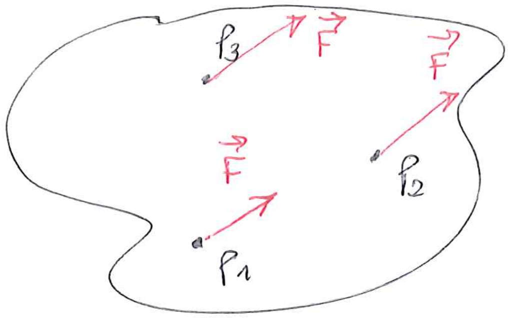
INTRODUZIONE ALLA STATICA DEL CORPO RIGIDO.

SI ABBANDONA LO SCHEMA DEL PUNTO MATERIALE E SI PASSA A CONSIDERARE IL CORPO RIGIDO, COSTITUITO DA UN AGGREGATO ESTESO DI PUNTI MATERIALI SOGGETTO AL VINCOLO DELLA RIGIDITA', CHE PRESCRIVE CHE LA DISTANZA FRA 2 PUNTI QUALSIASI (COMUNQUE SCELTI) ALL'INTERNO DEL CORPO SI MANTENGA <u>INVARIANTE</u>.

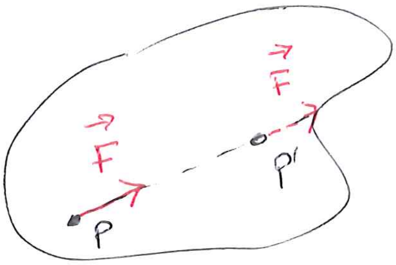
POICHÉ UN CORPO RIGIDO È UN AGGREGATO <u>ESTESO</u> DI MATERIA, SI HA CHE UNA MEDESIMA FORZA $\vec{F}$, APPLICATA A PUNTI DIVERSI, PRODUCE EFFETTI DIVERSI:



NEL CASO DEL CORPO RIGIDO OCCORRE QUINDI SPECIFICARE NON SOLO QUALI FORZE SONO PRESENTI, MA ANCHE IN QUALI PUNTI ESSE SONO APPLICATE.

IL CONCETTO DI "PUNTO DI APPLICAZIONE" È PERÒ ESTERNO ALLA NOZIONE DI FORZA COME GRANDEZZA VETTORIALE E COSTITUISCE UNA INFORMAZIONE AGGIUNTIVA.

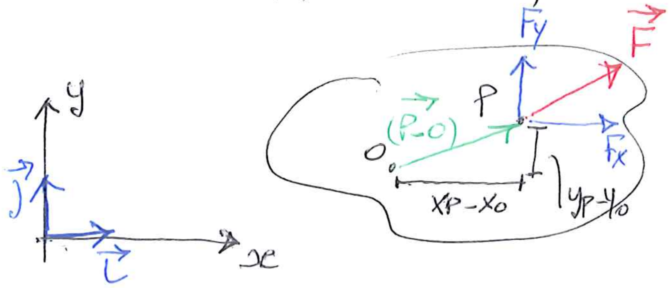
COME CONSEGUENZA DEL FATTO CHE LA MEDESIMA FORZA APPLICATA A PUNTI DIVERSI PRODUCA EFFETTI DIVERSI SI HA CHE, IN GENERALE, NON SI PUÒ "SPOSTARE" UNA FORZA DA UN PUNTO A UN ALTRO SE SI VUOLE GARANTIRE CHE QUESTO NON ABBIA EFFETTI SULL'EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO. L'UNICA ECCEZIONE NOTEVOLE È COSTITUITA DAL FATTO CHE IN UN CORPO RIGIDO UNA FORZA PUÒ "SCORRERE" LUNGO LA PROPRIA RETTA D'AZIONE SENZA CON QUESTO ALTERARE LE CONDIZIONI DI QUIETE O DI MOTO DEL CORPO RIGIDO.



SE LA FORZA $\vec{F}$ SI SPOSTA, SCORRENDO, DA P A P' (CON P E P' ALLINEATI ALLA RETTA D'AZIONE DI $\vec{F}$), SI VERIFICA CHE LE CONDIZIONI DI QUIETE O MOTO DEL CORPO RIGIDO NON VENGONO ALTERATE.

IN GENERALE SI INTRODUCE UNA GRANDEZZA, IL MOMENTO DI UNA FORZA, CHE PERMETTE DI VALUTARE L'EFFETTO CHE UNA FORZA $\vec{F}$ APPLICATA IN UN CERTO PUNTO P PRODUCE IN UN DIVERSO PUNTO O.

CONSIDERANDO PER SEMPLICITA' UN PROBLEMA PIANO, SIA $\vec{F}$ UNA FORZA CON COMPONENTI CARTESIANE F_x E F_y APPLICATA NEL PUNTO $P \equiv (x_P, y_P)$ E, INTRODOTTO UN SECONDO PUNTO $O \equiv (x_O, y_O)$ DETTO POLO, SI COSTRUISCA QUESTA QUANTITA':



$$M_{(O)z} = -F_x(y_P - y_O) + F_y(x_P - x_O) \quad [I]$$

↑ COMPONENTE z DEL MOMENTO RISPETTO AL POLO O.

SI NOTA CHE $(x_P - x_O)$ E $(y_P - y_O)$ SONO LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{(P-O)}$; SE ORA SI IPOTIZZA DI "BLOCCARE" CON UNO SPILLO IL CORPO RIGIDO NEL PUNTO O, SI HA CHE I DUE

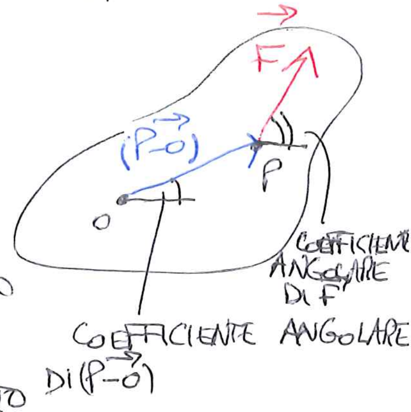
CONTRIBUTI INDICATI NELLA [1] PRODUCONO DUE EFFETTI OPPOSTI: INFATTI IL TERMINE $-F_x(y_P-y_O)$ PRODUCE <u>UN INCENTIVO ALLA ROTAZIONE</u> ATTORNO A O IN VERSO ORARIO (ASSUNTO QUI COME NEGATIVO $\ominus$), MENTRE IL TERMINE $F_y(x_P-x_O)$ PRODUCE <u>UN INCENTIVO</u> ALLA ROTAZIONE ATTORNO A O IN VERSO ANTIORARIO (ASSUNTO COME POSITIVO, $\oplus$)

SI OSSERVI CHE L'INCENTIVO ALLA ROTAZIONE È DOVUTO NON SOLO ALLE COMPONENTI DI $\vec{F}$, MA ANCHE ALLE DISTANZE, IN PROIEZIONE ORTOGONALE, DI P DAL PUNTO O.

HA SENSO VALUTARE IN QUALI CONDIZIONI $M_{(O)z}=0$.

SULLA BASE DELLA [1] SI TROVA CHE CIÒ AVVIENE IN QUESTE 3 CIRCOSTANZE:

- SE $F_x=0$ E $F_y=0$, CIOÈ SE $\vec{F}=\vec{0}$ (ASSENZA DI FORZA)
- SE $x_P-x_O=0$ E $y_P-y_O=0$, CIOÈ SE $\overrightarrow{(P-O)}=\vec{0}$, OVVERO $P\equiv O$.
- SE $F_x(y_P-y_O)=F_y(x_P-x_O)$



QUESTO ULTIMO CASO COMPORTA CHE $\dfrac{F_y}{F_x}=\dfrac{(y_P-y_O)}{(x_P-x_O)}$

CIOÈ CHE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DEL VETTORE $\vec{F}$ E QUELLO DEL VETTORE $\overrightarrow{(P-O)}$ COINCIDANO, SICCHÉ $\vec{F}$ E $\overrightarrow{(P-O)}$ RISULTANO ALLINEATI.

QUESTA ULTIMA CIRCOSTANZA CONFERMA CHE SE $\vec{F}$ È ALLINEATO CON $\overrightarrow{(P-O)}$ NON PRODUCE NESSUN INCENTIVO ALLA ROTAZIONE RISPETTO AL PUNTO O.

LA DEFINIZIONE [1] SI MOSTRA QUINDI EFFICACE A VALUTARE QUANTITATIVAMENTE L'EFFETTO DI "INCENTIVO ALLA ROTAZIONE" RISPETTO AL PUNTO O DI UNA FORZA $\vec{F}$ APPLICATA NEL PUNTO P.

È ALLORA POSSIBILE GENERALIZZARE IL DISCORSO INTRODUCENDO LA NOZIONE DI MOMENTO DI UNA FORZA $\vec{F}$ APPLICATA NEL PUNTO P RISPETTO AL POLO O:

$$\vec{M}_{(O)}=\overrightarrow{(P-O)}\wedge\vec{F} \qquad [2]$$

LA [2] MOSTRA CHE IL MOMENTO È IL PRODOTTO VETTORIALE DEL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO P RISPETTO AL POLO MOLTIPLICATO PER IL VETTORE $\vec{F}$, <u>NELL'ORDINE INDICATO</u> (IL PRODOTTO VETTORIALE È INFATTI ANTICOMMUTATIVO!).

NEL CASO 3-D SI HA: $P\equiv(x_P,y_P,z_P)$; $O\equiv(x_O,y_O,z_O)$; $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$

E SI HA:

$$\overrightarrow{(P-O)}=(x_P-x_O)\vec{i}+(y_P-y_O)\vec{j}+(z_P-z_O)\vec{k}$$

$$\vec{M}_{(O)}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{COMPONENTE}\\ \text{X DEL MOMENTO}\\ \text{RISPETTO A O}}}{M_{(O)x}}\vec{i}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{COMPONENTE}\\ \text{Y DEL MOMENTO}\\ \text{RISPETTO A O}}}{M_{(O)y}}\vec{j}+\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{COMPONENTE}\\ \text{Z DEL MOMENTO}\\ \text{RISPETTO A O}}}{M_{(O)z}}\vec{k}$$

NE SEGUE, SVILUPPANDO IL DETERMINANTE:

$$\vec{M}_{(o)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_P-x_o & y_P-y_o & z_P-z_o \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_P-y_o & z_P-z_o \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_P-x_o & z_P-z_o \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_P-x_o & y_P-y_o \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{(o)} = \vec{i}\left[F_z(y_P-y_o) - F_y(z_P-z_o)\right] - \vec{j}\left[F_z(x_P-x_o) - F_x(z_P-z_o)\right] + \vec{k}\left[F_y(x_P-x_o) - F_x(y_P-y_o)\right]$$

OVVERO

$$\vec{M}_{(o)} = \underbrace{\left[F_z(y_P-y_o) - F_y(z_P-z_o)\right]}_{M_{(o)x}}\vec{i} + \underbrace{\left[F_x(z_P-z_o) - F_z(x_P-x_o)\right]}_{M_{(o)y}}\vec{j} + \underbrace{\left[F_y(x_P-x_o) - F_x(y_P-y_o)\right]}_{M_{(o)z}}\vec{k} \quad [3]$$

SI HA DUNQUE:

$$M_{(o)x} = F_z(y_P-y_o) - F_y(z_P-z_o) \quad [4]$$

$$M_{(o)y} = F_x(z_P-z_o) - F_z(x_P-x_o) \quad [5]$$

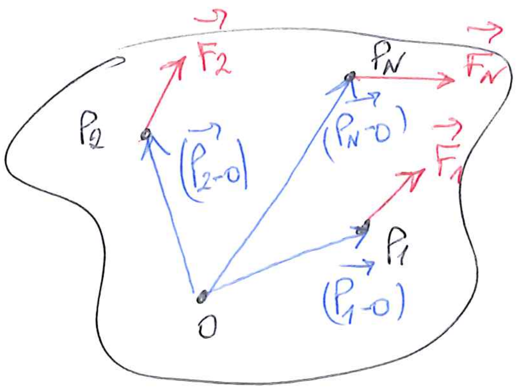
$$M_{(o)z} = F_y(x_P-x_o) - F_x(y_P-y_o) \quad [6]$$

DOVE $M_{(o)x}$, $M_{(o)y}$, $M_{(o)z}$ SONO GLI INCENTIVI ALLA ROTAZIONE RISPETTO AGLI ASSI x, y, z PASSANTI PER IL PUNTO O.

SI OSSERVI CHE LA [1] COINCIDE CON LA [6].

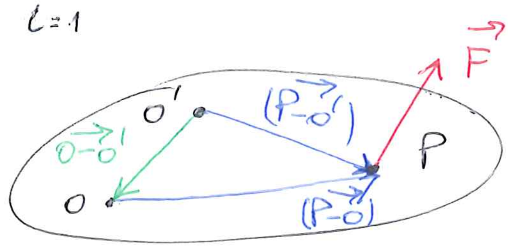
PROPRIETA' DEL MOMENTO

1. PER UN SISTEMA DI N FORZE $\vec{F}_i$ $(i=1,2,\dots N)$ APPLICATE AI PUNTI P_i, IL MOMENTO RISPETTO AL POLO O È DATO DA:



$$\vec{M}_{(o)} = (\vec{P_1-O})\wedge\vec{F}_1 + (\vec{P_2-O})\wedge\vec{F}_2 + \dots + (\vec{P_N-O})\wedge\vec{F}_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{P_i-O})\wedge\vec{F}_i \quad [7]$$



2. AL VARIARE DEL POLO L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO CAMBIA:

$$\vec{M}_{(o')} = (\vec{P-O'})\wedge\vec{F} \quad [8]$$

MA POICHÉ $(\vec{P-O'}) = (\vec{O-O'}) + (\vec{P-O})$ SI HA ANCHE:

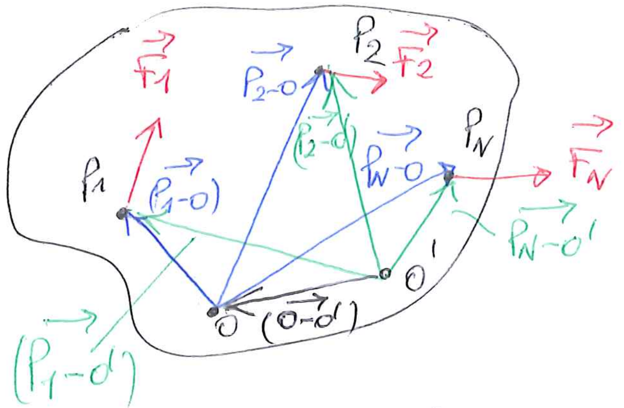
$$\vec{M}_{(O')} = [(\vec{P-O}) + (\vec{O-O'})] \wedge \vec{F} = \underbrace{(\vec{P-O}) \wedge \vec{F}}_{\vec{M}_{(O)}} + \underbrace{(\vec{O-O'}) \wedge \vec{F}}_{\text{"TERMINE CORRETTIVO"}} \qquad [9]$$

IL "TERMINE CORRETTIVO" CORRISPONDE AL MOMENTO RISPETTO A O QUANDO LA FORZA $\vec{F}$ È PENSATA APPLICATA IN O':

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(O)} + (\vec{O-O'}) \wedge \vec{F} \qquad [10]$$

COME SI VEDE IN GENERALE $\vec{M}$ CAMBIA AL VARIARE DEL POLO; TUTTAVIA LA [10] RIVELA CHE $\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(O)}$ QUANDO $(\vec{O-O'}) \wedge \vec{F} = \vec{0}$, CIOÈ QUANDO $(\vec{O-O'})$ È // A $\vec{F}$; CIÒ CAPITA QUANDO IL POLO VIENE SPOSTATO PARALLELAMENTE ALLA FORZA $\vec{F}$.

3. IN PRESENZA DI N FORZE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ APPLICATE AI PUNTI $P_1, P_2, \ldots, P_N$ PER LA [7] E LA [10] SI HA, AL VARIARE DEL POLO:



$$\vec{M}_{(O)} = (\vec{P_1-O}) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{P_2-O}) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{P_N-O}) \wedge \vec{F}_N$$

$$\vec{M}_{(O')} = (\vec{P_1-O'}) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{P_2-O'}) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{P_N-O'}) \wedge \vec{F}_N \qquad [11]$$

D'ALTRA PARTE $(\vec{P_1-O'}) = (\vec{P_1-O}) + (\vec{O-O'})$

$$(\vec{P_2-O'}) = (\vec{P_2-O}) + (\vec{O-O'})$$

$$(\vec{P_N-O'}) = (\vec{P_N-O}) + (\vec{O-O'})$$

E LA [11] DIVIENE:

$$\vec{M}_{(O')} = (\vec{P_1-O}) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{P_2-O}) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{P_N-O}) \wedge \vec{F}_N + (\vec{O-O'}) \wedge \overbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N)}^{\vec{R}}$$

$$\vec{M}_{(O')} = \underbrace{(\vec{P_1-O}) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{P_2-O}) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{P_N-O}) \wedge \vec{F}_N}_{\vec{M}_{(O)}} + (\vec{O-O'}) \wedge \vec{R} \qquad [12]$$

DUNQUE

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(O)} + (\vec{O-O'}) \wedge \vec{R}$$

DUNQUE IL MOMENTO DEL SISTEMA DI FORZE RISPETTO AL NUOVO POLO, O', È PARI AL MOMENTO DELLO STESSO SISTEMA DI FORZE RISPETTO AL VECCHIO POLO, O, PIÙ UN TERMINE CORRETTIVO DOVUTO AL MOMENTO, RISPETTO AL NUOVO POLO, O', DELLA RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE PENSATO APPLICATO NEL VECCHIO POLO:

$$\vec{M}_{(O')} = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{P_i - O}) \wedge \vec{F}_i + (\overrightarrow{O - O'}) \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{M}_{(O)} + (\overrightarrow{O - O'}) \wedge \vec{R} \quad [13]$$

4. SE LE FORZE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ SONO TUTTE APPLICATE NEL MEDESIMO PUNTO P SI HA (TEOREMA DI VARIGNON):

$$\vec{M}_{(O)} = (\overrightarrow{P - O}) \wedge \vec{F}_1 + (\overrightarrow{P - O}) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\overrightarrow{P - O}) \wedge \vec{F}_N = (\overrightarrow{P - O}) \wedge \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N)}_{\vec{R}}$$

CIOÈ

$$\vec{M}_{(O)} = (\overrightarrow{P - O}) \wedge \vec{R} \quad [14].$$

IL CONCETTO DI MOMENTO SI DIMOSTRA COSÌ ADEGUATO PER TENERE CONTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLE FORZE IN UN CORPO RIGIDO. SI PUÒ QUINDI PASSARE A IDENTIFICARE SISTEMI EQUIVALENTI DI FORZE CHE NON ALTERANO LO STATO DI QUIETE O MOTO DI UN CORPO RIGIDO.