIBERO (PRIVO DI VINCOLI) E SOGGETTO A UN SISTEMA DI FORZE <u>ATTIVE</u> (DETTI CARICHI).

SE IL CORPO RIGIDO È SOGGETTO A VINCOLI, E PER SEMPLICITA' SI AMMETTERÀ CHE QUESTI SIANO

- FISSI (INDIPENDENTI DAL TEMPO) E PUNTIFORMI
- PERFETTI (NON DIANO LUOGO A CEDIMENTI O "GIOCHI")
- LISCI (NON CI SIANO EFFETTI DOVUTI AD ATTRITO)
- BILATERI (SE IMPEDISCONO LO SPOSTAMENTO/ROTAZIONE IN UN CERTO VERSO, LO IMPEDISCONO ANCHE NEL VERSO OPPOSTO),

ALLORA È POSSIBILE ELIMINARE I VINCOLI SOSTITUENDOLI CON DELLE FORZE (INCOGNITE IN MODULO E VERSO, MA NOTE IN DIREZIONE), LE <u>REAZIONI VINCOLARI</u>. CI SI RICONDUCE IN QUESTO MODO A UN "DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO", SOGGETTO A FORZE IN PARTE NOTE (I CARICHI) E IN PARTE INCOGNITE, LE REAZIONI DEI VINCOLI.

QUESTE REAZIONI VINCOLARI TENGONO CONTO DEL FATTO CHE SE LA MOBILITA' DEL CORPO RIGIDO È LIMITATA DAI VINCOLI, ALLORA L'EFFETTO DI QUESTI SUL CORPO RIGIDO È RICONDUCIBILE ALL'AZIONE DI FORZE/COPPIE AGENTI SECONDO LA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO/ROTAZIONE INTERDETTO DAL VINCOLO STESSO.

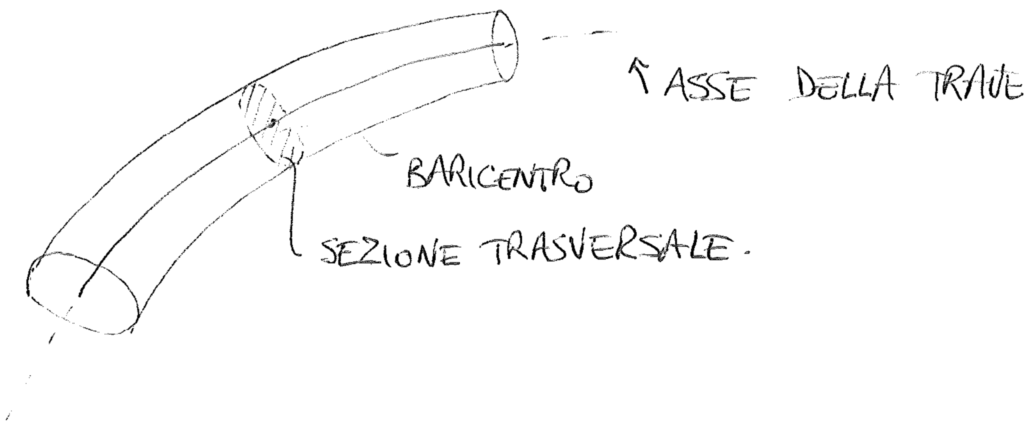
D'ALTRA PARTE QUESTE REAZIONI SONO "FORZE DISPONIBILI" (IN MODULO E VERSO) IN GRADO DI ADATTARSI ALLE FORZE ATTIVE AGENTI, PER ESEMPIO PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO

RIDOTTO IL CORPO RIGIDO VINCOLATO AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, LE EQ. CARDINALI DIVENGONO:

$$\vec{R}^{\,\text{attive}+\text{reattive}} = \vec{0} \qquad \vec{M}_{(Q)}^{\,\text{attive}+\text{reattive}} = \vec{0}.$$

NELL'AMBITO DELLA CATEGORIA DEL CORPO RIGIDO HA SENSO, IN VISTA DELLE APPLICAZIONI, RESTRINGERE L'ATTENZIONE A PARTICOLARI CORPI RIGIDI NEI QUALI UNA DIMENSIONE (LA LUNGHEZZA) È PREVALENTE RISPETTO ALLE ALTRE DUE (LARGHEZZA E ALTEZZA).
UN CORPO RIGIDO DI QUESTO GENERE È DETTO "TRAVE".

IN TERMINI PIÙ PRECISI, SI PUÒ DEFINIRE UNA TRAVE COME IL SOLIDO GENERATO DA UN'AREA PIANA, DETTA "SEZIONE TRASVERSALE", (EVENTUALMENTE DI FORMA E DIMENSIONI VARIABILI CON CONTINUITÀ) CHE SI MUOVA NELLO SPAZIO MANTENENDOSI PERPENDICOLARE ALLA TRAIETTORIA DESCRITTA DAL SUO BARICENTRO, CHE SI DEFINISCE <u>ASSE GEOMETRICO</u> DELLA TRAVE
L'ASSE DELLA TRAVE PUÒ ESSERE UN SEGMENTO DI RETTA, UNA POLIGONALE O UNA GENERICA LINEA CURVA (PIANA O SGHEMBA)



PERCHÉ UN SOLIDO DI QUESTO TIPO SIA UNA TRAVE OCCORRE CHE LO SVILUPPO LINEARE E I RAGGI DI CURVATURA DELL'ASSE GEOMETRICO SIANO MOLTO MAGGIORI (>>) DELLE DIMENSIONI LINEARI DELLA SEZIONE TRASVERSALE.

SE L'ASSE GEOMETRICO È TUTTO CONTENUTO IN UN PIANO, CHE CONTIENE ANCHE UNO DEGLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA DELLA SEZIONE (CIÒ SIGNIFICA CHE LA SEZIONE TRASVERSALE NON SI "AVVITA", COME IN UNA COLONNA ELICOIDALE) LA TRAVE SI DICE PIANA.
UNA TRAVE È QUINDI COMPLETAMENTE DEFINITA SE È NOTA LA LINEA D'ASSE E LA SEZIONE TRASVERSALE.

CON RIFERIMENTO A TRAVI PIANE INDIVIDUATE DALLA LORO LINEA D'ASSE SI INTRODUCONO I VINCOLI, DISPOSITIVI PUNTIFORMI (RIFERITI ALLA LINEA D'ASSE) CHE IMPEDISCONO NEL PUNTO IN CUI SONO COLLOCATI TUTTE O ALCUNE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO / ROTAZIONE.

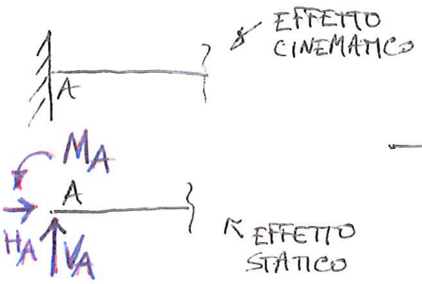
A SECONDA DEL NUMERO DI GDL BLOCCATI SI DISTINGUONO IN TRIPLI, CHE BLOCCANO, CIOÈ TOLGONO, 3 GDL INTRODUCENDO 3 GDV (GRADI DI VINCOLO), DOPPI, CHE BLOCCANO 2 GDL INTRODUCENDO 2 GDV, E SEMPLICI, CHE BLOCCANO 1 GDL INTRODUCENDO 1 GDV.

SI NOTI CHE IN CORRISPONDENZA DI OGNI GDL BLOCCATO SI PUÒ FARE CONTO, DAL PUNTO DI VISTA STATICO, CHE IL VINCOLO ESERCITI SULL'ASSE DELLA TRAVE UNA FORZA / COPPIA INCOGNITA CORRISPONDENTE, LA REAZIONE VINCOLARE.

SI PUÒ DARE UNA CLASSIFICAZIONE COME SEGUE

VINCOLO TRIPLO (TOGLIE 3 GDL, INTRODUCE 3 GDV)

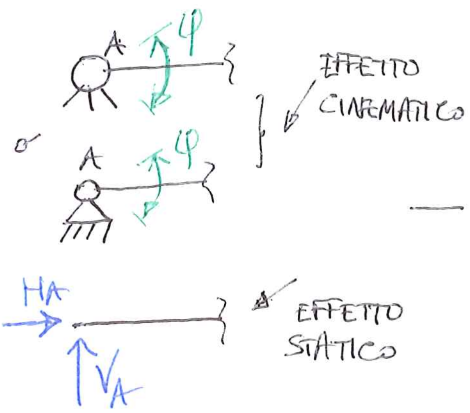
	SPOSTAMENTI LIBERI	REAZIONI PRESENTI	SPOSTAMENTI BLOCCATI	AZIONI NON TRASMESSE
INCASTRO	—, —, —	H, V, M	u, v, φ	—, —, —



RELAZIONE SPOSTAMENTI / REAZIONI

VINCOLI DOPPI (TOLGONO 2 GDL, INTRODUCONO 2 GDV)

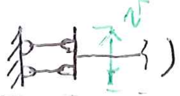
CERNIERA

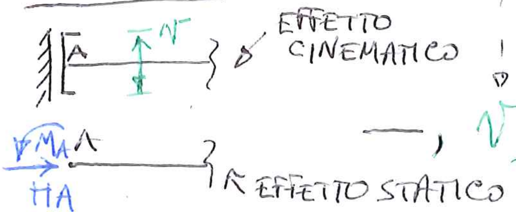


—, —, φ	H, V, —	u, v, —	—, —, M

CORRISPONDENZA

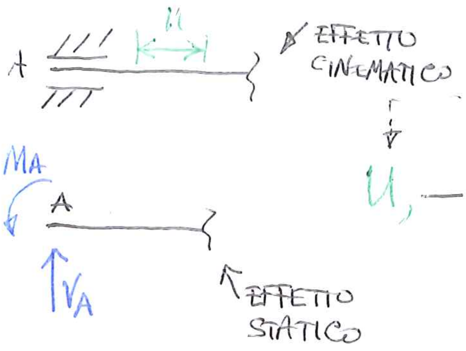
CORRISPONDENZA

PATTINO (BIPENDOLO )



—, v, —	H, —, M	u, —, φ	—, V, —

MANICOTTO (INCASTRO SCORREVOLE)

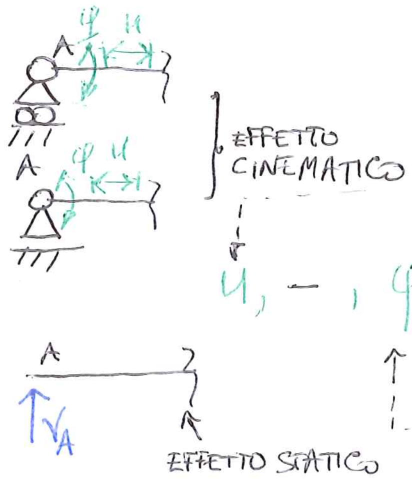


u, —, — —, V, M —, v, φ H, —, —

VINCOLI SEMPLICI (TOLGONO 1 GDL, INTRODUCONO 1 GDV)

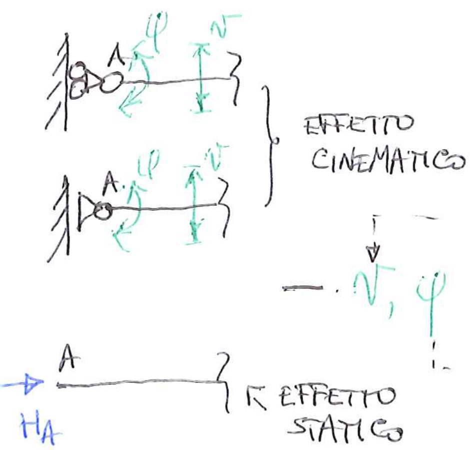
CARRELLO (APPOGGIO)

- CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE



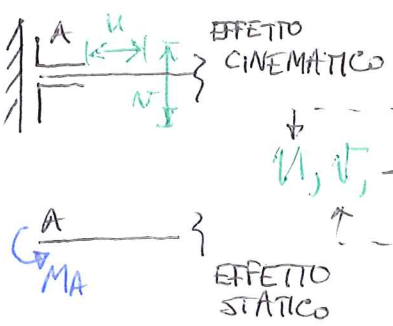
u, —, φ —, V, — —, v, — H, —, M

- CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE



—, v, φ H, —, — u, —, — —, V, M

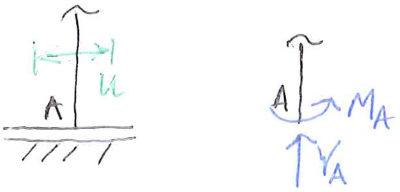
PATTINO-MANICOTTO (INCASTRO SEMPLICE)



u, v, — —, —, M —, —, φ H, V, —

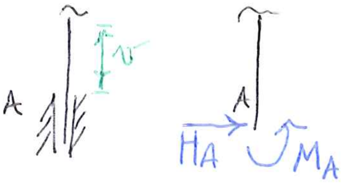
NOTA 1:

IL PATTINO PUÒ ESSERE MONTATO IN MODO DA AVERE PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE; LE REAZIONI CAMBIANO DI CONSEGUENZA:



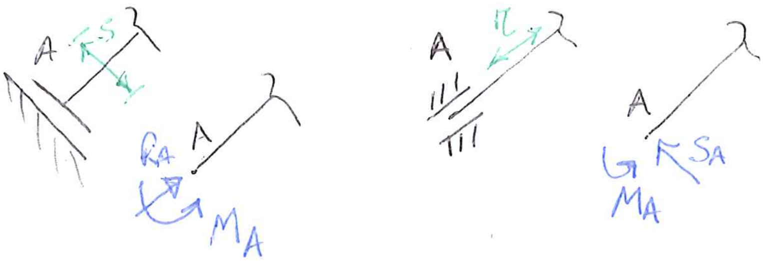
ECC.

SIMILMENTE IL MANICOTTO PUÒ ESSERE MONTATO IN MODO DA AVERE PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE



ECC.

E INOLTRE POSSONO ESSERE MONTATI ENTRAMBI IN DIREZIONE OBLIQUA:

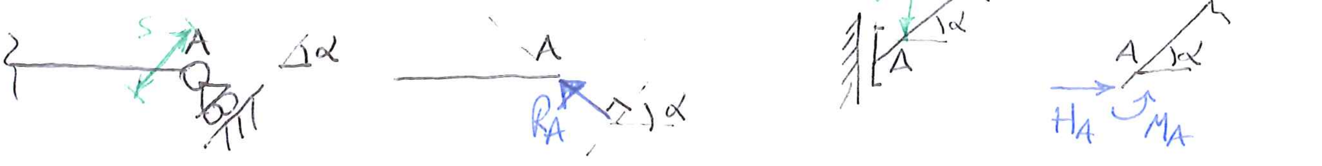


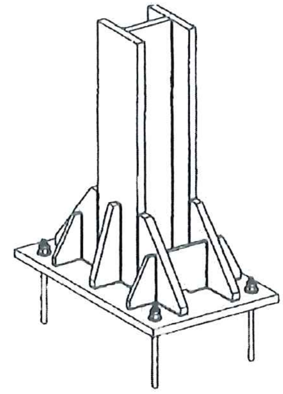
CIÒ CHE LI DISTINGUE È IL FATTO CHE IL PRIMO BLOCCA LO SPOSTAMENTO IN DIREZIONE PARALLELA (//) ALL'ASSE DELLA TRAVE; IL SECONDO IN DIREZIONE PERPENDICOLARE (⊥) ALL'ASSE DELLA TRAVE.
LE COMPONENTI DI REAZIONE SONO ORIENTATE DI CONSEGUENZA.

NOTA 2:

PER I VINCOLI CARATTERIZZATI DA UN PIANO DI SCORRIMENTO SI DEVE TENERE CONTO CHE LA REAZIONE VINCOLARE È <u>SEMPRE</u> PERPENDICOLARE A QUEST'ULTIMO.
QUINDI NEL CASO DI PATTINO O DI CARRELLO DISPOSTO NON PERPENDICOLARMENTE ALL'ASSE DELLA TRAVE È IL PIANO DI SCORRIMENTO A INDIVIDUARE UNIVOCAMENTE LA DIREZIONE DELLA REAZIONE VINCOLARE.

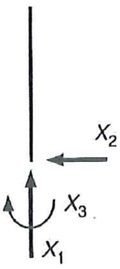
ESEMPI:



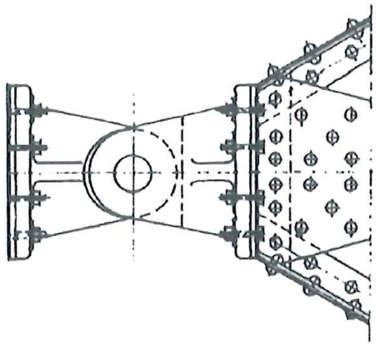


a)

b)

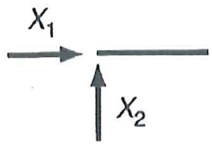


c)

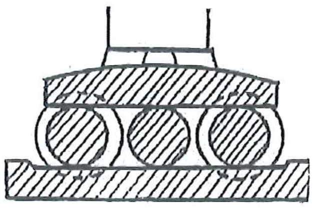


a)

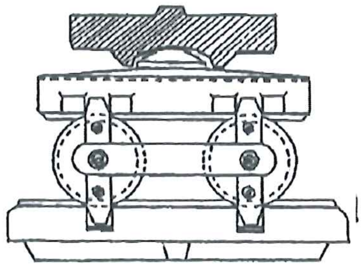
b)



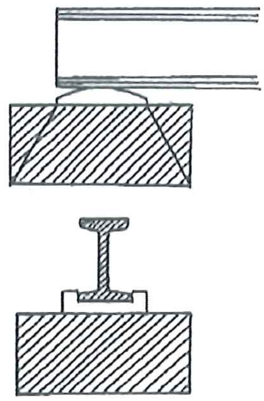
c)



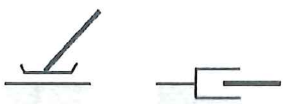
a)



a)

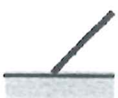


a)

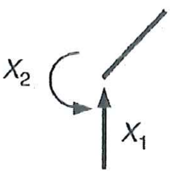


b)

b)



b)



c)

c)

c)

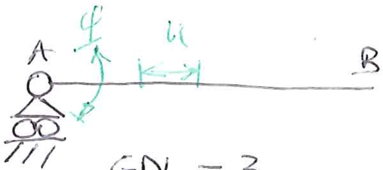
IN BASE AL NUMERO DI GDV PRESENTI UN CORPO RIGIDO (TRAVE) VINCOLATO PUÒ DARE LUOGO A QUESTE 3 POSSIBILITÀ:

- SE GDV < GDL LA TRAVE È DETTA <u>IPOSTATICA</u> (SOTTO VINCOLATA)

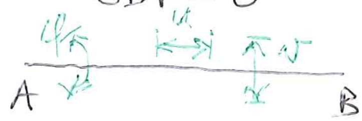
IL PREFISSO "IPO" DISCENDE DAL GRECO ("SOTTO") E INDICA UNA SITUAZIONE IN CUI I VINCOLI SONO INSUFFICIENTI A IMPEDIRE SPOSTAMENTI RIGIDI.

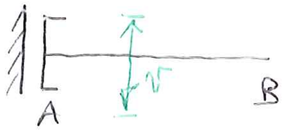
ES:

GDL = 3
GDV = 1(A) = 1
GDV < GDL

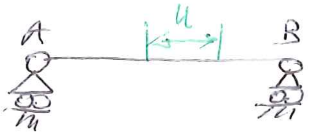


GDL = 3
GDV = 0
GDV < GDL





GDL = 3
GDV = 2(A) = 2
GDV < GDL



GDL = 3
GDV = 1(A) + 1(B) = 2
GDV < GDL

- SE GDV = GDL LA TRAVE È DETTA <u>ISOSTATICA</u> (VINCOLATA IN MODO SUFFICIENTE)

IL PREFISSO "ISO" DISCENDE DAL GRECO ("EGUALE") E INDICA UNA SITUAZIONE IN CUI I VINCOLI SONO IN NUMERO SUFFICIENTE A IMPEDIRE SPOSTAMENTI RIGIDI.

ES:

GDL = 3
GDV = 3(A) = 3
GDV = GDL

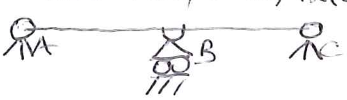
GDL = 3
GDV = 2(A) + 1(B) = 3
GDV = GDL

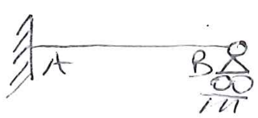
- SE GDV > GDL LA TRAVE È DETTA <u>IPERSTATICA</u> (SOVRAVINCOLATA)

IL PREFISSO "IPER" DISCENDE DAL GRECO ("SOPRA") E INDICA UNA SITUAZIONE IN CUI I VINCOLI SONO IN NUMERO SOVRABBONDANTE A IMPEDIRE SPOSTAMENTI RIGIDI.

ES:

GDL = 3
GDV = 2(A) + 1(B) + 2(C) = 5
GDV > GDL





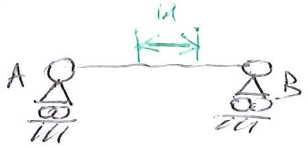
GDL = 3
GDV = 3(A) + 1(B) = 4
GDV > GDL

IL NUMERO DI VINCOLI PRESENTI PERMETTE DI CLASSIFICARE UNA TRAVE NELLE 3 CATEGORIE PRECEDENTI.

TUTTAVIA OCCORRE ACCERTARE NON SOLO CHE I VINCOLI SIANO IN NUMERO SUFFICIENTE MA CHE SIANO ANCHE BEN DISPOSTI, OVVERO CHE COOPERINO EFFICACEMENTE A IMPEDIRE SPOSTAMENTI RIGIDI.

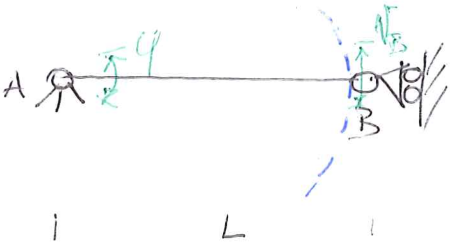
DIVERSAMENTE LA STRUTTURA È DETTA LABILE, PERCHÉ SUSSISTONO POSSIBILITÀ DI SPOSTAMENTI INFINITESIMI.

IN PARTICOLARE, LE TRAVI IPOSTATICHE SONO SEMPRE <u>LABILI</u>



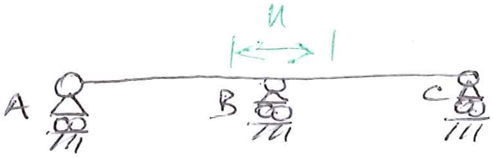
$GDV = 1(A) + 1(B) = 2 < 3 = GDL$

LE TRAVI ISOSTATICHE POSSONO ESSERE LABILI SE I VINCOLI SONO MAL DISPOSTI:



$GDV = 2(A) + 1(B) = 3 = 3 = GDL$

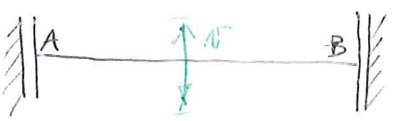
MA I VINCOLI SONO MAL DISPOSTI: LA ROTAZIONE DELLA CERNIERA IN Ⓐ, φ PRODUCE IN Ⓑ, SE CI SI LIMITA A SPOSTAMENTI INFINITESIMI UNO SPOSTAMENTO VERTICALE v_B CHE NON È IMPEDITO DAL CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE



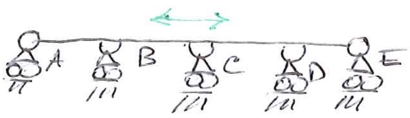
$GDV = 1(A) + 1(B) + 1(C) = 3 = 3 = GDL$

MA I TRE CARRELLI, TUTTI CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE NON POSSONO CONTRASTARE LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE u (CHE PUÒ ESSERE DI AMPIEZZA FINITA).

LE TRAVI IPERSTATICHE POSSONO A LORO VOLTA ESSERE LABILI SE I VINCOLI SONO MAL DISPOSTI:



$GDV = 2(A) + 2(B) = 4 > 3 = GDL$ MA SPOSTAMENTO VERTICALE v NON È IMPEDITO DAI VINCOLI



$GDV = 1(A) + 1(B) + 1(C) + 1(D) + 1(E) = 5 > 3 = GDL$

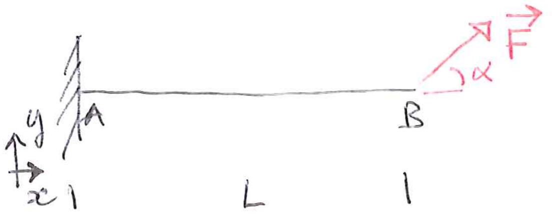
MA LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE u NON È IMPEDITO DAI VINCOLI.

LA CORRETTA DISPOSIZIONE DEI VINCOLI È OGGETTO DELL'ANALISI CINEMATICA

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI TRAVI ISOSTATICHE NON LABILI.

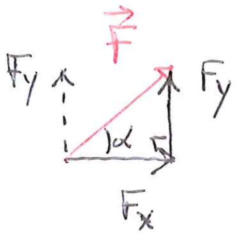
PER QUESTE – E SOLO PER QUESTE – È POSSIBILE UTILIZZARE LE EQUAZIONI CARDINALI PER DETERMINARE I VALORI DELLE REAZIONI VINCOLARI CHE GARANTISCONO L'EQUILIBRIO SOTTO ASSEGNATI CARICHI. INOLTRE IN QUESTE CONDIZIONI SI PUÒ TROVARE UNA SOLUZIONE CHE SODDISFA L'EQUILIBRIO PER QUALSIASI SISTEMA DI CARICHI APPLICATI

ESEMPIO 1



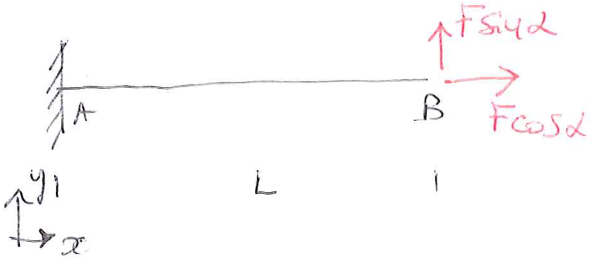
TRAVE A <u>MENSOLA</u> DI <u>LUCE</u> L SOGGETTA A UN CARICO OBLIQUO $\vec{F}$ APPLICATO IN PUNTA.

LA FORZA ESTERNA $\vec{F}$ PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA UN SISTEMA DI 2 FORZE AGENTI PARALLELAMENTE AGLI ASSI x (ORIZZONTALE) E y (VERTICALE)



$$F_x = |\vec{F}|\cos\alpha = F\cos\alpha$$

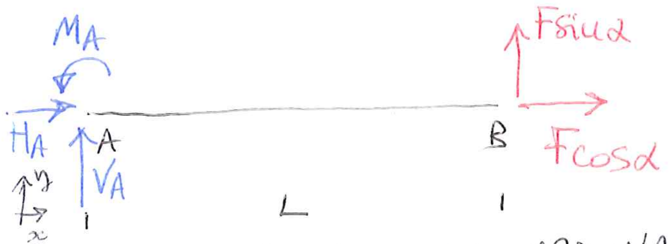
$$F_y = |\vec{F}|\sin\alpha = F\sin\alpha$$



$$\left.\begin{array}{l} GDL = 3 \\ GDV = 3(A) = 3 \end{array}\right\} \text{TRAVE ISOSTATICA}$$

LA PRESENZA DI UN SOLO VINCOLO TRIPLO GARANTISCE LA IMPOSSIBILITA' DI SPOSTAMENTI.

SI PASSA AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



E ALLE EQUAZIONI CARDINALI, SCEGLIENDO COME POLO IL PUNTO A:

$$\begin{cases} R_x^{att+reall} = 0 \\ R_y^{att+reall} = 0 \\ M_{z(A)}^{att+reall} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{SI SONO INDICATI I VERSI POSITIVI} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \rightarrow R_x = 0 & & H_A + F\cos\alpha = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & & V_A + F\sin\alpha = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & & M_A + F\sin\alpha L = 0 \end{array}$$

PER IL CALCOLO DI $M_{z(A)}$, CIOÈ DELLA COMPONENTE z (L'UNICA PRESENTE IN UN PROBLEMA 2-D) DEL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AL PUNTO (A) SI TIENE CONTO CHE H_A E V_A SONO APPLICATE NEL PUNTO STESSO E DANNO CONTRIBUTO NULLO AL MOMENTO RISULTANTE, COME PURE LA COMPONENTE ORIZZONTALE $F\cos\alpha$, LA CUI RETTA D'AZIONE PASSA PER IL PUNTO (A).

RESTA QUINDI IL CONTRIBUTO DELLA COPPIA D'INCASTRO M_A, CHE DÀ UN CONTRIBUTO ANTIORARIO (DUNQUE CON LA CONVENZIONE SCELTA, >0) AL MOMENTO RISULTANTE DI VALORE M_A, INDIPENDENTE DAL POLO E IL CONTRIBUTO DELLA FORZA $F\sin\alpha$ CHE HA UN BRACCIO PARI A L RISPETTO AL POLO (A). SI RICORDA CHE IL BRACCIO DI UNA FORZA RISPETTO A UN PUNTO È IN VALORE ASSOLUTO PARI ALLA DISTANZA, MISURATA SECONDO LA PERPENDICOLARE, FRA LA RETTA D'AZIONE DELLA FORZA E IL PUNTO STESSO.

PER VALUTARE IL SEGNO DEL MOMENTO, SI IMMAGINA DI FISSARE LA TRAVE MEDIANTE UNO SPILLO NEL POLO E SI VALUTA SE L'INCENTIVO ALLA ROTAZIONE PRODOTTO DALLA FORZA SULLA TRAVE (CHE FUNZIONA COME UNA LEVETTA) È DI VERSO ANTIORARIO (E DUNQUE POSITIVO, PER LA CONVENZIONE SCELTA) OD ORARIO (E QUINDI NEGATIVO).

NEL CASO PRESENTE LA FORZA $F\sin\alpha$ APPLICATA IN B TENDE A FARE RUOTARE LA TRAVE/LEVETTA IN VERSO ANTIORARIO RISPETTO AD (A) E DUNQUE IL CONTRIBUTO AL MOMENTO RISULTANTE VALE $+F\sin\alpha L$.

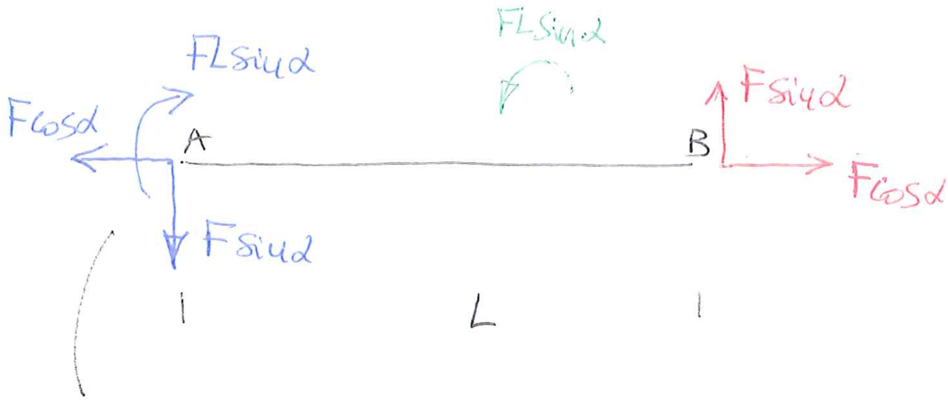
IL SISTEMA DI EQUAZIONI COSÌ OTTENUTO PUÒ ESSERE FACILMENTE RISOLTO (IN QUESTO PARTICOLARE CASO LE 3 EQ. SONO DISACCOPPIATE: NON SEMPRE SI VERIFICA QUESTA CIRCOSTANZA!) E FORNISCE:

$$\left.\begin{aligned} H_A &= -F\cos\alpha \\ V_A &= -F\sin\alpha \\ M_A &= -FL\sin\alpha . \end{aligned}\right]$$

I SEGNI NEGATIVI INDICANO CHE LE 3 REAZIONI HANNO VERSI OPPOSTI A QUELLI ASSUNTI

SI VERIFICA CHE H_A E V_A SONO OMOGENEI A UNA FORZA: $[H_A]=[F]$; $[V_A]=[F]$; M_A È OMOGENEA A UN MOMENTO $[M_A]=[FL]$

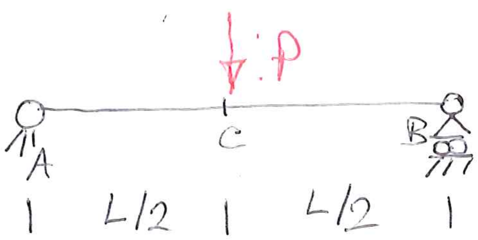
TENENDO CONTO CHE LE REAZIONI HANNO SEGNI NEGATIVI, CIOÈ VERSI OPPOSTI A QUELLI IPOTIZZATI, SI HA CHE IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO LA TRAVE A MENSOLA RISULTA SOGGETTA ALL'AZIONE DI QUESTE FORZE: 19



SI CAMBIANO I VERSI ALLE FORZE ELIMINANDO I SEGNI NEGATIVI: $\uparrow - F\sin\alpha = \downarrow F\sin\alpha$; ECC.

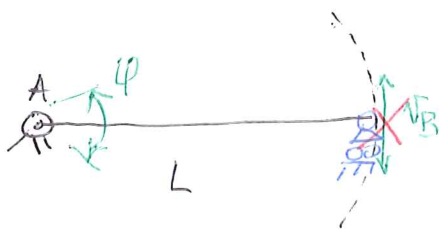
SI VEDE CHE GRAFICAMENTE LE FORZE ORIZZONTALI SI BILANCIANO E HANNO LA MEDESIMA RETTA D'AZIONE (QUINDI DANNO LUOGO A UNA COPPIA DI MOMENTO NULLO); LE FORZE VERTICALI SI BILANCIANO MA AVENDO RETTE D'AZIONE DISTANZIATE DI UNA QUANTITÀ L DANNO LUOGO A UNA COPPIA ANTIORARIA DI MOMENTO FL sin α (↺); LA COPPIA D'INCASTRO, ORARIA E DI MOMENTO FL sin α (↻) È ALLORA RICHIESTA PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI (CIOÈ LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE).

ESEMPIO 2



TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA DI LUCE L E SOGGETTA A CARICO VERTICALE APPLICATO IN MEZZERIA

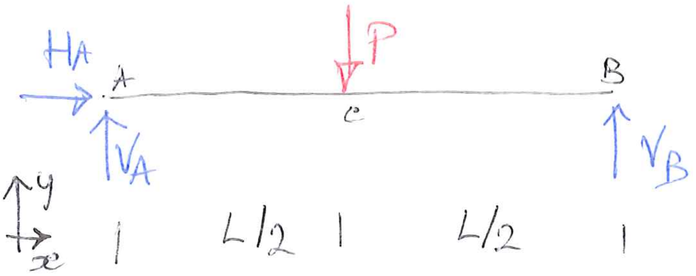
$GDL = 3$
$GDV = 2(A) + 1(B) = 3$ } TRAVE ISOSTATICA



I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI: PER EFFETTO DELLA CERNIERA IN (A) LA TRAVE PUÒ RUOTARE ATTORNO AD (A); IL PUNTO (B) DESCRIVEREBBE UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO L E CENTRO IN (A); SE CI SI

LIMITA A CONSIDERARE ANGOLI DI AMPIEZZA INFINITESIMA, IL PUNTO (B) SI SPOSTEREBBE SECONDO LA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN (B), CIOÈ ESCLUSIVAMENTE IN DIREZIONE VERTICALE; A QUESTO PUNTO IL CARRELLO PRESENTE IN (B), CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE IMPEDISCE LO SPOSTAMENTO VERTICALE, INIBENDO OGNI SPOSTAMENTO DELLA TRAVE.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DIVIENE:



E LE EQUAZIONI CARDINALI SONO:

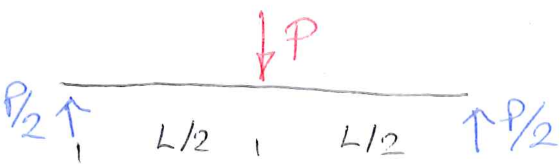
$$\rightarrow R_x = 0 \qquad H_A = 0 \quad [1] \qquad\qquad H_A = 0$$

$$\uparrow R_y = 0 \qquad V_A - P + V_B = 0 \quad [2] \quad \Rightarrow \qquad V_A = \frac{P}{2}$$

$$\circlearrowleft M_{Z(A)} = 0 \qquad -P\frac{L}{2} + V_B \cdot L = 0 \quad [3] \qquad\qquad V_B = \frac{P}{2}$$

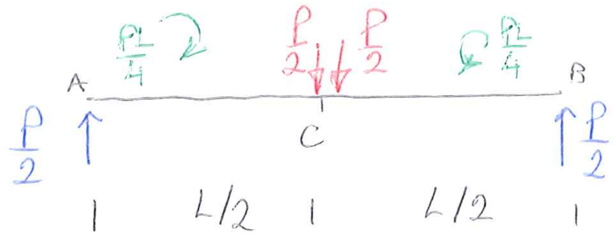
SI NOTI CHE NELLA SECONDA EQUAZIONE (DI EQUILIBRIO IN DIREZIONE VERTICALE) LE FORZE V_A E V_B SONO CONCORDI COL VERSO POSITIVO ASSUNTO, MENTRE P È DISCORDE E DEVE COMPARIRE CON IL SEGNO NEGATIVO. PER QUANTO RIGUARDA LA TERZA EQUAZIONE, H_A E V_A SONO APPLICATE AL PUNTO (A) (CHE È IL POLO SCELTO) E QUINDI DANNO CONTRIBUTO NULLO AL MOMENTO; P HA BRACCIO PARI A L/2 RISPETTO AD (A) E PRODUCE MOMENTO ORARIO (↻), DUNQUE NEGATIVO IN BASE ALLA CONVENZIONE SCELTA; V_B HA BRACCIO PARI A L (=L/2+L/2) E DÀ LUOGO A MOMENTO ANTI-ORARIO (↺), DUNQUE POSITIVO.
PER LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA, LA [1] INDICA $H_A=0$ (CIOÈ PER MANTENERE L'EQUILIBRIO LA CERNIERA NON DEVE FORNIRE REAZIONE ORIZZONTALE; LA [3], SEMPLIFICANDO IL TERMINE COMUNE L DÀ $-\frac{P}{2}+V_B=0$, DUNQUE $V_B=\frac{P}{2}$; SOSTITUENDO NELLA [2] SI TROVA $V_A=\frac{P}{2}$.

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SI HA:



- SOLUZIONE SIMMETRICA VISTO CHE LA TRAVE È TALE ED È CARICATA IN MODO SIMMETRICO.

SI OSSERVI INOLTRE CHE SI PUÒ SCOMPORRE IL CARICO P IN DUE PARTI EGUALI, CIASCUNA DELLE QUALI EQUILIBRA (CIOÈ BILANCIA) UNA DELLE 2 REAZIONI VINCOLARI VERTICALI E DÀ LUOGO A UNA COPPIA(*), UNA (V_A E $\frac{P}{2}$) ORARIA, L'ALTRA ($P/2$ E V_B) ANTIORARIA CHE A LORO VOLTA SI EQUILIBRANO



(*) DI VALORE ASSOLUTO $\frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL}{4}$.

IN QUESTO MODO SI PUÒ VERIFICARE GRAFICAMENTE LA SUSSISTENZA DELL'EQUILIBRIO.