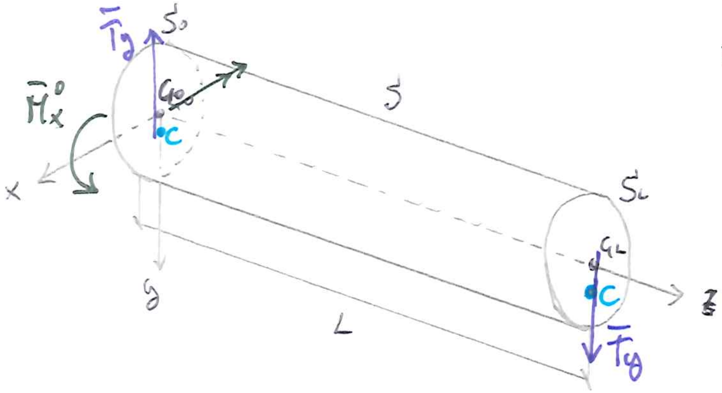
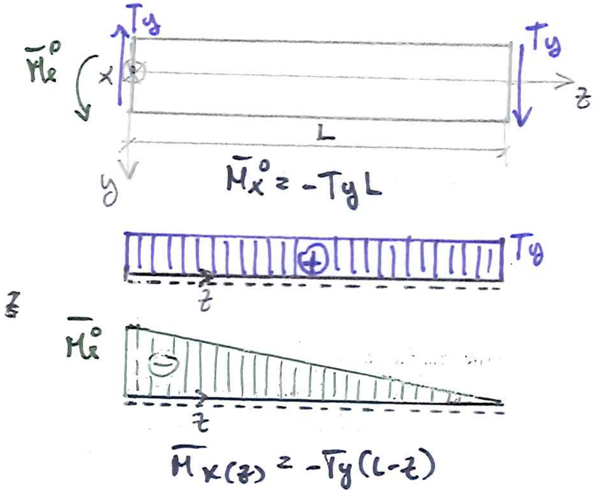
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5F - FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO -

SI CONSIDERI UNA TRAVE SOGGETTA SULLA BASE S_L A UNA FORZA $\bar{T}_y$ AGENTE PARALLELAMENTE ALL'ASSE DI INERZIA y E SULLA BASE S_0 A UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA $\boxed{\bar{T}_y}$ E A UN MOMENTO FLETTENTE $\boxed{\bar{M}_x^0 = -T_y L}$





IL MOMENTO FLETTENTE $\bar{M}_x^0$ APPLICATO SU S_0 E' NECESSARIO PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z

$$\boxed{\bar{M}_x^0 = -T_y L}$$

$\bar{M}_{x(z)}$ NON E' COSTANTE, MA VARIA LUNGO z:

$$\boxed{\bar{M}_x(z) = -T_y(L-z)}$$

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{J_x} y \rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{-T_y(L-z)}{J_x} y}$$

PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO SONO PRESENTI τ_z

DETTO $\boxed{C = \text{CENTRO DI TAGLIO}}$, T_y APPLICATO IN C NON PRODUCE EFFETTI TORCENTI

LE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE AL TAGLIO PRODUCONO LAVORO NULLO PER LE DEFORMAZIONI DOVUTE ALLA TORSIONE

N.B. APPLICANDO QUESTA CONDIZIONE SI PUO' RICAVARE C, CHE E' UNA CARATTERISTICA DELLA SEZIONE

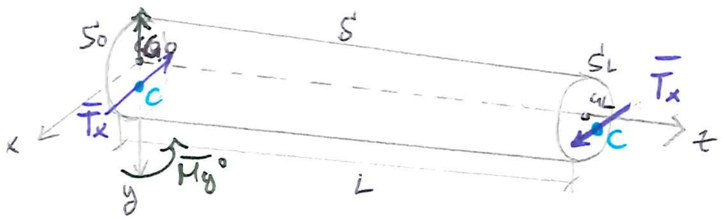
SE T_y NON FOSSE APPLICATO IN C SI AVREBBE ANCHE UN MOMENTO TORCENTE $\bar{M}_z$ → ANDREBBERO STUDIATI SEPARATAMENTE I DUE CASI E POI SOMMATI (SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI)

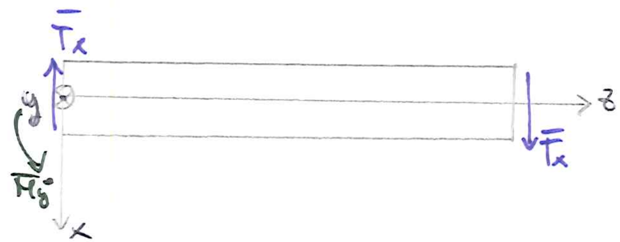
SE L'ASSE PRINCIPALE DI INERZIA y E' ANCHE ASSE DI SIMMETRIA ALLORA C GIACE SULL'ASSE y

SE ENTRAMBI GLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA x E y SONO ASSI DI SIMMETRIA ALLORA C COINCIDE CON IL BARICENTRO G

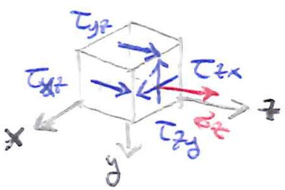
- IL SOLIDO COSÌ CARICATO SI DICE SOGGETTO A $\boxed{\text{FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO}}$ → $\underbrace{\text{TAGLIO COSTANTE}}_{\bar{T}_y}$ + $\underbrace{\text{FLESSIONE NON UNIFORME}}_{\bar{M}_x(z)}$

NB SE IL TAGLIO AGISCE IN DIREZIONE x LA SITUAZIONE È ANALOGA MA IL MOMENTO FLETTENTE AGISCE ATTORNO ALL'ASSE y

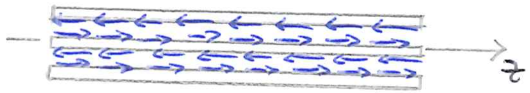




IPOTESI → $\sigma_x = 0,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ SU OGNI ELEMENTO CON GIACITURA PARALLELA ALL'ASSE z LE TENSIONI ORTOGONALI ALL'ASSE z SONO NULLE;

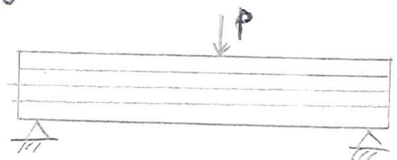


LE SINGOLE FIBRE, IDEALMENTE ELEMENTI FILIFORMI PARALLELI A z, SI SCAMBIANO SOLO TENSIONI TANGENTI ALLE FIBRE: τ_{xz} E τ_{yz}

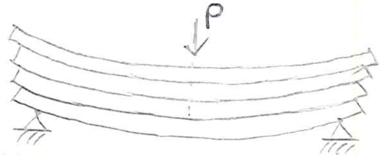


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

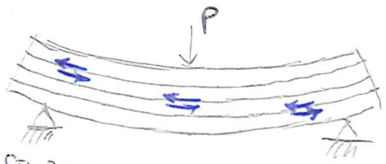
N.B.



LISTELLI DI LEGNO



AVVENGONO DEGLI SCORRIMENTI TRA I LISTELLI



SE SONO INCOLLATI O INCHIODATI I LISTELLI SI SCAMBIANO TRA LORO TENSIONI TANGENZIALI

EQUILIBRIO INTERNO

$$[\bullet]\ \begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}} + \cancel{\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \cancel{\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}} + \cancel{\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

τ_{zx} E τ_{zy} COSTANTI IN OGNI SEZIONE, NON DIPENDONO DA z $\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$\to \sigma_z = -\frac{T_y(L-z)}{J_x}\, y \to \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{J_x}\, y \to \boxed{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{T_y}{J_x}\, y}$$

EQUILIBRIO ESTERNO

SU S, $\vec{m} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$, $p_x = 0,\ p_y = 0,\ p_z = 0$

$$[\bullet\bullet]\ \begin{cases} \cancel{\sigma_x}\alpha_x + \cancel{\tau_{yx}}\alpha_y = 0 \\ \cancel{\tau_{xy}}\alpha_x + \cancel{\sigma_y}\alpha_y = 0 \\ \tau_{xz}\alpha_x + \tau_{yz}\alpha_y = 0 \end{cases}$$

$\to \vec{\tau}_z = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}$ DEVE ESSERE NORMALE A $\vec{m}$, $\vec{\tau}_z \times \vec{m} = 0$, LE τ_z SONO TANGENTI AL CONTORNO

SU S_0, $\vec{m} = \{0, 0, -1\}$

$$[\bullet\bullet]\ \begin{cases} \tau_{zx}(-1) = p_x \to -\tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy}(-1) = p_y \to -\tau_{zy} = p_y \\ \sigma_z(-1) = p_z \to \dfrac{T_y}{J_x}\, y = p_z \end{cases}$$

SU S_L, $\vec{m} = \{0, 0, 1\}$

$$[\bullet\bullet]\ \begin{cases} \tau_{zx}(1) = p_x \quad \tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy}(1) = p_y \quad \tau_{zy} = p_y \\ 0\,(1) = p_z = 0 \end{cases}$$

SU S_L $M_x = 0 \to \sigma_z = 0$

LA DISTRIBUZIONE DI TENSIONI SULLE BASI DEVE GARANTIRE CHE:

$$T_x = \int_A p_x\, dA = 0 \ ; \quad T_y = \int_A p_y\, dA = \overline{T}_y$$

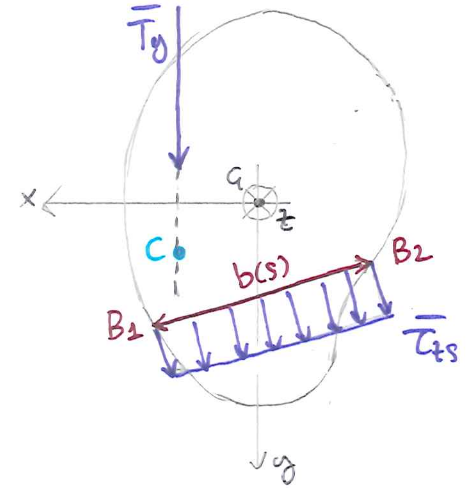
$$M_z = \int_A (-p_x y + p_y x)\, dA = \overline{T}_y\, x_T$$

CON x_T = COORDINATA DI C - CENTRO DI TAGLIO

LA SOLUZIONE ESATTA DEL PROBLEMA (LA DETERMINAZIONE RIGOROSA DELLE TENSIONI TANGENZIALI NEL SOLIDO DI SAINT VENANT SOGGETTO A FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO) È MOLTO COMPLICATA DA UN PUNTO DI VISTA MATEMATICO → SOLUZIONE APPROSSIMATA DI JOURAWSKI

CONSENTE DI RICAVARE UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA CON CONSIDERAZIONI SULL'EQUILIBRIO (N.B. SOLUZIONE EQUILIBRATA, NON COMPATIBILE)

SFRUTTANDO IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI È POSSIBILE RICAVARE IL VALORE MEDIO DELLE TENSIONI TANGENZIALI AGENTI SU UNA CORDA GENERICA DELLA SEZIONE TRASVERSALE, $\bar{\tau}_{zs}$, SCRIVENDO L'EQUILIBRIO IN DIREZIONE z (CALCOLANDO QUINDI LE $\bar{\tau}_{sz}$)

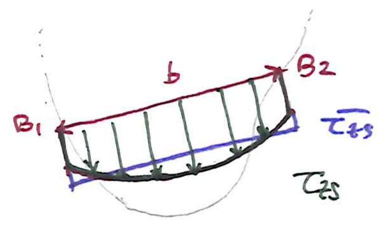


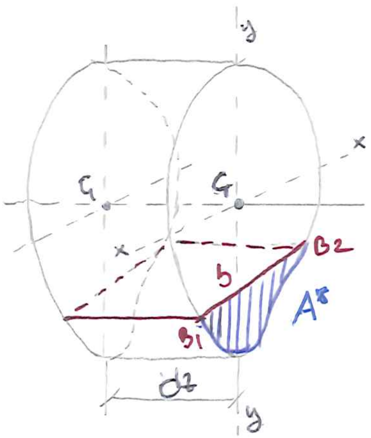
SU UNA GENERICA SEZIONE DI TRAVE SOGGETTA A FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO SI CONSIDERA UNA GENERICA CORDA $\boxed{B_1 B_2}$ DI LUNGHEZZA b

LA TENSIONE TANGENZIALE MEDIA AGENTE IN DIREZIONE NORMALE A TALE CORDA VALE:

$$\boxed{\bar{\tau}_{zs} = \frac{1}{b}\int_{B_1}^{B_2} \tau_{zs}\, ds}$$

N.B. C'È DIFFERENZA TRA LA TENSIONE TANGENZIALE τ_{zs} E IL SUO VALORE MEDIO $\bar{\tau}_{zs}$, MA PER SPESSORI PICCOLI, OVVERO PER b PICCOLE, LA DIFFERENZA È MOLTO PICCOLA





CONSIDERIAMO UN CONCIO INFINITESIMO DI TRAVE DI LUNGHEZZA dz E ISOLIAMO LA PARTE DI TALE CONCIO DELIMITATA INFERIORMENTE DAL PIANO PARALLELO A z COMPRENDENTE LA CORDA $\boxed{B_1 B_2}$

SU TALE PIANO, PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI, AGISCONO LE $\bar{\tau}_{sz}$

E $|\bar{\tau}_{sz}| = |\bar{\tau}_{zs}|$ ALLORA POSSIAMO CALCOLARE SCRIVENDO L'EQUILIBRIO IN DIREZIONE z

$$-\int_{A^*} \cancel{\sigma_z}\, dA^* - \bar{\tau}_{sz}\, b\, dz + \int_{A^*}\left(\cancel{\sigma_z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dA^* = 0$$

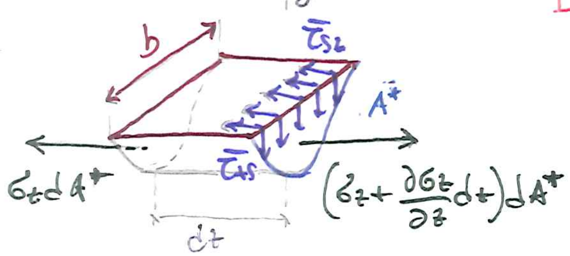
N.B. $\sigma_z = -\frac{T_y (L-z)}{J_x} y \rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = +\frac{T_y}{J_x} y$

$$-\bar{\tau}_{sz}\, b\, \cancel{dz} + \int_{A^*} \frac{T_y}{J_x} y\, \cancel{dz}\, dA^* = 0 \rightarrow \bar{\tau}_{sz}\, b = \frac{T_y}{J_x} \boxed{\int_{A^*} y\, dA^*}$$

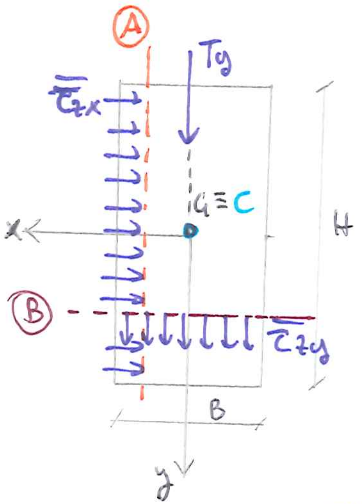
→ S_x^* MOMENTO STATICO RISPETTO A x DELL'AREA SOTTESA ALLA CORDA $B_1 B_2$

$$\boxed{\bar{\tau}_{sz} = \frac{T_y S_x^*}{J_x\, b}}$$

FORMULA DI JOURAWSKI



[N.B. $M_x(z)$ NON È COSTANTE, SPOSTANDOSI LUNGO dz VARIA ALLORA ANCHE LE σ_z VARIANO → $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$]

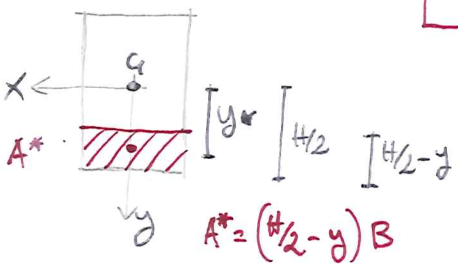


$\boxed{\text{SEZIONE RETTANGOLARE}}$

x e y assi di simmetria → $\boxed{G \equiv C}$

(A) corda parallela a y → $\boxed{S_x^* = 0}$ → $\tau_{zx} = 0$

(B) corda parallela a x $\boxed{S_x^* = A^* y^*}$



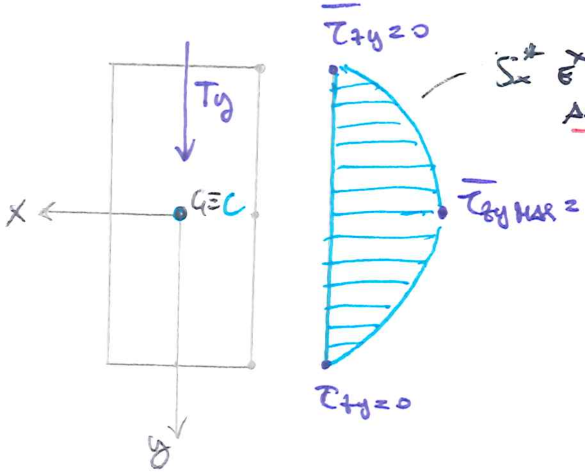
$A^* = (H/2 - y)\,B$

y^* = distanza tra il baricentro di A^* e l'asse x

$$y^* = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} - y\right) + y = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} - y + 2y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} + y\right)$$

$$S^* = A^* y^* = \left(\frac{H}{2} - y\right) B \, \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} + y\right) = \frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right)$$

$$\boxed{\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{J_x B}} = \frac{T_y}{J_x B}\,\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right) = \frac{T_y}{2J_x}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right)$$



S_x^* è funzione di y^2
andamento parabolico

$$\bar{\tau}_{zy\,max} = \frac{T_y}{2J_x}\,\frac{H^2}{4} = \frac{T_y H^2}{2\frac{BH^3}{12}4} = \boxed{\frac{3T_y}{2BH}}$$

$\bar{\tau}_{zy}$ varia spostandosi lungo y

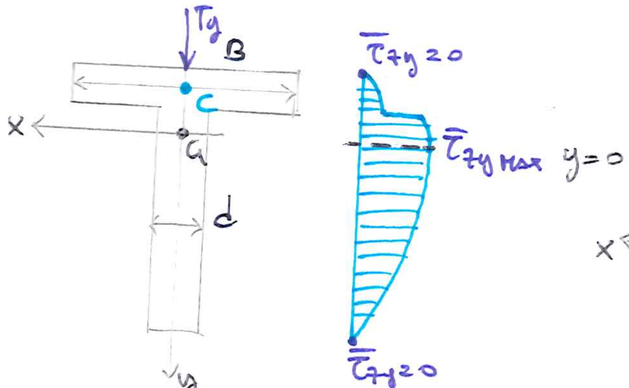
$y = -H/2 \quad \bar{\tau}_{zy} = 0$

$y = +H/2 \quad \tau_{zy} = 0$

Il massimo si ha per $y = 0$

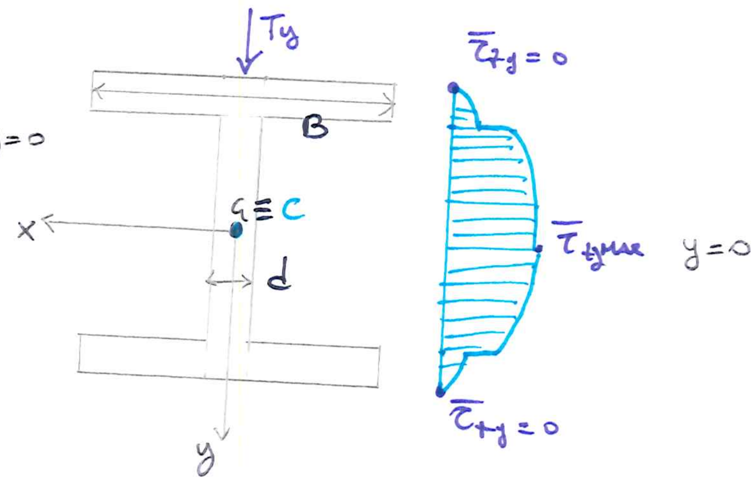
La soluzione per la sezione rettangolare si può generalizzare per $\boxed{\text{sezioni composte}}$ → profili

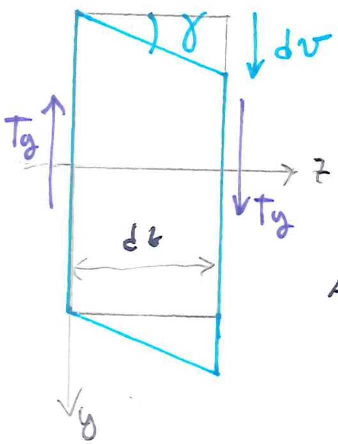
N.B.
La soluzione approssimata va particolarmente bene per sezioni sottili → poca differenza tra $\bar{\tau}_{zs}$ e τ_{zs}



Nel passaggio dall'ala all'anima c'è un salto

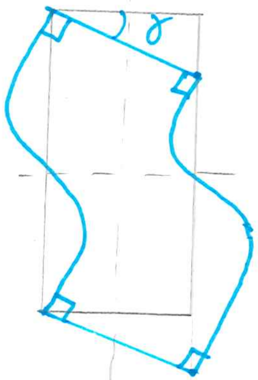
$B \gg d$





$\gamma = \frac{dv}{dz}$

τ_{zy} HANNO ANDAMENTO PARABOLICO!



PRENDIAMO UN CONCIO DI TRAVE DI LUNGHEZZA dz E GUARDIAMO COME SI DEFORMA

LE FACCE SUPERIORI E INFERIORI RUOTANO DI UN ANGOLO $\gamma = \frac{dv}{dz}$

LE FACCE LATERALI SI INGOBBANO

$\boxed{\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} T_y \cdot \gamma \cdot dz}$ $\qquad \mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\int_A \tau_{zy}\gamma_{zy}\, dA\, dz \qquad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \qquad \boxed{\mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}\int_A \tau_{zy}^2\, dA\, dz}$

$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{J_x b}$ PER SEZIONI RETTANGOLARI $\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{J_x B}$ $\qquad \mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}\int_A \left(\frac{T_y S_x^*}{J_x B}\right)^2 dA\, dz$ $\qquad$ E $\quad S_x^* = \frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right)$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}\int_A \left\{\frac{T_y\left[\frac{\cancel{B}}{2}\left(\frac{H^2}{4}-y^2\right)\right]}{J_x \cancel{B}}\right\}^2 dA\, dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{4J_x^2}\int_{-B/2}^{+B/2} dx \int_{-H/2}^{+H/2}\left(\frac{H^4}{16} - \frac{H^2y^2}{2} + y^4\right) dy\, dz$$

→ FUNZIONI PARI, ASSUMONO VALORI SIMMETRICI RISPETTO ALL'ASSE DELLE ORDINATE, ALLORA GLI INTEGRALI DIVENTANO $2\int_0^{B/2}$ E $2\int_0^{H/2}$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{4J_x^2}\, 2\int_0^{B/2} dx \cdot 2\int_0^{H/2}\left(\frac{H^4}{16} - \frac{H^2y^2}{2} + y^4\right) dy\, dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{4J_x^2}\, 2\left[x\right]_0^{B/2} \cdot 2\left[\frac{H^4}{16}y - \frac{H^2y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_0^{H/2} dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{4J_x^2}\,\cancel{2}\frac{B}{\cancel{2}}\cdot 2\left[\frac{H^5}{32} - \frac{H^5}{48} + \frac{H^5}{160}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{\cancel{4}_{2} J_x^2} B\cancel{2}\left[\frac{(15-10+3)H^5}{480}\right] dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{2J_x^2} B\left[\frac{\cancel{8}}{\cancel{480}_{60}} H^5\right] dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{2J_x^2} B\frac{1}{60}H^5 dz = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{J_x^2}\frac{BH^5}{120} dz$$

N.B. $J_x = \frac{BH^3}{12} \qquad J_x^2 = \frac{B^2H^6}{144}$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}T_y^2\frac{BH^5/120}{B^2H^6/144} dz = \frac{1}{2G}T_y^2\frac{6}{5BH} dz = \boxed{\frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{\boxed{5/6\,BH}} dz}$$

→ $A_T = \frac{5}{6}A$ FATTORE CORRETTIVO DI TAGLIO → $\boxed{\mathcal{L}_i = \frac{1}{2G}\frac{T_y^2}{A_T} dz}$

└ PER SEZIONE RETTANGOLARE $\chi = \frac{6}{5}$

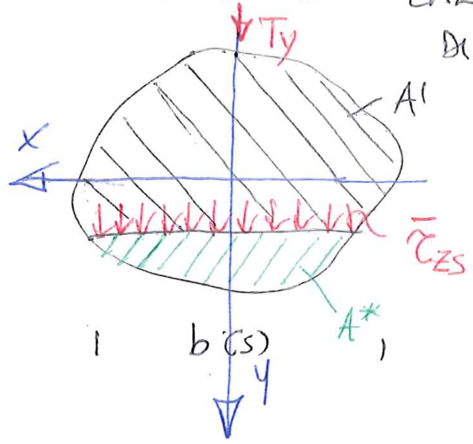
$\boxed{\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i}$ → $\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cancel{T_y}\gamma\cancel{dz} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}G}\frac{T_y^{\cancel{2}}}{A_T}\cancel{dz}$ → $\boxed{\gamma = \frac{T_y}{GA_T}}$

GA_T = RIGIDEZZA A TAGLIO (MODULO DI TAGLIO G PER AREA CORRETTA CON IL FATTORE DI TAGLIO χ)

$A_T = A/\chi$

NOTA 1. CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI CON LA TEORIA APPROSSIMATA DI JOURAVSKY.

SI È VISTO CHE IL CALCOLO DELLA TENSIONE TANGENZIALE MEDIA $\bar{\tau}_{zs}$ AGENTE IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A UNA CORDA DI LUNGHEZZA $b(s)$ È DATA DA:



$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{J_x\, b} \qquad [1]$$

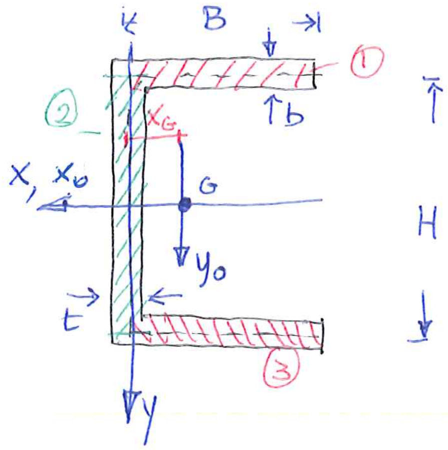
VALUTANDO IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE x DELL'AREA AL DI SOTTO DELLA CORDA, A^*.

SE INVECE SI FA USO DELL'AREA A' AL DI SOPRA DELLA CORDA, A', SI OSSERVA CHE $S_x^* + S_x' = S_x = 0$, POICHÉ L'ASSE x È BARICENTRICO. PERTANTO $S_x' = -S_x^*$: NE SEGUE CHE

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{-T_y S_x'}{J_x\, b} \qquad [1'].$$

□

ESEMPIO: CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN UNA SEZIONE A U, ANALIZZATA COME UNA SEZIONE DI SPESSORE SOTTILE.



SI ASSUME IL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y CON L'ASSE x COINCIDENTE CON L'ASSE DI SIMMETRIA DELLA SEZIONE E L'ASSE y PASSANTE PER LA LINEA MEDIA DELL'ANIMA.

SI HA: $A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = B \cdot b\ ;\quad A_2 = H \cdot t\ ;\quad A_3 = B \cdot b$

$A = 2Bb + Ht$

$G_1 = \left(-\frac{B}{2}, -\frac{H}{2}\right);\quad G_2 = (0,0);\quad G_3 = \left(-\frac{B}{2}, +\frac{H}{2}\right)$

SEGUE POI $S_{y1} = A_1 \cdot \left(-\frac{B}{2}\right);\quad S_{y2} = A_2 \cdot 0\ ;\quad S_{y3} = A_3 \cdot \left(-\frac{B}{2}\right)$

$S_y = 2\,B \cdot b \cdot \left(-\frac{B}{2}\right) = -B^2 b$ MENTRE, PER RAGIONI DI SIMMETRIA $S_x = 0$

IL BARICENTRO G È QUINDI INDIVIDUATO DA: $G = (x_G, y_G)$, DOVE

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{-B^2 b}{2Bb + Ht}\ ;\quad y_G = 0 \implies G = \left(-\frac{B^2 b}{2Bb + Ht}\right)$$

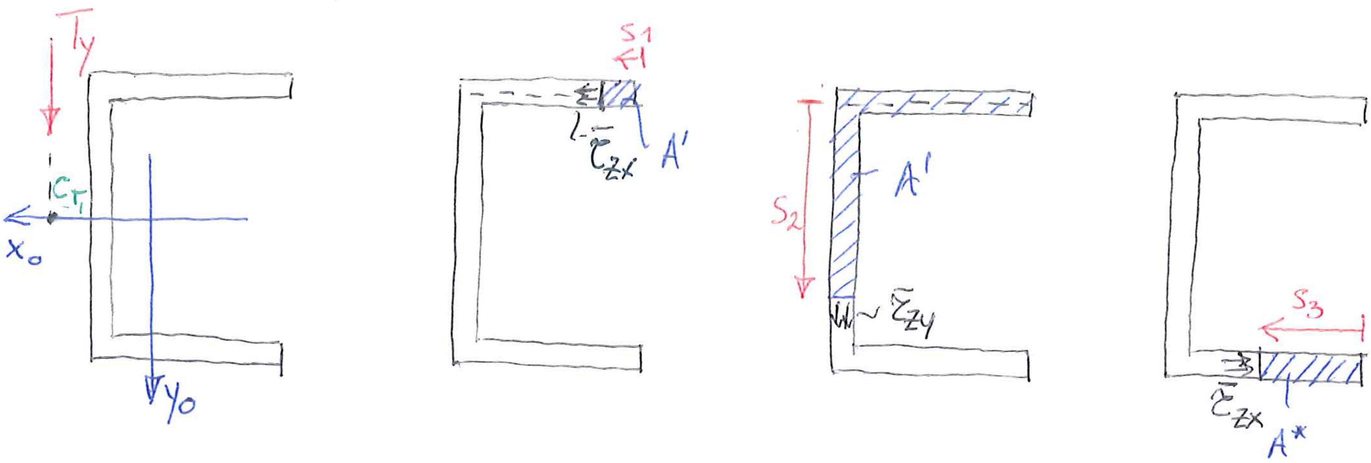
IL MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE x_0 (COINCIDENTE CON L'ASSE x) È DATO DA:

$$J_x = \frac{1}{12} tH^3 + 2\left[\frac{1}{12} Bb^3 + Bb \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2\right] \simeq \frac{1}{12} tH^3 + \frac{BbH^2}{2}$$

IN QUANTO IL CONTRIBUTO DEL MOMENTO D'INERZIA "PROPRIO" DI CIASCUNA ALA, $\frac{1}{12} Bb^3$

È TRASCURABILE.

SI PASSA A CONSIDERARE IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TAGLIO T_y APPLICATO NEL CENTRO DI TAGLIO, C_T



RISULTA

$$\bar{\tau}_{zx}^{(1)} = -\frac{T_y S_x'^{(1)}}{J_x b} \qquad \text{CON} \quad S_x'^{(1)} = +s_1 b \cdot \left(-\frac{H}{2}\right) = -\frac{s_1 b H}{2}$$

PERTANTO

$$\bar{\tau}_{zx}^{(1)} = \frac{T_y s_1 H}{2 J_x}$$, VARIABILE LINEARMENTE FRA 0 $(s_1 = 0)$ E $\frac{T_y B H}{2 J_x}$ $(s_1 = B)$

$$\bar{\tau}_{zy}^{(2)} = -\frac{T_y S_x'^{(2)}}{J_x t} \qquad \text{CON} \quad S_x'^{(2)} = Bb\left(-\frac{H}{2}\right) + s_2 \cdot t \cdot \left(-\frac{H}{2} + \frac{s_2}{2}\right) = -Bb\frac{H}{2} - s_2 t \left(\frac{H - s_2}{2}\right)$$

PERTANTO

$$\bar{\tau}_{zy}^{(2)} = \frac{T_y \left(Bb\frac{H}{2}\right) + s_2 t \left(\frac{H - s_2}{2}\right)}{J_x t} = \frac{T_y\, BbH + s_2 t (H - s_2)}{2 J_x t}$$

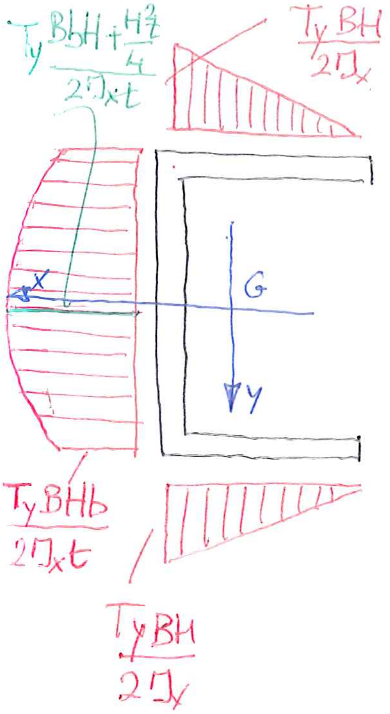
VARIABILE QUADRATICAMENTE FRA $\frac{T_y BbH}{2 J_x t}$ $(s_2 = 0$ O $s_2 = H)$ E IL VALORE MASSIMO $\frac{T_y \left(BbH + \frac{H^2}{4} t\right)}{2 J_x t}$ $\left(s_2 = \frac{H}{2}\right)$.

$$\bar{\tau}_{zx}^{(3)} = +\frac{T_y S_x^{*(3)}}{J_x b} \qquad \text{CON} \quad S_x^{*(3)} = s_3 b \cdot \left(+\frac{H}{2}\right) = +\frac{s_3 b H}{2}$$

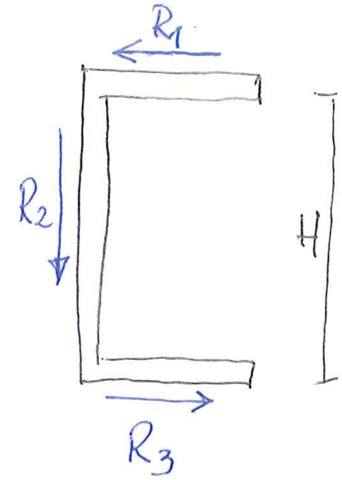
DUNQUE

$$\bar{\tau}_{zx}^{(3)} = \frac{T_y s_3 H}{2 J_x}$$, VARIABILE LINEARMENTE FRA 0 $(s_3 = 0)$ E $\frac{T_y B H}{2 J_x}$ $(s_3 = B)$

L'ANDAMENTO DELLE TENSIONI TANGENZIALI "MEDIE" È RIPORTATO IN FIGURA. QUESTE DANNO LUOGO ALLE TRE RISULTANTI INDICATE, OTTENUTE PER INTEGRAZIONE



=



$$R_1 = \int_0^B \bar{\tau}_{zx}^{(1)}\, b\, ds_1 = \int_0^B \frac{T_y s_1 H}{2J_x}\, b\, ds_1$$

$$R_1 = \frac{3T_y B^2 b}{H(6Bb + tH)}$$

$$R_2 = \int_0^H \bar{\tau}_{zy}^{(2)}\, t\, ds_2 = \int_0^H \frac{T_y BbH + s_2 t(H - s_2)}{2J_x t}\, ds_2$$

$$R_2 = T_y$$

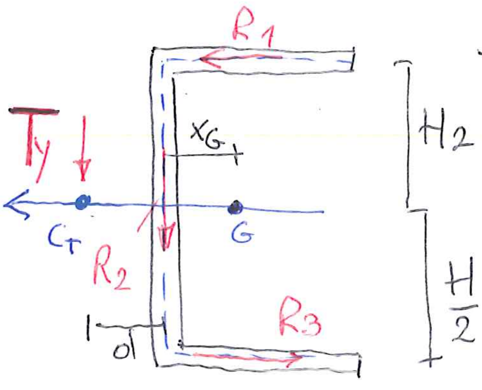
$$R_3 = \int_0^B \bar{\tau}_{zx}^{(3)}\, b\, ds_3 = \int_0^B \frac{T_y s_3 H}{2J_x}\, b\, ds_3$$

$$R_3 = \frac{3T_y B^2 b}{H(6Bb + tH)}$$

APPARE EVIDENTE CHE LE RISULTANTI R_1 E R_3 SI BILANCIANO PRODUCENDO UNA FORZA ORIZZONTALE NETTA DI VALORE NULLO.

TUTTAVIA R_1 E R_3 DANNO LUOGO A UNA COPPIA DI MOMENTO RISPETTO A G $M_z = R_1 \cdot H$; PER QUANTO RIGUARDA R_2 ESSO È EQUIVALENTE A T_y.

T_y NON PUÒ QUINDI ESSERE APPLICATO NEL BARICENTRO G PERCHÉ SI AVREBBE ANCHE UN MOMENTO TORCENTE M_z; PER ANNULLARE QUESTO EFFETTO T_y DEVE ESSERE APPLICATO NEL PUNTO C_T (DAL LATO OPPOSTO DEL BARICENTRO G RISPETTO AL PROFILO). PER EQUIVALENZA STATICA DEVE ESSERE:



$$\circlearrowleft M_{z(C_T)} = R_1 \cdot \frac{H}{2} + R_3 \cdot \frac{H}{2} - R_2 \cdot d = 0$$

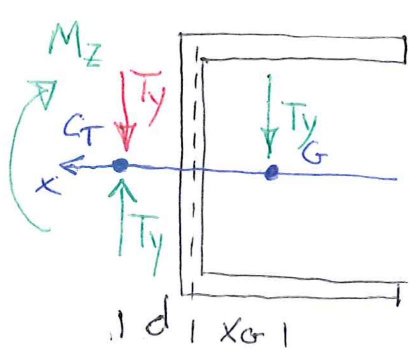
NE SEGUE

$$R_1 \cdot H - R_2\, d = 0$$

$$d = \frac{R_1 \cdot H}{R_2} = \frac{\dfrac{3\cancel{T_y} B^2 b}{H(6Bb + tH)}}{\cancel{T_y}} = \frac{3B^2 b}{6Bb + tH}$$

SE T_y È INVECE RIPORTATO NEL BARICENTRO G, SI HA DA AGGIUNGERE UN MOMENTO (TORCENTE) DI TRASPORTO

$$M_z = -T_y\,(d + x_G)$$



LE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TORSIONE SI CALCOLANO UTILIZZANDO LA TEORIA DELLA TORSIONE DI SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO.

NEL CASO IN ESAME IL FATTORE DI RIGIDITA' TORSIONALE SI DETERMINA COME:

$$J_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{3} a_i b_i^3 = 2 \cdot \frac{1}{3} B b^3 + \frac{1}{3} H t^3$$

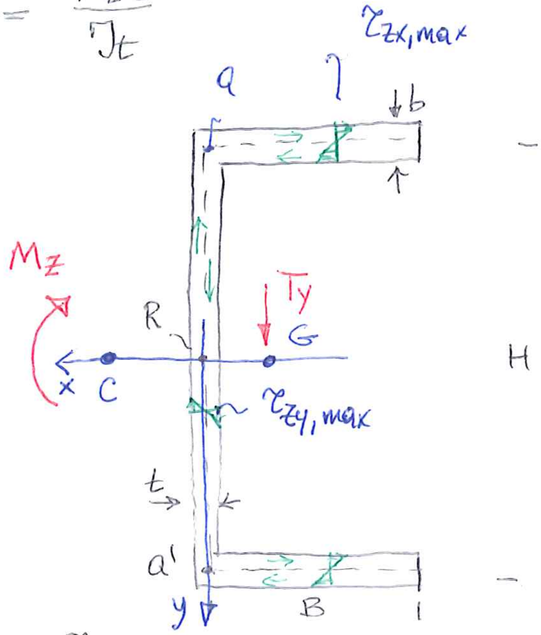
I VALORI MASSIMI DELLA TENSIONE TANGENZIALE SI RAGGIUNGONO NEL PUNTO MEDIO DI OGNI TRATTO, IN CORRISPONDENZA DELLA PARETE DELLA SEZIONE.

IN PARTICOLARE SI HA SULLE ALI:

$$\tau_{zx,max} = \frac{M_z b}{J_t}$$

E IN CORRISPONDENZA DELL'ASSE NEUTRO NELL'ANIMA:

$$\tau_{zy,max} = \frac{M_z t}{J_t}$$



SE SI CONSIDERA UN PROFILO U200 SERIE NORMALE SOTTOPOSTO A $T_y = 100$ kN $= 100000$ N SI HA:

$H = 200$ mm; $B = 75$ mm; $t = 8.5$ mm; $b = 11.5$ mm; $x_G = -18.887$ mm;
$J_x = 22916700$ mm^4.

LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA DA TAGLIO SULL'ALA, RAGGIUNTA IN CORRISPONDENZA DEI PUNTI Q E Q' VALE:

$\tau_{zx}(Q) = 32.727$ MPa (N/mm^2)

MENTRE LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA DA TAGLIO SULL'ANIMA, RAGGIUNTA NEL PUNTO R VALE:

$\tau_{zy}(R) = 66.096$ MPa (N/mm^2)

E LA TENSIONE TANGENZIALE MINIMA, RAGGIUNTA NEI PUNTI Q E Q' VALE

$\tau_{zy}(Q) = 44.278$ MPa (N/mm^2).

LE RISULTANTI R_1 E R_3 (EGUALI E OPPOSTE) VALGONO $R_1 = R_3 = 14113.6$ N, MENTRE LA RISULTANTE $R_2 = T_y$ VALE OVVIAMENTE $R_2 = 100000$ N.

LA DISTANZA $d = \overline{CG} = 47.1141$ mm.

IL MOMENTO TORCENTE M_z CHE NASCE QUANDO LA FORZA T_y VIENE APPLICATA NEL BARICENTRO G VALE $M_z = T_y \cdot d = 4711410$ N·mm.

SI HA POI $J_t = 116985\ mm^4$

LE TENSIONI TANGENZIALI MASSIME DOVUTE A TORSIONE SONO NELLE ALI:

$$\tau_{zx,max} = 463{,}145\ MPa$$

E NELL'ANIMA

$$\tau_{zy,max} = 342{,}325\ MPa$$

SE QUINDI SI SOMMANO LE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TAGLIO E A TORSIONE SI TROVA, IN CORRISPONDENZA DEL BORDO <u>INTERNO</u> DEL PROFILO

NOTA: IN REALTA' $\tau_{zx,max}$ SI REALIZZA A META' DELL'ALA.

$$MAX\ \tau_{zx,tot} = \tau_{zx}(Q) + \tau_{zx,max} = 32{,}727 + 463{,}145\ MPa = 495{,}873\ MPa$$

$$MAX\ \tau_{zy,tot} = \tau_{zy}(R) + \tau_{zy,max} = 66{,}096 + 342{,}325\ MPa = 408{,}421\ MPa$$

SI OSSERVA CHE IL CONTRIBUTO DOVUTO A TORSIONE E' DECISAMENTE PREVALENTE:

$$\frac{\tau_{zx,max}}{MAX\ \tau_{zx,tot}} = \frac{463{,}145}{495{,}873} \simeq 93{,}40\ \%$$

$$\frac{\tau_{zy,max}}{MAX\ \tau_{zy,tot}} = \frac{342{,}325}{408{,}421} \simeq 83{,}82\ \%$$

RESTA DA VALUTARE IL FATTORE CORRETTIVO A TAGLIO, χ_y.

EGUAGLIANDO IL LAVORO ESTERNO APPLICATO A UN CONCIO DI TRAVE DI LUNGHEZZA dz E IL CORRISPONDENTE LAVORO INTERNO SI HA:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} T_y \gamma \cancel{dz} = \cancel{\tfrac{1}{2}} \int_A \tau_{zs}\gamma_{zs}\, dA\, \cancel{dz}$$

$$MA\ \gamma = \frac{T_y}{GA_T} = \frac{T_y}{GA}\chi_y \qquad MENTRE\ \gamma_{zs} = \frac{\tau_{zs}}{G} \qquad SICCHE':$$

$$T_y \cdot \frac{T_y}{GA}\chi_y = \int_A \frac{\tau_{zs}^2}{G} dA$$

$$TUTTAVIA\ \tau_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{J_x b(s)} \qquad PERTANTO \qquad \int_A \frac{\tau_{zs}^2}{G} dA = \frac{1}{G}\int_A \left(\frac{T_y S_x^*}{J_x b(s)}\right)^2 \underbrace{b(s)ds}_{dA}$$

DUNQUE

$$\frac{\cancel{T_y^2}}{\cancel{G}}\frac{\chi_y}{A} = \frac{1}{\cancel{G}}\frac{\cancel{T_y^2}}{J_x^2}\int_A \frac{S_x^{*2}}{b(s)^{\cancel{2}}}\cancel{b(s)}ds$$

NE SEGUE

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2}\int \frac{S_x^{*2}}{b(s)} ds$$

NEL CASO IN ESAME, ESSENDO $(S_x')^2 = (S_x^*)^2$, SI HA:

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2}\left[2\cdot\int_0^B \frac{(S_x'^{①})^2}{b} ds_1 + \int_0^H \frac{(S_x'^{②})^2}{t} ds_2\right]$$

SVOLGENDO I CALCOLI SI OTTIENE:

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left[\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right]^2}\left[2\int_0^B \frac{s_1^2 b^2 H^2}{4b}\,ds_1 + \int_0^H \frac{\left(-Bb\frac{H}{2}-s_2 t\frac{(H-s_2)}{2}\right)^2}{t}\,ds_2\right]$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left[\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right]^2}\left\{2\,\frac{b^2H^2}{4b}\left[\frac{s_1^3}{3}\right]_0^B + \int_0^H \frac{\frac{B^2b^2H^2}{4}+\frac{BbHs_2t(H-s_2)}{2}+s_2^2t^2\frac{H^2-2Hs_2+s_2^2}{4}}{t}\,ds_2\right\}$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left(\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{bH^2}{2}\frac{B^3}{3}+\left[\frac{B^2b^2H^2s_2}{4t}\right]_0^H+\left[\frac{BbHs_2^2}{4}-\frac{BbHs_2^3}{6}\right]_0^H+\left[\frac{s_2^3H^2t}{12}-\frac{s_2^4tH}{8}+\frac{s_2^5t}{20}\right]_0^H\right\}$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left(\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{bH^2B^3}{6}+\frac{B^2b^2H^3}{4t}+\frac{BbH^4}{4}-\frac{BbH^4}{6}+\frac{H^5t}{12}-\frac{H^5t}{8}+\frac{H^5t}{20}\right\}$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left(\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{bH^2B^3}{6}+\frac{B^2b^2H^3}{4t}+\frac{(3-2)BbH^4}{12}+\frac{10-15+6}{120}H^5t\right\}$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left(\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right)^2}\left\{bBH^2\left(\frac{B^2}{6}+\frac{BbH/t}{4}+\frac{H^2}{12}\right)+\frac{H^5t}{120}\right\}$$

$$\chi_y = \frac{2Bb+Ht}{\left(\frac{1}{12}tH^3+\frac{BbH^2}{2}\right)^2}\left\{\frac{bBH^2}{12}\left(2B^2+3\frac{BbH}{t}+H^2\right)+\frac{H^5t}{120}\right\}$$

E A CONTI FATTI SI OTTIENE

$$\chi_y = \frac{6(2Bb+tH)\left[30b^2B^2H+10bBt(2B^2+H^2)+H^3t^2\right]}{5tH^2(6bB+Ht)^2}$$

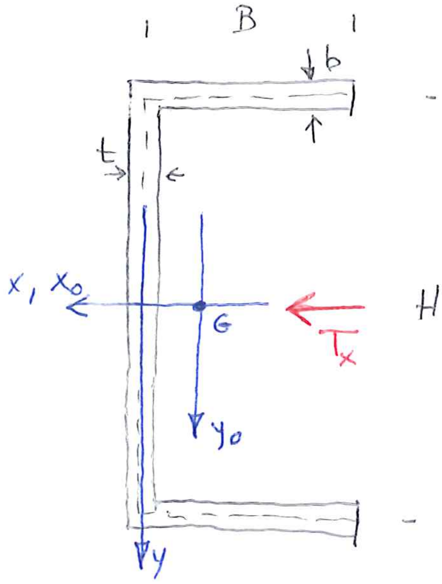
NEL CASO PRESENTE, SOSTITUENDO I VALORI NUMERICI SI TROVA

$$\chi_y = 2{,}25$$

PERTANTO PER LA SEZIONE CONSIDERATA SOGGETTA ALLA FORZA TAGLIANTE T_y SI OTTIENE

$$A_T = \frac{A}{\chi_y} = 0.444\,A = 1522.03\ mm^2 \qquad (A = 3425\ mm^2).$$

SE LA STESSA SEZIONE VIENE ORA SOTTOPOSTO A UNA FORZA DI TAGLIO T_x APPLICATA SECONDO LA DIREZIONE DELL'ASSE x, COINCIDENTE CON L'ASSE BARICENTRICO x_0, CHE È ASSE DI SIMMETRIA PER LA SEZIONE NON SI HANNO EFFETTI TORCENTI.



L'ESPRESSIONE DELLE TENSIONI TANGENZIALI, NELL'AMBITO DELLA TRATTAZIONE APPROSSIMATA DI JOURAVSKI È DATA DA:

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_x S_y^*}{J_{y_0}\, b(s)}$$

ALLO SCOPO DI DETERMINARE LE TENSIONI TANGENZIALI SI OSSERVA CHE

$$J_y = 2 \cdot \frac{bB^3}{3} + \frac{1}{12} H \cdot t^3 \simeq \frac{2}{3} bB^3$$

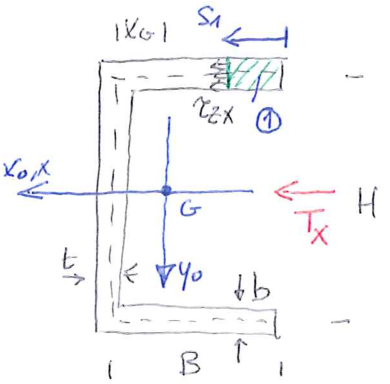
TRASCURANDO IL CONTRIBUTO DELL'ANIMA, ESSENDO $t \ll H$.

SI HA POI $J_{y_0} = J_y - A x_G^2 = \frac{2}{3} bB^3 - (2bB + Ht)\left(-\frac{B^2 b}{2Bb+Ht}\right)^2$

OVVERO

$$J_{y_0} = \frac{2}{3} bB^3 - \frac{(B^2 b)^2}{2Bb+Ht} = \frac{2bB^3(2Bb+Ht) - 3B^4b^2}{6Bb+3Ht} = \frac{4B^4b^2 + 2B^3bHt - 3B^4b^2}{6Bb+3Ht}$$

$$J_{y_0} = \frac{B^4b^2 + 2B^3bHt}{6Bb+3Ht} = \frac{B^3b\,(Bb+2Ht)}{6Bb+3Ht}$$



SI HA POI: $S_{y_0}^{'①} = -s_1 \cdot b \cdot \left(B - x_G - \frac{s_1}{2}\right) = S_{y_0}^{'①} = -s_1 b \left(B - \frac{B^2 b}{2Bb+Ht} - \frac{s_1}{2}\right)$

$$\bar{\tau}_{zx} = -\frac{T_x S_{y_0}^{'①}}{J_{y_0} b}$$

VARIABILE QUADRATICAMENTE FRA 0 $(s_1 = 0)$ E IL VALORE

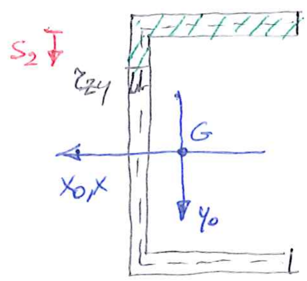
$$\bar{\tau}_{zx}\Big|_{s_1=B} = \frac{3T_x \cdot Ht}{2bB(bB+2Ht)},$$ RAGGIUNGENDO UN VALORE MASSIMO

IN CORRISPONDENZA DELL'ASSE BARICENTRICO,

$$\bar{\tau}_{zx\,max} = \bar{\tau}_{zx}\Big|_{s_1 = B - x_G} = \frac{3(bB+Ht)^2 T_x}{2bB(2bB+Ht)(bB+2Ht)}$$

NEL TRATTO VERTICALE È INVECE:

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{-T_x S_{y_0}^{'②}}{J_{y_0} t}$$ DOVE $S_{y_0}^{'②} = -\frac{bB^2Ht}{4Bb+2Ht} + s_2 t x_G$



OVVERO $S_{y_0}^{'②} = \frac{-bB^2[H - 2s_2]t}{4bB+2Ht}$

SI OSSERVI CHE $S_{y_0}^{'②}\Big|_{s_2=0} = -\frac{bB^2Ht}{4bB+2Ht}$; $S_{y_0}^{'②}\Big|_{s_2=\frac{H}{2}} = 0$

CONSEGUENTEMENTE $\bar{\tau}_{zy}$ VARIA LINEARMENTE FRA I VALORI $\frac{H(6bB+3Ht)T_x}{B(bB+2Ht)(4bB+2Ht)}$ $(s_2=0)$ E 0 $\left(s_2 = \frac{H}{2}\right)$.

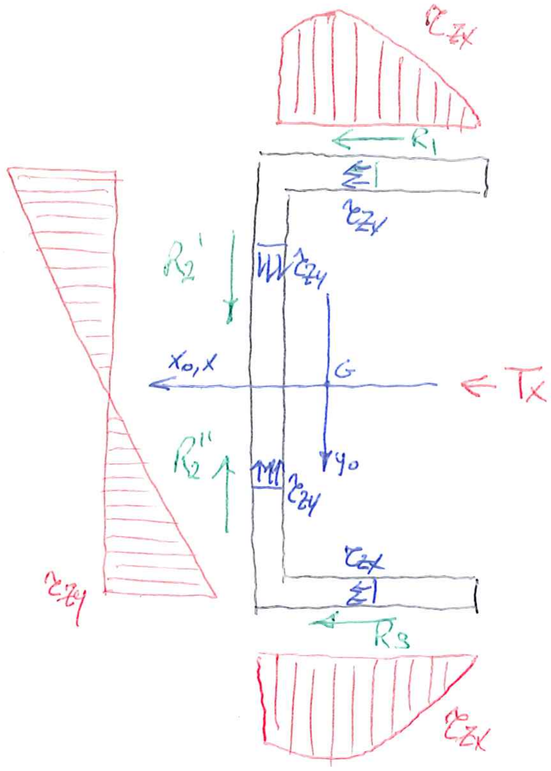
LE RISULTANTI DI $\bar{\tau}_{zx}$ SULL'ALA SUPERIORE VALE $R_1 = \int_0^B \bar{\tau}_{zx} \cdot b\, ds_1 = \frac{T_x}{2}$; ANALOGO RISULTATO SI OTTIENE PER L'ALA INFERIORE: $R_3 = R_1$; LA RISULTANTE DI $\bar{\tau}_{zy}$ SULL'ANIMA È INVECE $R_2 = \int_0^H \bar{\tau}_{zy} \cdot t\, ds_2 = 0$; ESSA È COMPOSTA DA 2 CONTRIBUTI R_2' E R_2'' EGUALI E OPPOSTI CHE SI COMPENSANO: $R_2' = \int_0^{H/2} \bar{\tau}_{zy}\, t\, ds_2 = \frac{3H^2 t T_x}{8B(bB+2Ht)}$

SOSTITUENDO I PRECEDENTI VALORI NUMERICI, SI HA, PER $T_x = 100$ KN $= 100000$ N

$J_y = 3234380\ mm^4$; $J_{y_0} = 2012630\ mm^4$

$\bar{\tau}_{zx}\Big|_{s_1=B} = 69,361$ MPa ; $\bar{\tau}_{zx}\Big|_{s_1=B-x_G} = 78,223$ MPa

$\bar{\tau}_{zy}\Big|_{s_2=0} = 93,841$ MPa ; $R_1 = 50000$ N ; $R_2' = 39883$ N.



LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI E DELLE RISULTANTI E' RIPORTATA IN FIGURA.
IL FATTORE DI TAGLIO VALE IN QUESTO CASO $\chi_x = \frac{A}{J_{y_0}^2}\left[2\cdot\int_0^B \frac{(S_y'^{(1)})^2}{b}\,ds_1 + \int_0^H \frac{(S_y'^{(2)})^2}{t}\,ds_2\right]$ E A CONTI FATTI RISULTA: $\chi_x = 3,996$.

Esempio 6.27 Centro di taglio di una semicorona circolare sottile
Si consideri la sezione riportata in Figura 6.83 soggetta a un taglio T_y con retta d'azione passante per il centro di taglio; essa rappresenta la metà della sezione tubolare esaminata nell'Esempio 6.24. In questo caso si ha:

$$A = \pi R b, \quad I_x = \frac{\pi b R^3}{2}, \quad \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y R^2}{I_x} \sin\alpha = \frac{2T_y}{\pi R b} \sin\alpha, \quad \bar{\tau}_{\max} = \bar{\tau}_{zs}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2T_y}{\pi R b}.$$

La risultante delle tensioni tangenziali sulla sezione risulta:

$$|R| = R\int_0^\pi \tau_{zs}(\alpha)\, b \sin\alpha \; \mathrm{d}\alpha = T_y.$$

Il momento risultante attorno al polo O della distribuzione delle tensioni tangenziali vale

$$M_z(\mathrm{O}) = \int_0^\pi \tau_{zs}(\alpha) b R^2 \; \mathrm{d}\alpha = 4\frac{R T_y}{\pi}.$$

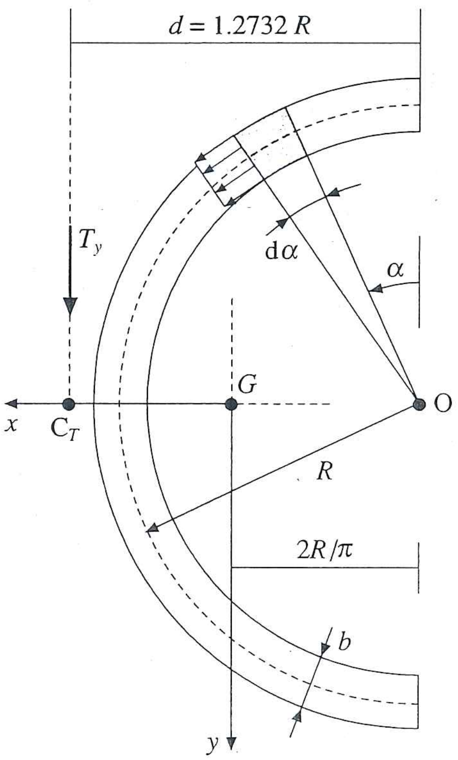


Figura 6.83 Centro di taglio della sezione metà di una corona circolare.

Il centro di taglio C_T della sezione giace sull'asse x, in quanto asse di simmetria, e la sua distanza x_T dal punto O si calcola scrivendo l'equilibrio alla rotazione attorno a esso; risulta:

$$d = \frac{M_z(\mathrm{O})}{T_y} = 4\frac{R}{\pi} = 1.2732\, R.$$