PRINCIPI DI MECCANICA. STATICA DEL PUNTO MATERIALE.

LA MECCANICA È LA BRANCA [NON BRANCHIA!] DELLA FISICA CHE DESCRIVE E PREDICE LA QUIETE O IL MOTO DI UN SISTEMA MATERIALE NELLO SPAZIO E NEL TEMPO PRESCINDENDO DA TUTTE LE CARATTERISTICHE FISICHE DEL SISTEMA ECCETTO LA SEMPLICE MATERIALITÀ.

LA MATERIALITÀ È DEFINITA DALLA MASSA, CARATTERIZZATA DA SPECIFICA ATTITUDINE A DEFORMARSI (CIOÈ A CAMBIARE FORMA).

DESCRIVERE VUOLE DIRE TRASFORMARE UN EVENTO FISICO IN UNA EQUAZIONE.
PREDIRE INDICA CHE ASSEGNATE LE CONDIZIONI INIZIALI, TRAMITE LE EQUAZIONI SI PUÒ DETERMINARE L'EVOLUZIONE DEL SISTEMA, IN PARTICOLARE VALUTARE LA PERSISTENZA NELLO STATO DI QUIETE OVVERO IL MOTO.

LA DETERMINAZIONE DELLA "RISPOSTA" DEL SISTEMA MECCANICO PRESUPPONE L'ADOZIONE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SPAZIO/TEMPORALE: LA DESCRIZIONE DEL MOVIMENTO CONSISTE NELL'ASSEGNARE ALLE DIVERSE MASSE COSTITUENTI IL SISTEMA MATERIALE LA LORO COLLOCAZIONE NELLO SPAZIO E NEL TEMPO.
LA PREDIZIONE DEL MOTO È LEGATA ALL'ASSUNZIONE CHE FRA I CORPI COSTITUENTI IL SISTEMA SI ESERCITINO "AZIONI" RESPONSABILI DI OGNI VARIAZIONE DI POSIZIONE NEL TEMPO.
QUESTE "AZIONI" SONO DETTE FORZE, E SONO CAUSA DEL MOTO O DELLA QUIETE DI UN SISTEMA MATERIALE: RAPPRESENTANO DELLE "INTERAZIONI FRA LE MASSE".
IN PARTICOLARE SI POSSONO AVERE INTERAZIONI/SOLLECITAZIONI FRA I DIVERSI COMPONENTI MATERIALI DELLO STESSO SISTEMA: QUESTE SONO DETTE "FORZE INTERNE", OPPURE SI POSSONO AVERE INTERAZIONI/SOLLECITAZIONI CHE ALTRI CORPI, ESTRANEI AL SISTEMA MATERIALE ESERCITANO SU DI ESSO: QUESTE SONO DETTE "FORZE ESTERNE".

LA MECCANICA È TRADIZIONALMENTE SUDDIVISA IN QUESTI CAPITOLI:

- CINEMATICA: DESCRIZIONE PURAMENTE GEOMETRICA DEL MOTO DEL SISTEMA. PRESCINDE DALLO STUDIO DELLE FORZE, CIOÈ DALLE CAUSE DEL MOTO STESSO.
- STATICA: STUDIA IL SISTEMA MATERIALE IN PRESENZA DI FORZE E QUINDI DI DEFORMAZIONI, MA IN ASSENZA DI MOTO: STUDIA QUINDI LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO, CIOÈ DELLE CONDIZIONI CHE PERMETTONO AL SISTEMA DI PERMANERE NELLO STATO DI QUIETE.
- DINAMICA: STUDIA IL SISTEMA MATERIALE IN PRESENZA DI FORZE CHE PROVOCANO MOVIMENTO.

SI OSSERVI CHE IN GENERALE NON SI PUÒ PRESCINDERE DA CONSIDERAZIONI DI DINAMICA PER AVERE UNA CORRETTA IMPOSTAZIONE DEGLI ARGOMENTI E PERCHÉ QUIETE E MOTO

A UN PIÙ ATTENTO ESAME SONO CONCETTI NON SEMPRE CHIARAMENTE DISTINGUIBILI.

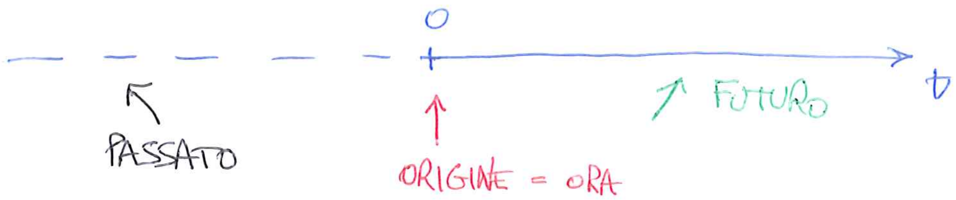
LE GRANDEZZE FONDAMENTALI DELLA MECCANICA.

<u>SPAZIO</u> E <u>TEMPO</u> FORMANO LO SCENARIO IN CUI AVVENGONO I FENOMENI MECCANICI.

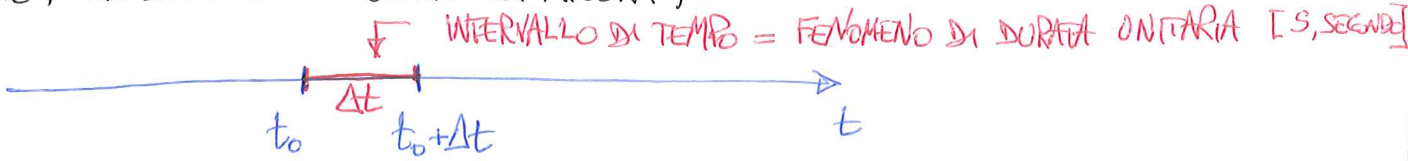
IN TERMINI MATEMATICI SONO DEI <u>CONTINUI</u>

- AGGREGATI SENZA SOLUZIONE DI CONTINUITÀ (RAPPRESENTABILI QUINDI COME NUMERI REALI)
- INDEFINITAMENTE SUDDIVISIBILI IN AGGREGATI PIÙ PICCOLI DELLA STESSA SPECIE
- DI OPPORTUNA DIMENSIONALITÀ (SPAZIO: 3-D; TEMPO: 1-D).
- FISSATO UN "SISTEMA DI RIFERIMENTO" OGNI PUNTO PERMETTE DI INDIVIDUARE UN <u>ISTANTE</u> E UNA <u>POSIZIONE</u>.

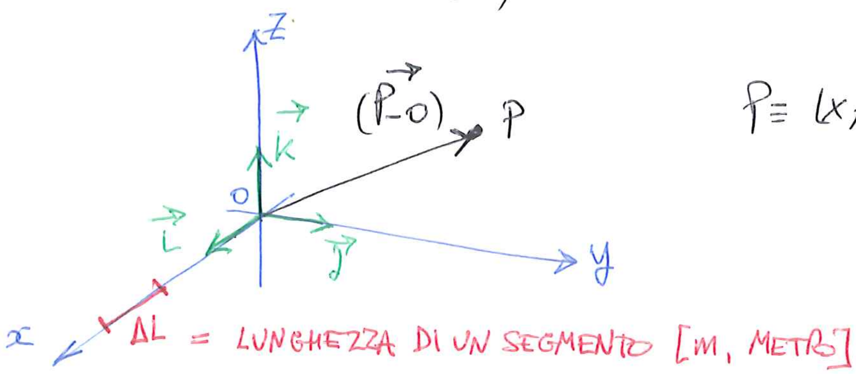
IL <u>TEMPO</u> È UNA VARIABILE REALE, <u>MONODIMENSIONALE</u>: FISSATO UN ASSE E UN'ORIGINE RESTANO INDIVIDUATI IL PASSATO, IL PRESENTE E IL FUTURO:



IL TEMPO È QUINDI UNA GRANDEZZA SCALARE; INDIVIDUANDO 2 PUNTI SI IDENTIFICA UN SEGMENTO SULL'ASSE DEL TEMPO CHE DETERMINA UNA <u>DURATA</u> DI UN FENOMENO (INTERVALLO DI TEMPO, CHE DEFINISCE L'UNITÀ DI MISURA):



LO <u>SPAZIO</u> È UNA VARIABILE REALE, <u>TRIDIMENSIONALE</u>: SCELTE 3 DIREZIONI PRIVILEGIATE, PER ESEMPIO MUTUAMENTE ORTOGONALI, SI PUÒ DEFINIRE LA POSIZIONE DI CIASCUN PUNTO MEDIANTE LA SCELTA DI UN ORIGINE (O) E UNA TERNA ORDINATA DI COORDINATE:



$P \equiv (x, y, z)$

IL PUNTO P PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO MEDIANTE UN VETTORE POSIZIONE:

$$\overrightarrow{(P-O)} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \underbrace{(x-o)}_{\text{COMPONENTE } x}\vec{i} + \underbrace{(y-o)}_{\text{COMPONENTE } y}\vec{j} + \underbrace{(z-o)}_{\text{COMPONENTE } z}\vec{k}$$

SE IN PARTICOLARE LA POSIZIONE OCCUPATA DAL PUNTO P VARIA NEL TEMPO, CIOÈ SE

$P \equiv (x(t), y(t), z(t))$, ALLORA IL VETTORE $(\overrightarrow{P-O})$ È FUNZIONE DEL TEMPO:

$$(\overrightarrow{P-O})(t) = (x(t)-o)\vec{i} + (y(t)-o)\vec{j} + (z(t)-o)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{P(t)-O} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad [O]$$

SI NOTI CHE O È FISSO (NON VARIA CON t) E ANCHE I VERSORI $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ NON CAMBIANO CON IL TEMPO: SI HA COSÌ CHE LE COMPONENTI DI $(\overrightarrow{P-O})$ RISULTANO FUNZIONI DEL TEMPO:

COMPONENTE x: $x = x(t)$
COMPONENTE y: $y = y(t)$
COMPONENTE z: $z = z(t)$

PERTANTO IL MOTO DEL PUNTO P È DESCRITTO DALLE 3 EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad [O']$$

L'UNITÀ DI MISURA DELLO SPAZIO È LA LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO MISURATO SU UNO DEGLI ASSI: QUESTO FISSA LA LUNGHEZZA CAMPIONE [METRO, m]

PRECISAZIONI:

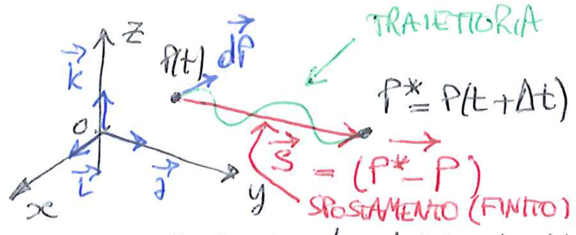
1. OMOGENEITÀ DEL TEMPO: LA DURATA DI UN FENOMENO È MISURATA DALLA LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO SULL'ASSE DEI TEMPI: SI PRESCINDE DA OGNI ALTRA CONSIDERAZIONE
2. MISURE DI SPAZIO E TEMPO PRESUPPONGONO CONFRONTI CON GRANDEZZE DELLA STESSA SPECIE: OCCORRONO "METRO" E "OROLOGIO", CIOÈ LA SCELTA DI UNA "LUNGHEZZA UNITARIA" [m] E DI UN "EVENTO DI DURATA UNITARIA" [s].
3. IN MECCANICA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO È L'UNIONE DI UN RIFERIMENTO SPAZIALE E DI UN RIFERIMENTO TEMPORALE, CIÒ CHE DEFINISCE UN OSSERVATORE.
4. SPAZIO E TEMPO HANNO CARATTERE ASSOLUTO: LE DIMENSIONI DI UN OGGETTO E LA DURATA DI UN EVENTO SONO EGUALI PER TUTTI GLI OSSERVATORI (SALVO ERRORI DI MISURA).

   SI NOTI CHE LA MECCANICA RELATIVISTICA NON ACCETTA QUESTO POSTULATO: LUNGHEZZE E DURATE POSSONO VARIARE CON L'OSSERVATORE (NON SOGGETTIVAMENTE, COMUNQUE) QUALORA I 2 OSSERVATORI SI SPOSTINO RELATIVAMENTE CON VELOCITÀ PARAGONABILI A QUELLA DELLA LUCE: ~ 300'000 Km/S = DISTANZA TERRA-LUNA PERCORSA IN 1 S.).

CINEMATICA FA USO DI SPAZIO E TEMPO SOLTANTO: DESCRIVE QUANTITATIVAMENTE IL MOTO COME VARIAZIONE DI POSIZIONE NEL TEMPO.

LE GRANDEZZE DI PARTICOLARE INTERESSE SONO:

- SPOSTAMENTO, $\vec{s}$



RAPPRESENTA LA VARIAZIONE DI POSIZIONE DI UN PUNTO P: $\vec{S} = (\overrightarrow{P^*-P})$, CIOÈ LA DIFFERENZA FRA LA POSIZIONE OCCUPATA NELL'ISTANTE $t+\Delta t$, P^*, E LA POSIZIONE

OCCUPATA ALL'ISTANTE t, P.
DIMENSIONALMENTE È UNA LUNGHEZZA (SI MISURA IN m) E NON HA IN GENERALE ALCUNA ATTINENZA CON LA TRAIETTORIA DESCRITTA DAL PUNTO.

- SPOSTAMENTO ELEMENTARE, $d\vec{P}$

RAPPRESENTA LA "PARTE DEL PRIMO ORDINE" DELLO SPOSTAMENTO $(\vec{P^*-P})$ INFINITESIMO AL TENDERE DI P^* A P, CIOÈ AL TENDERE A ZERO DELL'INTERVALLO Δt DI OSSERVAZIONE DEL CAMBIAMENTO DI POSIZIONE. HA SEMPRE DIMENSIONE DI UNA LUNGHEZZA [L]; ESPRESSA IN m (O MULTIPLI/SOTTOMULTIPLI). È DIRETTO COME LA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NELLA POSIZIONE INIZIALE P.

- VELOCITÀ, $\vec{v}$

RAPPRESENTA LA DERIVATA (PRIMA) RISPETTO AL TEMPO DELLA POSIZIONE OCCUPATA DA P, PENSATA COME FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right] = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \qquad [1]$$

NOTA: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ NON VARIANO NEL TEMPO!

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \qquad [1']$$

DOVE $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$; $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$; $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$.

ESPRIME QUINDI IL CAMBIAMENTO DI POSIZIONE RAPPORTATO ALL'UNITÀ DI TEMPO: DIMENSIONALMENTE $[\vec{v}] = [L]/[T]$ E SI ESPRIME IN m/s (E RELATIVI MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI). È DIRETTA IN OGNI PUNTO SECONDO LA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA: EREDITA DIREZIONE E VERSO DAL VETTORE $d\vec{P}$, SPOSTAMENTO ELEMENTARE.

- ACCELERAZIONE, $\vec{a}$

RAPPRESENTA LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DELLA VELOCITÀ DEL PUNTO P, $\vec{v}$, PENSATA COME FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}\right] \qquad [2]$$

E RICORDANDO LA [1] SI OTTIENE CHE $\vec{a}$ È LA DERIVATA (SECONDA) RISPETTO AL TEMPO DELLA POSIZIONE OCCUPATA DA P, PENSATA COME FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right]$$

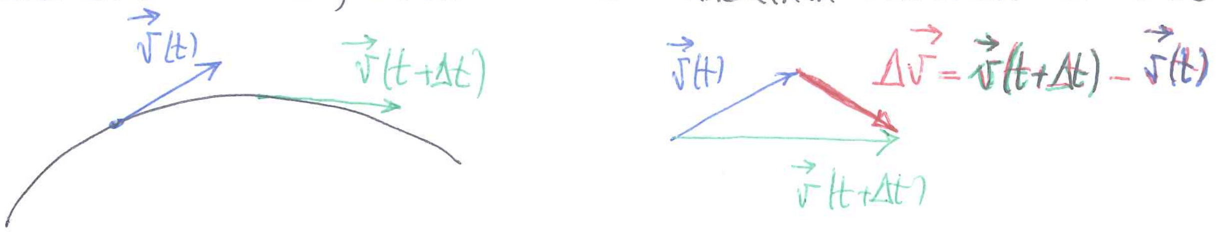
$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} \qquad [2']$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ NON VARIANO NEL TEMPO!

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \qquad [2'']$$

DOVE $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$; $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$; $\ddot{z}(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$.

L'ACCELERAZIONE ESPRIME QUINDI LA VARIAZIONE (VETTORIALE: NON SOLO IN MODULO, MA ANCHE IN DIREZIONE E VERSO) DELLA VELOCITA' RAPPORTATA ALL'UNITA' DI TEMPO.



PERTANTO $\Delta\vec{v} \neq \vec{0}$ NON SOLO SE $|\vec{v}(t+\Delta t)| \neq |\vec{v}(t)|$ MA ANCHE SE I DUE VETTORI HANNO DIREZIONE (E VERSO) DIFFERENTI.

DIMENSIONALMENTE $[\vec{a}] = \frac{[L]}{[T]^2} = [L][T]^{-2}$ E SI ESPRIME QUINDI IN m/s^2 (E RELATIVI MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI).

SI OSSERVI CHE $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 = \text{CONST}$ [3]

CIOE' L'UNICO MOTO CARATTERIZZATO DA ACCELERAZIONE NULLA E' QUELLO RETTILINEO E UNIFORME.

NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME E' $|\vec{v}| = \text{CONST}$, MA $\vec{v} \neq \vec{v}_0$ E QUINDI E' NECESSARIA UN'ACCELERAZIONE $\vec{a} \neq \vec{0}$ PER PRODURRE UN CONTINUO CAMBIAMENTO DI DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITA'.

GALILEI FU IL PRIMO, NEL "DIALOGO SUI MASSIMI SISTEMI" A OSSERVARE CHE IN ASSENZA DI ACCELERAZIONE NON C'E' MODO, CON SOLI ESPERIMENTI, DI DISTINGUERE UNO STATO DI QUIETE DA UNO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.

Leggiamo le considerazioni che Galileo fa esprimere a Filippo Salviati nel *Dialogo sui Massimi Sistemi*.

> "Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate di aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso di acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze siano eguali; e saltando voi, come si dice, a pié giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succedere così,
>
> fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma: voi soltanto passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi foste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accadrà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave..."

NELL'AMBITO DELLA STATICA E DELLA DINAMICA, ACCANTO ALLO SPAZIO E AL TEMPO OCCORRE INTRODURRE UNA TERZA GRANDEZZA, LA <u>MASSA</u>.

QUESTA E' INFATTI PROTAGONISTA DEI FENOMENI MECCANICI, DEI QUALI SPAZIO E TEMPO COSTITUISCONO SOLTANTO LO SCENARIO.

LA DEFINIZIONE DI MASSA E' INTUITIVA: SI TRATTA DELLA <u>QUANTITA' DI MATERIA</u>. IN QUANTO TALE, LA MASSA RISULTA ESSERE UNA GRANDEZZA SCALARE, LA CUI DIMENSIONE, [M] SI MISURA PER CONFRONTO CON UN'UNITA' CAMPIONE.
NEL SISTEMA INTERNAZIONALE (S.I.) L'UNITA' DI MISURA DELLA MASSA E' IL CHILOGRAMMO (kg).
SI NOTI CHE LA MASSA E' UNA PROPRIETA' DELLA MATERIA, INVARIANTE RISPETTO AL LUOGO DOVE VIENE MISURATA; IL PESO, INVECE, E' UNA FORZA, DIPENDENTE DALLA MASSA E DALLA ACCELERAZIONE DI GRAVITA', g; POICHE' QUESTA DIPENDE DALLA POSIZIONE, IL PESO CHE UNA DATA MASSA ESERCITA VARIA DA LUOGO A LUOGO.
NE SEGUE CHE SE SI UTILIZZA UNA BILANCIA A BRACCI SI MISURA DIRETTAMENTE UNA MASSA CON UNA MASSA CAMPIONE E IL RISULTATO E' INDIPENDENTE DAL LUOGO DI MISURA; SE SI UTILIZZA UNA BILANCIA A MOLLA (DINAMOMETRO) QUELLO CHE VIENE MISURATO E' IL PESO, E LA DETERMINAZIONE DELLA MASSA RICHIEDE UNA TARATURA LOCALE DELLO STRUMENTO.

LUNGHEZZA [L], TEMPO [T] E MASSA [M] SONO LE GRANDEZZE FONDAMENTALI O PRIMITIVE DELLA MECCANICA.

DA QUESTE, MEDIANTE
- LEGGI ASSIOMATICHE (ASSUNTE COME EVIDENTEMENTE "VERE");
- DEFINIZIONI;
- RELAZIONI SPERIMENTALI O DEDOTTE TEORICAMENTE

SI POSSONO DERIVARE TUTTE LE ALTRE GRANDEZZE MECCANICHE (DERIVATE).
PER ESEMPIO, COME SI VEDRA' NEL SEGUITO, LA FORZA [F] E' DEFINIBILE COME PRODOTTO DI UNA MASSA [M] PER UNA ACCELERAZIONE $[L][T]^{-2}$: NE SEGUE QUINDI:

$$[F] = [M][L][T]^{-2} = \frac{[M][L]}{[T]^2} \qquad [3]$$

PERTANTO L'UNITA' DI MISURA DELLA FORZA SARA' DATA DALLA QUANTITA' CHE E' PRODOTTA SULLA MASSA DI 1 kg DALL'ACCELERAZIONE DI $1\,m/s^2$: A QUESTA UNITA' DI MISURA E' STATO ASSEGNATO IL NOME NEWTON (N) IN ONORE DI ISAAC NEWTON.

NOTA: SI OSSERVI CHE IN STATICA TRADIZIONALMENTE SI CONSIDERAVA LA FORZA [F] COME UNITA' PRIMITIVA, ASSIEME ALLA LUNGHEZZA [L] E ALL'INTERVALLO DI TEMPO [T].
DALLA [3] SEGUE ALLORA CHE LA MASSA [M] RISULTEREBBE UNA QUANTITA' DERIVATA:

$$[M] = \frac{[F][T]^2}{[L]} \qquad [4]$$

E QUINDI SI AVREBBE:

$$[M] = \frac{[F]}{[L][T]^{-2}} \qquad [4']$$

CIOÈ IL RAPPORTO FRA UNA FORZA E UNA ACCELERAZIONE; IN PARTICOLARE L'UNITÀ DI MISURA DELLA MASSA RISULTEREBBE PARI ALLA QUANTITÀ DI MATERIA CHE, SOTTOPOSTA ALL'AZIONE DELLA FORZA DI 1N ACQUISTA UN'ACCELERAZIONE PARI A $1 m/s^2$. □

SISTEMI MATERIALI SONO COSTITUITI DA MASSE, DIVERSAMENTE DISTRIBUITE PER FORMA GEOMETRICA E DEFORMABILITÀ (INTESA COME "ATTITUDINE A CAMBIARE FORMA").

A LIVELLO CRESCENTE DI COMPLESSITÀ SI CONSIDERANO:

- PUNTO MATERIALE: SISTEMA MATERIALE ALL'INTERNO DEL QUALE NON INTERESSA DISTINGUERE VARIE PARTI; È QUINDI DA CONSIDERARSI COME UN TUTT'UNO.
  LA COLLOCAZIONE NELLO SPAZIO È INDIVIDUATA DA UN SOLO PUNTO, NEL SENSO GEOMETRICO DEL TERMINE (3 COORDINATE, PER ESEMPIO CARTESIANE ORTOGONALI)
- SISTEMI DI PUNTI MATERIALI (ISOLATI), INTERAGENTI MECCANICAMENTE
- CORPO RIGIDO: AGGREGATO "ESTESO" DI PUNTI MATERIALI, CARATTERIZZATO DALLA PROPRIETÀ DI NON CAMBIARE FORMA. IN TERMINI MATEMATICI LA RIGIDITÀ RICHIEDE CHE LA DISTANZA FRA 2 PUNTI QUALSIASI DEL CORPO NON MUTI, CIOÈ CHE SI MANTENGA COSTANTE.
- AGGREGATI DI CORPI RIGIDI: SISTEMI DI CORPI RIGIDI ARTICOLATI. POSSONO CAMBIARE GLOBALMENTE FORMA, MA I SINGOLI COSTITUENTI SI MANTENGONO RIGIDI.
- CONTINUO DEFORMABILE: CORPO SUSCETTIBILE DI CAMBIARE FORMA CON CONTINUITÀ!

I SISTEMI MATERIALI POSSONO ESSERE POI DISTINTI IN BASE ALLA DIMENSIONALITÀ (MONO- BI- TRI-DIMENSIONALI) A SECONDA CHE ALCUNE DIMENSIONI SIANO PREVALENTI RISPETTO AD ALTRE. QUESTA CARATTERISTICA PORTA A UN'OPPORTUNA SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA CONSENTENDO DI RIDURRE IL SISTEMA A SUPERFICIE (2-D) O A LINEE (1-D).

SI NOTI CHE LA RIGIDITÀ È COMUNQUE UN'IDEALIZZAZIONE DEL COMPORTAMENTO REALE: SI TRATTA DI UN'IPOTESI ADOTTABILE A SECONDA DEL PROBLEMA E/O DEL TIPO DI MATERIALE CHE SI INTENDE "MODELLARE".
NELLA REALTÀ OGNI SISTEMA MATERIALE SI DEFORMA IN QUALCHE MISURA: GRAZIE ALLA DEFORMABILITÀ "CERCA" DI MEGLIO SOPPORTARE LE SOLLECITAZIONI CUI DEVE FARE FRONTE.

LA MECCANICA NEWTONIANA CONSIDERA SISTEMI MATERIALI COME AGGREGATI DI PUNTI MATERIALI, INDIVIDUATI QUINDI DA PUNTI GEOMETRICI.

NOTA 1.
NELLA SCHEMATIZZAZIONE DEL PUNTO MATERIALE, NON È RICHIESTO CHE L'ESTENSIONE SIA PICCOLA O MICROSCOPICA, MA SOLO CHE SIA PICCOLA RISPETTO ALLE DIMENSIONI DEL CAMPO IN CUI SI STUDIA IL FENOMENO.
PER ESEMPIO, LA DISTANZA MEDIA TERRA-SOLE È DI CIRCA 100'000'000 KM; IL RAGGIO TERRESTRE È DI 6000 KM CIRCA; NELLO STUDIO DEL SISTEMA TERRA-SOLE È QUINDI LECITO CONSIDERARE "PUNTIFORME" LA TERRA, LE CUI DIMENSIONI SONO

CIRCA 10'000 VOLTE PIÙ PICCOLE DEL CAMPO OGGETTO DI STUDIO □

NOTA 2.

I CONTINUI MATERIALI SONO CONSIDERATI AGGREGATI DI MATERIA, CIOÈ DI PUNTI MATERIALI, INFINITAMENTE SUDDIVISIBILI.
LA MASSA DISTRIBUITA NEL VOLUME INIZIALE È INFINITAMENTE SUDDIVISIBILE IN VOLUMETTI SEMPRE PIÙ PICCOLI.
SI PUÒ ADDENSARE IN MODO DIVERSO ENTRO IL VOLUME, MA DEVE OCCUPARE TUTTO IL VOLUME, SENZA LASCIARE "VUOTI" E SENZA PRODURRE COMPENETRAZIONI.
CON UN'OPERAZIONE DI PASSAGGIO AL LIMITE, OGNI PARTE INFINITESIMA VIENE A COINCIDERE CON UN PUNTO MATERIALE (E GEOMETRICO), P.
I RISULTATI OTTENUTI SU MODELLI DISCRETI FORMATI DA MASSE PUNTIFORMI POSSONO ESSERE ESTESI AI CONTINUI RICORRENDO AL CALCOLO INFINITESIMALE □

NOTA 3.

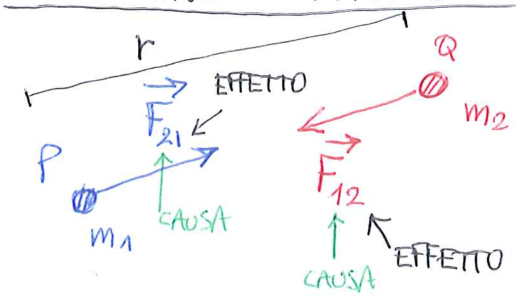
LA MECCANICA CLASSICA (NEWTONIANA) COSTITUISCE UN MODELLO MATEMATICO DELLA REALTÀ FISICA CHE INCLUDE, CON DIVERSI LIVELLI DI APPROSSIMAZIONE, GLI ASPETTI SALIENTI DELLA REALTÀ FISICA, IN GENERALE TROPPO COMPLESSA PER ESSERE OGGETTO DI UNO STUDIO QUANTITATIVO.
IN OGNI CASO, I RISULTATI OTTENIBILI CON UN MODELLO NON SONO "LA VERITÀ", MA UNA APPROSSIMAZIONE (SEMPLIFICATA) DELLA REALTÀ.
IL MODELLO DI UNO STESSO OGGETTO PUÒ ESSERE DI VOLTA IN VOLTA PIÙ O MENO COMPLESSO A SECONDA DEI PROBLEMI CHE SI INTENDONO RISOLVERE □.

LE <u>FORZE</u> SONO LE CAUSE DEI FENOMENI MECCANICI IN QUANTO SONO RESPONSABILI DELLA QUIETE E DEL MOTO.

IN TERMINI GENERALI SI PUÒ AFFERMARE CHE LE FORZE RAPPRESENTANO "<u>AZIONI DI CORPI SU ALTRI CORPI</u>", NEL SENSO CHE I CORPI POSSONO TRASMETTERSI L'UN L'ALTRO DELLE SOLLECITAZIONI.
LA DEFINIZIONE È IN PARTE INSODDISFACENTE E RICHIEDE DELLE PRECISAZIONI; PERALTRO UNA DEFINIZIONE UNITARIA CHE COMPRENDA TUTTI I TIPI DI FORZE È ANCORA OGGETTO DI RICERCA.
LA DEFINIZIONE DATA È IN GRADO DI COMPRENDERE UN VASTO NUMERO DI FORZE, IN PARTICOLARE

- AZIONI DI CONTATTO (SPINTE E URTI)
- INTERAZIONI FRA PARTI DI UN SISTEMA
- AZIONI DI CONNESSIONE (FORZE INTERNE CHE TENGONO LEGATE LE PARTI DI UN CORPO, E VENGONO MENO QUANDO NE INTERROMPIAMO LA CONTINUITÀ)
- AZIONI A DISTANZA (ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE).

<u>ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE</u> (LEGGE DI GRAVITAZIONE DI NEWTON)



2 MASSE m_1 E m_2 COLLOCATE RISPETTIVAMENTE NEI PUNTI P E Q, A DISTANZA $r = |\overrightarrow{Q-P}|$

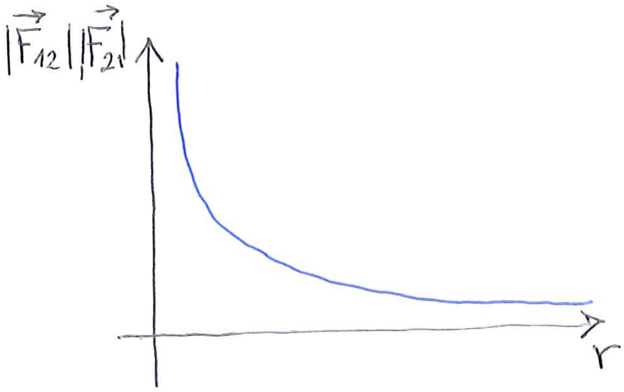
SUBISCONO CIASCUNA UNA AZIONE DI ATTRAZIONE $\vec{F}_{21}$ (DOVUTA A m_2 E APPLICATA A m_1) E $\vec{F}_{12}$ (DOVUTA A m_1 E APPLICATA A m_2)

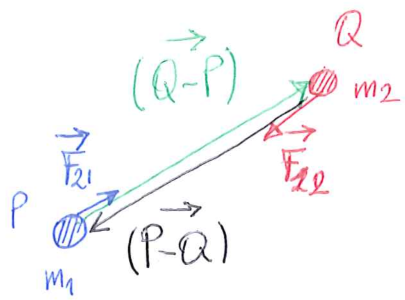
DI EGUALE MODULO, $|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$ DATO DA:

$$|\vec{F}_{21}| = h \frac{m_1 m_2}{r^2} = |\vec{F}_{12}| \qquad [5]$$

DOVE h È LA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE,
m_1 E m_2 I VALORI DELLE 2 MASSE
r LA DISTANZA A CUI SONO POSTE LE 2 MASSE.

LE [5] INDIVIDUANO UNA AZIONE ATTRATTIVA A DISTANZA, CHE AUMENTA MANO A MANO CHE LE MASSE SI AVVICINANO, TENDENDO AL VALORE ∞ QUANDO $r \to 0$, MENTRE SI ESAURISCE SE LE MASSE SI ALLONTANANO: PER $r \to \infty$ TENDE AL VALORE 0:



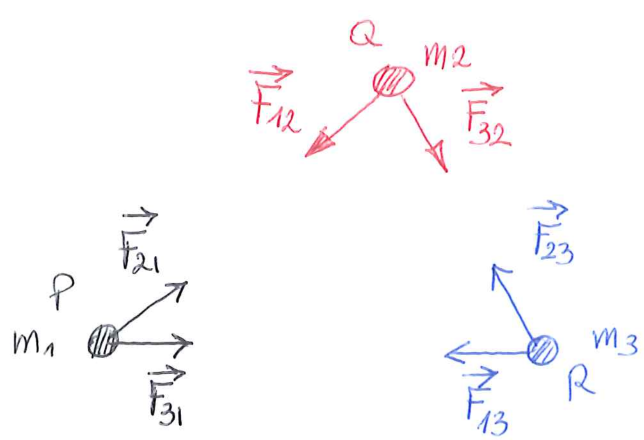


L'ESPRESSIONE VETTORIALE COMPLETA DELLE FORZE $\vec{F}_{12}$ E $\vec{F}_{21}$ RISULTA DATA DA:

$$\vec{F}_{12} = h \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{(\vec{P-Q})}{|\vec{P-Q}|} \qquad [6']$$

$$\vec{F}_{21} = h \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{(\vec{Q-P})}{|\vec{Q-P}|} \qquad [6'']$$

QUESTA LEGGE VALE PER TUTTI I PUNTI MATERIALI: IN PRESENZA DI 3 MASSE m_1, m_2, m_3 COLLOCATE NEI PUNTI P, Q, R È OVVIO CHE OGNI COPPIA DI MASSE SUBISCE L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE. LA SITUAZIONE È DUNQUE LA SEGUENTE:



LA LEGGE FA RIFERIMENTO A MASSE PUNTIFORMI E VALE PER PUNTI MATERIALI; IN PROSSIMITA' DELLA SUPERFICIE DELLA TERRA L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE COINCIDE CON IL PESO DEL CORPO.

SI OSSERVI CHE IL CONCETTO DI FORZA A DISTANZA COSÌ INTRODOTTA E' IL PRIMO ESEMPIO DI MODELLO DELLA REALTA' FISICA: NON C'È BISOGNO DI "VEDERE"

QUALCOSA PER RITENERLA "VERA".

DA QUANTO VISTO A PROPOSITO DELL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE SI DEDUCE CHE LE FORZE SONO GRANDEZZE VETTORIALI.

IN BASE ALLA MODALITA' DI TRASMISSIONE DELL'AZIONE LE FORZE POSSONO ESSERE COSÌ SUDDIVISE:

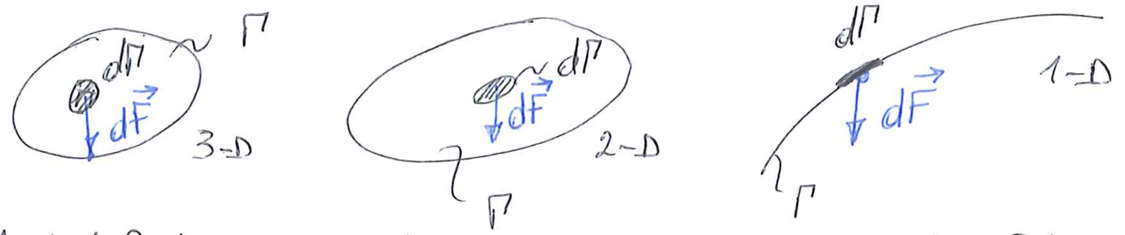
- FORZE CONCENTRATE: SE L'AZIONE RISULTA CONCENTRATA IN UN PUNTO O È IDEALIZZABILE COME PUNTIFORME.

  ESEMPI:
  - CARICO SOLLEVATO DA UNA FUNE
  - CARRELLO SPINTO DA UN UOMO.

- FORZE DISTRIBUITE: SE L'AZIONE RISULTA DIFFUSA SU UNA REGIONE DI AMPIEZZA NON TRASCURABILE.

  ESEMPI:
  - PESO DI UNA FUNE
  - EFFETTO DEL VENTO SU UNA VELA
  - PESO DI UN SOLIDO (ESTESO)

SI NOTI CHE LE FORZE DISTRIBUITE COSTITUISCONO UN CONTINUO (DI FORZE) NEL SENSO DELL'ANALISI INFINITESIMALE APPLICATO AL SISTEMA MATERIALE CONTINUO DI MASSE: A OGNI ELEMENTO INFINITESIMO $d\Gamma$ CORRISPONDE UNA FORZA ELEMENTARE (INFINITESIMA) $d\vec{F}$:



SI HA DIVERSA DIMENSIONE A SECONDA CHE IL SISTEMA SIA:

1-D → FORZE DISTRIBUITE PER UNITA' DI LUNGHEZZA → DENSITA' LINEARE DI FORZA
2-D → FORZE DISTRIBUITE PER UNITA' DI SUPERFICIE → DENSITA' SUPERFICIALE DI FORZA
3-D → FORZE DISTRIBUITE PER UNITA' DI VOLUME → DENSITA' VOLUMICA DI FORZA

LE FORZE CONCENTRATE SONO DI PIÙ AGEVOLE COMPRENSIONE: SI TENGA CONTO CHE NEL CASO DI UN CORPO RIGIDO È SEMPRE POSSIBILE SOSTITUIRE ALLE FORZE DISTRIBUITE UN SISTEMA (UNICO) DI FORZE CONCENTRATE CHE NON ALTERA LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO STESSO.

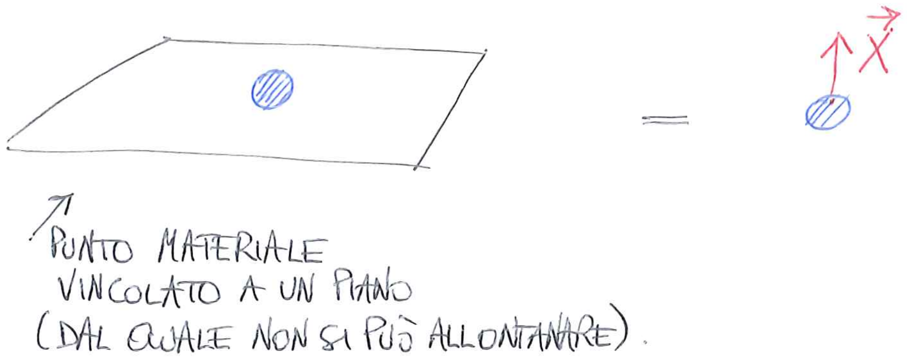
VINCOLI, REAZIONI VINCOLARI E FORZE ATTIVE

I SISTEMI MATERIALI SI PRESENTANO QUASI SEMPRE "ANCORATI" ALL'AMBIENTE ESTERNO. I COLLEGAMENTI DEL SISTEMA ALL'AMBIENTE ESTERNO, CHE LIMITANO LA MOBILITA' DEL SISTEMA SONO DETTI VINCOLI.

QUESTI RAPPRESENTANO ANCORA AZIONI DI CORPI SU ALTRI CORPI, NEL SENSO CHE L'OGGETTO COSTITUENTE IL VINCOLO ESERCITA UN'AZIONE SUL SISTEMA. QUESTO FATTO È PRECISATO DAL POSTULATO DELLE REAZIONI VINCOLARI

I VINCOLI TRASMETTONO FORZE AL SISTEMA

SI PUÒ QUINDI PENSARE DI SOPPRIMERE IL VINCOLO SOSTITUENDOLO CON LA REAZIONE VINCOLARE, OTTENENDO IL CORRISPONDENTE "DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO".

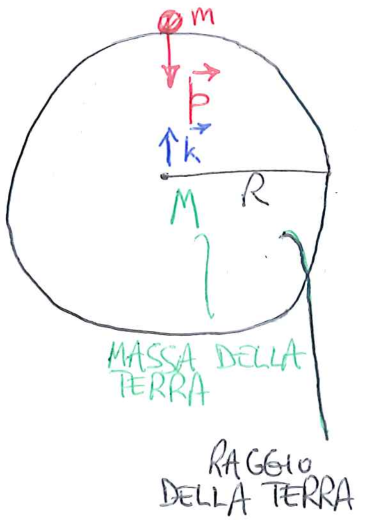


LE REAZIONI VINCOLARI SONO FORZE "VARIABILI", DISPONIBILI A INTERVENIRE A SECONDA DI QUALI SIANO LE SOLLECITAZIONI A CUI IL SISTEMA RISULTA SOTTOPOSTO.
LE REAZIONI VINCOLARI SONO DUNQUE LE FORZE TRASMESSE DAI VINCOLI: REAGISCONO A QUANTO VIENE LORO RICHIESTO: SONO A PRIORI INCOGNITE (IN MODULO); INTERVENGONO CON FORZE "DISPONIBILI" AGENTI SECONDO LA DIREZIONE IN CUI IL VINCOLO LIMITA LA MOBILITÀ DEL CORPO.
POICHÉ SI AMMETTE CHE I VINCOLI SIANO PERFETTI (SENZA CEDIMENTI), LISCI (SENZA ATTRITO) E BILATERI (SE IMPEDISCONO SPOSTAMENTO SECONDO UN DATO VERSO, IMPEDISCONO ANCHE LO SPOSTAMENTO IN VERSO OPPOSTO), SI HA CHE IL VERSO DELLA REAZIONE VINCOLARE È IN GENERALE INCOGNITO, AL PARI DEL MODULO.

CONTRAPPOSTE ALLE REAZIONI VINCOLARI (FORZE REATTIVE) SONO LE FORZE ATTIVE, CHE SONO NOTE, PROVENGONO DALL'AZIONE DI ALTRI CORPI E NON LIMITANO A PRIORI LA MOBILITÀ DEL CORPO.
ESEMPI NOTEVOLI DI FORZE ATTIVE SONO: LA FORZA PESO, LA FORZA ELASTICA E LE FORZE ESERCITATE DA FUNI.

1) FORZA PESO.

È UN CAMPO GRAVITAZIONALE UNIFORME, DOVUTO ALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE CHE LA TERRA ESERCITA SU UN PUNTO MATERIALE POSTO IN PROSSIMITÀ DELLA SUA SUPERFICIE. SI HA QUINDI



$$\vec{p} = -mg\vec{k} \qquad [7]$$

$\vec{k}$ ← VERSORE USCENTE DALLA SUPERFICIE TERRESTRE IN DIREZIONE VERTICALE

m: MASSA DEL PUNTO MATERIALE

g: ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ: $g = 9{,}81\,m/s^2$

SEGUE QUINDI CHE $p = |\vec{p}| = mg$. [8]

D'ALTRA PARTE, PER QUANTO DETTO $\vec{p}$ È L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE QUANDO UNA MASSA È QUELLA DEL PUNTO MATERIALE (m) E L'ALTRA È QUELLA DELLA TERRA (M). PER LA [5] DEVE ALLORA ESSERE:

$p = F_{21} = |\vec{F}_{21}|$ E DUNQUE, CONSIDERANDO $m_1 = m$; $m_2 = M$ NELLA [5]

SI HA:

$$p = mg = F_{21} = h\frac{mM}{R^2} \quad [9] \qquad \Rightarrow \quad g = h\frac{M}{R^2} \quad [9']$$

E DUNQUE SI OTTIENE CHE $g = h\frac{M}{R^2}$, CIOÈ L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' È PARI ALLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE h MOLTIPLICATA PER IL RAPPORTO $\frac{M}{R^2}$.

L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA', ASSUNTA PARI A $9.81\ m/s^2$ AL LIVELLO DEL MARE (NELLA IPOTESI, SOLO APPROSSIMATIVAMENTE VERIFICATA, CHE LA TERRA SIA PERFETTAMENTE SFERICA). VARIA ALL'ALLONTANARSI DAL CENTRO DELLA TERRA.

COSÌ, SE SI CONSIDERA $R = 6300\ km = 6'300'000\ m$ SI HA CHE SU UNA MONTAGNA ALTA $H' = 8'000\ m$ SI DOVREBBE AVERE UN VALORE DI g' DATO, PER LA [9'] DA:

$$g' = h\frac{M}{R'^2}, \quad \text{DOVE } R' = R + H' = 6'300'000\ m + 8'000\ m = 6'308'000\ m = 6308\ km$$

DUNQUE, TENENDO CONTO CHE PER LA [9'] SI PUÒ SCRIVERE $hM = gR^2 = g'R'^2$ SI OTTIENE

$$g' = g\frac{R^2}{R'^2} = g\left(\frac{R}{R+H'}\right)^2 = g\left(\frac{6300}{6308}\right)^2 = g \cdot 0.99747 \quad [10]$$

PER MILLE

DUNQUE $g' = 0.99747g = 9.785\ m/s^2$ CON UNA RIDUZIONE PARI AL 2.5 ‰

SE INVECE SI VALUTA L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA', g'', SU UN SATELLITE ARTIFICIALE IN ORBITA ATTORNO ALLA TERRA A UN'ALTEZZA $H'' = 100\ km$ AL DI SOPRA DELLA SUPERFICIE DELLA TERRA SI HA:

$$g'' = h\frac{M}{R''^2}, \quad \text{DOVE } R'' = R + H'' = 6300\ km + 100\ km = 6400\ km.$$

DI NUOVO DALLA [9'] SEGUE:

$hM = gR^2 = g''R''^2$ DA CUI SI OTTIENE:

$$g'' = g\frac{R^2}{R''^2} = g\left(\frac{R}{R+H''}\right)^2 = g\left(\frac{6300}{6400}\right)^2 = g \cdot 0.96899 \quad [11]$$

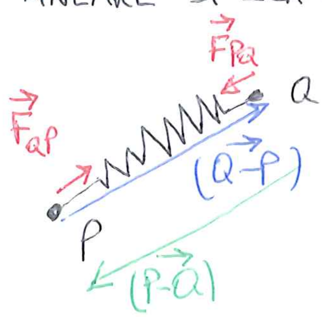
PER CENTO

DUNQUE $g'' = 0.96899 = 9.506\ m/s^2$ CON UNA RIDUZIONE PARI AL 3.1 %

SI LASCIA COME ESERCIZIO VERIFICARE, A PARITA' DI MASSA M, QUALE DOVREBBE ESSERE IL RAGGIO DELLA TERRA R^* PERCHÉ IL PESO p^* DI UN OGGETTO SI DIMEZZI $[R^* = \sqrt{2}R]$ E QUALE DOVREBBE ESSERE, A PARITA' DI RAGGIO R LA MASSA M^{**} DELLA TERRA PERCHÉ IL PESO p^{**} DI UN OGGETTO RADDOPPI $[M^* = 2M]$.

2) FORZA ELASTICA.

È L'AZIONE (A DISTANZA) CHE DUE PUNTI MATERIALI, P E Q, COLLEGATI DA UNA MOLLA LINEARE SI SCAMBIANO. LA FORZA È POSIZIONALE POICHÉ DIPENDE DALLE POSIZIONI RELATIVE OCCUPATE DAI PUNTI P E Q.

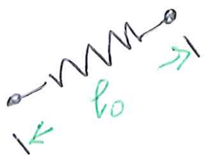


IN PARTICOLARE SE

a) $\overline{PQ} = |\vec{Q-P}| = l_0$ È $|\vec{F}_{QP}| = |\vec{F}_{PQ}| = 0$

LUNGHEZZA A RIPOSO DELLA MOLLA

FORZA ELASTICA NULLA.



b) $\overline{PQ} = |\vec{Q-P}| > l_0$ È $|\vec{F}_{QP}| = |\vec{F}_{PQ}| \neq 0$

FORZA ELASTICA ATTRATTIVA,

$|\vec{F}_{QP}| \propto \| \overline{PQ} - l_0 \|$

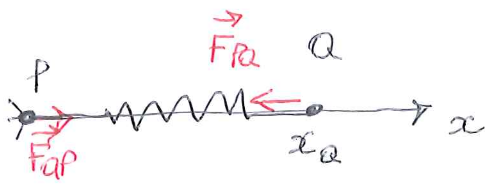
PROPORZIONALE

c) $\overline{PQ} = |\vec{Q-P}| < l_0$ È $|\vec{F}_{QP}| = |\vec{F}_{PQ}| \neq 0$, $|\vec{F}_{QP}| \propto \| l_0 - \overline{PQ} \|$

FORZA ELASTICA REPULSIVA

SI NOTI CHE UNA MOLLA È UN DISPOSITIVO PRIVO DI MASSA CAPACE DI ALLUNGARSI/ACCORCIARSI IN MODO REVERSIBILE (IN UN DETERMINATO INTERVALLO DI ELONGAZIONI E ACCORCIAMENTO) CHE ESERCITA UN'AZIONE A DISTANZA FRA I PUNTI P E Q.

NEL CASO CHE P SIA PUNTO FISSO E Q SIA MOBILE SULL'ASSE x, DETTO l_0 LA LUNGHEZZA A RIPOSO DELLA MOLLA E k LA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA SI HA:



$$|\vec{F}_{PQ}| = k \, \| x_Q - l_0 \|$$

SI OSSERVI CHE LA FORZA È LINEARE NEL TERMINE $(x_Q - l_0)$, DIPENDENTE DALLA COSTANTE ELASTICA k. NE SEGUE CHE L'ALLUNGAMENTO $(x_Q - l_0)$ PER $|\vec{F}|$ FISSATO È PROPORZIONALE A k: QUESTO DEFINISCE UN MODO PER DEFINIRE k, CONSISTENTE NELL'IMPORRE UN ALLUNGAMENTO NOTO E MISURARE LA FORZA $|\vec{F}|$ CHE QUESTO PRODUCE:

$$k = \frac{|\vec{F}_{PQ}|}{\| x_Q - l_0 \|}.$$

OVVIAMENTE LE FORZE CHE P E Q SI SCAMBIANO SONO 2, EGUALI E CONTRARIE; SE P È FISSO, $\vec{F}_{QP}$ SOLLECITA DIRETTAMENTE IL VINCOLO.

SE $l_0 = 0$ SI HA UNA <u>MOLLA IDEALE</u>, CARATTERIZZATA DA LUNGHEZZA A RIPOSO NULLA; IN QUESTO CASO PER LE a), b), c) NON SI HA MAI EFFETTO REPULSIVO,

E RISULTA

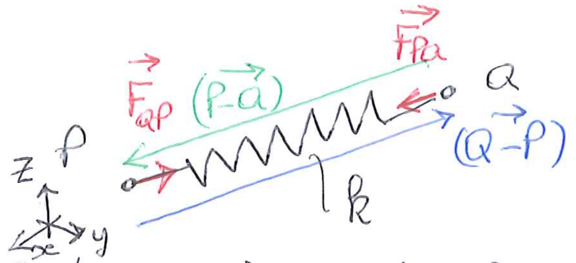
$$\vec{F}_{PQ} = -k(\overrightarrow{Q-P}) \quad [12]$$

FORZA ESERCITATA DAL PUNTO P SUL PUNTO Q

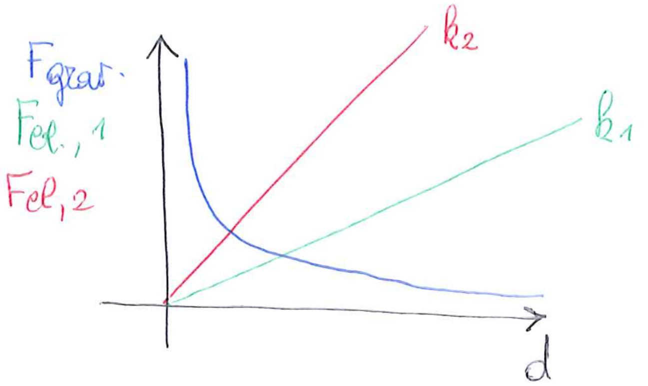
D'ALTRA PARTE

$$\vec{F}_{QP} = -\vec{F}_{PQ} = +k(\overrightarrow{Q-P}) = -k(\overrightarrow{P-Q}) \quad [13]$$

FORZA ESERCITATA DAL PUNTO Q SUL PUNTO P



SI VEDE COSÌ CHE L'INTERAZIONE FRA I DUE PUNTI È SEMPRE PROPORZIONALE ALLA DISTANZA E SEMPRE ATTRATTIVA: È UN CAMPO DI FORZE ELASTICHE (DOVUTE A MOLLA IDEALE) SE SI CONSIDERA LA DISTANZA d FRA I PUNTI P E Q E SI CONFRONTANO L'AZIONE GRAVITAZIONALE E QUELLA ELASTICA SI OSSERVA CHE LA PRIMA SI ATTENUA AL CRESCERE DELLA DISTANZA, MENTRE LA SECONDA CRESCE; D'ALTRA PARTE SE LA DISTANZA $d \to 0$ LA FORZA ELASTICA SI ESTINGUE MENTRE QUELLA GRAVITAZIONALE $\to \infty$:



$k_2 > k_1$

A DIFFERENZA DI UNA MOLLA IDEALE ($l_0 = 0$), UNA MOLLA REALE (COME QUELLA DELLE PENNE A SFERA A PUNTA RETRATTILE) HA UNA LUNGHEZZA A RIPOSO $l_0 \neq 0$ E UNA LUNGHEZZA LIMITE l_1 SUPERATA LA QUALE IL COMPORTAMENTO CESSA DI ESSERE ELASTICO (OVVERO <u>REVERSIBILE</u>); SI HA SNERVAMENTO ED EVENTUALE ROTTURA DELLA MOLLA.

IL CAMPO DI FORZE ELASTICHE INDIVIDUATO DALLA [12] SI PUÒ SCRIVERE PER COMPONENTI COME SEGUE:

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{PQ} = F_{el_x}\vec{i} + F_{el_y}\vec{j} + F_{el_z}\vec{k} \quad [14]$$

E RISULTA, NOTO CHE $(\overrightarrow{Q-P}) = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$

$$\begin{aligned} F_x &= -k(x_Q - x_P) \\ F_y &= -k(y_Q - y_P) \\ F_z &= -k(z_Q - z_P) \end{aligned} \quad [15]$$

DALLE [15] SEGUE CHE SE P E' FISSO E VIENE COLLOCATO NELL'ORIGINE DEGLI ASSI SI OTTIENE CHE LA FORZA CHE SI ESERCITA SUL PUNTO $Q \equiv (x, y, z)$ HA COMPONENTI:

$$F_x = -kx \; ; \quad F_y = -ky \; ; \quad F_z = -kz \, . \qquad [15']$$

SI OSSERVI CHE LE MOLLE IDEALI RAPPRESENTANO SCHEMATIZZAZIONE DI CORPI DEFORMABILI, COME SI VEDRA' NEL SEGUITO: IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI HOOKE, "UT TENSIO, SIC VIS" (ALLUNGAMENTO È PROPORZIONALE ALLA FORZA IMPRESSA)

SI OSSERVI INFINE CHE UNA MOLLA CONSENTE DI MISURARE "STATICAMENTE" LE FORZE, CIOÈ DI DEFINIRLE IN TERMINI STATICI. SU QUESTO PRINCIPIO SI BASANO IL DINAMOMETRO E LE BILANCE A MOLLA.

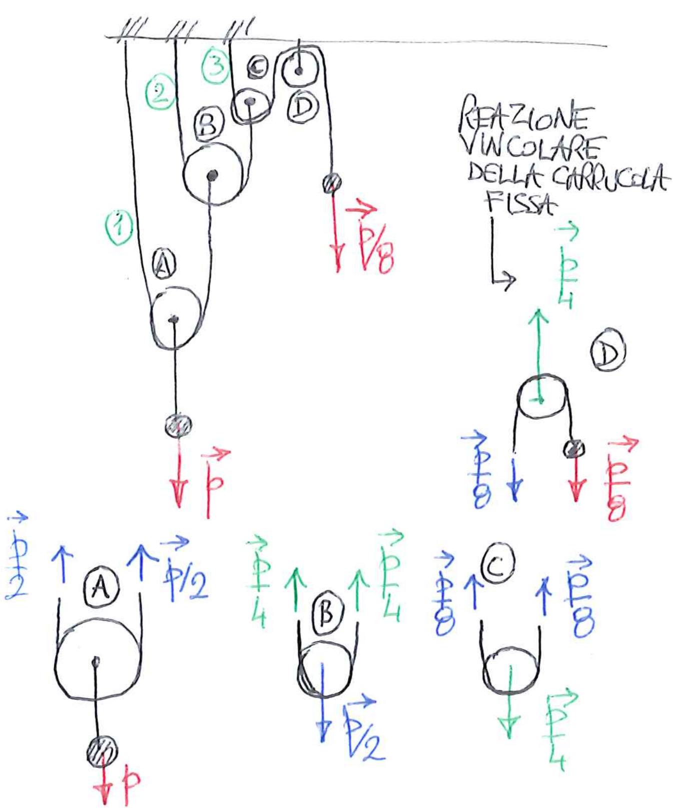
3) FORZE ESERCITATE DA FUNI

IN ASSENZA DI ATTRITO UNA FUNE (CHE TRASMETTE SOLO AZIONI DI TRAZIONE) TRASMETTE INALTERATO IL MODULO DI UNA FORZA, ALTERANDONE LA DIREZIONE "GUIDANDOLA" LUNGO IL PROPRIO PERCORSO.

MEDIANTE CARRUCOLE È POSSIBILE MODIFICARE IL PERCORSO DI UNA FUNE E COMBINANDO OPPORTUNAMENTE FUNI E CARRUCOLE SI POSSONO COSTRUIRE DISPOSITIVI COME I PARANCHI CHE CONSENTONO DI "DEMOLTIPLICARE" UNA FORZA, PERMETTENDO, PER ESEMPIO, DI SOLLEVARE UN CARICO APPLICANDO UNA FORZA CHE È SOLO UNA FRAZIONE DEL PESO DEL CARICO.

QUESTI DISPOSITIVI RAPPRESENTANO UNA APPLICAZIONE PIÙ GENERALE DEGLI ESPERIMENTI DI STEVINO (SIMON STEVIN) ALLA FINE DEL '500.

PER ESEMPIO, MEDIANTE IL DISPOSITIVO IN FIGURA, FORMATO DA 3 FUNI, 3 CARRUCOLE MOBILI E UNA FISSA SI MOSTRA COME MANTENERE IN EQUILIBRIO UN PUNTO MATERIALE DI PESO p CON UN CONTRAPPESO DI PESO $p/8$.



NEL DETTAGLIO SI VEDE CHE LA FUNE ① È FISSATA A UN ESTREMO, SORREGGE LA CARRUCOLA MOBILE A ED È BLOCCATA NEL PERNO DELLA SECONDA CARRUCOLA MOBILE Ⓑ.

LA FUNE ② È A SUA VOLTA FISSATA ALL'ESTREMO SUPERIORE, SORREGGE LA CARRUCOLA MOBILE Ⓑ E TERMINA NEL PERNO DELLA TERZA CARRUCOLA MOBILE Ⓒ

LA TERZA FUNE, ③ È ANCORA FISSATA ALL'ESTREMO SUPERIORE, SORREGGE LA CARRUCOLA MOBILE Ⓒ, PASSA NELLA CARRUCOLA FISSA Ⓓ E SORREGGE ALL'ALTRO ESTREMO IL CONTRAPPESO $\vec{p}/8$.

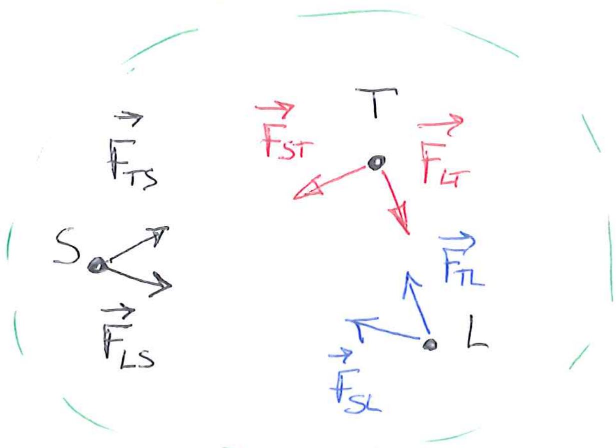
IL PESO $\vec{p}$ È APPLICATO AL PERNO DELLA CARRUCOLA Ⓐ

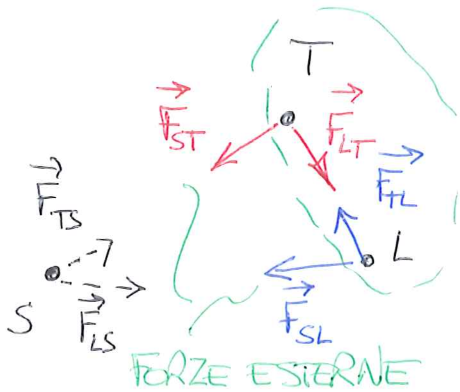
SI VEDE ALLORA CHE LA CARRUCOLA Ⓐ È SOSTENUTA DALLA TRAZIONE NELLA FUNE ① CHE PER RAGIONI DI SIMMETRIA HA MODULO $p/2$ E

CONTRIBUISCE A SOSTENERE IL PESO $\vec{p}$.
ANALOGAMENTE LA CARRUCOLA (B) REGGE NEL SUO PERNO LA FUNE (1) CHE TRASMETTE UNA FORZA, DIRETTA VERSO IL BASSO, DI MODULO $\frac{p}{2}$, PARI ALLA TRAZIONE NELLA FUNE (1) ED È SOSTENUTA DALLA FUNE (2), NELLA QUALE LA TRAZIONE (O "TIRO") HA VALORE PARI A $p/4$, PER RAGIONI DI SIMMETRIA.
LA CARRUCOLA (C) REGGE NEL SUO PERNO LA FUNE (2), CHE TRASMETTE UNA FORZA, DIRETTA VERSO IL BASSO PARI AL TIRO DELLA FUNE, OVVERO $p/4$; LA FUNE (3) SOSTIENE LA CARRUCOLA ED È SOGGETTA A UNA TRAZIONE PARI A $p/8$.
INFINE LA CARRUCOLA FISSA (D) È SOGGETTA AL TIRO DELLA FUNE (3), EQUILIBRATA DAL CONTRAPPESO $p/8$; È POI SOSTENUTA DALLA REAZIONE VINCOLARE (ORIENTATA VERSO L'ALTO E DI VALORE $p/4$).
IN QUESTO MODO UN PESO $\vec{p}$ VIENE "BILANCIATO" DA UN CONTRAPPESO $\vec{p}/8$. IL SISTEMA PUÒ ESSERE ULTERIORMENTE GENERALIZZATO IN MODO DA "RIDURRE" ULTERIORMENTE IL VALORE DEL CONTRAPPESO.

NELL'AMBITO DELLE FORZE USA INTRODURSI UNA DISTINZIONE FRA FORZE ESTERNE E FORZE INTERNE.

SONO FORZE ESTERNE QUELLE CHE PROVENGONO SUL SISTEMA DALL'ESTERNO, CIOÈ DA ELEMENTI CHE NON FANNO PARTE DEL SISTEMA OGGETTO DI STUDIO.
NEL CASO IL SISTEMA SIA FORMATO DA UN UNICO PUNTO MATERIALE, SU DI ESSO POSSONO ESSERE APPLICATE SOLO FORZE ESTERNE.
ESEMPI DI FORZE ESTERNE SONO IL PESO PROPRIO O UNA REAZIONE VINCOLARE
SONO INVECE FORZE INTERNE QUELLE CHE PROVENGONO SU UNA PARTE DEL SISTEMA DALLE RIMANENTI PARTI DEL SISTEMA.
ESEMPI DI FORZE INTERNE SONO LE FORZE DI CONNESSIONE CHE IMPEDISCONO CHE IL SISTEMA SI DISGREGHI.
OVVIAMENTE IL CONCETTO DI "INTERNO" O "ESTERNO" È STRETTAMENTE LEGATO AL MODO IN CUI SI DEFINISCE IL SISTEMA.
SE PER ESEMPIO SI CONSIDERA IL SISTEMA SOLE/TERRA/LUNA SI HA CHE L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE SOLE-TERRA, TERRA-LUNA E SOLE-LUNA SONO TUTTE FORZE INTERNE.

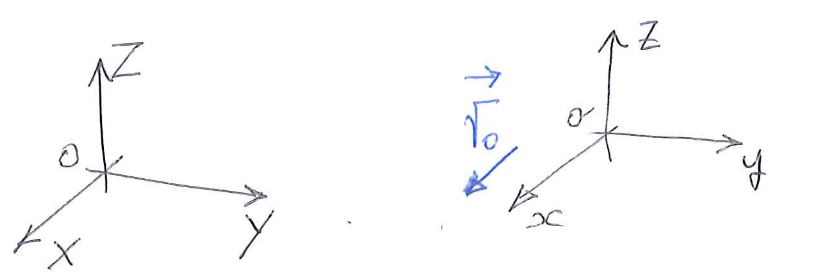




SE INVECE IL SISTEMA STUDIATO È SOLO IL SISTEMA TERRA/LUNA, ALLORA LE ATTRAZIONI GRAVITAZIONALE SOLE-TERRA E SOLE LUNA SONO FORZE ESTERNE

SISTEMA DI RIFERIMENTO E PRINCIPIO DI RELATIVITA' GALILEIANO.

IL MOTO O LA QUIETE VANNO RIFERITI A UN OSSERVATORE, CIOE' A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE DOTATO DI OROLOGIO: QUESTO OSSERVATORE SI DENOTA CON <u>OXYZT</u>.
CI SI CHIEDE COME PERCEPISCE IL MOTO O LA QUIETE UN SECONDO OSSERVATORE <u>oxyzt</u>.
IL <u>PRINCIPIO DI RELATIVITA' GALILEIANO</u> ASSUME CHE LE LEGGI MECCANICHE VALIDE PER UN OSSERVATORE VALGONO PER QUALUNQUE ALTRO OSSERVATORE IN MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO A ESSO.
IN ALTRI TERMINI: LE LEGGI MECCANICHE SONO INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI GALILEIANE



$$\vec{V}_0 = V_{0x}\,\vec{i}$$

AMMETTENDO, SENZA PERDITA DI GENERALITA' CHE GLI ASSI X E x DEI DUE OSSERVATORI SIANO PARALLELI E DIRETTI COME LA VELOCITA' $\vec{V}_0$ (<u>COSTANTE</u>) DI UN OSSERVATORE RISPETTO ALL'ALTRO.
LA TRASFORMAZIONE GALILEIANA E' IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE NECESSARIO PER PASSARE DA UN OSSERVATORE ALL'ALTRO; QUESTO SI ESPRIME IN QUESTO MODO:

$$\begin{cases} T = t \\ X = x + \underbrace{V_{0x}\, t} \\ Y = y \\ Z = z \end{cases} \qquad [16]$$

↑ SPAZIO PERCORSO DALL'OSSERVATORE oxyzt IN DIREZIONE x RISPETTO ALL'OSSERVATORE OXYZT.

SI NOTI CHE SE UN PUNTO P E' FERMO PER L'OSSERVATORE oxyzt, NON E' INVECE FERMO PER L'OSSERVATORE OXYZT, PER IL QUALE P SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME COME INDICATO DALLE [16].
LE VELOCITA' DI P SONO DIVERSE: PER oxyzt $\vec{V}_P = \vec{0}$; PER OXYZT $\vec{V}_P = \vec{V}_0$
MA LE ACCELERAZIONI SONO NULLE PER ENTRAMBI
L'ACCELERAZIONE E' INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI GALILEIANE.

DUNQUE LE LEGGI MECCANICHE VERIFICATE DA oxyzt SONO VERIFICATE ANCHE DA OXYZT SOLO SE I 2 OSSERVATORI SONO RELATIVAMENTE IN QUIETE ($\vec{V}_0 = \vec{0}$) O IN MOTO RETTILINEO UNIFORME ($\vec{V}_0 \neq \vec{0}$; $\vec{a} = \vec{0}$).

UN OSSERVATORE PER IL QUALE VALGONO LE LEGGI DELLA MECCANICA CLASSICA (NEWTONIANA) E' DETTO OSSERVATORE ASSOLUTO.
IL PRINCIPIO DI RELATIVITA' GALILEIANA EQUIVALE A DIRE CHE DA ESPERIMENTI CONDOTTI IN UN SISTEMA IN MOTO RETTILINEO UNIFORME NON SI E' IN GRADO DI VALUTARE LO STATO DI QUIETE O MOTO DEL SISTEMA STESSO.

LE LEGGI DI NEWTON PER LA MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE.

I LEGGE : UN PUNTO MATERIALE, SOTTRATTO ALL'AZIONE DI QUALUNQUE FORZA, SI MANTIENE IN QUIETE O SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.

È ANCHE NOTA COME LEGGE DI INERZIA, INTESA COME PIGRIZIA/RITROSIA A CAMBIARE IL PROPRIO STATO.
SI OSSERVI CHE NEL CASO DI QUIETE È $\vec{v} = \vec{o}$; NEL CASO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME È $\vec{v} = \vec{v}_o$ (= CONST. $\neq \vec{o}$): IN ENTRAMBI I CASI $\vec{a} = \vec{o}$ (LA ACCELERAZIONE ASSOCIATA AL MOTO È NULLA.)
IN BASE ALL'ENUNCIATO IL PUNTO, SOTTRATTO ALL'AZIONE DI QUALUNQUE FORZA È ISOLATO DALL'UNIVERSO, CIOÈ SI TROVA IN CONDIZIONI LIMITE CHE NON È DATO DI OSSERVARE SPERIMENTALMENTE.
LA LEGGE NON È CONFERMABILE SPERIMENTALMENTE, SE NON AMMETTENDO CHE TANTO PIÙ PICCOLE SONO LE FORZE AGENTI SUL PUNTO, TANTO PIÙ ESSO PERSEVERA NEL PROPRIO STATO.
LA I LEGGE PERMETTE DI DEFINIRE UN OSSERVATORE ASSOLUTO: TALE È L'OSSERVATORE PER IL QUALE VALE LA LEGGE D'INERZIA: QUESTO SI DICE OSSERVATORE INERZIALE.

II LEGGE : UN PUNTO MATERIALE SOTTOPOSTO ALL'AZIONE DI UNA FORZA $\vec{F}$ ACQUISTA UN'ACCELERAZIONE $\vec{a}$ PROPORZIONALE A $\vec{F}$; IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ È COSTITUITO DALLA MASSA m DEL PUNTO MATERIALE. DUNQUE

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad [17]$$

QUESTA È LA LEGGE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA
L'ASPETTO SALIENTE MESSO IN LUCE DALLA II LEGGE È CHE LA FORZA NON PROVOCA VELOCITÀ, BENSÌ VARIAZIONE DI VELOCITÀ: TALE È IL PASSAGGIO DA QUIETE A MOTO E VICEVERSA. IN QUESTO CONSISTE LA GRANDE INTUIZIONE DI NEWTON: LA VARIAZIONE DEL MOTO È ASSOCIATA A PRESENZA DI FORZE, MENTRE L'ASSENZA DI FORZE PRESUPPONE LA PERSEVERANZA DEL MOTO, COME POSTULATO DALLA I LEGGE.
LA [17] È UN'EQUAZIONE VETTORIALE CHE CONSENTE DI "PREDIRE" IL MOTO: NON SOLO DESCRIVE IL MOTO OSSERVATO, MA CONSENTE DI CARATTERIZZARE COMPLETAMENTE IL MOTO NOTE LA FORZA AGENTE $\vec{F}$ E LE CONDIZIONI INIZIALI (C.I.) VELOCITÀ $\vec{v}_o$ E POSIZIONE $(\overrightarrow{P_o - O})$ DEL PUNTO MATERIALE, CHE CARATTERIZZANO LA SITUAZIONE DI PARTENZA.
VARIANDO LE FORZE APPLICATE E LE C.I. CAMBIA IL MOTO: LA [17] COSTITUISCE UN MODELLO DEL MONDO FISICO; PER ESEMPIO IL MOTO DEI PIANETI È DESCRITTO DALLA [17] QUANDO SI CONSIDERA LA FORZA GRAVITAZIONALE ESERCITATA DAL SOLE E LE C.I.: SI TROVA CHE IL PUNTO MATERIALE CHE RAPPRESENTA IL PIANETA DESCRIVE UN'ORBITA COSTITUITO DA UNA CONICA (ELLISSE) COME PREVISTO DA KEPLERO.

LA [17] È UN'EQUAZIONE VETTORIALE EQUIVALENTE A 3 EQUAZIONI SCALARI (CHE SI POSSONO RIDURRE A SOLE 2 NEL CASO PIANO):

$$\begin{cases} F_x = m a_x \\ F_y = m a_y \\ F_z = m a_z \end{cases} \quad [17'] \qquad \text{E PER LA } [2''] \qquad \begin{cases} F_x = m\ddot{x}(t) \\ F_y = m\ddot{y}(t) \\ F_z = m\ddot{z}(t) \end{cases} \quad [17'']$$

E QUESTE RAPPRESENTANO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE (COINVOLGONO DERIVATE SECONDE) NELLE 3 FUNZIONI INCOGNITE $x(t), y(t), z(t)$, CHE PER LA [0] E [0'] DETERMINANO UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DI P IN FUNZIONE DEL TEMPO t.

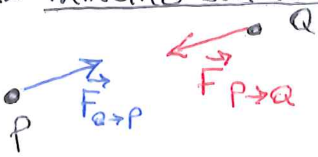
SI HA COSÌ, TENENDO CONTO DELLE [0'], [1'], [2'']:

$$\vec{F} = m\vec{a} \iff \begin{cases} F_x = m\ddot{x}(t) \\ F_y = m\ddot{y}(t) \\ F_z = m\ddot{z}(t) \end{cases} + \begin{cases} P(t_0) = P_0 \iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \iff \begin{cases} \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \\ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \iff P = P(t) \quad [18]$$

SECONDA LEGGE — CONDIZIONI INIZIALI — INTEGRAZIONE DELLE EQ. DIFFERENZIALI

SI NOTI CHE LA LEGGE È <u>UNICA</u>: AL VARIARE DEL PUNTO MATERIALE VARIA IL PARAMETRO m CHE NE INDIVIDUA LA MASSA: INOLTRE SE SI MODIFICANO LA FORZA $\vec{F}$ E LE C.I. P_0 E $\vec{v}_0$, LA RISPOSTA DEL PUNTO MATERIALE È <u>SEMPRE</u> DEFINITA DALLA [18].

<u>III LEGGE</u>: DUE PUNTI MATERIALI INTERAGENTI MECCANICAMENTE ESERCITANO, L'UNO SULL'ALTRO, <u>FORZE OPPOSTE</u>: EGUALI IN MODULO E DIREZIONE MA DI VERSO OPPOSTO. È IL <u>PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE</u>.



$$\vec{F}_{Q\to P} = -\vec{F}_{P\to Q} \quad [19]$$

$$\therefore \quad |\vec{F}_{Q\to P}| = |\vec{F}_{P\to Q}| \quad [19']$$

NE SEGUE

PER LA [17] È PERÒ $\vec{F}_{Q\to P} = m_P \vec{a}_P$ E $\vec{F}_{P\to Q} = m_Q \vec{a}_Q$

PERTANTO $|\vec{F}_{Q\to P}| = m_P \underbrace{|\vec{a}_P|}_{a_P} = m_P a_P$ E $|\vec{F}_{P\to Q}| = m_Q \underbrace{|\vec{a}_Q|}_{a_Q} = m_Q a_Q$

DUNQUE PER LA [19'] $m_P a_P = m_Q a_Q$ [20] E QUINDI $\frac{m_P}{m_Q} a_P = a_Q$

DA CUI SEGUE

$$\frac{m_P}{m_Q} = \frac{a_Q}{a_P} \quad [21]$$

CIOÈ IL RAPPORTO FRA LE ACCELERAZIONI È INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL RAPPORTO FRA LE MASSE: SE $m_P > m_Q \Rightarrow a_Q > a_P$; PER EFFETTO DELL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE CHE SI ESERCITA FRA LA TERRA (T) UN OGGETTO (Q) POSTO IN PROSSIMITÀ DELLA SUA SUPERFICIE, POICHÉ $m_T \gg m_Q$ SARÀ $a_Q \gg a_T$: L'OGGETTO PRODUCE ACCELERAZIONE SULLA TERRA, MA QUESTA È INCOMPARABILMENTE PIÙ PICCOLA DI QUELLA CHE LA TERRA PRODUCE SULL'OGGETTO. MEDIANTE LA [21] È POSSIBILE MISURARE LE MASSE.
AL PROPOSITO SI OSSERVA CHE "<u>LA MASSA INERTE COINCIDE CON LA MASSA PESANTE</u>"

CIOÈ LO STESSO VALORE CHE INDIVIDUA LA RITROSIA DI UN OGGETTO A CAMBIARE IL PROPRIO STATO È ANCHE QUELLO CHE NE CARATTERIZZA LA SUSCETTIBILITÀ AD ESSERE ATTRATTO DALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE.
QUESTO RISULTATO NON È SCONTATO PERCHÉ IN LINEA DI PRINCIPIO SI TRATTA DI FENOMENI DIVERSI.

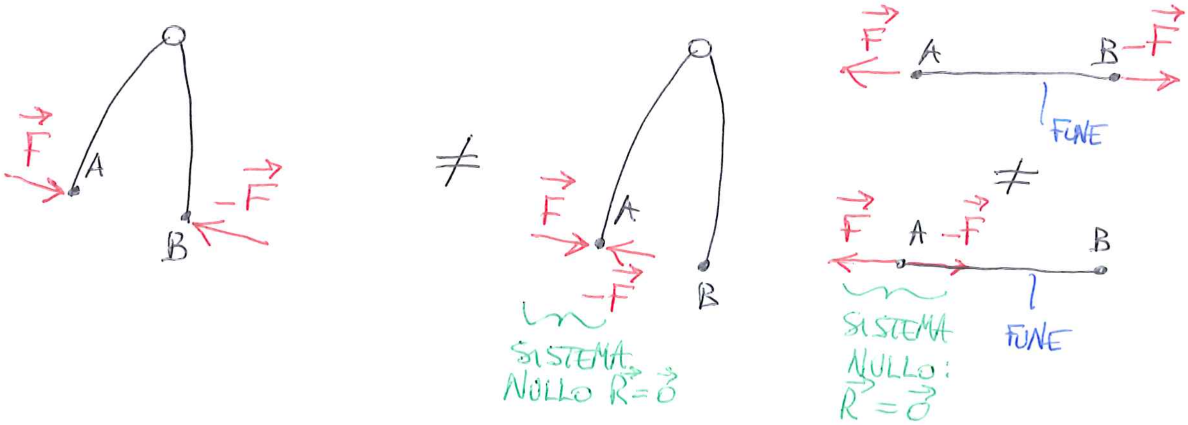
COMPOSIZIONE DELLE FORZE E I OPERAZIONE INVARIANTIVA.

IN OGNI SISTEMA MATERIALE È SEMPRE POSSIBILE, SENZA ALTERARE LO STATO MECCANICO DEL SISTEMA (DI QUIETE O DI MOTO)

- SOSTITUIRE A PIÙ FORZE APPLICATE IN UN PUNTO LA LORO RISULTANTE $\vec{R}$ APPLICATA NEL MEDESIMO PUNTO.
- SOSTITUIRE A UNA FORZA $\vec{R}$ APPLICATA IN UN PUNTO UN SISTEMA DI PIÙ FORZE APPLICATE TUTTE NEL MEDESIMO PUNTO CHE AMMETTANO $\vec{R}$ COME LORO RISULTANTE.

SI HA QUINDI CHE L'EQUILIBRIO (O IL MOTO) SONO INVARIANTI PER COMPOSIZIONE O SCOMPOSIZIONE DI PIÙ FORZE IN UN PUNTO.
SI NOTI CHE LA SOMMA VETTORIALE È DEFINITA SU VETTORI (LIBERI), LA COMPOSIZIONE O SCOMPOSIZIONE DI FORZE È DEFINITA SU VETTORI APPLICATI: IN GENERALE LA SOMMA NON IMPLICA LA SOSTITUIBILITÀ!

- TUTTAVIA PER FORZE APPLICATE TUTTE IN UN PUNTO LA SOMMA IMPLICA LA SOSTITUIBILITÀ.
- SE INVECE LE FORZE SONO APPLICATE IN PUNTI DIVERSI (O NELLO STESSO PUNTO MA APPARTENENTE A OGGETTI DIVERSI) LA SOSTITUIBILITÀ NON VALE:



EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIALE

LA CONDIZIONE IN BASE ALLA QUALE UN PUNTO MATERIALE SI TROVA IN EQUILIBRIO, OVVERO PERMANE NELLO STATO DI QUIETE PUÒ ESSERE DETERMINATA UTILIZZANDO LE LEGGI DI NEWTON E LA I OPERAZIONE INVARIANTIVA.

SI OSSERVA PRELIMINARMENTE CHE LA CONDIZIONE $\vec{R}=\vec{0}$ (ANNULLAMENTO DELLA RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE AL PUNTO) È CONDIZIONE SUFFICIENTE (OVVERO BASTEVOLE) PER IL MANTENIMENTO DELLA VELOCITÀ INIZIALE $\vec{v}_0$.
SI HA INFATTI (I OPERAZIONE INVARIANTIVA) $\vec{R}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots+\vec{F}_N$ [22]
D'ALTRA PARTE SE $\vec{R}=\vec{0}$ SEGUE PER LA I E II LEGGE DI NEWTON CHE

$\vec{a} = \vec{0}$. NE SEGUE PER LA II LEGGE DI NEWTON CHE $\vec{v} = \vec{v}_0 = const.$
PER LA LEGGE D'INERZIA NON SI PUÒ DISTINGUERE FRA QUIETE ($\vec{v}_0 = \vec{0}$) O MOTO RETTILINEO UNIFORME $\vec{v}_0 = cost \neq \vec{0}$.
PER DISTINGUERE I DUE CASI OCCORRE AGGIUNGERE LE CONDIZIONI INIZIALI: EQUILIBRIO RAPPRESENTA IL MANTENIMENTO DELLA QUIETE, CIOÈ LA CONDIZIONE $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

IN BASE A QUESTE CONSIDERAZIONI SI PUÒ FORMULARE LA SEGUENTE CONDIZIONE CARATTERISTICA (CIOÈ NECESSARIA E SUFFICIENTE) DI EQUILIBRIO.
LA CONDIZIONE NECESSARIA COMPORTA CHE, SE È VIOLATA, NON PUÒ ESSERE VERIFICATO L'ASSERTO; LA CONDIZIONE SUFFICIENTE CHE, SE È SODDISFATTA, FA SÌ CHE L'ASSERTO SIA VERIFICATO

CONDIZIONE CARATTERISTICA PER L'EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIALE LIBERO (CIOÈ PRIVO DI VINCOLI) È CHE SIA $\vec{R} = \vec{0}$ [23]

CONDIZIONE SUFFICIENTE $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow$ PUNTO MATERIALE È IN EQUILIBRIO.
SE $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ [I LEGGE]
E SE LA C.I. È $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (STATO DI QUIETE)
ALLORA IL PUNTO PERMANE IN QUIETE. □

CONDIZIONE NECESSARIA (VERIFICATA PER ASSURDO). PUNTO MATERIALE È IN EQUILIBRIO $\Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$
SIA DUNQUE $\vec{R} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$ [II LEGGE]
E INDIPENDENTEMENTE DALLA C.I. CIÒ COMPORTA $\vec{v} \neq \vec{v}_0$
DUNQUE IL PUNTO NON PUÒ RESTARE NELLO STATO DI QUIETE, CIOÈ NON PUÒ RESTARE IN EQUILIBRIO □

L'EQUAZIONE [23] È UN'EQUAZIONE VETTORIALE ALGEBRICA (NON DIFFERENZIALE)
D'ALTRA PARTE, POICHÉ

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \qquad [24]$$

LA [23] COMPORTA CHE SIANO SODDISFATTE LE 3 EQUAZIONI SCALARI RELATIVE ALLE COMPONENTI:

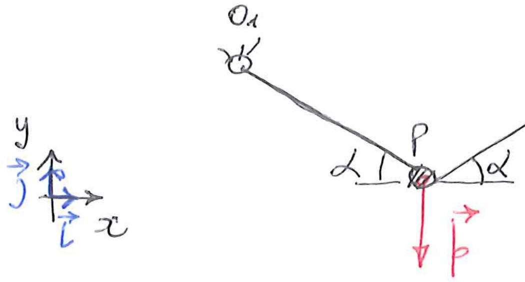
$$\vec{R} = \vec{0} \iff \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad [23']$$

NEL CASO PIANO, CON OPPORTUNA SCELTA DEGLI ASSI LA CONDIZIONE $R_z = 0$ È SODDISFATTA COME IDENTITÀ E SI HANNO SOLO 2 EQUAZIONI DA SODDISFARE, $R_x = 0$ E $R_y = 0$
LA CONDIZIONE $\vec{R} = \vec{0}$ RISOLVE ANCHE PROBLEMI DI EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIALE VINCOLATO, SE "BEN POSTI", CIOÈ NEL CASO "ISOSTATICO" E NEL CASO "IPOSTATICO".

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER IL PUNTO MATERIALE

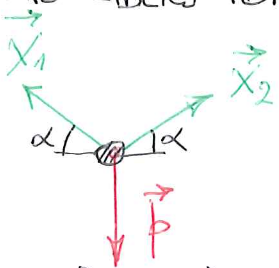
1) <u>CASO ISOSTATICO</u>: L'EQUILIBRIO È ASSICURATO DALLA PRESENZA DEI VINCOLI.

SI CONSIDERI IL PUNTO MATERIALE P, SOGGETTO ALL'AZIONE DEL PROPRIO PESO, $\vec{p}$ E MANTENUTO IN POSIZIONE DALLA PRESENZA DI 2 BARRETTE, DI EGUALE LUNGHEZZA ED EGUALMENTE INCLINATE DI UN ANGOLO α SULL'ORIZZONTALE.
IL PROBLEMA È PIANO E SI OPERA NEL PIANO VERTICALE, xy:



SI SOPPRIMONO I DUE VINCOLI (COSTITUITI DALLE BARRETTE) E LI SI SOSTITUISCE CON LE REAZIONI, $\vec{X}_1$ E $\vec{X}_2$ CHE ESSI ESPLICANO.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO FORNISCE:



DOVE LE REAZIONI $\vec{X}_1$ E $\vec{X}_2$ SONO ORIENTATE COME LE CONGIUNGENTI PO_1 E PO_2: OGNI BARRETTA IMPEDISCE INFATTI AL PUNTO P DI AVVICINARSI/ALLONTANARSI DAI PUNTI O_1 E O_2 RISPETTIVAMENTE.

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È DATA DA:

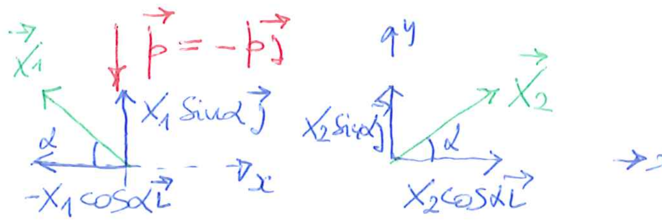
$$\vec{R} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p} + \vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{0} \qquad [*]$$

OPERANDO CON UNO SVILUPPO DEI 3 VETTORI PER COMPONENTI, SI HA:

$$\vec{p} = -p\vec{j} \qquad\qquad p = |\vec{p}|$$

$$\vec{X}_1 = -X_1 \cos\alpha\,\vec{i} + X_1 \sin\alpha\,\vec{j} \qquad X_1 = |\vec{X}_1|$$

$$\vec{X}_2 = +X_2 \cos\alpha\,\vec{i} + X_2 \sin\alpha\,\vec{j} \qquad X_2 = |\vec{X}_2|$$



E DALLA [*] SEGUE:

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

$$-p\vec{j} - X_1\cos\alpha\,\vec{i} + X_1 \sin\alpha\,\vec{j} + X_2\cos\alpha\,\vec{i} + X_2\sin\alpha\,\vec{j} = \vec{0}$$

$$\underbrace{(-X_1\cos\alpha + X_2\cos\alpha)}_{R_x}\vec{i} + \underbrace{(-p + X_1\sin\alpha + X_2\sin\alpha)}_{R_y}\vec{j} = \vec{0}$$

OVVERO:

$$R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -X_1\cos\alpha + X_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow (-X_1 + X_2)\cos\alpha = 0 \qquad [1]$$

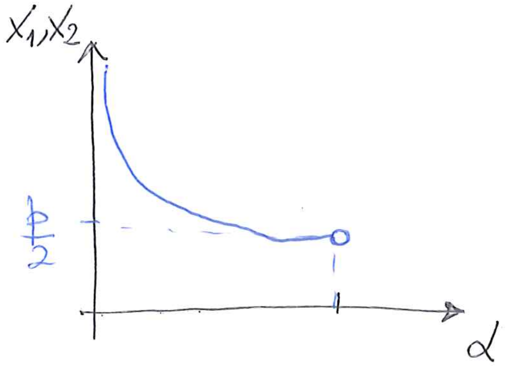
$$R_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -p + (X_1 + X_2)\sin\alpha = 0 \qquad [2]$$

LA [1] SE $\cos\alpha \neq 0$ (CIOÈ $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$) FORNISCE SEMPLICEMENTE $X_1 = X_2$; DA QUI, SOSTITUENDO NELLA [2] SI OTTIENE:

$$-p + 2X_1\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = \frac{p}{2\sin\alpha}$$

PERCHÉ $\sin\alpha \neq 0$ (CIOÈ $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq \pi$).

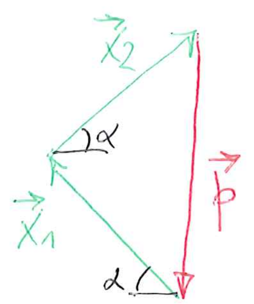
SI TROVA QUINDI $X_1 = \frac{p}{2\sin\alpha}$; $X_2 = \frac{p}{2\sin\alpha}$. E L'EQUILIBRIO NELLE CONDIZIONI INDICATE È SEMPRE GARANTITO

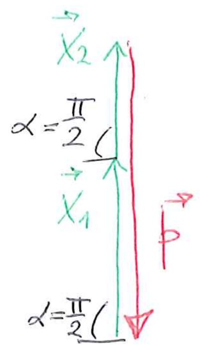


(SENZA RAGGIUNGERLO)

SI OSSERVA CHE, MANO A MANO CHE $\alpha \to 0$, IL VALORE DI X_1 E DI X_2 CRESCE ILLIMITATAMENTE, E CIÒ INDICA CHE PER TALE VALORE DI α L'EQUILIBRIO NON È PIÙ POSSIBILE PERCHÉ RICHIEDEREBBE UNA FORZA INFINITA (COME QUELLA CHE SAREBBE NECESSARIA A MANTENERE IN EQUILIBRIO UN GINNASTA CHE SI VOLESSE SORREGGERE MANTENENDO LE BRACCIA ORIZZONTALI.)

PER $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ IL VALORE DI X_1 E X_2 SI AVVICINA AL VALORE MINIMO PARI A $\frac{p}{2}$.





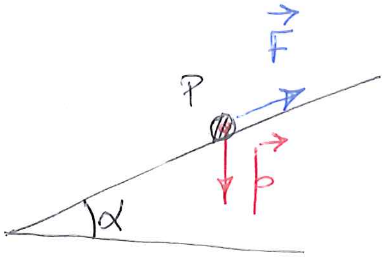
SI OSSERVI ANCHE CHE PER $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ SI HA CHE LA [1] SI ANNULLA E LA [2] FORNISCE $-p + X_1 + X_2 = 0$; IN QUESTO CASO I VALORI DI X_1 E X_2 RESTANO IN PARTE INDETERMINATI, ESSENDO SOLO RICHIESTO CHE LA LORO SOMMA BILANCI IL VALORE DI p.

QUESTA CIRCOSTANZA, COME SI VEDRÀ È TIPICA DI CONDIZIONI DI VINCOLO IPERSTATICO.

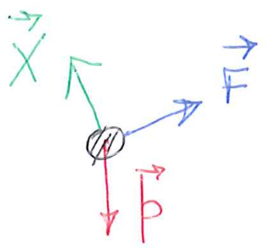
2) CASO IPOSTATICO: I VINCOLI TOLGONO SOLO ALCUNE (NON TUTTE!) POSSIBILITÀ DI MOVIMENTO.

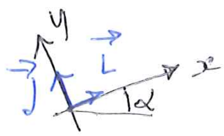
NE SEGUE CHE ALCUNE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SONO SUFFICIENTI A GARANTIRE L'EQUILIBRIO, CIOÈ DETERMINANO LA SITUAZIONE EQUILIBRATA: SONO DETTE "EQUAZIONI PURE" POICHÉ NON CONTENGONO LE REAZIONI DEI VINCOLI; LE ALTRE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SONO NECESSARIE E PERMETTONO DI DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI.

SI CONSIDERI UN PUNTO MATERIALE P, SOGGETTO AL PESO PROPRIO $\vec{p}$ E APPOGGIATO SU UN PIANO INCLINATO, CIOÈ UNA GUIDA FISSA LISCIA, INCLINATA DI α SULL'ORIZZONTALE. OCCORRE DETERMINARE IL MODULO DELLA FORZA $\vec{F}$, $F = |\vec{F}|$ PARALLELA ALLA GUIDA E IN GRADO DI GARANTIRE L'EQUILIBRIO DEL PUNTO.



SE SI ELIMINA IL VINCOLO EVIDENZIANDO LA REAZIONE VINCOLARE SI HA QUESTO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:

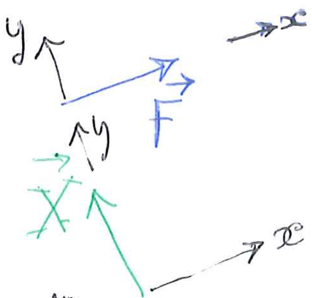




LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È:

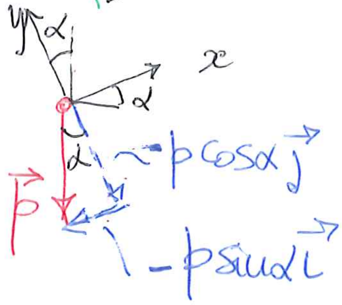
$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} + \vec{X} + \vec{F} = \vec{0} \qquad [**]$$

IN CUI CONVIENE ESPRIMERE LE COMPONENTI ADOTTANDO UN ASSE PARALLELO AL PIANO INCLINATO E L'ALTRO PERPENDICOLARE RISPETTO ALLO STESSO PIANO:



$$\vec{F} = F\vec{i} \qquad F = |\vec{F}|$$

$$\vec{X} = X\vec{j} \qquad X = |\vec{X}|$$



$$\vec{p} = -p\sin\alpha\,\vec{i} - p\cos\alpha\,\vec{j} \qquad p = |\vec{p}|$$

DALLA [**] SEGUE COSÌ: $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = \vec{0}$ $\begin{cases} R_x = \\ R_y = \end{cases}$

$$-p\sin\alpha\,\vec{i} - p\cos\alpha\,\vec{j} + X\vec{j} + F\vec{i} = \vec{0}$$

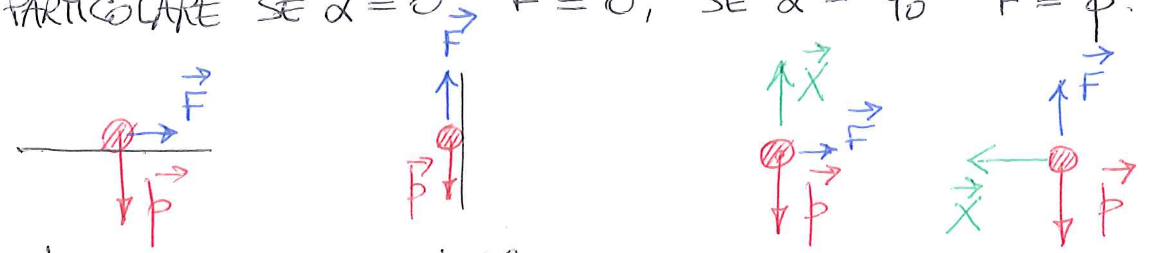
$$\Big(\underbrace{-p\sin\alpha + F}_{R_x}\Big)\vec{i} + \Big(\underbrace{-p\cos\alpha + X}_{R_y}\Big)\vec{j} = \vec{0}$$

DUNQUE:

$R_x = 0 \quad -p\sin\alpha + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = p\sin\alpha$ [3] (eq. pura)

$R_y = 0 \quad -p\cos\alpha + X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = p\cos\alpha$ [4] (eq. che determina reazione vincolare).

LA [3] MOSTRA CHE LA FORZA $\vec{F}$ DEVE AVERE UN MODULO TALE DA BILANCIARE LA COMPONENTE DEL PESO PROPRIO PROIETTATO SULLA DIREZIONE DEL PIANO INCLINATO; LA [4] CHE LA REAZIONE VINCOLARE $\vec{X}$ EQUILIBRA ESATTAMENTE LA COMPONENTE DEL PESO PROPRIO AGENTE IN DIREZIONE PERPENDICOLARE RISPETTO AL PIANO INCLINATO.
L'EQUAZIONE PURA GARANTISCE L'EQUILIBRIO PER OGNI INCLINAZIONE DEL PIANO; IN PARTICOLARE SE $\alpha = 0$, $F = 0$; SE $\alpha = 90°$ $F = p$.



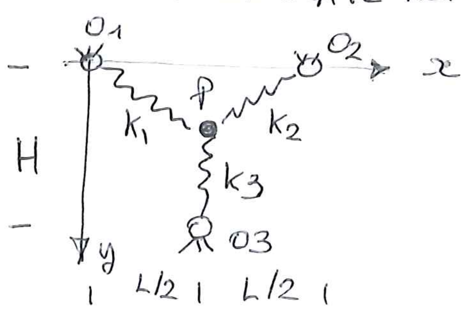
$\alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha = 90°$ $\qquad$ $\alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha = 90°$

LA [4] FORNISCE INVECE LA REAZIONE VINCOLARE: SE $\alpha = 0$, $X = p$; SE $\alpha = 90°$ $X = 0$.

SI OSSERVI CHE L'EQUILIBRIO SUSSISTE, $\forall$ VALORE DI α, SOLO SE LA [3] È SODDISFATTA: IN CASO CONTRARIO SI HA UN PROBLEMA DINAMICO E IL PUNTO MATERIALE NON RESTA IN CONDIZIONI DI QUIETE.

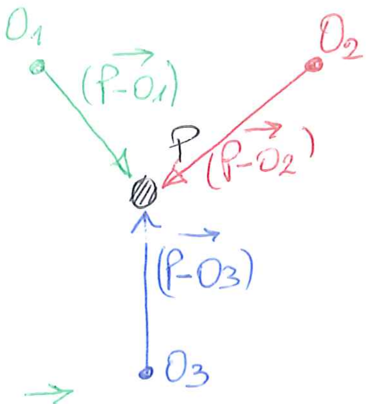
3) CASO LIBERO, OVVERO DI ASSENZA DI VINCOLI: OGNI SPOSTAMENTO È POSSIBILE: LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SONO TUTTE CONDIZIONI SUFFICIENTI A DETERMINARE LA SOLUZIONE EQUILIBRATA, OVVERO LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO.

SI CONSIDERI UN PUNTO MATERIALE IN UN PIANO ORIZZONTALE, SOGGETTO ALLA AZIONE DI TRE MOLLE ELASTICHE, LE CUI ESTREMITÀ FISSE SONO COLLOCATE NEI TRE PUNTI $O_1 = (0,0)$; $O_2 = (L,0)$; $O_3 = (L/2, H)$.



LE COSTANTI DELLE 3 MOLLE SONO DATE RISPETTIVAMENTE DA k_1, k_2, k_3.
SIANO $P = (x, y)$ LE COORDINATE DEL PUNTO MATERIALE P; IL PUNTO È SOGGETTO A

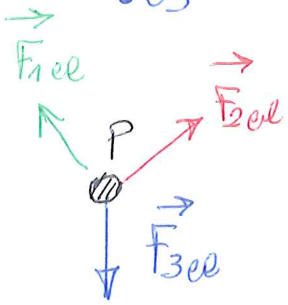
3 FORZE ELASTICHE DI RICHIAMO, $\vec{F}_{1el}, \vec{F}_{2el}, \vec{F}_{3el}$.



SI HA FACILMENTE

$$(\vec{P-O_1}) = (x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$(\vec{P-O_2}) = (x-L)\vec{i} + (y-0)\vec{j} = (x-L)\vec{i} + y\vec{j}$$
$$(\vec{P-O_3}) = \left(x-\frac{L}{2}\right)\vec{i} + (y-H)\vec{j} = \left(x-\frac{L}{2}\right)\vec{i} + (y-H)\vec{j}$$

LE FORZE DI RICHIAMO ELASTICO (ATTRATTIVE) VALGONO POI:



$$\vec{F}_{1el} = -k_1(\vec{P-O_1}) = -k_1x\vec{i} - k_1y\vec{j}$$
$$\vec{F}_{2el} = -k_2(\vec{P-O_2}) = -k_2(x-L)\vec{i} - k_2y\vec{j}$$
$$\vec{F}_{3el} = -k_3(\vec{P-O_3}) = -k_3\left(x-\frac{L}{2}\right)\vec{i} - k_3(y-H)\vec{j}$$

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È SEMPRE DATA DA:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1el} + \vec{F}_{2el} + \vec{F}_{3el} = \vec{0} \qquad [***]$$

E NE SEGUE:

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

D'ALTRA PARTE, CON LA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI SOPRA INDICATA SI TROVA:

$$-k_1x\vec{i} - k_1y\vec{j} - k_2(x-L)\vec{i} - k_2y\vec{j} - k_3\left(x-\frac{L}{2}\right)\vec{i} - k_3(y-H)\vec{j} = \vec{0}$$

OVVERO

$$\underbrace{\left[-k_1x - k_2(x-L) - k_3\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]}_{R_x}\vec{i} + \underbrace{\left[-k_1y - k_2y - k_3(y-H)\right]}_{R_y}\vec{j} = \vec{0}$$

NE SEGUE:

$$R_x = 0 \Rightarrow (k_1+k_2+k_3)x = k_2L + k_3\frac{L}{2} \Rightarrow x = \frac{2k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}\,\frac{L}{2} \qquad [5]$$

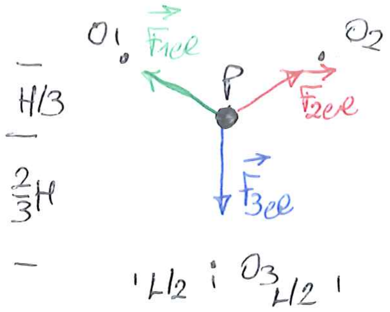
$$R_y = 0 \Rightarrow (k_1+k_2+k_3)y = k_3H \Rightarrow y = \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}H \qquad [6]$$

E LE [5], [6] IDENTIFICANO COMPLETAMENTE LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO DEL PUNTO P: $P = \left(\frac{2k_2+k_3}{k_1+k_2+k_3}\,\frac{L}{2},\ \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}H\right)$.

SE LE COSTANTI ELASTICHE DELLE 3 MOLLE SONO EGUALI, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ SI TROVA:

$$x = \frac{3k}{3k} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

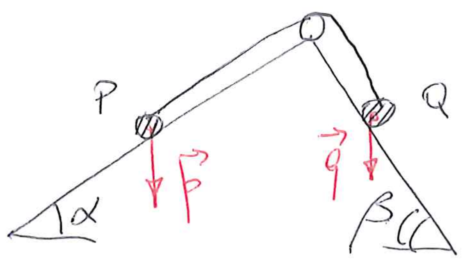
$$y = \frac{k}{3k} \cdot H = \frac{H}{3}$$



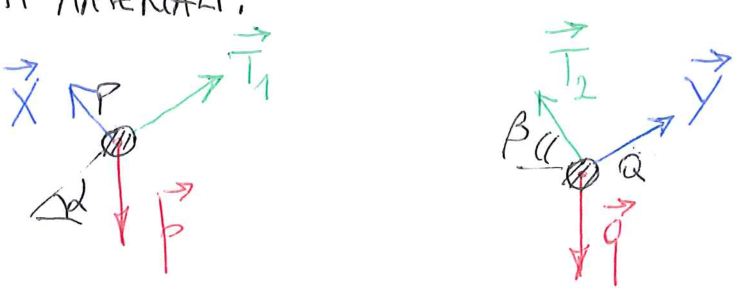
E LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO SAREBBE QUELLA SOPRA EVIDENZIATA.

NEL CASO DI PUNTI MATERIALI MECCANICAMENTE INTERAGENTI SI DEVE PROCEDERE A SCRIVERE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER CIASCUN PUNTO MATERIALE (RICONDOTTO AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO) E RISOLVENDO IL SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE CHE NE RISULTA SI ARRIVANO A DETERMINARE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA. IN GENERALE NON È POSSIBILE NÉ IMPORRE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA "MESCOLANDO" LE CONDIZIONI D'EQUILIBRIO DEI SINGOLI PUNTI MATERIALI, NÉ PERVENIRE A SCRIVERE DIRETTAMENTE DELLE EQUAZIONI "GLOBALI" PER L'INTERO SISTEMA.

A TITOLO DI ESEMPIO, SI CONSIDERINO 2 PUNTI MATERIALI, P E Q, RISPETTIVAMENTE DI PESO $\vec{p}$ E $\vec{q}$, COLLEGATI FRA LORO DA UNA FUNE E DISPOSTI SU DUE PIANI INCLINATI, CHE FORMANO CON L'ORIZZONTALE GLI ANGOLI α E β RISPETTIVAMENTE.
SI CHIEDE DI DETERMINARE IL MODULO DI $\vec{q}$, $q = |\vec{q}|$ CHE GARANTISCE L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA.



IL PRIMO PASSO CONSISTE NEL RICAVARE I DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO DEI 2 PUNTI MATERIALI:



PER EQUILIBRIO DEL P.M. P, DEVE RISULTARE:

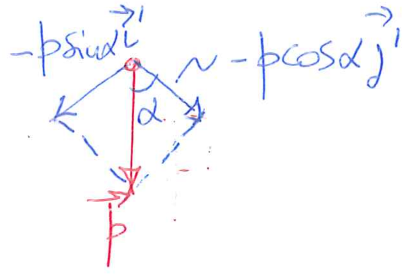
$$\vec{R}_{(P)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \vec{T}_1 + \vec{X} = \vec{0} \quad [7]$$

PER EQUILIBRIO DEL P.M. Q, DEVE INVECE ESSERE:

$$\vec{R}_{(Q)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{q} + \vec{T}_2 + \vec{Y} = \vec{0} \quad [8]$$

SI NOTI CHE $\vec{T}_1$ E $\vec{T}_2$ SONO VETTORI DIVERSI MA AVENTI LO STESSO MODULO (FORZA TRASMESSA DA FUNE)
A QUESTO PUNTO CONVIENE ESPRIMERE I VETTORI CHE COMPAIONO NELLA [7] PER COMPONENTI RISPETTO AGLI ASSI x' E y':

$$\vec{T}_1 = T\vec{i}' \qquad T = |\vec{T}|$$
$$\vec{X} = X\vec{j}' \qquad X = |\vec{X}|$$
$$\vec{p} = -p\sin\alpha\,\vec{i}' - p\cos\alpha\,\vec{j}' \qquad p = |\vec{p}|$$



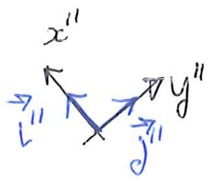
OTTENENDO COSÌ:

$$\vec{R}_{(P)} = \vec{0} \Rightarrow R_{x'}\vec{i}' + R_{y'}\vec{j}' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_{x'} = 0 \\ R_{y'} = 0 \end{cases}$$

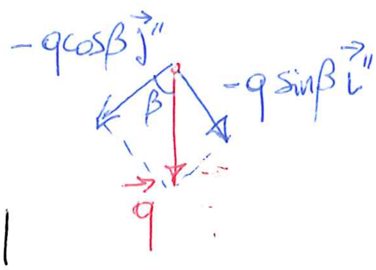
OVVERO

$$\underbrace{[-p\sin\alpha + T]}_{R_{x'}}\vec{i}' + \underbrace{[X - p\cos\alpha]}_{R_{y'}}\vec{j}' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_{x'} = -p\sin\alpha + T = 0 \\ R_{y'} = X - p\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad [9]$$

LA PRIMA DELLE [9] È EQUAZIONE PURA CHE FORNISCE $T = p\sin\alpha$; LA SECONDA DELLE [9] FORNISCE LA REAZIONE VINCOLARE, $X = p\cos\alpha$.
IN MODO SIMILE SI PROVVEDE A ESPRIMERE I VETTORI CHE COMPAIONO NELLA [8] PER COMPONENTI RISPETTO AGLI ASSI x'' E y'':



$$\vec{T}_2 = T\vec{i}'' \qquad T = |\vec{T}|$$
$$\vec{Y} = Y\vec{j}'' \qquad Y = |\vec{Y}|$$
$$\vec{q} = -q\sin\beta\,\vec{i}'' - q\cos\beta\,\vec{j}'' \qquad q = |\vec{q}|$$



COSÌ FACENDO SI OTTIENE:

$$\vec{R}_{(Q)} = \vec{0} \Rightarrow R_{x''}\vec{i}'' + R_{y''}\vec{j}'' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_{x''} = 0 \\ R_{y''} = 0 \end{cases}$$

OVVERO

$$[-q\sin\beta + T]\vec{i}'' + [-q\cos\beta + Y]\vec{j}'' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_{x''} = -q\sin\beta + T = 0 \\ R_{y''} = Y - q\cos\beta = 0 \end{cases} \quad [10]$$

LA PRIMA DELLE [10] È ANCORA UN'EQUAZIONE PURA CHE FORNISCE $T = q\sin\beta$;
LA SECONDA DELLE [10] FORNISCE INVECE LA REAZIONE VINCOLARE, $Y = q\cos\beta$

COMBINANDO ORA LE 2 EQUAZIONI PURE:

$$T = p \sin\alpha$$
$$T = q \sin\beta$$

DIVIENE POSSIBILE STABILIRE LA RELAZIONE CHE DEVE SUSSISTERE TRA $\vec{p}$ E $\vec{q}$ PER AVERE L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA:

$$p \sin\alpha = q \sin\beta$$

OVVERO $$q = p \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad [11]$$

VALIDA PER $\sin\beta \neq 0$.

SE PER ESEMPIO

$$\alpha = 45° \quad \text{SICCHE'} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\beta = 60° \quad \text{SICCHE'} \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \cos\beta = \frac{1}{2}$$

SI HA:

$$T = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad [9']$$

$$T = q \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Y = q \cdot \frac{1}{2} \qquad [10']$$

DUNQUE $$p \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = q \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

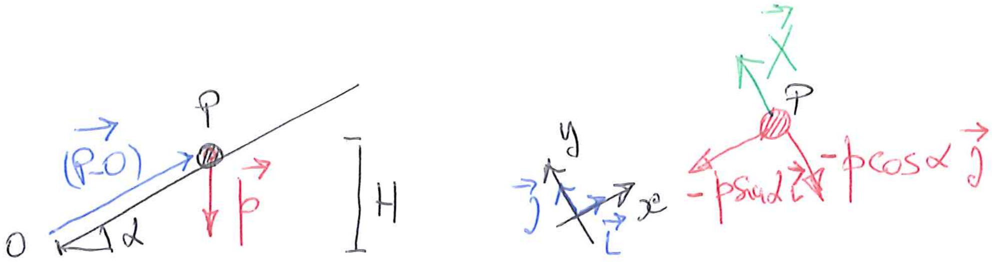
DA CUI SI OTTIENE

$$q = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = p \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} p.$$

IN QUESTO MODO, PROCEDENDO ORDINATAMENTE A SCRIVERE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI OGNI PUNTO MATERIALE SI PERVIENE, RISOLVENDO IL SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE RISULTANTI, A DETERMINARE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA COMPLESSIVO.

PER CONCLUDERE IL TRATTAMENTO DEL PUNTO MATERIALE SI VUOLE MOSTRARE CHE L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA $\vec{F} = m\vec{a}$ PERMETTE DI DETERMINARE IL MOTO CHE SI REALIZZA SOTTO ASSEGNATE FORZE ESTERNE.

ALLO SCOPO SI CONSIDERA IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE (GRAVE) SU UN PIANO INCLINATO DI UN ANGOLO α.



$$p = |\vec{p}| = mg$$

ACCELERAZIONE DI GRAVITA'

RISPETTO AL PROBLEMA IPOSTATICO DI EQUILIBRIO, QUI LA MANCANZA DELLA FORZA $\vec{F}$ FA SÌ CHE PER $\alpha \neq 0$ NON POSSA SUSSISTERE L'EQUILIBRIO. ADOTTANDO IL SISTEMA DI ASSI INDICATO, CON x MISURATO PARALLELAMENTE AL PIANO INCLINATO, SI HA CHE LA POSIZIONE DEL P.M. P È INDIVIDUATO DALLA ASCISSA $x(t)$:

$$\overrightarrow{(P(t)-O)} = x(t)\,\vec{i}$$

NE SEGUE $\quad \vec{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{P(t)-O}\right] = \dot{x}(t)\,\vec{i}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}(t)\right] = \ddot{x}(t)\,\vec{i}$$

LA COORDINATA y È INVECE SEMPRE NULLA $y(t) = 0 \quad \forall t$ PER RISPETTARE IL VINCOLO DEL PIANO INCLINATO

SI HA QUINDI $\quad m\vec{a} = m\ddot{x}(t)\,\vec{i}$

$$\vec{F} = \vec{p} + \vec{X} = -p\sin\alpha\,\vec{i} - p\cos\alpha\,\vec{j} + X\vec{j} =$$
$$= -p\sin\alpha\,\vec{i} + (X - p\cos\alpha)\,\vec{j}$$

E SI OSSERVA CHE $\vec{F}$ NON DIPENDE DAL TEMPO t.

PER LA EQUAZIONE DEL MOTO SI OTTIENE:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -p\sin\alpha\,\vec{i} + (X - p\cos\alpha)\,\vec{j} = m\ddot{x}(t)\,\vec{i} \qquad [12]$$

CHE SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA:

$$\left[m\ddot{x}(t) + \underbrace{p}_{mg}\sin\alpha\right]\vec{i} + \left[X - p\cos\alpha\right]\vec{j} = \vec{0} \qquad [12']$$

DALLA [12'] SEGUONO LE 2 RELAZIONI:

$$\cancel{m}\ddot{x}(t) + \cancel{m}g\sin\alpha = 0 \qquad [13]$$
$$X - p\cos\alpha = 0 \qquad [14]$$

LA [13] E' L'EQUAZIONE DEL MOTO, EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI:

$$\ddot{x}(t) = -g \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + \dot{x}_0 t + x_0$$

DOVE $\dot{x}_0$ E x_0 SONO 2 COSTANTI DI INTEGRAZIONE DA DETERMINARE CON LE CONDIZIONI INIZIALI DEL MOTO.

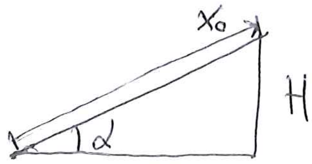
LA [14] E' INVECE UN'EQUAZIONE ALGEBRICA CHE PERMETTE DI CALCOLARE LA REAZIONE VINCOLARE:

$$X = \phi\cos\alpha.$$

IL MOTO DEL PUNTO MATERIALE E' DUNQUE RAPPRESENTATO COME SEGUE:

$$\begin{cases} x(t) = -g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + \dot{x}_0 t + x_0 \\ \dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + \dot{x}_0 \\ y(t) = 0 \quad \text{[EQUAZIONE DEL VINCOLO]}. \end{cases} \qquad [15]$$

i) SI INIZIA A CONSIDERARE IL CASO IN CUI IL P.M. SI TROVI IN CONDIZIONI DI QUIETE (VELOCITA' INIZIALE $\dot{x}_0 = 0$) A UN'ALTEZZA H SOPRA LA BASE DEL PIANO INCLINATO, DUNQUE $x_0 = \dfrac{H}{\sin\alpha}$



$$x_0 \sin\alpha = H$$

$$x_0 = \frac{H}{\sin\alpha}.$$

L'EQUAZIONE GOVERNANTE IL MOTO E' IN QUESTO CASO LA SEGUENTE:

$$\begin{cases} x(t) = -g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + \frac{H}{\sin\alpha} \\ \dot{x}(t) = -gt\sin\alpha \\ y(t) = 0. \end{cases} \qquad [16]$$

LE [16] PERMETTONO DI DETERMINARE COMPLETAMENTE IL MOTO DEL P.M.: PER ESEMPIO DI CALCOLARE IN QUALE ISTANTE t_0 QUESTO ARRIVA IN FONDO AL PIANO INCLINATO:

$$x(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -g\frac{t_0^2}{2}\sin\alpha + \frac{H}{\sin\alpha} = 0$$

$$t_0^2 = \frac{2H}{g}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad t_0 = \pm\sqrt{\frac{2H}{g}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{2H}{g}}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

NON HA SENSO FISICO ($t < 0$!)

DUNQUE $\quad t_0 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha}$

PER CONOSCERE LA VELOCITA' CON CUI GIUNGE IN FONDO, SI TRATTA DI CALCOLARE $\dot{x}(t=t_0)$; NE RISULTA:

$$\dot{x}(t=t_0) = -g t_0 \sin\alpha = -g \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin\alpha}} \cdot \cancel{\sin\alpha} = -\sqrt{2Hg}$$

DOVE IL SEGNO $-$ DENOTA IL FATTO CHE LA VELOCITA' È DIRETTA VERSO SINISTRA.

2) SI PASSA A CONSIDERARE IL CASO IN CUI IL P.M. SI TROVI ANCORA INIZIALMENTE ALLA QUOTA H, MA CHE SIA ANIMATO DA UNA VELOCITA' INIZIALE DIRETTA VERSO L'ALTO PARI A $\dot{x}_0 = +\sqrt{2Hg}$; PER QUANTO DETTO $x_0 = \frac{H}{\sin\alpha}$.

LE EQUAZIONI CHE GOVERNANO IL MOTO SONO IN QUESTO CASO:

$$\begin{cases} x(t) = -g\frac{t^2}{2}\sin\alpha + \sqrt{2Hg}\,t + \frac{H}{\sin\alpha} \\ \dot{x}(t) = -g t \sin\alpha + \sqrt{2Hg} \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad [17]$$

CI SI PUÒ CHIEDERE FINO A QUANDO IL P.M. RISALE LUNGO IL PIANO INCLINATO: FIN TANTO CHE $\dot{x}(t=t_1) = 0$.

RISOLVENDO SI TROVA FACILMENTE:

$$-g t_1 \sin\alpha + \sqrt{2Hg} = 0 \qquad t_1 = \frac{\sqrt{2Hg}}{g\sin\alpha} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

SE SI VUOLE CONOSCERE LA QUOTA DI MASSIMA RISALITA SI VALUTA

$$x(t=t_1) = -\cancel{g}\,\frac{2H}{\cancel{g}} \cdot \frac{1}{\sin^{\cancel{2}}\alpha} \cdot \frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{2}} + \sqrt{2H\cancel{g}} \cdot \sqrt{\frac{2H}{\cancel{g}}} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{H}{\sin\alpha}$$

$$x(t=t_1) = -\cancel{\frac{H}{\sin\alpha}} + \frac{2H}{\sin\alpha} + \cancel{\frac{H}{\sin\alpha}} = \frac{2H}{\sin\alpha}$$

CIOE' UNA QUOTA PARI A 2H.

SI PUÒ POI VEDERE QUANDO ARRIVA IN FONDO:

$$x(t=t_2) = 0$$

CIOÈ $-g\frac{t_2^2}{2}\sin\alpha + \sqrt{2Hg}\,t_2 + \frac{H}{\sin\alpha} = 0$

OVVERO $g\frac{t_2^2}{2}\sin\alpha - \sqrt{2Hg}\,t_2 - \frac{H}{\sin\alpha} = 0$

E SCARTANDO ANCORA LA RADICE $t_2 < 0$ SI TROVA:

$$t_2 = \frac{\sqrt{2\frac{H}{g}}\,(1+\sqrt{2})}{\sin\alpha}$$

INFINE LA VELOCITA' DI ARRIVO ALLA BASE È IN QUESTO CASO DATA DA

$$\dot{x}(t=t_2) = -\frac{g}{\sin\alpha}\sqrt{2\frac{H}{g}}\,(1+\sqrt{2})\sin\alpha + \sqrt{2Hg} = -\cancel{\sqrt{2gH}} - 2\sqrt{gH} + \cancel{\sqrt{2gH}}$$

$\dot{x}(t=t_2) = -2\sqrt{gH}$ DOVE IL SEGNO $-$ DENOTA ANCORA VELOCITA' DIRETTA A SIN