

GEOMETRIA DELLE MASSE.

LA MOTIVAZIONE PER INTRAPRENDERE LO STUDIO DI QUESTO ARGOMENTO APPARISCE CHIARA PIÙ AVANTI, QUANDO SI AFFRONTERRANNO, NELL'AMBITO DELLA TEORIA DI DE SAINT-VENANT I CASI DI SOLLECATAZIONE SEMPLICE (FLESSIONE, TORSIONE, TAGLIO) E SI VEDRÀ CHE A PARITÀ DI AREA DELLA SEZIONE TRASVERSALE LA RISPOSTA PRESENTA SIGNIFICATIVE DIFFERENZE. INFATTI LA RISPOSTA DI UN SOLIDO A SOLLECATAZIONI IMPRESSE DEL TIPO ORA INDICATO VIENE A DIPENDERE DALLE CARATTERISTICHE DELLA SEZIONE TRASVERSALE (CIOÈ DA "COME" IL MATERIALE È "DISTRIBUITO" SULLA SEZIONE TRASVERSALE: OCCORRE QUINDI ESSERE IN GRADO DI DESCRIVERE CON STRUMENTI ADEGUATI IL MODO IN CUI IL MATERIALE È DISTRIBUITO, E CIÒ RICHIEDE L'INTRODUZIONE DI "MISURE" DI ORDINE SUPERIORE ACCANTO ALL'AREA. SCOPO DELLA GEOMETRIA DELLE MASSE È L'INTRODUZIONE E LA DESCRIZIONE DI QUESTE QUANTITÀ.

SI PARTE DA SISTEMI DI VETTORI APPLICATI, PARALLELI: QUESTI SONO INTERPRETABILI COME FORZE ED È QUINDI POSSIBILE DETERMINARE UN SISTEMA EQUIVALENTE, PIÙ SEMPLICE, CARATTERIZZATO DALLA LORO RISULTANTE (ASSUMENDO CHE QUESTA NON SIA NULLA) APPLICATA SECONDO UNA BEN PRECISA RETTA D'AZIONE.

LA DETERMINAZIONE DI QUESTA RETTA D'AZIONE DELLA RISULTANTE PASSA ATTRAVERSO LA DEFINIZIONE E IL CALCOLO DEL MOMENTO RESULTANTE, CHE, COME È NOTO, DEVE RISULTARE EGUALE PER IL SISTEMA ORIGINALE DI FORZE APPLICATE E PER IL SISTEMA EQUIVALENTE, COSTITUITO (NELLE IPOTESI DELINTEATE) DA UN'UNICA FORZA.

I VETTORI APPLICATI SONO DEFINITI DALL'INSIEME (\vec{v}_i, P_i) DEI VETTORI STESSI (\vec{v}_i) E DEI RISPETTIVI PUNTI DI APPLICAZIONE, P_i .

AMMETTENDO CHE QUESTI PUNTI SIANO TUTTI COMPLANARI, E CHE I VETTORI \vec{v}_i SIANO PARALLELI (MA NON NECESSARIAMENTE EQUIVERSI) SI HA CHE POSSONO ESSERE ESPRESSE NELLA FORMA:

$$\vec{v}_i = m_i \vec{r} \quad [I]$$

DOVE \vec{r} È UN VERSORE CHE INDIVIDUA LA DIREZIONE COMUNE A TUTTI I VETTORI E m_i UNA GRANDEZZA SCALARE, NON RISTRETTA IN SEGNO, CHE DEFINIREMO MASSA E CHE PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME LA COMPONENTE DEL VETTORE \vec{v}_i SECONDO \vec{r} .

LA MASSA m_i SARÀ QUINDI POSITIVA SE \vec{v}_i È CONCORDE CON \vec{r} , E NEGATIVA IN CASO OPPOSTO.

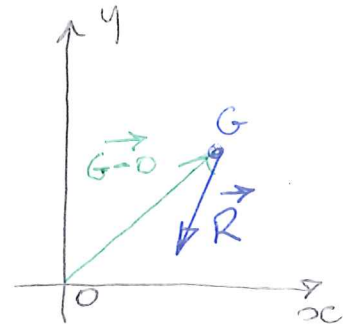
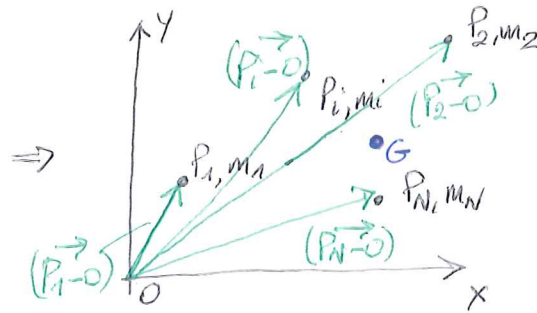
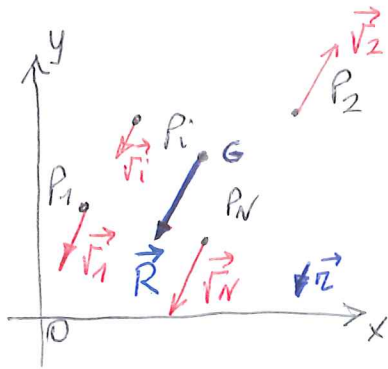
SI OSSERVI CHE IN BASE ALLA [I] TUTTE LE MASSE m_i RISULTANO GRANDEZZE FRA LORO OMOGENEE.

DAL PUNTO DI VISTA DELLA DESCRIZIONE DEL SISTEMA (DISCRETO) SI HA CHE SOSTITUENDO AI VETTORI \vec{v}_i LE CORRISPONDENTI MASSE m_i "CONCENTRATE" NEI RISPETTIVI PUNTI DI APPLICAZIONE RISULTA PIÙ AGEVOLE CALCOLARE IL "CENTRO" DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI, CHE VIENE A COINCIDERE CON IL "BARICENTRO" DEL SISTEMA DI MASSE, INDICATO CON G.

A QUESTO SCOPO, SI INTRODUCE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

CHE, PER SEMPLICITÀ SI ASSUME ANCHE ORTOGONALE (BENCHE' QUESTA CARATTERISTICA NON SIA ESSENZIALE), CON ASSI X E Y:

2



SI HA INFATTI CHE LA POSIZIONE DEL PUNTO G (BARICENTRO = CENTRO DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI) NON DIPENDE DAL VETTORE \vec{r} MA È UNA PROPRIETÀ DEL SISTEMA DI PUNTI P_i E DI MASSE m_i

LA SOMMA (RESULTANTE) DEI VETTORI \vec{v}_i , DENOTATA CON \vec{R} È DATA PER DEFINIZIONE DA:

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_N = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad [2]$$

E PER LA [1] RISULTA

$$\vec{R}^{\text{O}} = \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{r} = M \vec{r}, \quad [3]$$

DOVE $M = \sum_{i=1}^N m_i$ È LA MASSA TOTALE DEL SISTEMA; SI ASSUME TACITAMENTE CHE SIA $M \neq 0$, IL CHE EQUIVALE AD ASSUMERE $\vec{R} \neq \vec{0}$.

IL MOMENTO RESULTANTE DEL SISTEMA DI VETTORI \vec{v}_i RISPETTO ALL'ORIGINE O DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO È DATO, PER DEFINIZIONE DA QUESTA ESPRESSIONE

$$\vec{M}_{(O)}^{\text{O}} = \sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge \vec{v}_i] \quad [4]$$

DOVE $(P_i - O)$ È IL VETTORE POSIZIONE DI P_i RISPETTO ALL'ORIGINE O.

SE SI SOSTITUISCE LA [1] NELLA [4] SI TROVA:

$$\vec{M}_{(O)}^{\text{O}} = \sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge m_i \vec{r}] = \sum_{i=1}^N [m_i (P_i - O) \wedge \vec{r}] = \left[\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right] \wedge \vec{r} \quad [5]$$

IL SISTEMA EQUIVALENTE A QUELLO DATO È COSTITUITO DA UN UNICO VETTORE,

$\vec{R}^{\text{G}} = \vec{R}^{\text{O}}$ APPLICATO NEL CENTRO G DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI, E

TALE CHE IL SUO MOMENTO RESULTANTE, SEMPRE VALUTATO RISPETTO A O È

DEFINITO DA

$$\vec{M}_{(O)}^{\text{G}} = (G - O) \wedge \vec{R}^{\text{G}} \quad [6]$$

SODDISFI LA CONDIZIONE

$$M_{(0)}^{(2)} = M_{(0)}^{(1)} \quad [7]$$

NE SEGUE, TENENDO CONTO DELLE [1], [3], [5], [6]

$$(\vec{G}-\vec{0}) \wedge \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r} \right) = (\vec{G}-\vec{0}) \wedge \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{r} = (\vec{G}-\vec{0}) \wedge M \vec{r} = M (\vec{G}-\vec{0}) \wedge \vec{r} \quad [6']$$

E QUINDI:

$$M (\vec{G}-\vec{0}) \wedge \vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{P}_i - \vec{0}) \wedge \vec{r} \quad [8]$$

POICHE' IL VETTORE \vec{r} PER IL QUALE VENGONO MOLTIPLICATI VETTORIALMENTE I VETTORI $M (\vec{G}-\vec{0})$ DA UNA PARTE E $\sum_{i=1}^N m_i (\vec{P}_i - \vec{0})$ DALL'ALTRA E' IL MEDESIMO, SI RICAVA L'EGUAGLIANZA

$$M (\vec{G}-\vec{0}) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{P}_i - \vec{0}) \quad [9]$$

E ANQUE LA POSIZIONE DI G E' COMPLETAMENTE DEFINITA DAL VETTORE

$$\vec{G}-\vec{0} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\vec{P}_i - \vec{0})}{M} \quad [9']$$

PER DETERMINARE $(\vec{G}-\vec{0})$ CONVIENE INTRODURRE LE COORDINATE DEI PUNTI CONSIDERATI RISPETTO ALL'ORIGINE $O=(0,0)$:

$$P_1 = (x_1, y_1); \quad P_2 = (x_2, y_2); \quad \dots; \quad P_i = (x_i, y_i); \quad \dots; \quad P_N = (x_N, y_N); \quad G = (x_G, y_G)$$

ED ESPRIMERE PER COMPONENTI E MEDIANTE I VERSORI \vec{i} E \vec{j} DEGLI ASSI I VETTORI POSIZIONE:

$$(\vec{P}_i - \vec{0}) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j}$$

$$(\vec{G}-\vec{0}) = x_G \vec{i} + y_G \vec{j}$$

LA [9'] DIVIENE COSI':

$$\boxed{x_G \vec{i}} + \boxed{y_G \vec{j}} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i \vec{i} + y_i \vec{j}) m_i}{M} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i x_i \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i \right) \vec{j}}{M} \quad [9'']$$

DA QUI, SEPARANDO LE COMPONENTI SECONDO X (CIO' CHE E' MOLTIPLICATO PER IL VERSORE \vec{i}) E SECONDO Y (CIO' CHE E' MOLTIPLICATO PER IL VERSORE \vec{j}) SI PUO' PASSARE DALL'EQUAZIONE VETTORIALE [9''] ALLE 2 EQUAZIONI SCALARI:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \quad [10]$$

LE [10] INDIVIDUANO COMPLETAMENTE LE COORDINATE DEL "BARICENTRO" G.

IN FUNZIONE DELLE MASSE m_i E DEI RELATIVI PUNTI DI APPLICAZIONE $P_i = (x_i, y_i)$. 4
 COME SI VEDE LA DETERMINAZIONE DEL BARICENTRO E' INDIPENDENTE DAL VETTORE \vec{r}
 CHE INDIVIDUA LA DIREZIONE DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI DATI: CIO' SIGNIFICA
 CHE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO NON MUTA SEI A PARITA' DI VALORI DELLE MASSE
 m_i E DEI RELATIVI PUNTI DI APPLICAZIONE P_i , IL VETTORE \vec{r} VIENE SOSTITUITO
 DA UN ALTRO VETTORE \vec{r}' .

QUESTO EQUIVALE A "GIRARE" TUTTI I VETTORI PARALLELI DI UNO STESSO ANGOLO:
 IN OGNI CASO IL BARICENTRO RISULTA INVARIANTE RISPETTO A QUESTA OPERAZIONE.

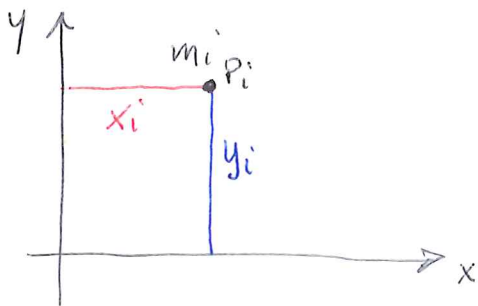
IL BARICENTRO E' QUINDI UNA PROPRIETA' LEGATA ALLA DISTRIBUZIONE DELLE
 MASSE: IN QUESTO SENSO E' APPROPRIATO PARLARE DI "GEOMETRIA DELLE MASSE".

SE SI ESAMINANO PIU' ACCURATAMENTE LE QUANTITA' CHE COMPaiono NELLA [10] SI
 OSSERVA CHE QUESTE POSSONO ESSERE SCRITTE NELLA FORMA!

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad [10']$$

E A QUESTI "INGREDIENTI" SI PUO' ASSOCIARE UN PRECISO SIGNIFICATO FISICO.

A QUESTO SCOPO SI CONSIDERA IL SISTEMA DI MASSE m_i , CONCENTRATE NEI
 PUNTI P_i :



SI OSSERVA CHE LE COORDINATE DEL PUNTO P_i
 POSSONO ESSERE INTERPRETATE COME LE
DISTANZE DEI PUNTI P_i DALL'ASSE X (LE
 COORDINATE y_i) E LE DISTANZE DEI PUNTI P_i
DALL'ASSE Y (LE COORDINATE x_i).

SI DEFINISCE ALLORA

- MOMENTO STATICO (O DEL PRIMO ORDINE) DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE X LA QUANTITA'

ATTENZIONE: S_x CONTIENE LE DISTANZE y_i !

$$S_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad [11]$$

PARI ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER LE DISTANZE
 (DOTATE DI SEGNO) DALL'ASSE X

- MOMENTO STATICO (O DEL PRIMO ORDINE) DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE Y LA QUANTITA'

ATTENZIONE: S_y CONTIENE LE DISTANZE x_i !

$$S_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad [12]$$

PARI ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER LE DISTANZE
 (DOTATE DI SEGNO) DALL'ASSE Y.

- MASSA TOTALE (O MOMENTO DI ORDINE ZERO) DEL SISTEMA DI MASSE LA QUANTITÀ 5
- $$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad [13]$$

SE ORA SI RIPRENDONO LE [6'] E SI SOSTITUISCONO IN ESSE LE [11], [12], [13] SI OTTIENE:

$$x_G = \frac{S_y}{M} \quad [14'] \quad \text{ATTENZIONE! } \underline{x_G} \text{ SI CALCOLA USANDO } \underline{S_y} \text{ [ENON } S_x \text{!]}$$

$$y_G = \frac{S_x}{M} \quad [14''] \quad \text{ATTENZIONE! } \underline{y_G} \text{ SI CALCOLA USANDO } \underline{S_x} \text{ [ENON } S_y \text{!]}$$

LE [14'] E [14''] IMPLICANO CHE RISULTI:

$$S_x = M y_G \quad [15']$$

$$S_y = M x_G \quad [15'']$$

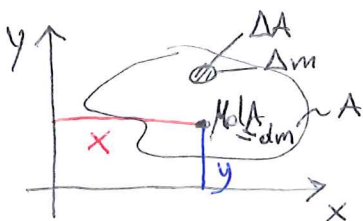
CHE ESPRIMONO IL TEOREMA DI VARIGNON: IL MOMENTO STATICO S_x (o S_y) DI UN SISTEMA DI MASSE PUÒ ESSERE CALCOLATO CONCENTRANDO LA MASSA TOTALE NEL BARICENTRO, G.

LE [15'], [15''] INDICANO CHIARAMENTE (ESSENDO SEMPRE PER IPOTESI $M \neq 0$) CHE

- SE $S_x = 0$, ALLORA L'ASSE x È BARICENTRICO, OVVERO PASSA PER IL BARICENTRO, IN QUANTO LA DISTANZA DI QUESTO DALL'ASSE x , $y_G = 0$
- SE $S_y = 0$, ALLORA L'ASSE y È BARICENTRICO, OVVERO PASSA PER IL BARICENTRO, IN QUANTO LA DISTANZA DI QUESTO DALL'ASSE y , $x_G = 0$.

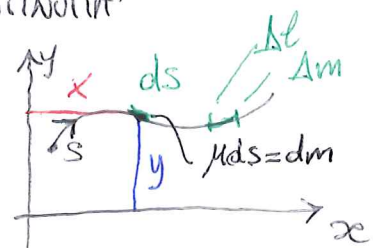
SE QUINDI $S_x = 0$ E $S_y = 0$, ALLORA L'ORIGINE DEGLI ASSI COINCIDE CON IL BARICENTRO.

FIN QUI SI SONO MESSE IN CONTO MASSE PUNTIFORMI (CONCENTRATE); SE INVECE LA MASSA RISULTA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE PIANA O SU UNA LINEA, SI PROCEDE COSÌ. CONTINUITÀ



MASSA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE A.

MASSA DISTRIBUITA SU UNA LINEA l CON ASCISSA CURVILINEA s .



NEL PRIMO CASO, SE ΔA È UN ELEMENTO DI SUPERFICIE NELL'INTERNO DI UN PUNTO $P=(x,y)$ E Δm RAPPRESENTA LA SUA MASSA, SI ASSUME CHE IL LIMITE

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \mu(x,y)$$

CIOÈ CHE IL LIMITE ESISTA E SIA FINITO E DEFINISCA UNA FUNZIONE DEL PUNTO, $\mu(x,y)$, LA DENSITÀ SUPERFICIALE DI MASSA (AVENTE DIMENSIONI $[M]/[L^2]$), CHE SI SUPPONE CONTINUA. NEL CASO $\mu(x,y) = \text{const}$ SI HA UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME DI MASSA.

ASSEGNATO $\mu(x,y)$ SI PUÒ CALCOLARE LA MASSA INFINITESIMA dm CHE CORRISPONDE A UN ELEMENTO INFINITESIMO DI AREA: $dm = \mu(x,y) dA$

DA QUI, RICHIAMANDO IL CONCETTO DI SOMMA INTEGRALE SI POSSONO AGEVOLMENTE ESTENDERE LE NOZIONI DI MASSA TOTALE, M E DI MOMENTI STATICI RISPETTO AGLI ASSI x E y , S_x E S_y .

SI HA INFATTI:

LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È ALLORA DATA DA:

$$M = \int_A \mu(x,y) dA \quad [16]$$

$$x_G = \frac{\int_A x \mu(x,y) dA}{\int_A \mu(x,y) dA} = \frac{S_y}{M} \quad [19]$$

$$S_x = \int_A y \mu(x,y) dA \quad [17]$$

$$y_G = \frac{\int_A y \mu(x,y) dA}{\int_A \mu(x,y) dA} = \frac{S_x}{M} \quad [20]$$

CHE SOSTITUISCONO RISPETTIVAMENTE LA [13], [11] E [12] CHE VALGONO NEL CASO DISCRETO (MASSE CONCENTRATE)

SI PUÒ VEDERE CHE IL PROLUNGAMENTO DAL DISCRETO AL CONTINUO COMPORTA DI SOSTITUIRE LE SOMMATORIE CON SOMME INTEGRALI

NOTA 1. SE NELLE [16] - [18] È $\mu(x,y) = \mu_0 = \text{const}$ SI HA:

$$M = \mu_0 \int_A dA = \mu_0 A \quad [16 \text{ bis}]$$

$$S_x = \mu_0 \int_A y dA \quad [17 \text{ bis}]$$

$$S_y = \mu_0 \int_A x dA \quad [18 \text{ bis}]$$

NE SEGUE IN TERMINI DI POSIZIONE DEL BARICENTRO:

$$x_G = \frac{S_y}{M} = \frac{\mu_0 \int_A x dA}{\mu_0 A} = \frac{\int_A x dA}{A} \quad [19 \text{ bis}]; \quad y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{\mu_0 \int_A y dA}{\mu_0 A} = \frac{\int_A y dA}{A} \quad [20 \text{ bis}]$$

E IN QUESTO CASO LA POSIZIONE DEL BARICENTRO DIPENDE SOLO DALLA GEOMETRIA DELLA SUPERFICIE: SI HA QUINDI UNA GEOMETRIA DELLE AREE.

NEL SECONDO CASO SI PUÒ DEFINIRE, IPOTIZZANDO CHE IL LIMITE

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \mu(s)$$

ESISTA E SIA FINITO, LA DENSITA' DI MASSA LINEARE (DIMENSIONALMENTE, $[M]/[L]$) FUNZIONE DELL'ASCISSA CURVILINEA s .

NE SEGUE, OSSERVANDO CHE LA MASSA ELEMENTARE Δm CHE CORRISPONDE A UN ELEMENTINO INFINITESIMO DI LINEA, ds VALE $\Delta m = \mu(s) ds$ CHE LE DEFINIZIONI DI M, S_x, S_y DIVENGONO:

$$M = \int_l \mu(s) ds \quad [21]$$

$$S_x = \int_l y(s) \mu(s) ds \quad [22]$$

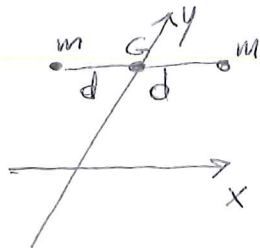
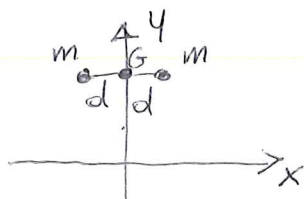
$$S_y = \int_l x(s) \mu(s) ds \quad [23]$$

E LA POSIZIONE DEL BARICENTRO E' DATA DA:

$$x_G = \frac{\int_l x(s) \mu(s) ds}{\int_l \mu(s) ds} = \frac{S_y}{M} \quad [24]; \quad y_G = \frac{\int_l y(s) \mu(s) ds}{\int_l \mu(s) ds} = \frac{S_x}{M} \quad [25]$$

STRUTTANDO LE PROPRIETA' ORA EVIDENZIATE IL CALCOLO DEI MOMENTI STATICI E DELLE COORDINATE DEL BARICENTRO RISULTANO NOTEVOLMENTE SEMPLIFICATE:

1) QUANDO ESISTE UN ASSE DI SIMMETRIA (ORTOGONALE OD OBLIQUA) PER LA DISTRIBUZIONE DI MASSE, IL BARICENTRO SI TROVA SU TALE ASSE.



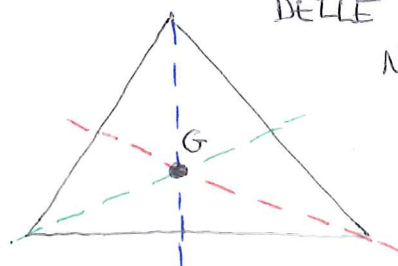
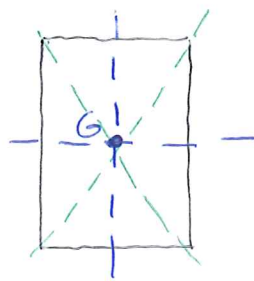
CON RIFERIMENTO ALLE 2 FIGURE, IN ENTRAMBI I CASI $S_y = 0$,

POICHE'

$$S_y = m(-d) + m(d) = 0.$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{S_y}{M} = 0$$

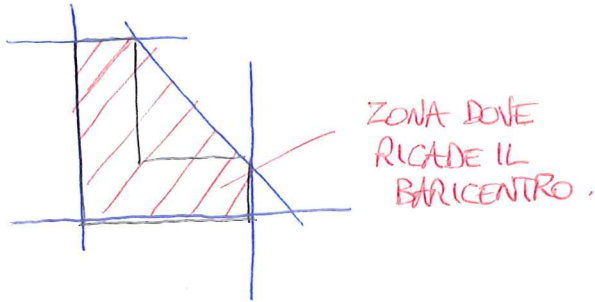
NE SEGUE CHE PER UN RETTANGOLO IL BARICENTRO SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 MEDIANE (LE RETTE CHE UNISCONO I PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI) O DELLE 2 DIAGONALI (LE RETTE CHE UNISCONO I



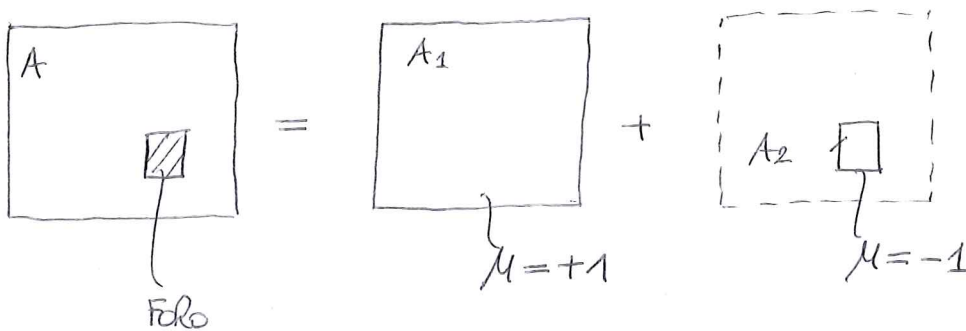
DELLE TRE MEDIANE (LE RETTE CHE UNISCONO

OGNI VERTICE COL PUNTO MEDIO DEL LATO OPPOSTO) IL BARICENTRO SUDDIVIDE OGNI MEDIANA IN 2 PARTI, DI LUNGHEZZA $1/3$ (DAL PUNTO MEDIO DEL LATO) E $2/3$ (DAL VERTICE) DELLA MEDIANA STESSA.

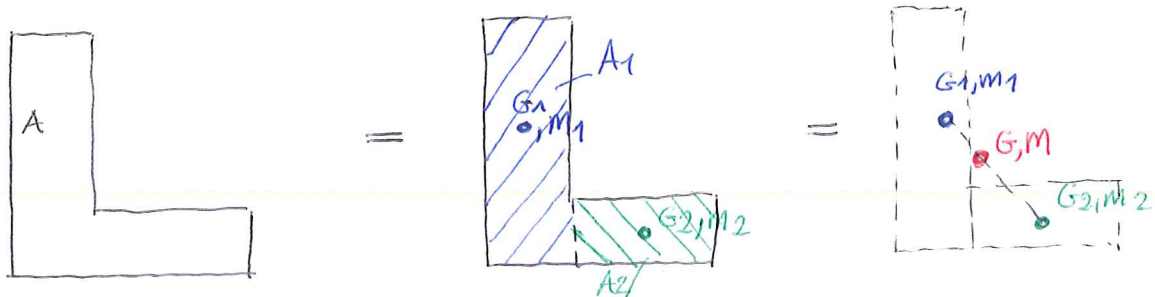
2) SE LE MASSE COSTITUENTI UNA FIGURA PIANA SONO TUTTE POSITIVE, ALLORA IL BARICENTRO DELLA FIGURA È INTERNO ALL'INVIOLUPPO DELLE RETTE CHE LA CIRCOSCRIVONO (SENZA SECCARLA):



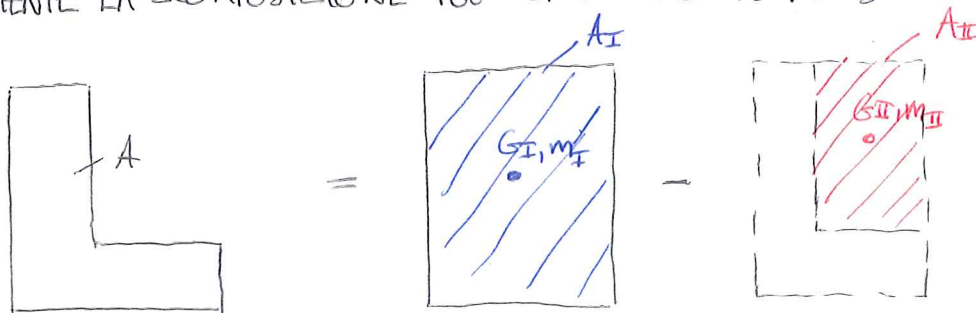
3) SE LA FIGURA È OMOGENEA E DOTATA DI FORI, LA SI PUÒ CONSIDERARE SOMMA DI UNA FIGURA PIENA (PRIVA DI FORI) CON DENSITÀ $\mu = 1$ E DI UNA SECONDA FIGURA PIENA, MA DI DENSITÀ $\mu = -1$ IN CORRISPONDENZA DEI FORI:



4) QUANDO LA FIGURA PIANA È SCOMPONIBILE IN FIGURE SEMPLICI DISGIUNTE (SENZA SOVRAPPOSIZIONI) SI PUÒ CALCOLARE IL BARICENTRO VALENDOSI DEL TEOREMA DI VARIGNON: SI "CONCENTRA" LA MASSA DELLE FIGURE COSTITUENTI NEI RELATIVI BARICENTRI E SI DETERMINA IL BARICENTRO DEL SISTEMA DI MASSE CONCENTRATE COSÌ OTTENUTE:



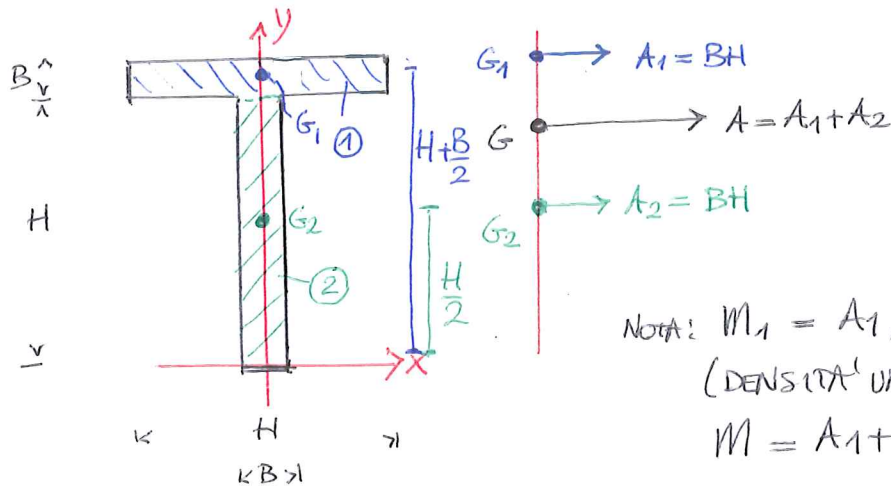
OVVIAMENTE LA SCOMPOSIZIONE PUÒ CONTENERE ANCHE DEI FORI:



NEI 2 CASI SI HA: $A = A_I + A_{II}$; $S_x = S_{xI} + S_{xII}$; $S_y = S_{yI} + S_{yII}$; $x_G = \frac{S_y}{A}$; $y_G = \frac{S_x}{A}$
 $A = A_I - A_{II}$; $S_x = S_{xI} - S_{xII}$; $S_y = S_{yI} - S_{yII}$; $x_G = \frac{S_y}{A}$; $y_G = \frac{S_x}{A}$

1) SEZIONE A-T.

PER RAGIONI DI SIMMETRIA SI ASSUME L'ASSE Y COME INDICATO IN FIGURA; PER QUANTO VISTO RISULTA $x_G = 0$ E PER INDIVIDUARE COMPLETAMENTE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È SUFFICIENTE DETERMINARE LA COORDINATA y_G .



NOTA: $M_1 = A_1$; $M_2 = A_2$
(DENSITA' UNITARIA) PER CUI
 $M = A_1 + A_2 = A$.

SUDDIVISA LA FIGURA IN 2 RETTANGOLI, COME INDICATO SI TROVA:

① $A_1 = B \cdot H$; $y_{G1} = H + \frac{B}{2}$

② $A_2 = B \cdot H$; $y_{G2} = \frac{H}{2}$

SI NOTI CHE LE COORDINATE y VANNO CALCOATE RISPETTO AL MEDESIMO ASSE x !

SI HA QUINDI: $S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = BH \left(H + \frac{B}{2} \right)$

$S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = BH \cdot \frac{H}{2}$

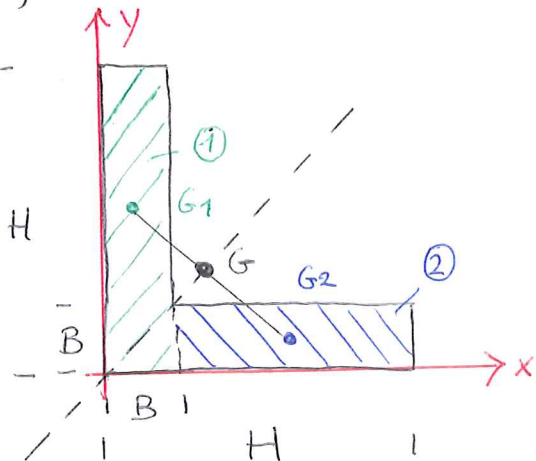
$S_x = S_{x1} + S_{x2} = BH \left(H + \frac{B}{2} + \frac{H}{2} \right) = \frac{BH}{2} (3H + B)$

$A = A_1 + A_2 = BH + BH = 2BH$

NE SEGUE: $y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{BH}{2} (3H + B)}{2BH} = \frac{3H + B}{4}$

PERTANTO RISPETTO AL SISTEMA DI ASSI CONSIDERATI $G = \left(0, \frac{3H + B}{4} \right)$.

2) SEZIONE A-L A BRACCI EGUALI:



IN PRIMA ISTANZA SI ASSUMONO GLI ASSI x E y CHE CONTORNANO (SUL LATO ESTERNO) LA FIGURA.

LA SI SUDDIVIDE IN DUE RETTANGOLI COME INDICATI; NE RISULTA, PER CIASCUNO DI ESSI:

①: $A_1 = H \cdot B$ $G_1 = \left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right)$

②: $A_2 = (H - B) \cdot B$ $G_2 = \left(B + \frac{H - B}{2}, \frac{B}{2} \right) = \left(\frac{B + H}{2}, \frac{B}{2} \right)$

SI HA QUINDI: $S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = (H \cdot B) \cdot \frac{H}{2}$; $S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = (H - B) \cdot B \cdot \frac{B}{2}$

$$S_x = \frac{H^2 B}{2} + \frac{HB^2}{2} - \frac{B^3}{2} = S_{x1} + S_{x2} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B$$

10

$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} = (H \cdot B) \cdot \frac{B}{2}; \quad S_{y2} = A_2 \cdot x_{G2} = (H-B) \cdot B \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{(H-B)(H+B) \cdot B}{2}$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = \frac{HB^2}{2} + \frac{(H^2 - B^2)B}{2} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B$$

$$A = A_1 + A_2 = H \cdot B + (H-B) \cdot B = HB + HB - B^2 = (2H-B)B$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B}{(2H-B) \cdot B} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B}{(2H-B) \cdot B} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

SI TROVA $x_G = y_G$ E DUNQUE IL BARICENTRO G SI TROVA SULLA BISETTRICE DEL PRIMO QUADRANTE, CHE RISULTA ESSERE ASSE DI SIMMETRIA PER LA FIGURA.

SI PUÒ VERIFICARE QUANTO SEGUE!

- IL BARICENTRO SI TROVA SUL SEGMENTO CHE UNISCE G_1 E G_2 , ALL'INTERNO DELLO INTERVALLO
- IL BARICENTRO È ESTERNO ALLA FIGURA MA È RACCHIUSO DALL'INVOLUPO DELLE RETTE RADENTI ALLA FIGURA (CIOÈ DELLE RETTE CHE NON LA INTERSECANO).

IN ALTERNATIVA SI PUÒ CONSIDERARE LA FIGURA COME DIFFERENZA DI DUE RETTANGOLI (IN REALTÀ DEI QUADRATI) NON CONCENTRICI!

IN QUESTO CASO SI HA:

$$\textcircled{\text{I}} \quad A_{\text{I}} = H \cdot H \quad G_{\text{I}} = \left(\frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right)$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad A_{\text{II}} = (H-B)(H-B) \quad G_{\text{II}} = \left(B + \frac{H-B}{2}, B + \frac{H-B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow G_{\text{II}} = \left(\frac{B+H}{2}, \frac{B+H}{2} \right)$$

NE SEGUE

$$A = A_{\text{I}} - A_{\text{II}} = H^2 - (H-B)^2 = H^2 - H^2 + 2HB - B^2$$

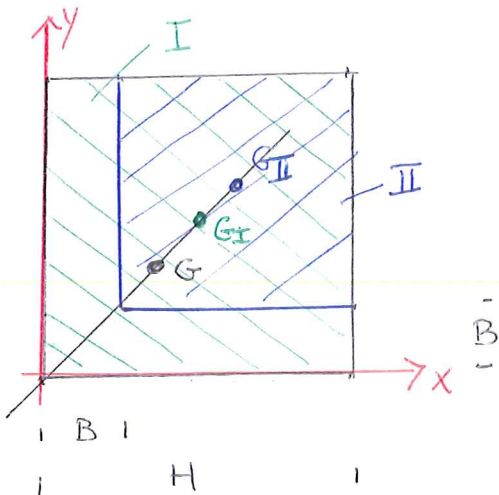
$$\Rightarrow A = (2H-B)B$$

$$S_{x\text{I}} = A_{\text{I}} \cdot y_{G\text{I}} = H^2 \cdot \frac{H}{2}; \quad S_{x\text{II}} = A_{\text{II}} \cdot y_{G\text{II}} = (H-B)^2 \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{H-B}{2} (H-B)(H+B)$$

$$S_x = S_{x\text{I}} - S_{x\text{II}} = \frac{H^3}{2} - \frac{H-B}{2} (H^2 - B^2) = \frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{2} + \frac{HB^2}{2} + \frac{HB^2}{2} - \frac{B^3}{2} = \frac{B}{2} (H^2 + HB - B^2)$$

$$S_{y\text{I}} = A_{\text{I}} \cdot x_{G\text{I}} = H^2 \cdot \frac{H}{2}; \quad S_{y\text{II}} = A_{\text{II}} \cdot x_{G\text{II}} = (H-B)^2 \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{H-B}{2} (H^2 - B^2)$$

$$S_y = S_{y\text{I}} - S_{y\text{II}} = \frac{H^3}{2} - \frac{H-B}{2} (H^2 - B^2) = \frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{2} + \frac{HB^2}{2} + \frac{HB^2}{2} - \frac{B^3}{2} = \frac{B}{2} (H^2 + HB - B^2)$$



DA QUI SI OTTIENE SEMPLICEMENTE:

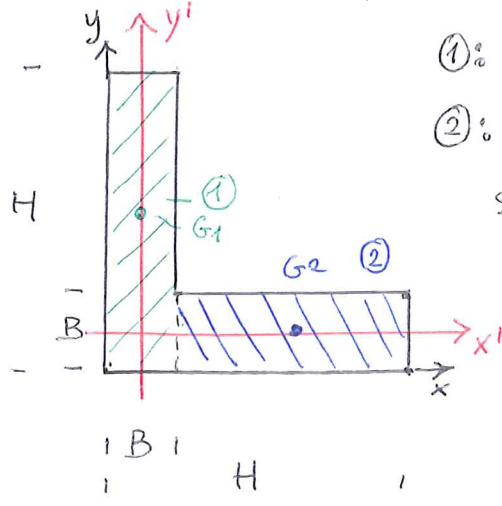
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{B}{2}(H^2 + HB - B^2)}{B(2H - B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H - B)}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{B}{2}(H^2 + HB - B^2)}{B(2H - B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H - B)}$$

RISULTATO COINCIDENTE CON IL PRECEDENTE.

SI NOTI TUTTAVIA CHE IN QUESTO CASO, PER LA PRESENZA DI UNA "MASSA NEGATIVA" (QUELLA DEL QUADRATO II) SI TROVA CHE IL BARICENTRO G E' ANCORA ALLINEATO CON G_I E G_{II} MA E' ESTERNO ALL'INTERVALLO.

NEL CASO ORA ANALIZZATO PUO' ESSERE CONVENIENTE ADOTTARE COME ASSI RISPETTO AI QUALI EFFETTUARE I CALCOLI NON QUELLI CHE CONTORNANO ALL'ESTERNO LA FIGURA E DENOTATI x, y, MA GLI ASSI DI SIMMETRIA DI CIASCUNO DEI 2 RETTANGOLI COSTITUENTI, INDICATI CON x', y'. COSI' FACENDO SI TROVA:



①: $A_1 = B \cdot H$; $G'_1 = (0, \frac{H}{2} - \frac{B}{2})$

②: $A_2 = (H - B) \cdot B$; $G'_2 = (\frac{H - B}{2} + \frac{B}{2}, 0) = (\frac{H}{2}, 0)$

SI HA QUINDI: $A = A_1 + A_2 = BH + (BH - B^2) = B(2H - B)$

$S_{x'_1} = A_1 \cdot y'_{G'_1} = BH \cdot (\frac{H}{2} - \frac{B}{2})$ } $S_{x'} = B(\frac{H^2}{2} - \frac{HB}{2})$

$S_{x'_2} = A_2 \cdot y'_{G'_2} = (H - B) \cdot B \cdot 0 = 0$

$S_{y'_1} = A_1 \cdot x'_{G'_1} = BH \cdot 0 = 0$

$S_{y'_2} = A_2 \cdot x'_{G'_2} = (H - B) \cdot B \cdot \frac{H}{2} = \frac{B}{2} H(H - B)$ } $S_{y'} = \frac{B}{2}(H^2 - HB)$

E DA QUI SI RICAVA: $x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\frac{B}{2}(H^2 - HB)}{B(2H - B)} = \frac{H^2 - HB}{2(2H - B)}$

$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\frac{B}{2}(H^2 - HB)}{B(2H - B)} = \frac{H^2 - HB}{2(2H - B)}$

E' FACILE OSSERVARE, ESSENDO $x = x' + \frac{B}{2}$; $y = y' + \frac{B}{2}$ CHE

$x_G = \frac{B}{2} + x'_G = \frac{B}{2} + \frac{H^2 - HB}{2(2H - B)} = \frac{B(2H - B) + H^2 - HB}{2(2H - B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H - B)}$

$y_G = \frac{B}{2} + y'_G = \frac{B}{2} + \frac{H^2 - HB}{2(2H - B)} = \frac{B(2H - B) + H^2 - HB}{2(2H - B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H - B)}$

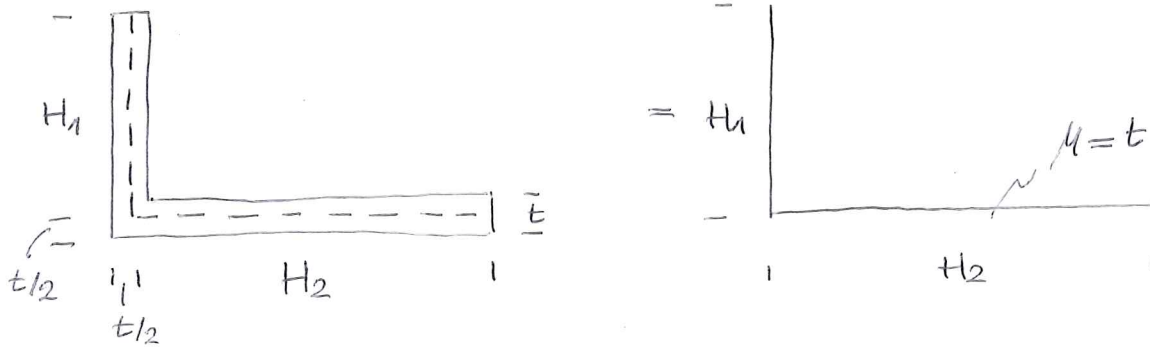
COINCIDENTI CON I RISULTATI PRECEDENTEMENTE OTTENUTI.

3) APPROSSIMAZIONE PER PROFILI SOTTILI.

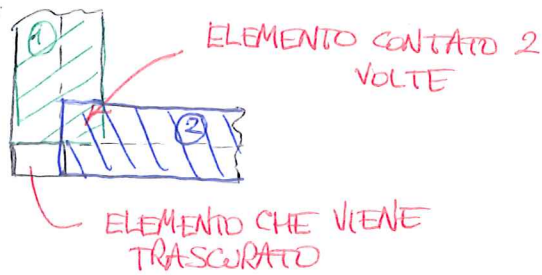
PER PROFILI NEI QUALI LO SPESSORE t E' MOLTO PICCOLO RISPETTO ALLE

DIMENSIONI DELLA FIGURA STESSA SI PUÒ INTRODURRE LA APPROSSIMAZIONE DI RIDURRE LA FIGURA AD UNA LINEA COINCIDENTE CON L'ASSE (LINEA MEDIA) DEL PROFILO STESSO, LUNGO LA QUALE SI ASSUME UNA DENSITA' LINEARE $\mu(s) = t$, CIOE' PARI ALLO SPESORE DEL PROFILO (MISURATO ORTOGONALMENTE ALLA LINEA MEDIA).

GLI EFFETTI DI QUESTA APPROSSIMAZIONE VENGONO VALUTATI CON RIFERIMENTO ALLA SOLUZIONE ESATTA PER UNA SEZIONE A L A BRACCI DISEGUALI:



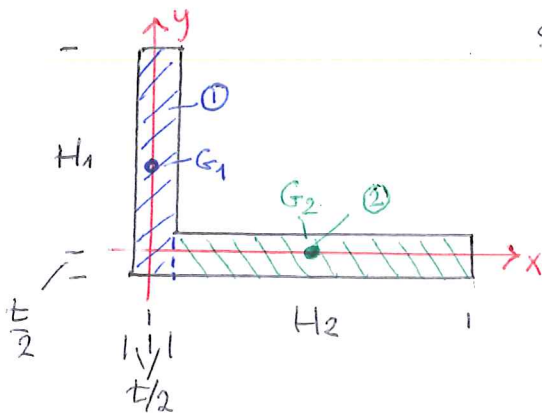
NOTA 2 L'APPROSSIMAZIONE PORTA A SOSTITUIRE LA FIGURA AL CON 2 RETTANGOLI CHE SI INNESTANO L'UNO NELL'ALTRO PRODUCENDO UNA SOVRAPPOSIZIONE, INDICATA NELLA FIGURA CHE COSTITUISCE UN INGRANDIMENTO DEL NODO



LO SCOPO CHE SI INTENDE RAGGIUNGERE E' QUELLO DI VALUTARE L'EFFETTO DELLA APPROSSIMAZIONE INTRODOLTA MEDIANTE IL CONFRONTO CON LA SOLUZIONE ESATTA.

IN ENTRAMBI I CASI SI ASSUMONO GLI ASSI X E Y IN MODO CHE ESSI RAPPRESENTINO GLI ASSI DI SIMMETRIA DEI 2 RETTANGOLI.

(A) SOLUZIONE ESATTA.



SI HA FACILMENTE:

$$\textcircled{1} A_1 = (H_1 + \frac{t}{2})t \quad G_1 = \left(0, \frac{H_1 + \frac{t}{2}}{2} - \frac{t}{2}\right) = \left(0, \frac{H_1 - \frac{t}{2}}{2}\right)$$

\uparrow DISTANZA ASSE X DA LEMBO ESTERNO
 \uparrow DISTANZA DA LEMBO ESTERNO

$$\textcircled{2} A_2 = (H_2 - \frac{t}{2})t \quad G_2 = \left(\frac{H_2 - \frac{t}{2}}{2} + \frac{t}{2}, 0\right) = \left(\frac{H_2 + \frac{t}{2}}{2}, 0\right)$$

\uparrow DISTANZA DA LEMBO INTERNO
 \uparrow DISTANZA ASSE Y DA LEMBO INTERNO

SI HA COSI': $A = A_1 + A_2 = t \left[(H_1 + \frac{t}{2}) + (H_2 - \frac{t}{2}) \right] = t [H_1 + H_2]$

$$S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = (H_1 + \frac{t}{2})t \left(\frac{H_1 - \frac{t}{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{t}{2} \left(H_1^2 - \frac{t^2}{4} \right); \quad S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = 0$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = \frac{t}{2} \left(H_1^2 - \frac{t^2}{4} \right)$$

$$S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G_1} = 0 ; \quad S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G_2} = (H_2 - \frac{t}{2})t \left(\frac{H_2 + \frac{t}{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{(H_2 - \frac{t}{2})t^2}{2}$$

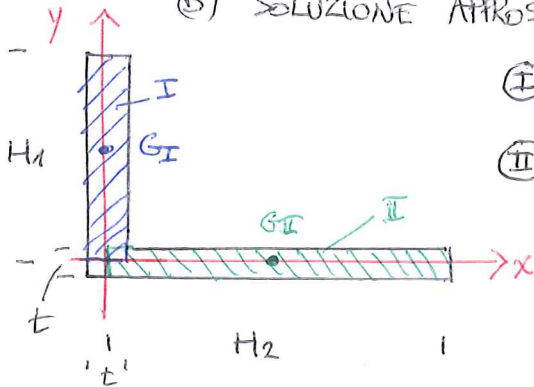
$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} = \frac{t}{2} \left(H_2^2 - \frac{t^2}{4} \right)$$

SI TROVA COSÌ:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{t}{2} \left(H_2^2 - \frac{t^2}{4} \right)}{2[H_1 + H_2]} = \frac{H_2^2 - \frac{t^2}{4}}{2[H_1 + H_2]}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{t}{2} \left(H_1^2 - \frac{t^2}{4} \right)}{2[H_1 + H_2]} = \frac{H_1^2 - \frac{t^2}{4}}{2[H_1 + H_2]}$$

(B) SOLUZIONE APPROSSIMATA



$$\textcircled{I} \quad A_I = H_1 \cdot t \quad G_I = \left(0, \frac{H_1}{2} \right)$$

$$\textcircled{II} \quad A_{II} = H_2 \cdot t \quad G_{II} = \left(\frac{H_2}{2}, 0 \right)$$

SI HA COSÌ:

$$A = A_I + A_{II} = H_1 t + H_2 t = (H_1 + H_2) t$$

$$S_{xI} = A_I \cdot y_{G_I} = H_1 t \cdot \frac{H_1}{2} = \frac{H_1^2}{2} t ; \quad S_{xII} = A_{II} \cdot y_{G_{II}} = 0$$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} = \frac{H_1^2}{2} t$$

$$S_{yI} = A_I \cdot x_{G_I} = 0 ; \quad S_{yII} = A_{II} \cdot x_{G_{II}} = H_2 t \cdot \frac{H_2}{2} = \frac{H_2^2}{2} t \quad S_y = S_{yI} + S_{yII} = \frac{H_2^2}{2} t$$

E IN QUESTO MODO SI TROVA:

$$x_G^* = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{H_2^2}{2} t}{(H_1 + H_2) t} = \frac{H_2^2}{2(H_1 + H_2)}$$

$$y_G^* = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{H_1^2}{2} t}{(H_1 + H_2) t} = \frac{H_1^2}{2(H_1 + H_2)}$$

NOTA 3 SI OSSERVA CHE IN ENTRAMBI I CASI IL VALORE DELL'AREA È CORRETTO, PUNTOVE AI FINI DEL CALCOLO DELL'AREA È IRRILEVANTE LA POSIZIONE DEL RETTANGOLINO CHE VIENE TRASCURATO E DI QUELLO CHE VIENE CONTEGGIATO DUE VOLTE, POCHE' QUESTI SIANO EGUALI (CIOÈ' ABBIANO EGUALE AREA).

I VALORI DEI MOMENTI STATICI SONO INVECE DIFFERENTI (E CIO' SI RIFLETTE NELLA POSIZIONE DEL BARICENTRO) POCHE' IN QUESTO CASO LE POSIZIONI DEI DUE RETTANGOLINI INFLUENZANO IL CALCOLO, SEPPURE A PARITÀ DI AREA DEI MEDESIMI.

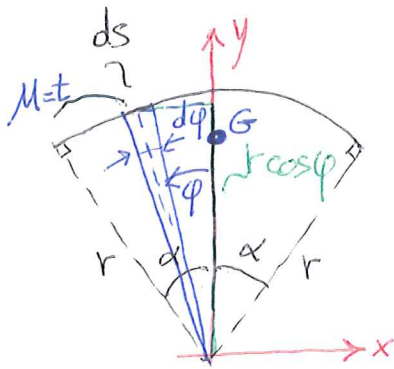
L'ERRORE CHE SI COMPIE NELLA DETERMINAZIONE DEL BARICENTRO:

$$\Delta x_G = x_G - x_G^* = -\frac{t^2/4}{2(H_1 + H_2)} ; \quad \Delta y_G = y_G - y_G^* = \frac{-t^2/4}{2(H_1 + H_2)}$$

È DELL'ORDINE DI t^2 , ACCETTABILE SE $t \ll (H_1 + H_2)$.

□

4) BARICENTRO DI UNA LINEA COSTITUITA DA UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI ANGOLO AL CENTRO 2α E DI SPESSORE COSTANTE E PARI A t .



CONVIENE ASSUMERE GLI ASSI COME IN FIGURA; PER RAGIONI DI SIMMETRIA (Y È ASSE DI SIMMETRIA PER LA LINEA) $x_G = 0$.

LA MASSA TOTALE DELL'ARCO È DATA DAL PRODOTTO DELLA LUNGHEZZA SVILUPPATA DELL'ARCO PER LA "DENSITÀ" $\mu = t$.
NE SEGUE

$$M = 2\alpha r \mu = 2\alpha r t$$

PER VALUTARE IL MOMENTO STATICO S_x (L'UNICO CHE SERVE IN QUESTO CASO: $x_G = 0 \Rightarrow S_y = 0$) SI CONSIDERA UN PUNTO DELL'ARCO E L'ARCHELLO $ds = r d\varphi$ CHE NE COSTITUISCE L'INTORNO. LA DISTANZA DALL'ASSE X DELL'ELEMENTO VALE $r \cos \varphi$; PERTANTO $dS_x = M ds \cdot r \cos \varphi$

NE SEGUE

$$S_x = \int_{-d}^{+d} M ds \cdot r \cos \varphi = M \int_{-d}^{+d} r^2 \cos \varphi d\varphi = t r^2 \int_{-d}^{+d} \cos \varphi d\varphi = 2 t r^2 \int_0^d \cos \varphi d\varphi$$

↑ FUNZIONE PARI
INTEGRATA SU UN
INTERVALLO SIMMETRICO

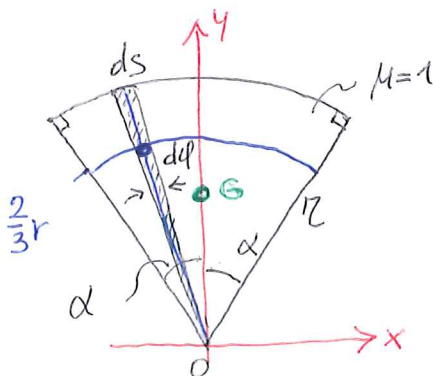
$$S_x = 2 t r^2 \left[+\sin \varphi \right]_0^d = 2 t r^2 \sin d$$

SI HA QUINDI:

$$y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{2 t r^2 \sin d}{2 \alpha t r} = \frac{r \sin d}{\alpha} \quad [\leq r!]$$

IL RISULTATO È ANALOGO A QUANTO VISTO NEL CALCOLARE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DI UN CARICO DISTRIBUITO UNIFORMEMENTE IN DIREZIONE ORIZZONTALE PER UN ARCO CIRCOLARE, GIÀ VISTO NELLA LEZIONE 13, PAG. 5.
SI OSSERVA CHE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È INDIPENDENTE DALLO SPESSORE t .

5) BARICENTRO DI UN SETTORE CIRCOLARE DI ANGOLO AL CENTRO 2α NEL CASO DI DENSITÀ SUPERFICIALE COSTANTE.



LA FIGURA PUÒ ESSERE SCOMPONIBILE IN TANTE "FETTE" TRIANGOLARI INFINITESIME, DI RAGGIO r (ALTEZZA) E BASE $ds = r d\varphi$.

STANTE IL CARATTERE INFINITESIMO DELLE "FETTE", SI PUÒ ASSUMERE CHE LA BASE SIA RETTILINEA.

PER CIASCUN TRIANGOLINO SIFATTO, SI PUÒ CONCENTRARE LA MASSA

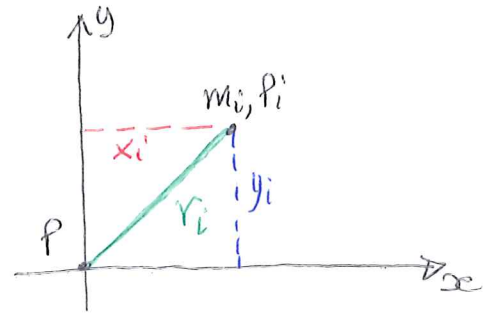
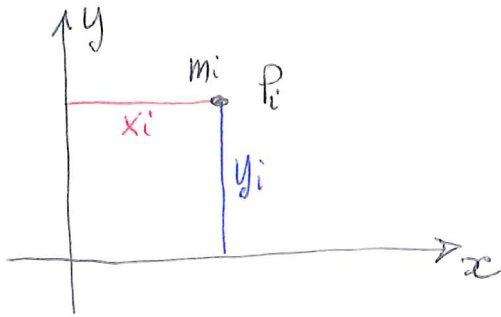
$$dm = \mu \cdot \frac{1}{2} r ds = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \text{ NEL PROPRIO BARICENTRO,}$$

POSTO A DISTANZA $\frac{2}{3} r$ DA O. I BARICENTRI DI TUTTI I

TRIANGOLI INFINITESIMI SONO COLLOCATI SU UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\frac{2}{3} r$. E DI DENSITÀ LINEARE COSTANTE (DATA DA dm/ds).

CI SI PUÒ RICONDURRE AL CASO PRECEDENTE IN CUI L'ARCO DI CIRCONFERENZA DI DENSITÀ COSTANTE HA RAGGIO $\frac{2}{3} r$. NE SEGUE $y_G = \frac{2}{3} r \frac{\sin d}{\alpha}$ MENTRE $x_G = 0$ PER RAGIONI DI SIMMETRIA.

CONSIDERATO NEL PIANO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI E UN SISTEMA DISCRETO DI MASSE m_i APPLICATE NEI PUNTI P_i , COME QUELLO GIÀ CONSIDERATO IN PRECEDENZA, SI DEFINISCONO LE SEGUENTI GRANDEZZE:



- MOMENTO DI INERZIA ASSIALE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE x :

$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \quad [26] \leftarrow J_x \text{ CONTIENE LE DISTANZE (AL QUADRATO) DALL'ASSE } x: y_i^2!$$

- MOMENTO DI INERZIA ASSIALE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE y :

$$J_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad [27] \leftarrow J_y \text{ CONTIENE LE DISTANZE (AL QUADRATO) DALL'ASSE } y: x_i^2!$$

- MOMENTO CENTRIFUGO DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO AGLI ASSI x E y :

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \quad [28] \leftarrow J_{xy} \text{ CONTIENE I PRODOTTI DELLE DISTANZE (CON SEGNO) DAGLI ASSI } x \text{ E } y: y_i x_i!$$

- MOMENTO DI INERZIA POLARE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO AL POLO P :

$$J_p = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad [29].$$

SI OSSERVA CHE

- (1) SE $m_i > 0 \forall i$ ALLORA $J_x \geq 0$ ED È $J_x = 0$ SOLO SE TUTTE LE MASSE SONO ALLINEATE SULL'ASSE x ; ANALOGAMENTE $J_y \geq 0$ ED È $J_y = 0$ SOLO SE TUTTE LE MASSE SONO ALLINEATE SULL'ASSE y , CIOÈ SE $x_i = 0 \forall i$ (CIOÈ $y_i = 0 \forall i$)
- (2) J_{xy} PUÒ ESSERE ≥ 0 ANCHE SE $m_i > 0 \forall i$; IN PARTICOLARE LE MASSE COLLOCATE NEL 1° E 3° QUADRANTE DANNO CONTRIBUTO > 0 A J_{xy} , MENTRE LE MASSE COLLOCATE NEL 2° E 4° QUADRANTE DANNO CONTRIBUTO < 0 .
- (3) $J_p \geq 0$ SE $m_i > 0 \forall i$ E $J_p = 0$ SOLO SE LE MASSE SONO TUTTE COLLOCATE NEL POLO; PERALTRO SI OSSERVA CHE, RISULTANDO

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \text{ E' ANCHE } \quad J_P = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i y_i^2}_{J_x} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i x_i^2}_{J_y} \quad [30]$$

DA CUI SEGUE $J_P = J_x + J_y$. [30]

(4) DALLE [26], [27] E [29] SEGUONO LE DEFINIZIONI DI RAGGI (O GRADORI) DI INERZIA DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTIVAMENTE RISPETTO ALLASSE X, RISPETTO ALLASSE Y E RISPETTO AL POLO P:

$$p_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} \Rightarrow p_x^2 = \frac{J_x}{M} \quad [30]$$

$$p_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}} \Rightarrow p_y^2 = \frac{J_y}{M} \quad [31]$$

$$p_P = \sqrt{\frac{J_P}{M}} \Rightarrow p_P^2 = \frac{J_P}{M} \quad [32]$$

MEDIANTE LE [30] - [32] SI PÒ DARE SIGNIFICATO FISICO A QUESTE GRANDEZZE OSSERVANDO CHE

$$p_x^2 M = J_x \quad ; \quad p_y^2 M = J_y \quad ; \quad p_P^2 M = J_P$$

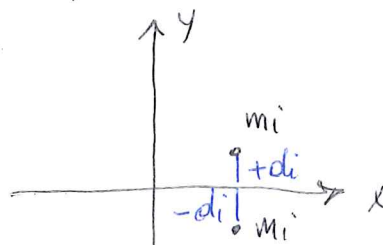
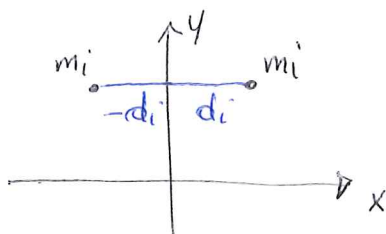
SICCHE' p_x, p_y, p_P SONO LE DISTANZE (DALLASSE X; DALLASSE Y; DAL POLO P) A CUI SI DEVE "COLLOCARE" LA MASSA TOTALE PER OTTENERE LO STESSO VALORE DI J_x, J_y, J_P RISPETTIVAMENTE.

LA [30] E LA [31] SONO LE CONTROPARTI, QUANDO SI OPERA CON I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE, DELLE RELAZIONI CHE LEGANO COORDINATE DEL BARICENTRO E MOMENTI STATICI:

$$x_G = \frac{S_y}{M} \Rightarrow x_G M = S_y$$

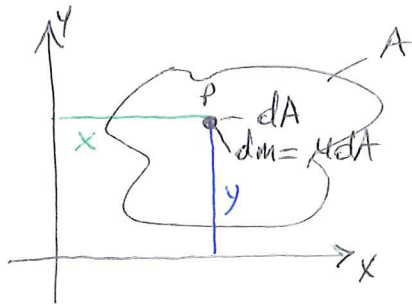
$$y_G = \frac{S_x}{M} \Rightarrow y_G M = S_x.$$

(5) SE IL SISTEMA DI MASSE E' TALE CHE L'ASSE Y (O L'ASSE X) SIA UN ASSE DI SIMMETRIA, ALLORA A OGNI MASSA m_i COLLOCATA A DISTANZA $+d_i$ DALLASSE NE CORRISPONDE SEMPRE UNA, EGUALE, COLLOCATA A DISTANZA $-d_i$: I CONTRIBUTI DI QUESTE MASSE AL MOMENTO CENTRIFUGO SI NEUTRALIZZANO E RISULTA $J_{xy} = 0$.



LA GENERALIZZAZIONE AL CASO DI DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MASSA SI OTTIENE PROCEDENDO COME GIÀ VISTO NEL CASO DEI MOMENTI DEL PRIMO ORDINE.

LIMITANDOSI, PER SEMPLICITÀ, ALLE SOLE DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI DI MASSA (IL CASO DI DISTRIBUZIONI LINEARI È CONCETTUALMENTE ANALOGO) SI HA:



PRESO UN PUNTO P AL QUALE È ASSOCIABILE UN'AREOLA INFINITESIMA dA , SI HA CHE LA CORRISPONDENTE MASSA ELEMENTARE dm VALE

$$dm = \mu(x,y) dA. \quad [33]$$

LE DEFINIZIONI DI MOMENTI D'INERZIA, CENTRIFUGO E POLARI DIVENGONO ALLORA:

$$I_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu(x,y) dA \quad [34]$$

$$I_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu(x,y) dA \quad [35]$$

$$I_{xy} = \int_A xy dm = \int_A xy \mu(x,y) dA \quad [36]$$

$$I_P = \int_A r^2 dm = \int_A r^2 \mu(x,y) dA = \int_A (x^2 + y^2) \mu(x,y) dA = I_x + I_y. \quad [37]$$

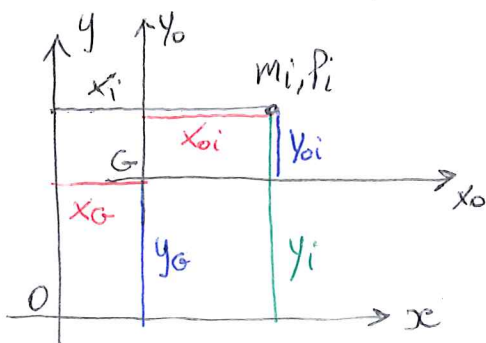
TEOREMI DI TRASERTO

CONSENTONO DI VALUTARE MOMENTI DI INERZIA E CENTRIFUGHI PER SISTEMI DI RIFERIMENTO CARTESIANI ORTOGONALI OTTENUTI PER TRASLAZIONE DEL "NUOVO" SISTEMA RISPETTO AL "VECCHIO".

IN PARTICOLARE DATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO $O-x-y$ ASSUME INTERESSE CONSIDERARE UN NUOVO SISTEMA $G-x_0-y_0$ CON L'ORIGINE COLLOCATA NEL BARICENTRO DEL SISTEMA DI MASSE E GLI ASSI x_0, y_0 PARALLELI AGLI ASSI x, y

CON RIFERIMENTO A SISTEMI DISCRETI DI MASSE (IL CASO DI SISTEMI CONTINUI È DI IMMEDIATA GENERALIZZAZIONE SE SI SOSTITUISCONO LE SOMMATORIE $[\Sigma]$ CON LE SOMME INTEGRALI $[\int]$) SI HA IL SEGUENTE LEGAME FRA LE COORDINATE

DEL PUNTO P_i NEL S.R. ORIGINALE: $P_i = (x_i, y_i)$ E IN QUELLO MODIFICATO: $P_i = (x_{0i}, y_{0i})$



$$x_i = x_{0i} + x_G$$

$$y_i = y_{0i} + y_G$$

DOVE (x_G, y_G) SONO LE COORDINATE DELL'ORIGINE G DEL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO RISPETTO AL PRECEDENTE; $G = (x_G, y_G)$. [NEL NUOVO SISTEMA

SI HA $G = (0, 0)$, OVVIAMENTE].

RISULTA QUINDI:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (y_{oi} + y_G)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (y_{oi}^2 + 2y_{oi}y_G + y_G^2) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i y_{oi}^2 + 2y_G \sum_{i=1}^N m_i y_{oi} + y_G^2 \sum_{i=1}^N m_i \end{aligned} \quad [38]$$

MA $\sum_{i=1}^N m_i y_{oi}^2 = J_{x_0}$ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO x_0

$\sum_{i=1}^N m_i y_{oi} = S_{x_0} = 0$ POICHE' IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO x_0 E' NULLO

$\sum_{i=1}^N m_i = M$ MASSA TOTALE

SI TROVA DUNQUE:

$$J_x = J_{x_0} + M y_G^2 \quad [39]$$

IN MODO ANALOGO:

$$J_y = J_{y_0} + M x_G^2 \quad [40]$$

PER IL MOMENTO CENTRIFUGO SI HA INVECE':

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = \sum_{i=1}^N m_i (x_{oi} + x_G)(y_{oi} + y_G) = \sum_{i=1}^N (m_i x_{oi} y_{oi} + m_i x_{oi} y_G + m_i x_G y_{oi} + m_i x_G y_G) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i x_{oi} y_{oi} + y_G \sum_{i=1}^N m_i x_{oi} + x_G \sum_{i=1}^N m_i y_{oi} + x_G y_G \sum_{i=1}^N m_i \end{aligned} \quad [41]$$

MA $\sum_{i=1}^N m_i x_{oi} y_{oi} = J_{x_0 y_0}$ MOMENTO CENTRIFUGO RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI x_0, y_0

$\sum_{i=1}^N m_i x_{oi} = S_{y_0} = 0$ POICHE' IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO y_0 E' NULLO

$\sum_{i=1}^N m_i y_{oi} = S_{x_0} = 0$ PER LO STESSO MOTIVO SOPRA INDICATO (ASSE x_0 E' BARICENTRICO)

$\sum_{i=1}^N m_i = M$ MASSA TOTALE

PERTANTO

$$J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \quad [41']$$

LE [39], [40], [41'] ESPRIMONO IL TEOREMA DEL TRASPORTO DI HUYGENS.

SI NOTI CHE, SE $m_i > 0 \forall i$, ALLORA J_{x_0} E J_{y_0} RAPPRESENTANO I MINIMI VALORI CHE I MOMENTI DI INERZIA J_x E J_y POSSONO ASSUMERE IN CORRISPONDENZA DI TUTTI GLI ASSI PARALLELI A QUELLI DATI. INOLTRE,

POICHE'

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2; \quad J_{y_0} = J_y - M x_G^2$$

DEVONO SEMPRE RISULTARE, NELL'IPOTESI FATTA, QUANTITA' ≥ 0 , NE SEGUE

CHE I CORRISPONDENTI RAGGI DI INERZIA:

$$J_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_x}{M} - y_G^2} = \sqrt{r_x^2 - y_G^2} \quad [42]$$

$$J_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_y}{M} - x_G^2} = \sqrt{r_y^2 - x_G^2} \quad [43]$$

ASSUMONO IL MINIMO VALORE POSSIBILE IN CORRISPONDENZA DI ASSI BARICENTRICI, PER I QUALI SI HA $y_G = 0; x_G = 0$.

LE [42] - [43] RIVELANO CHE PER OGNI COPPIA DI ASSI x, y NON BARICENTRICI E' SEMPRE

$$\begin{cases} r_x^2 \geq y_G^2 \\ r_y^2 \geq x_G^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x \geq y_G \\ r_y \geq x_G \end{cases}$$

SICCHE' IL PUNTO P^* NEL QUALE SI DEVE CONCENTRARE LA MASSA TOTALE M PER OTTENERE LO STESSO VALORE DEI MOMENTI DI INERZIA J_x, J_y :

$$\begin{aligned} J_x &= M r_x^2 \\ J_y &= M r_y^2 \end{aligned} \Rightarrow P^* = (r_y, r_x)$$

IN QUESTO ORDINE: J_x CONTIENE LE COORDINATE y DEL SISTEMA DI MASSE E J_y LE COORDINATE x !

E' PÙ DISTANTE DAGLI ASSI x, y DEL BARICENTRO $G = (x_G, y_G)$

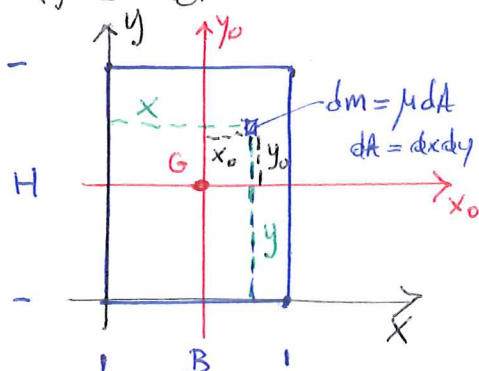
PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO CENTRIFUGO, CHE NON E' UNA QUANTITA' RISTRETTA IN SEGNO, PUO' RISULTARE $J_{x_0 y_0} \geq J_{xy}$.

SI PASSA A CONSIDERARE ALCUNE APPLICAZIONI NOTEVOLI; PER SEMPLICITA' SI ASSUME CHE IN TUTTI I CASI LA DISTRIBUZIONE DI MASSA SIA OMOGENEA, $\mu = 1$. IN QUESTE CIRCOSTANZE SI HA CHE:

- LE "MASSE" SONO OMOGENEE AL QUADRATO DI LUNGHEZZE: $[L^2]$;
- I MOMENTI STATICI SONO OMOGENEI A LUNGHEZZE ALLA TERZA POTENZA: $[L^3]$;
- I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE SONO OMOGENEI A LUNGHEZZE ALLA QUARTA POTENZA: $[L^4]$;
- TUTTE LE COORDINATE SONO OMOGENEE A LUNGHEZZE $[L]$.

QUESTE CONSIDERAZIONI SONO DI GRANDE UTILITA' PER UN CONTROLLO DIMENSIONALE DEI RISULTATI OTTENUTI.

1) SEZIONE RETTANGOLARE DI LATI B (BASE) E H (ALTEZZA)



PER QUANTO GIA' NOTO RISULTA

$$\begin{aligned} M &= A = BH && \leftarrow \text{OMOGENEA A } [L^2] \\ x_G &= \frac{B}{2} \\ y_G &= \frac{H}{2} \end{aligned} \Rightarrow G = \left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2} \right) \quad \leftarrow \text{OMOGENEA A } [L]$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y
NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0 E' $G = (0, 0)$.

$$I_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu dA = \underset{\mu}{1} \int_A y^2 dA = \int_0^B dx \int_0^H y^2 dy = \int_0^B \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^H dx = \frac{H^3}{3} \int_0^B 1 dx = \frac{H^3}{3} [x]_0^B$$

PERTANTO: $I_x = \frac{BH^3}{3}$ [44] \leftarrow OMOGENEO $A[L^4]$ 20

$$I_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu dA = \underset{\mu}{1} \int_A x^2 dA = \int_0^B x^2 dx \int_0^H 1 dy = \int_0^B \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^H dx = H \int_0^B x^2 dx = H \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^B$$

DUNQUE: $I_y = \frac{B^3H}{3}$ [45] \leftarrow OMOGENEO $A[L^4]$

$$I_{xy} = \int_A xy dm = \int_A xy \mu dA = \underset{\mu}{1} \int_A xy dA = \int_0^B x dx \int_0^H y dy = \int_0^B \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H x dx = \frac{H^2}{2} \int_0^B x dx = \frac{H^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^B$$

E QUINDI $I_{xy} = \frac{B^2H^2}{4}$ [46] \leftarrow OMOGENEO $A[L^4]$.

SI NOTI CHE I RISULTATI FIN QUI OTTENUTI SONO FACILMENTE GIUSTIFICABILI DA UN PUNTO DI VISTA FISICO-MATEMATICO: SE SI EFFETTUA UNO SCAMBIO $x \leftrightarrow y$ (SICCHE' $B \rightarrow H$ E $H \rightarrow B$) SI TROVA CHE LA [44] DIVIENE LA [45] (E VICEVERSA), MENTRE LA [46] E' INVARIANTE; CIÒ CORRISPONDE A RUOTARE GLI ASSI DI UN ANGOLO RETTO ($\pi/2$).

INOLTRE POICHE' LA FIGURA RICADE INTERAMENTE NEL PRIMO QUADRANTE, DOVE $x > 0, y > 0$ E' PERFETTAMENTE PLAUSIBILE CHE $I_{xy} > 0$.

PASSANDO AGLI ASSI BARICENTRICI E' CONVENIENTE UTILIZZARE IL TEOREMA DI HUYGENS PER CALCOLARE I_{x_0}, I_{y_0} E $I_{x_0y_0}$; SI LASCIA COME VERIFICA CALCOLARE LE SUDDETTE QUANTITA' MEDIANTE GLI INTEGRALI, TENENDO CONTO CHE IN QUESTO CASO CAMBIANO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE: SE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO xy SI HA, PER ESEMPIO CHE

$$M = \int_A dm = \int_A \mu dA = \underset{\mu}{1} \int_A dA = \int_0^B dx \int_0^H dy = \int_0^B \left[y \right]_0^H dx = H \left[x \right]_0^B = BH$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0 E' INVECE:

$$M = \int_A dm = \int_A \mu dA = \underset{\mu}{1} \int_A dA = \int_{-B/2}^{B/2} dx \int_{-H/2}^{H/2} dy = \int_{-B/2}^{B/2} \left[y \right]_{-H/2}^{H/2} dx = H \left[x \right]_{-B/2}^{B/2} = BH.$$

E COSI' VIA.

PER IL TEOREMA DEL TRASPORTO RESULTA:

$$I_x = I_{x_0} + M y_0^2 \Rightarrow I_{x_0} = I_x - M y_0^2 \Rightarrow I_{x_0} = \frac{BH^3}{3} - BH \left(\frac{H}{2} \right)^2$$

NE SEGUE IMMEDIATAMENTE $I_{x_0} = \frac{BH^3}{3} - \frac{BH^3}{4} \Rightarrow I_{x_0} = \frac{BH^3}{12}$ [47]

$$I_y = I_{y_0} + M x_0^2 \Rightarrow I_{y_0} = I_y - M x_0^2 \Rightarrow I_{y_0} = \frac{B^3H}{3} - BH \left(\frac{B}{2} \right)^2$$

DA CUI SEGUE: $J_{y_0} = \frac{B^3 H}{3} - \frac{B^3 H}{4} \Rightarrow J_{y_0} = \frac{B^3 H}{12}$ [48]

$J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \Rightarrow J_{x_0 y_0} = J_{xy} - M x_G y_G \Rightarrow J_{x_0 y_0} = \frac{B^2 H^2}{4} - BH \left(\frac{B}{2}\right) \left(\frac{H}{2}\right)$

E PERTANTO

$J_{x_0 y_0} = \frac{B^2 H^2}{4} - \frac{B^2 H^2}{4} \Rightarrow J_{x_0 y_0} = 0$ [49].

I RISULTATI OTTENUTI SONO ANCORA GIUSTIFICABILI SU BASI FISICO-MATEMATICHE: SE SI SCAMBIANO GLI ASSI (IL CHE EQUIVALE A RUOTARE LA FIGURA DI UN ANGOLO RETTO) SI VERIFICA CHE J_{x_0} SI SCAMBIA CON J_{y_0} E VICEVERSA; UOLTRE, COERENTEMENTE CON IL TEOREMA DI HUYGENS $J_x > J_{x_0} > 0$ E $J_y > J_{y_0} > 0$.

IN TERMINI DI RAGGI D'INERZIA SI HA, PER LE [44], [47] E PER LE [45], [48]:

$s_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{BH^3}{3}}{BH}} = \frac{H}{\sqrt{3}}$; $s_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{BH^3}{12}}{BH}} = \frac{H}{\sqrt{12}} = \frac{H}{2\sqrt{3}}$

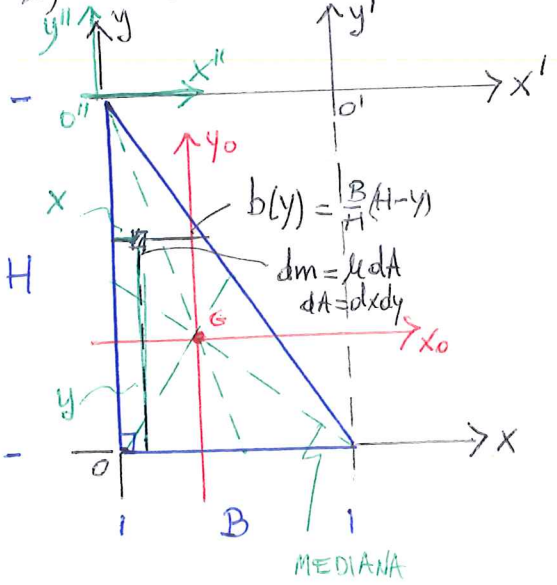
$s_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{B^3 H}{3}}{BH}} = \frac{B}{\sqrt{3}}$; $s_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{B^3 H}{12}}{BH}} = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{B}{2\sqrt{3}}$

QUINDI NEL CASO SPECIFICO $J_{x_0} = \frac{1}{4} J_x \Rightarrow s_{x_0} = \frac{1}{2} s_x$; $J_{y_0} = \frac{1}{4} J_y \Rightarrow s_{y_0} = \frac{1}{2} s_y$.

PER QUANTO RIGUARDA $J_{x_0 y_0}$ IL RISULTATO E' PLAUSIBILE POICHE' ENTRAMBI GLI ASSI x_0 E y_0 SONO DI SIMMETRIA PER LA FIGURA (IN REALTA' NE BASTEREBBE UNO SOLO) E DUNQUE NECESSARIAMENTE, PER QUANTO GIA' VISTO, $J_{x_0 y_0} = 0$.

IL RISULTATO PUO' ESSERE ULTERIORMENTE GIUSTIFICATO SE SI OSSERVA CHE LA FIGURA SI ESTENDE IN MISURA EGUALE IN TUTTE E QUATTRO I QUADRANTI INDIVIDUATI DAGLI ASSI x_0 E y_0 ; PERTANTO I CONTRIBUTI POSITIVI DEL 1° E 3° QUADRANTE VENGONO NEUTRALIZZATI DAI CORRISPONDENTI CONTRIBUTI NEGATIVI DEL 2° E 4° QUADRANTE.

2) SEZIONE A FORMA DI TRIANGOLO RETTANGOLO DI BASE B E ALTEZZA H.



PER QUANTO GIU' NOTO RISULTA:

$M = A = \frac{1}{2} BH$

$x_G = \frac{B}{3}$
 $y_G = \frac{H}{3} \Rightarrow G = \left(\frac{B}{3}, \frac{H}{3}\right)$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO (x, y)

E' INVECE $G = (0, 0)$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0

E $G = \left(-\frac{2}{3}B, -\frac{2}{3}H\right)$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x', y' .

CON GLI ASSI CHE CONTORNANO I VERTICI DEL TRIANGOLO CON ANGOLI ACUTI.

PER ESEGUIRE LE INTEGRAZIONI, SI OSSERVA CHE TUTTI GLI ASSI PARALLELI AX CHE INTERSECANO LA FIGURA PRODUGONO TRIANGOLI SIMILI, LA CUI BASE b(y) SI OTTENE CON LA SEGUENTE

PROPORZIONE: $\frac{B}{H} = \frac{b(y)}{H-y}$, SICCHE' $b(y) = \frac{B}{H}(H-y)$. SI OTTENE PERCIO':

$$I_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu dA = \underbrace{1}_{\mu} \int_A y^2 dA = \int_0^H y^2 \left[\int_0^{\frac{B(H-y)}{H}} dx \right] dy = \int_0^H y^2 \left[x \right]_0^{\frac{B(H-y)}{H}} dy = \int_0^H \left(\frac{B(H-y)}{H} \right) y^2 dy \quad 22$$

$$I_x = \frac{B}{H} \int_0^H (Hy^2 - y^3) dy = \frac{B}{H} \left[\frac{Hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^H = \frac{B}{H} \left[\frac{H^4}{3} - \frac{H^4}{4} \right] = \frac{B}{H} \frac{H^4}{12} \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{BH^3}{12}} \quad [50]$$

$$I_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu dA = \underbrace{1}_{\mu} \int_A x^2 dA = \int_0^H \left[\int_0^{\frac{B(H-y)}{H}} x^2 dx \right] dy = \int_0^H \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{B(H-y)}{H}} dy = \int_0^H \frac{B^3 (H-y)^3}{3 H^3} dy$$

$$I_y = \frac{B^3}{3H^3} \int_0^H (H-y)^3 dy = \frac{B^3}{3H^3} \left[\frac{(H-y)^4}{-4} \right]_0^H = \frac{B^3}{3H^3} \left(0 + \frac{H^4}{4} \right) = \frac{B^3 H^4}{12 H^3} \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{B^3 H}{12}} \quad [51]$$

$$I_{xy} = \int_A xy dm = \int_A xy \mu dA = \underbrace{1}_{\mu} \int_A xy dA = \int_0^H y \left[\int_0^{\frac{B(H-y)}{H}} x dx \right] dy = \int_0^H y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{B(H-y)}{H}} dy = \int_0^H \frac{B^2 (H-y)^2}{2H^2} y dy$$

$$I_{xy} = \frac{B^2}{2H^2} \int_0^H (Hy^2 - 2Hy^2 + y^3) dy = \frac{B^2}{2H^2} \left[\frac{Hy^3}{2} - \frac{2Hy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^H = \frac{B^2}{2H^2} \left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4} \right) = \frac{B^2 H^4}{2H^2} \left(\frac{6-8+3}{12} \right)$$

$$I_{xy} = \frac{B^2 H^2}{2} \cdot \frac{9-8}{12} \Rightarrow \boxed{I_{xy} = \frac{B^2 H^2}{24}} \quad [52]$$

SI OSSERVA ANCORA CHE LE [50], [51] SONO OTTENIBILI L'UNA DALL'ALTRA SE LA FIGURA VIENE RUOTATA DI $\frac{\pi}{2}$, OVVERO SE GLI ASSI X E Y VENGONO SCAMBIATI; NELLO STESSO MODO LA [52] RISULTA INVARIANTE RISPETTO A TALE SCAMBIO DI ASSI.

PER IL CALCOLO DEI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI RISULTA IN QUESTO CASO ESTREMAMENTE UTILE RICORRERE AL TEOREMA DI HUYGENS, STABILITE LA COMPLICAZIONE DI DEFINIRE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE NEL CALCOLO DIRETTO.

RISULTA, PER QUANTO GA' VISTO:

$$I_{x_0} = I_x - M y_G^2 \Rightarrow I_{x_0} = \frac{BH^3}{12} - \frac{BH}{2} \left(\frac{H}{3} \right)^2 = \frac{BH^3}{12} - \frac{BH^3}{18} = \frac{3-2}{36} BH^3$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{x_0} = \frac{BH^3}{36}} \quad [53]$$

$$I_{y_0} = I_y - M x_G^2 \Rightarrow I_{y_0} = \frac{B^3 H}{12} - \frac{BH}{2} \left(\frac{B}{3} \right)^2 = \frac{B^3 H}{12} - \frac{B^3 H}{18} = \frac{3-2}{36} B^3 H$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{y_0} = \frac{B^3 H}{36}} \quad [54]$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - M (x_G)(y_G) \Rightarrow I_{x_0 y_0} = \frac{B^2 H^2}{24} - \frac{BH}{2} \left(\frac{B}{3} \right) \left(\frac{H}{3} \right) = \frac{B^2 H^2}{24} - \frac{B^2 H^2}{18} = \frac{3-4}{72} B^2 H^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{x_0 y_0} = -\frac{B^2 H^2}{72}} \quad [55]$$

SI TROVA QUINDI CHE LE [53] E [54] SI POSSONO ANCORA OTTENERE L'UNA DALL'ALTRA SE SI SCAMBIANO GLI ASSI x_0 E y_0 (IL CHE SIGNIFICA RUOTARE GLI ASSI DI UN ANGOLO PARI A $\frac{\pi}{2}$); LA [55], ANCORA INVARIANTE RISPETTO ALLA SCELTA DEGLI ASSI ASSUME UN VALORE NEGATIVO PERCHE' LA MAGGIOR PARTE DELLA FIGURA RICADE NEL 2° E 4°

QUADRANTE RISPETTO AGLI ASSI x_0 E y_0 , A DIFFERENZA DI QUANTO SI VERIFICA NELLA [52], DOVE LA FIGURA È INTERAMENTE COLLOCATA NEL 1° QUADRANTE RISPETTO AGLI ASSI x E y . 23

PER CALCOLARE I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI x', y' SI USA ANCORA IL TEOREMA DI HUYGENS:

$$J_{x'} = J_{x_0} + M(y_0')^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2} \left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2} \left(\frac{4}{9}H^2\right) = \frac{BH^3}{36} + \frac{4BH^3}{18} = \frac{1+8}{36} BH^3$$

QUINDI $J_{x'} = \frac{BH^3}{4}$ [56]

$$J_{y'} = J_{y_0} + M(x_0')^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{BH}{2} \left(-\frac{2}{3}B\right)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{4}{18} B^3H = \frac{1+8}{36} B^3H = \frac{9}{36} B^3H$$

DUNQUE $J_{y'} = \frac{B^3H}{4}$ [57]

$$J_{x'y'} = J_{x_0y_0} + M(x_0')(y_0') = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{BH}{2} \left(-\frac{2}{3}B\right) \left(-\frac{2}{3}H\right) = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{B^2H^2}{18} \cdot 4 = \frac{-1+16}{72} B^2H^2$$

PERTANTO $J_{x'y'} = +\frac{5}{24} B^2H^2$ [58]

SI OSSERVA ANCORA CHE LE [56], [57] SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA SEGLI ASSI x', y' VENGONO RUOTATE DI $\frac{\pi}{2}$.

LA [58] È ANCORA INVARIANTE RISPETTO A UNO SCAMBIO DI ASSI: IL VALORE È POSITIVO PERCHÉ TUTTA LA FIGURA È CONTENUTA NEL 3° QUADRANTE RISPETTO ALLA COPPIA DI ASSI UTILIZZATA.

NOTA 4: SI OSSERVI CHE PER APPLICARE IL TEOREMA DI HUYGENS PER DETERMINARE I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO A NUOVI ASSI (PER ESEMPIO x', y') OCCORRE CONOSCERE I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI x_0, y_0 .

SE SI VOLESSERO DETERMINARE I VALORI DI $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ A PARTIRE DAI VALORI DI J_x, J_y, J_{xy} , CON x E y ASSI NON BARICENTRICI NON SI POSSONO USARE LE [58], [59], [60] NELLE QUALI I CONTRIBUTI DEI MOMENTI STATICI S_{x_0}, S_{y_0} SONO STATI ELIMINATI SOLO PERCHÉ GLI ASSI SONO BARICENTRICI.

NEL CASO GENERALE, SE LE COORDINATE DELL'ORIGINE O' DEGLI ASSI x', y' RISPETTO AGLI ASSI x, y SONO $O' = (x_0', y_0')$ LA ESPRESSIONE GENERALE DEL TEOREMA DEL TRASPORTO DIVIENE:

$$J_x = J_{x'} + 2y_0' S_{x'} + (y_0')^2 M \quad [59] \text{ E ANALOGHE ESPRESSIONI PER } J_y, J_{xy}.$$

$$\text{IN QUANTO } x_i = x_i' + x_0'$$

$$y_i = y_i' + y_0'$$

NELLA [59] COMPARE ESPLICITAMENTE IL MOMENTO STATICO DELLA FIGURA RISPETTO ALLO ASSE x' .

II

ANALOGAMENTE AL CASO ORA ANALIZZATO, SE SI VOLESSERO CALCOLARE I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE $J_{x''}, J_{y''}, J_{x''y''}$ RISPETTO AGLI ASSI x'', y'' , RISPETTO AI QUALI

LE COORDINATE DEL BARICENTRO $G = (x_G'', y_G'')$ VALGONO: $G = (\frac{B}{3}, -\frac{2}{3}H)$ SI TROVEREBBE

$$J_{x''} = J_{x_0} + M(y_G'')^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2} \left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{4BH^3}{18} = \frac{1+8}{36} BH^3 = \frac{9}{36} BH^3 = \frac{1}{4} BH^3$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x''} = \frac{BH^3}{4}} \quad [60]$$

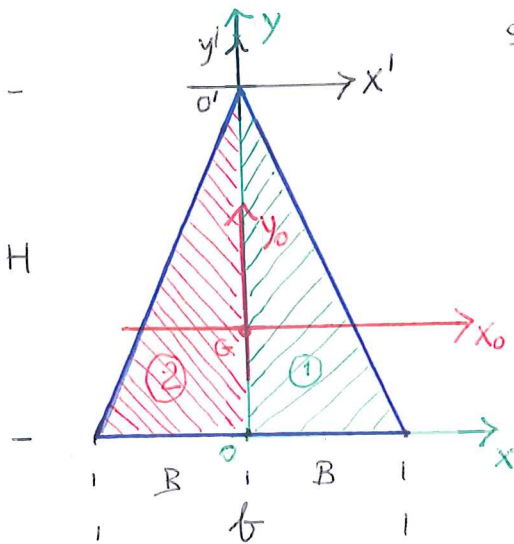
$$J_{y''} = J_{y_0} + M(x_G'')^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{BH}{2} \left(\frac{B}{3}\right)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{B^3H}{18} = \frac{1+2}{36} B^3H = \frac{3}{36} B^3H = \frac{1}{12} B^3H$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{y''} = \frac{B^3H}{12}} \quad [61]$$

$$J_{x''y''} = J_{x_0y_0} + M(x_G'')(y_G'') = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{BH}{2} \left(\frac{B}{3}\right) \left(-\frac{2H}{3}\right) = -\frac{B^2H^2}{72} - \frac{2B^2H^2}{18} = -\frac{1+8}{72} B^2H^2 = -\frac{9}{72} B^2H^2 = -\frac{1}{8} B^2H^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x''y''} = -\frac{B^2H^2}{8}} \quad [62]$$

3) SEZIONE PIANA A FORMA DI TRIANGOLO ISOSCELE DI BASE $b = 2B$ E DI ALTEZZA H . ($n=1$)



SI RICONOSCE CHE LA FIGURA È SCOMPONIBILE IN 2 TRIANGOLI RETTANGOLI, DI BASE $B = b/2$ E ALTEZZA H , ACCOSTATI LUNGO L'ALTEZZA.

TENUTO CONTO CHE LE COORDINATE DEL BARICENTRO G VALGONO NEI 3 SISTEMI DI RIFERIMENTO x, y ; x_0, y_0 ; x', y' :

$$\begin{cases} G = (x_G, y_G) = (0, \frac{H}{3}) \\ G = (x_{0G}, y_{0G}) = (0, 0) \\ G = (x'_G, y'_G) = (0, -\frac{2}{3}H) \end{cases} \quad \text{E CHE } M = \frac{bH}{2}$$

SI RICAVA AGEVOLMENTE DALLE [50], [51], [52]:

$$J_x = 2 \cdot \frac{BH^3}{12} = \frac{(2B)H^3}{12} = \frac{bH^3}{12} \Rightarrow \boxed{J_x = \frac{bH^3}{12}} \quad [63]$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{B^3H}{12} = \frac{2 \left(\frac{b}{2}\right)^3 H}{12} = \frac{\frac{1}{4} b^3 H}{12} = \frac{b^3 H}{48} \Rightarrow \boxed{J_y = \frac{b^3 H}{48}} \quad [64]$$

$$J_{xy} = \frac{B^2H^2}{24} - \frac{B^2H^2}{24} = 0 \Rightarrow \boxed{J_{xy} = 0} \quad [65]$$

↑
IL TRIANGOLO
RETTANGOLO (2)
È NEL 2° QUADRANTE!

DOVE IL FATTO CHE $J_{xy} = 0$ È CONSEGUENZA DIRETTA DEL FATTO CHE L'ASSE y È ASSE DI SIMMETRIA RETTA PER LA FIGURA.

APPLICANDO IL TEOREMA DI HUYGENS SI TROVA QUINDI:

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2 = \frac{bH^3}{12} - \frac{bH}{2} \left(\frac{H}{3}\right)^2 = \frac{bH^3}{12} - \frac{bH^3}{18} = \frac{3-2}{36} bH^3 \Rightarrow \boxed{J_{x_0} = \frac{bH^3}{36}} \quad [66]$$

$$J_{y_0} = J_y - M x_G^2 = \frac{b^3 H}{48} - \frac{bH}{2} \cdot 0^2 = \frac{b^3 H}{48} \Rightarrow \boxed{J_{y_0} = \frac{b^3 H}{48}} \quad [67]$$

$$J_{x_0 y_0} = J_{x y} - M x_G y_G = 0 - \frac{bH}{2} \cdot 0 \cdot \frac{H}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{J_{x_0 y_0} = 0} \quad [68]$$

SE SI VALUTANO INVECE I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI x', y' :

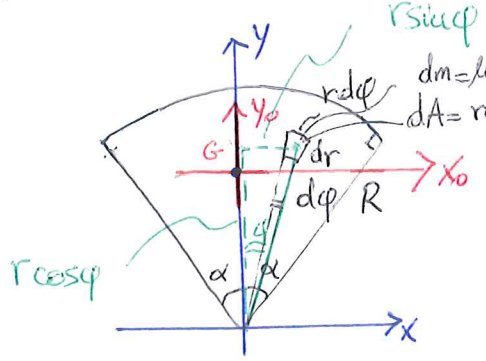
$$J_{x'} = J_{x_0} + M (y_G')^2 = \frac{bH^3}{36} + \frac{bH}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{bH^3}{36} + \frac{4}{9}bH^3 = \frac{1+8}{36}bH^3 = \frac{9}{36}bH^3 = \frac{1}{4}bH^3$$

PERTANTO: $\boxed{J_{x'} = \frac{bH^3}{4}} \quad [69]$

$$J_{y'} = J_{y_0} + M (x_G')^2 = \frac{b^3 H}{48} + \frac{bH}{2} \cdot 0^2 = \frac{b^3 H}{48} \Rightarrow \boxed{J_{y'} = \frac{b^3 H}{48}} \quad [70]$$

$$J_{x' y'} = J_{x_0 y_0} + M x_G' y_G' = 0 + \frac{bH}{2} \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}H\right) = 0 \Rightarrow \boxed{J_{x' y'} = 0} \quad [71]$$

4) SEZIONE PIANA A FORMA DI SETTORE CIRCOLARE DI RAGGIO R E SEMIAPERTURA α (CON $\mu=1$)



IN QUESTO CASO CONVIENE RICONDURRE TUTTE LE INTEGRAZIONI A COORDINATE POLARI.

SE SI SCEGLIE L'ASSE y CONCIDENTE CON L'ASSE DI SIMMETRIA DELLA FIGURA SI HA:

$$M = \int_A dm = \int_A \mu \cdot r dr d\phi = \mu \int_0^R r dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\phi$$

QUINDI: $M = \int_0^R r dr \cdot 2 \int_0^{\alpha} 1 \cdot d\phi = 2 \int_0^R r dr [\phi]_0^{\alpha} = 2\alpha \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \alpha R^2 \Rightarrow \boxed{M = \alpha R^2} \quad [72]$

SI OSSERVA CHE PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (SEMICERCHIO) SI HA DALLA [72]: $M = \frac{\pi R^2}{2}$ MENTRE NEL CASO $\alpha = \pi$ (CERCHIO COMPLETO) LA [72] FORNISCE: $M = \pi R^2$.

IN MODO SIMILE SI RICONOSCE CHE, RISULTANDO $y = r \cos \phi$; $x = r \sin \phi$

$$S_x = \int_A y dm = \int_A \mu y r dr d\phi = \mu \int_A r \cos \phi r dr d\phi = \int_A r^2 \cos \phi dr d\phi \text{ siccome}$$

$$S_x = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \phi d\phi = \int_0^R r^2 dr [\sin \phi]_{-\alpha}^{\alpha} = \int_0^R (\sin \alpha - \sin(-\alpha)) r^2 dr = 2 \sin \alpha \int_0^R r^2 dr$$

ovvero $S_x = 2 \sin \alpha \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \Rightarrow \boxed{S_x = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha} \quad [73]$

PERTANTO $y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha}{R^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}} \quad [74]$

DOVE IL RISULTATO [74] CONFERMA QUANTO GIÀ TROVATO IN PRECEDENZA (P. 14). PER QUANTO RIGUARDA S_y SI HA $S_y = 0$ PER RAGIONI DI SIMMETRIA. PERTANTO $G = \left(0, \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$.

PASSANDO A CALCOLARE I MOMENTI DEL 2° ORDINE SI HA:

$$I_x = \int_A y^2 dm = \int_A \mu y^2 dA = \mu \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi$$

POICHE' $\cos^2 \varphi$ E' FUNZIONE PARI (QUADRATO DI UNA FUNZIONE PARI E' ANCORA FUNZIONE PARI).

SI OSSERVA POI CHE VALGONO QUESTE IDENTITA' TRIGONOMETRICHE:

26

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2\sin^2 \varphi$$

E QUINDI SI PUO' RICAVARE DI QUI:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \quad [**]; \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \quad [**]$$

SEGUE DUNQUE:

$$I_x = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right] d\varphi = 2 \int_0^R r^3 dr \left[\frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\alpha} \right]$$

DUNQUE

$$I_x = \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \int_0^R r^3 dr = \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{R^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \quad [75]$$

DALLA [75] SI RICAVANO PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (SEMICERCHIO) $I_x = \frac{\pi R^4}{8}$ E PER $\alpha = \pi$ (CERCHIO)

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

ANALOGAMENTE SI OTTENE:

$$I_y = \int_A x^2 dm = \int_A \mu x^2 dA = \mu \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi$$

IN QUANTO $\sin^2 \varphi$ E' FUNZIONE PARI (QUADRATO DI UNA FUNZIONE DISPARI E' FUNZIONE PARI).

DA QUI, SERVENDOSI DELLA [**] SI RICAVA:

$$I_y = 2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right] d\varphi = 2 \int_0^R r^3 dr \left[\frac{1}{2} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\alpha} \right]$$

DUNQUE

$$I_y = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \int_0^R r^3 dr = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \quad [76]$$

DALLA [76] SI RICAVA PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (SEMICERCHIO) $I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ E PER $\alpha = \pi$ (CERCHIO) $I_y = \frac{\pi R^4}{4}$

INFINE SI HA:

$$I_{xy} = \int_A xy dm = \int_A \mu xy dA = \mu \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

ORA IL PRODOTTO $\cos \varphi \sin \varphi$ E' FUNZIONE DISPARI E IL SUO INTEGRALE, VALUTATO SU UN INTERVALLO SIMMETRICO E' NULLO.

DUNQUE $\boxed{I_{xy} = 0}$ [77]

RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI x_0, y_0 I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE SI OTTENGONO PER MEZZO DEL TEOREMA DI HUYGENS; RISULTA: 27

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2 = \frac{R^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \alpha R^2 \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 = \frac{R^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \frac{4}{9} R^4 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

NE SEGUE:

$$J_{x_0} = \frac{R^4}{4} \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{16}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right] \quad [78]$$

SI HA QUINDI NEI CASI SPECIALI:

PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (SEMICERCHIO): $J_{x_0} = \frac{R^4}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{16}{9} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8}{9} \frac{R^4}{\pi}$

PER $\alpha = \pi$ (CERCHIO): $J_{x_0} = \frac{R^4}{4} \pi \Rightarrow J_{x_0} = \frac{\pi R^4}{4}$

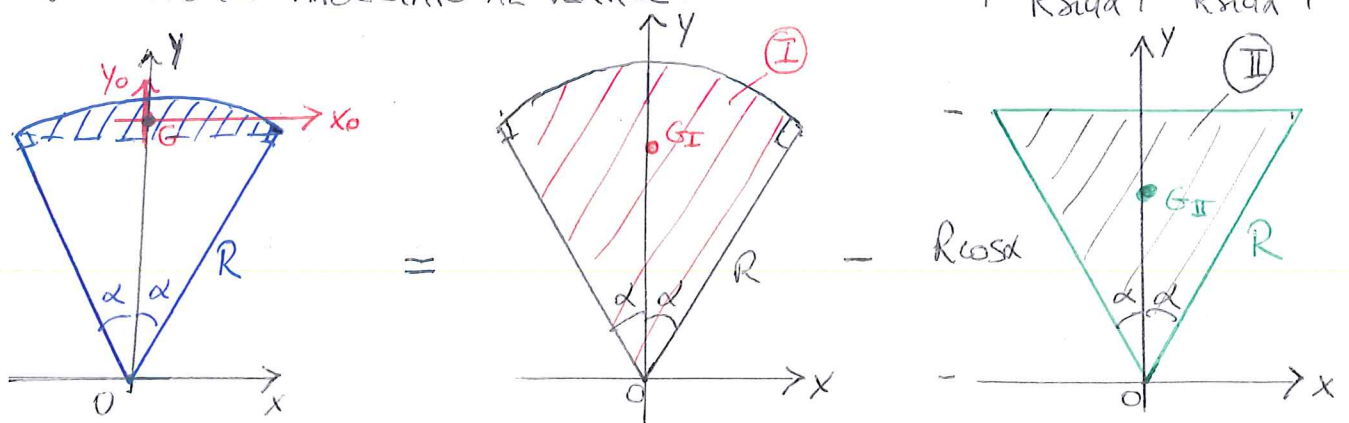
$$J_{y_0} = J_y - M x_G^2 = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \alpha R^2 (0)^2 = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \equiv J_y$$

PERTANTO $J_{y_0} = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ [79]

$$J_{x_0 y_0} = J_{xy} - M x_G y_G = 0 - \alpha R^2 (0) \left(\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = 0 \Rightarrow J_{x_0 y_0} = 0 \quad [80]$$

5) SEZIONE PIANA A FORMA DI SEGMENTO CIRCOLARE DI RAGGIO R E SEMIAPERTURA α ($\mu=1$).

QUESTO CASO PUO' ESSERE STUDIATO COME DIFFERENZA DI 2 FIGURE: UN SETTORE CIRCOLARE DI EGUALE RAGGIO E APERTURA E UN TRIANGOLO ISOSCELE DI ALTEZZA $R \cos \alpha$ E BASE $b = 2R \sin \alpha$ APPOGGIATO AL VERTICE.



RISULTA, OPERANDO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y (SI NOTI CHE E' POSSIBILE SOMMARE MOMENTI DEL PRIMO O DEL SECONDO ORDINE SOLO SE QUESTI SONO RIFERITI AGLI STESSI ASSI!)

$$M_I = R^2 \alpha$$

$$G_I = \left(0, \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

$$M_{II} = - \frac{(R \cos \alpha)(2R \sin \alpha)}{2} = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad G_{II} = \left(0, \frac{2}{3} R \cos \alpha \right)$$

PERTANTO

$$S_{x_I} = R^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha; \quad S_{x_{II}} = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha = -\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

SIMILMENTE È!

$$S_{yI} = R^2 \alpha \cdot 0 = 0$$

$$S_{yII} = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot 0 = 0$$

28

SI HA DUNQUE

$$M = M_I + M_{II} = R^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = R^2 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

↑
 M_{II} HA DENSITA' NEGATIVA! $M_{II} < 0$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha$$

$$S_y = S_{yI} + S_{yII} = 0$$

SI HA PERTANTO

$$x_G = \frac{S_y}{M} = 0 \quad (\text{GIUSTIFICATO DA CONSIDERAZIONI DI SIMMETRIA})$$

$$y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha}{\frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

$$\text{PERTANTO } G = \left(0, \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$$

PER I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE SI TROVA:

$$J_{xI} = \frac{R^4}{4} \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right] = \frac{R^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha) \quad \text{PER LA [75]}$$

$$J_{xII} = - \frac{2R \sin \alpha (R \cos \alpha)^3}{4} = - \frac{R^4}{4} 2 \sin \alpha \cos^3 \alpha = - \frac{R^4}{4} (\sin \alpha \cos \alpha) \cos^2 \alpha$$

↑
IN BASE ALLA [69]

D'ALTRA PARTE, PER LA [4], PAG. 26 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ SICCHE'

$$J_{xII} = - \frac{R^4}{2} \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \right] \left(\frac{1}{2} \right) [1 + \cos 2\alpha] = - \frac{R^4}{8} [\sin 2\alpha] (1 + \cos 2\alpha)$$

OVVERO ANCHE

$$J_{xII} = - \frac{R^4}{8} (\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = - \frac{R^4}{8} \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

$$J_x = J_{xI} + J_{xII} = \frac{R^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha) - \frac{R^4}{8} \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

$$J_x = \frac{R^4}{8} \left(2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha} - \cancel{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

$$\text{È DUNQUE } J_x = \frac{R^4}{8} \left(2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) \Rightarrow \boxed{J_x = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)} \quad [81]$$

CHE PUÒ ESSERE ANCHE SCRITTO NELLA FORMA EQUIVALENTE $J_x = \frac{R^4}{4} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \cos^3 \alpha \right)$

SIMILMENTE SI TROVA:

$$J_{yI} = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \text{ PER LA [76]}$$

$$J_{yII} = - \frac{(2R \sin \alpha)^3 \cdot R \cos \alpha}{48} = - \frac{8R^4 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{486} = - \frac{R^4}{6} \sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \alpha) \text{ PER LA [64]}$$

NE SEGUE, UTILIZZANDO LA [**], PAG. 26

$$J_{yII} = - \frac{R^4}{6} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = - \frac{R^4}{24} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = - \frac{R^4}{24} \left(\sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

SI HA QUINDI:

$$J_y = J_{yI} + J_{yII} = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \frac{R^4}{24} \left(\sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \frac{R^4}{24} \left(6\alpha - 3\sin 2\alpha - \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

CIOE'

$$J_y = \frac{R^4}{24} \left(6\alpha - 4\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right)$$

OVVERO

$$J_y = \frac{R^4}{48} \left(12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha \right) \quad [82]$$

POICHE' Y E' ASSE DI SIMMETRIA PER LA FIGURA SI OTTIENE IMMEDIATAMENTE $J_{xy} = 0$ [83]

I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI SI DETERMINANO DALLE [81]-[83] UTILIZZANDO IL TEOREMA DI HUYGENS.

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2 = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) - \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) \left[\frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)} \right]^2$$

DUNQUE

$$J_{x_0} = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) - \frac{R^4}{9} (2\alpha - \sin 2\alpha) \frac{\sin^6 \alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}$$

PERTANTO

$$J_{x_0} = \frac{R^4}{4} \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) - \frac{8}{9} R^4 \frac{\sin^6 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad [84]$$

O ANCHEI IN MODO EQUIVALENTE:

$$J_{x_0} = \frac{R^4}{16} (4\alpha - \sin 4\alpha) - \frac{8}{9} R^4 \frac{\sin^6 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad [84']$$

$$J_{y_0} = J_y - M x_G^2 = \frac{R^4}{48} (12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) - \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) \cdot 0^2 = J_y$$

QUINDI

$$J_{y_0} = \frac{R^4}{48} (12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) \quad [85]$$

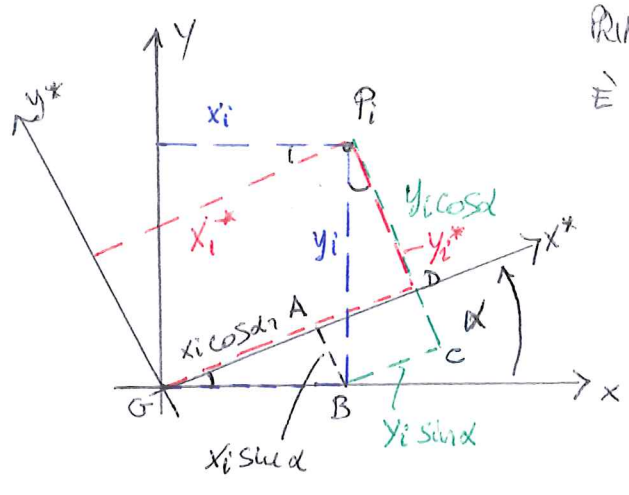
POICHE' $J_{xy} = 0$ E $x_G = 0$ E' ANCHE

$$J_{x_0 y_0} = 0 \quad [86]$$

LEGGE DI VARIAZIONE DEI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE PER ROTAZIONI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

SI CONSIDERANO 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO, ENTRAMBI CENTRATI SUL BARICENTRO G E INDIVIDUATI L'UNO DAGLI ASSI x, y (SAREBBERO GLI ASSI x₀ E y₀ UTILIZZATI IN PRECEDENZA; PER PRATICITA' DI SCRITTURA SI TRALASCA L'INDICE 0), L'ALTRO DAGLI ASSI x* E y*, RUOTATI DI UN ANGOLO α RISPETTO AI PRECEDENTI.

SE LE COORDINATE DI UN PUNTO P_i SONO P_i = (x_i, y_i) NEL PRIMO SISTEMA DI RIFERIMENTO E P_i = (x_i^{*}, y_i^{*}) NEL SECONDO, È AGEVOLE VERIFICARE CHE VALGONO QUESTE RELAZIONI:



$$\begin{aligned} \overline{PC} &= y_i \cos \alpha \\ \overline{BC} &= y_i \sin \alpha = \overline{AD} \\ \overline{GA} &= x_i \cos \alpha \\ \overline{AB} &= x_i \sin \alpha = \overline{DC} \\ \overline{PD} &= y_i^* = \overline{PC} - \overline{DC} = y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha \\ \overline{DG} &= x_i^* = \overline{GA} + \overline{AD} = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha \end{aligned}$$

PERTANTO FRA LE COORDINATE x_i^{*}, y_i^{*} E LE COORDINATE x_i, y_i SUSSISTONO QUESTI LEGAMI:

$$\begin{cases} x_i^* = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha \\ y_i^* = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \end{cases} \quad [87]$$

I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI SONO DATI, NEL CASO DI MASSE DISCRETE (NEL CASO DI MASSE DISTRIBUITE CON CONTINUITA' LA GENERALIZZAZIONE È SEMPLICE, RICHIEDENDO SOLO DI SOSTITUIRE LE SOMMATORIE CON SOMME INTEGRALI E LE MASSE PUNTI FORMI m_i CON LA DISTRIBUZIONE CONTINUA ρ(x, y) [0, ρ(x, y)]):

$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \quad [88]$$

$$J_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad [89]$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \quad [90]$$

QUELLI RISPETTO AI NUOVI ASSI x*, y* SONO ANALOGAMENTE COSÌ DEFINITI:

$$J_{x^*} = \sum_{i=1}^N m_i y_i^{*2} = \sum_{i=1}^N m_i (-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha)^2 \quad [91]$$

$$J_{y^*} = \sum_{i=1}^N m_i x_i^{*2} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha)^2 \quad [92]$$

$$J_{x^* y^*} = \sum_{i=1}^N m_i x_i^* y_i^* = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha)(-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha) \quad [93]$$

SE ORA SI ESPANDONO LE [91] - [93] (OTTENUTE SOSTITUENDO LE 87) SI GIUNGE A ESPRIMERE I MOMENTI DEL 2° ORDINE NEL SISTEMA RUOTATO IN FUNZIONE DI J_x, J_y, J_{xy}

PROCEDENDO SI TROVA:

$$J_{x^*} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 \sin^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \alpha - 2x_i y_i \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$J_{y^*} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 \sin^2 \alpha + 2x_i y_i \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$J_{x^* y^*} = \sum_{i=1}^N m_i (-x_i^2 \sin \alpha \cos \alpha + y_i^2 \sin \alpha \cos \alpha + [x_i y_i](\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha))$$

OVVERO:

$$J_{x^*} = \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \right) \sin^2 \alpha + \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \right) \cos^2 \alpha - 2 \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{y^*} = \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \right) \cos^2 \alpha + \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \right) \sin^2 \alpha + 2 \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{x^* y^*} = \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \right) \sin \alpha \cos \alpha + \left(\sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \right) \sin \alpha \cos \alpha + \left(\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \right) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

DA QUI, TENENDO CONTO DELLE [88] - [90] SI RIGATA:

$$J_{x^*} = J_y \sin^2 \alpha + J_x \cos^2 \alpha - 2 J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad [91']$$

$$J_{y^*} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + 2 J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad [92']$$

$$J_{x^* y^*} = - J_y \sin \alpha \cos \alpha + J_x \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad [93']$$

D'ALTRA PARTE PER LE [8] [88] DI PAG. 26 E PER NOTE RELAZIONI TRIGONOMETRICHE SI HA:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha); \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha); \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

SI ARRIVA A RISCRIVERE LE [91'] - [93'] IN QUESTA FORMA:

$$J_{x^*} = J_y \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + J_x (1 + \cos 2\alpha) - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{y^*} = J_y \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + J_x (1 - \cos 2\alpha) + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{x^* y^*} = - \frac{1}{2} J_y \sin 2\alpha + \frac{1}{2} J_x \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

OVVERO ANCHE, RIORDINANDO I TERMINI:

$$J_{x^*} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \quad [94]$$

$$J_{y^*} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \quad [95]$$

$$J_{x^* y^*} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \quad [96]$$

LE [94] - [96] PERMETTONO DI DETERMINARE IMMEDIATAMENTE, NOTI J_x, J_y, J_{xy} E L'ANGOLO DI ROTAZIONE α , I NUOVI VALORI DEI MOMENTI DEL 2° ORDINE: $J_{x^*}, J_{y^*}, J_{x^* y^*}$.

NOTA 5: SI OSSERVA CHE LA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ESPRESSA DALLE [87], QUANDO LA SI RISCRIVE IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{Bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad [87']$$

ALTRO NON RAPPRESENTA CHE UNA ROTAZIONE RIGIDA FINITA.

SE SI OSSERVA INFATTI CHE $\begin{Bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{Bmatrix}$ ALTRO NON È CHE IL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO P_i NEL "NUOVO" SISTEMA DI RIFERIMENTO, SICCHÉ $P_i = (x_i^*, y_i^*) = P_i^*$ E DUNQUE $(P_i^* - G)$ MENTRE $\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}$ ALTRO NON È CHE IL VETTORE POSIZIONE DEL MEDESIMO PUNTO P_i NEL "VECCHIO" SISTEMA DI RIFERIMENTO, $P_i = (x_i, y_i) = P_i$ E DUNQUE $(P_i - G)$ SI PUÒ RISCRIVERE LA [87'] COME

$$(P_i^* - G) = \underline{\underline{R'}} (P_i - G) \quad [87'']$$

DOVE IL TENSORE DI ROTAZIONE $\underline{\underline{R'}}$ È DEFINITO DALLA MATRICE $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. QUESTO DIFFERISCE DA $\underline{\underline{R}}$ DEFINITO NELLA LEZIONE 14, PAG. 2 PERCHÉ IN QUESTO CASO NON È IL VETTORE CHE RUOTA MA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO, ED È AGEVOLE RICONOSCERE CHE $\underline{\underline{R'}} = \underline{\underline{R}}^T$ CIOÈ È IL TRASPOSTO DEL TENSORE $\underline{\underline{R}}$, SICCHÉ, NELLA RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE LE DUE MATRICI SONO L'UNA LA TRASPOSTA DELL'ALTRA. \square

DATE LE [94]-[96] È SENSAZIO RICERCARE PER QUALI VALORI DI α IL MOMENTO DI INERZIA $J_{x^*} (o J_{y^*})$ ATTINGE UN VALORE MASSIMO O MINIMO.

A QUESTO SCOPO SI IMPONE LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ:

$$\frac{dJ_{x^*}}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \right] = 0 \quad [97]$$

CALCOLANDO LE DERIVATE SI OTTIENE

$$\frac{J_x - J_y}{2} \frac{d \cos 2\alpha}{d\alpha} - J_{xy} \frac{d \sin 2\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{J_x - J_y}{2} (-2 \sin 2\alpha) - J_{xy} \cdot 2 \cos 2\alpha = 0$$

CHE, SEMPLIFICATA, FORNISCE:

$$\boxed{\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0} \quad [97']$$

EGUALE ALLA [96] POSTA EGUALE A ZERO.

SI DEDUCE QUINDI CHE I VALORI DI α CHE RENDONO STAZIONARIO $J_{x^*} (o, \text{CON CONTI ANALOGHI, } J_{y^*})$ SONO QUELLI PER I QUALI $J_{x^*y^*} = 0$.

PERTANTO DETTI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA (IN QUESTO CASO, POICHÉ GLI ASSI SONO ANCHE BARICENTRICI SI PARLA PIÙ PROPRIAMENTE DI ASSI CENTRALI DI INERZIA) QUEGLI ASSI RISPETTO AI QUALI IL MOMENTO D'INERZIA È STAZIONARIO (O

MASSIMO, O MINIMO), SI HA CHE RISPETTO A QUESTI ASSI, CHE RISULTANO ORTOGONALI, È NULLO IL MOMENTO CENTRIFUGO.

ALTERNATIVAMENTE) SE IL MOMENTO CENTRIFUGO SI ANNULLA RISPETTO A UNA COPPIA DI ASSI ORTOGONALI, QUESTI RISULTANO ESSERE ASSI PRINCIPALI D'INERZIA.

DALLA [97'] SE SI DIVIDONO I TERMINI PER $\cos 2\alpha \neq 0$ SI OTTIENE:

$$\frac{I_x - I_y}{2} \tan 2\alpha + I_{xy} = 0$$

DA CUI SEGUE

$$\tan 2\alpha = \frac{-I_{xy}}{\frac{I_x - I_y}{2}} = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad [98]$$

RICORDANDO CHE LA FUNZIONE TAN È PERIODICA DI PERIODO π , SE SI SCEGLIE L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE $-\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ SI PUÒ RICAVARE LA SOLUZIONE DELLA [98] UTILIZZANDO LA FUNZIONE INVERSA:

$$2\alpha = \arctan \left(\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$$

QUESTO INDIVIDUA DUE SOLUZIONI PER α : UNA, INDICATA CON α_0 CHE APPARTIENE ALL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$; LA SECONDA, INDICATA CON α_1 , DATA DA $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$

LE 2 RADICI CORRISPONDONO A DUE DISTINTE ROTAZIONI DELL'ASSE X, CHE INDIVIDUANO 2 DIREZIONI FRA LORO ORTOGONALI, CHE DEFINISCONO UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE, COSTITUITO DAGLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA. QUESTI GODONO DELLA SEGUENTE PROPRIETÀ: OGNI ASSE DI SIMMETRIA ORTOGONALE È ANCHE ASSE PRINCIPALE D'INERZIA.

PER STABILIRE A QUALE ANGOLO DI ROTAZIONE FRA α_0 E α_1 CORRISPONDA IL MASSIMO O IL MINIMO VALORE DEL MOMENTO D'INERZIA, SI VALUTA LA DERIVATA SECONDA DELLA [94]:

$$\frac{d^2 I_x}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha_0} = -2(I_x - I_y) \cos 2\alpha + 4I_{xy} \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \left[-2(I_x - I_y) + 4I_{xy} \tan 2\alpha \right] \quad [99]$$

MA $\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$ SICCHÉ SI OTTIENE DALLA [99]:

$$\cos 2\alpha_0 \left[-2(I_x - I_y) - \frac{8I_{xy}^2}{I_x - I_y} \right] = -\frac{\cos 2\alpha_0}{I_x - I_y} \left[2(I_x - I_y)^2 + 8I_{xy}^2 \right] \quad [99]$$

NELLA [99] IL TERMINE FRA [] È SEMPRE POSITIVO, COME PURE $\cos 2\alpha_0$ (DATO CHE α_0 È DEFINITO DA $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$).

PERTANTO IL SEGNO DI $\left. \frac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_0}$ È COMPLETAMENTE DEFINITO DAL TERMINE $-(J_x - J_y)$.

RICORDANDO CHE SE LA DERIVATA SECONDA IN UN PUNTO DI STAZIONARIETÀ DI UNA FUNZIONE È < 0 , ALLORA LA FUNZIONE È MASSIMA NEL PUNTO, MENTRE SE RISULTA > 0 , ALLORA LA FUNZIONE È MINIMA NEL PUNTO SI RICAVALI.

- SE $J_x - J_y > 0$
 - α_0 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MASSIMO, $J_{max} = J_x$
 - α_1 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MINIMO, $J_{min} = J_y$
- SE $J_x - J_y < 0$
 - α_0 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MINIMO, $J_{min} = J_y$
 - α_1 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MASSIMO, $J_{max} = J_x$

OCCORRE TRATTARE SEPARATAMENTE IL CASO IN CUI $J_x = J_y = J$; IN TAL CASO LE [94] - [96] DIVENGONO:

$$J_{x^*} = \frac{J_x + J_y}{2} - J_{xy} \sin 2\alpha = J - J_{xy} \sin 2\alpha \quad [94']$$

$$J_{y^*} = \frac{J_x + J_y}{2} + J_{xy} \sin 2\alpha = J + J_{xy} \sin 2\alpha \quad [95']$$

$$J_{x^*y^*} = J_{xy} \cos 2\alpha \quad [96']$$

LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ FORNISCE:

$$\frac{d J_{x^*}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 J_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad [100].$$

ANCORA EQUIVALENTE ALLA [96'], E AMMETTE QUESTE SOLUZIONI:

$$\begin{cases} \text{SE } J_{xy} = 0 \Rightarrow 2\alpha \text{ QUALSIASI} \\ \text{SE } J_{xy} \neq 0 \cos 2\alpha = 0 \\ \Rightarrow 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PERTANTO NEL PRIMO CASO ($J_{xy} = 0$), CHE SI VERIFICA SEMPRE NEL CASO DI MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AD ASSI BARICENTRICI PER POLIGONI REGOLARI, SI HA CHE OGNI VALORE DI α INDIVIDUA UNA DIREZIONE PRINCIPALE DI INERZIA.

NEL SECONDO CASO $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ E $\alpha_1 = \frac{3}{4}\pi$; PER LA DETERMINAZIONE DELL'ASSE DI MASSIMO/MINIMO MOMENTO DI INERZIA, SI VALUTA IL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

$\frac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2}$ IN CORRISPONDENZA DI α_0 E DI α_1 .

SI HA:
$$\frac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2} = +4 J_{xy} \sin 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \quad [\sin 2\alpha_0 = +1] & > 0 \text{ SE } J_{xy} > 0 \\ & < 0 \text{ SE } J_{xy} < 0 \\ \alpha = \alpha_1 = \frac{3\pi}{4} \quad [\sin 2\alpha_1 = -1] & < 0 \text{ SE } J_{xy} > 0 \\ & > 0 \text{ SE } J_{xy} < 0 \end{cases}$$

PERTANTO SE $J_{xy} < 0$ α_0 CORRISPONDE A $J_{max} = J_x$ E α_1 A $J_{min} = J_y$
 SE $J_{xy} > 0$ α_1 CORRISPONDE A $J_{max} = J_x$ E α_0 A $J_{min} = J_y$.

A QUESTO PUNTO SOSTITUENDO I VALORI DI α_0 (O DI α_1) NELLE [94] - [95] O NELLE [94'] - [95'] (NEL CASO SPECIALE $J_x - J_y = 0$) SI POSSONO DETERMINARE

I VALORI DI $J_{\xi} = J_{\max}$ E DI $J_{\eta} = J_{\min}$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE QUESTI RISULTANO COSÌ ESPRESSI:

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad [101]$$

DOVE IL SEGNO \oplus FORNISCE J_{ξ} E IL SEGNO \ominus J_{η} .

LA DIMOSTRAZIONE VERRÀ VISTA QUANDO SI DOVRÀ RISOLVERE L'ANALOGO PROBLEMA DI DETERMINAZIONE DEGLI SFORZI PRINCIPALI ASSOCIATI A UNO STATO PIANO DI SFORZO.

A QUESTO PUNTO SI È IN GRADO DI DETERMINARE PER UNA FIGURA PIANA QUALSIASI QUALI SONO I VALORI DEI MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA E L'INCLINAZIONE DEI CORRISPONDENTI ASSI PRINCIPALI.

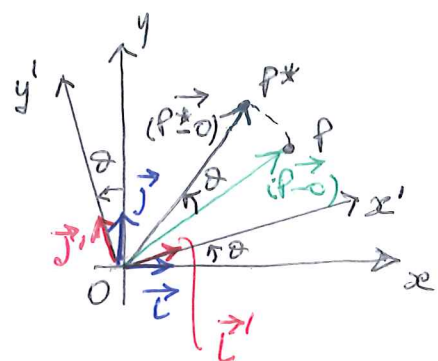
OPERATIVAMENTE I PASSI DA SEGUIRE SONO QUESTI:

- 1) SI STABILISCONO (SE NON SONO GIÀ ASSEGNATI) GLI ASSI DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE CHE RENDANO PIÙ AGEVOLI I CALCOLI (PER ESEMPIO: ASSI CHE LAMBISSONO LA FIGURA; OPPURE ASSI PASSANTI PER IL BARICENTRO DELLA FIGURA [SE QUESTA È SEMPLICE] O DI PARTI SALIENTI DELLA FIGURA).
- 2) SE NECESSARIO SI SCOMPONE LA FIGURA IN PORZIONI DISGIUNTE, PIÙ SEMPLICI
- 3) SI DETERMINANO LE MASSE (AREE, NEL CASO OMOGENEO) CORRISPONDENTI ALLE PARTI COSTITUENTI LA FIGURA E SI DETERMINANO LE COORDINATE DEI RELATIVI BARICENTRI, RIFERITI AGLI ASSI INDIVIDUATI AL PUNTO 1)
- 4) CON QUESTI DATI SI VALUTANO I MOMENTI STATICI RELATIVI AGLI ASSI DI TUTTE LE PARTI COSTITUENTI COSÌ DA OTTENERE I MOMENTI STATICI COMPLESSIVI DELLA FIGURA, S_y E S_x E LA MASSA TOTALE, M
- 5) MEDIANTE LE [14], [15'] (PAG. 5) SI VALUTANO LE COORDINATE DEL BARICENTRO DELLA FIGURA, G .
- 6) SI PASSA A CALCOLARE, ANCORA PROCEDENDO SEPARATAMENTE PER TUTTE LE PARTI COSTITUENTI I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO
- 7) SI SOMMANO I CONTRIBUTI DI TUTTE LE PARTI COSTITUENTI, DETERMINANDO J_x, J_y, J_{xy} PER L'INTERA FIGURA.
- 8) MEDIANTE I TEOREMI DI TRASPORTO SI DETERMINANO I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI PARALLELI A QUELLI DATI, $J_{x_0}, J_{y_0}, J_{x_0 y_0}$.
- 9) MEDIANTE LA [88] (O LA [100] NEL CASO $J_{x_0} = J_{y_0}$ MA $J_{x_0 y_0} \neq 0$) SI DETERMINANO LE DIREZIONI α_0 E α_1 DEGLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA, ξ ED η .
- 10) MEDIANTE LA [101] SI GIUNGE INFINE A DETERMINARE $J_{\xi} = J_{\max}$ E $J_{\eta} = J_{\min}$.

IL PROCEDIMENTO È ILLUSTRATO NELL'ESEMPIO CONCLUSIVO PRESENTATO DI SEGUITO.

NOTA 6. TRASFORMAZIONE PER ROTAZIONE RIGIDA DI COMPONENTI E DEI VETTORI BASE.

SI È VISTO, NELLA LEZIONE 14, CHE NEL CASO PIANO, PER EFFETTO DI UNA ROTAZIONE RIGIDA ATTORNO A UN CENTRO DI ROTAZIONE O, DEFINITA DALL'OPERATORE DI ROTAZIONE (TENSORE) \underline{R} , IL GENERICO VETTORE POSIZIONE ($P-O$) SI TRASFORMA NEL VETTORE (RUOTATO ATTORNO A O) (P^*-O): $(P^*-O) = \underline{R} (P-O)$



$$P = (x_P, y_P)$$

$$(P-O) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \text{ NELLA BASE } \vec{i}, \vec{j}$$

$$P^* = (x_P^*, y_P^*)$$

$$(P^*-O) = x_P^* \vec{i}' + y_P^* \vec{j}' = \begin{Bmatrix} x_P^* \\ y_P^* \end{Bmatrix} \text{ NELLA BASE } \vec{i}', \vec{j}'$$

BASANDOSI SU QUANTO GIÀ VISTO, RISULTA: $\underline{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ E INOLTRE:

$$\begin{Bmatrix} x_P^* \\ y_P^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_P^* \\ y_P^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_P \cos\theta - y_P \sin\theta \\ x_P \sin\theta + y_P \cos\theta \end{Bmatrix} \text{ [a] SEMPRE NELLA BASE } \vec{i}', \vec{j}'.$$

$$(P^*-O) = \underline{R}(\theta) \cdot (P-O)$$

$$\text{È DUNQUE } (P^*-O) = \underbrace{(x_P \cos\theta - y_P \sin\theta)}_{x_P^*} \vec{i}' + \underbrace{(x_P \sin\theta + y_P \cos\theta)}_{y_P^*} \vec{j}' = x_P^* \vec{i}' + y_P^* \vec{j}' \text{ [b]}$$

D'ALTRA PARTE IL TENSORE DI ROTAZIONE \underline{R} TRASFORMA TUTTI I VETTORI DEL PIANO, INCLUSI I VETTORI BASE \vec{i}, \vec{j} ; PER ESSI RISULTA:

$$\vec{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \vec{j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{i}' = \underline{R} \vec{i}; \vec{j}' = \underline{R} \vec{j} \text{ DOVE}$$

$$\vec{i}' = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{Bmatrix}; \vec{j}' = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{i}' = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}$$

$$\vec{j}' = \beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j}$$

$$\vec{i}' = \underline{R} \vec{i}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{i}' = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \text{ [a]}$$

$$\vec{j}' = \underline{R} \vec{j}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{j}' = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \text{ [b]}$$

L'ESAME DEI VERSORI "RUOTATI" \vec{i}', \vec{j}' SUGGERISCE CHE \underline{R} PUÒ ESSERE COSTRUITO "ACCOSTANDO" LE COMPONENTI DEI 2 VERSORI (SCRITTI PER COLONNA), REFERITI ALLA BASE

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

ORIGINALI (NON RUOTATI), COSTITUITA DA \vec{i}, \vec{j} .
SULLA PRIMA RIGA RISULTANO LE COMPONENTI x DI \vec{i}', \vec{j}' ,
SULLA SECONDA RIGA LE COMPONENTI y.

SE ORA SI SOSTITUISCONO LE $[a]$, $[b]$ NELLA $[*]$ SI PUÒ ESPRIMERE IL VETTORE RUOTATO \vec{P}^* RISPETTO ALLA NUOVA BASE (RUOTATA) \vec{i}', \vec{j}' : 37

$$(\vec{P}^* - \vec{O}) = x_P \cos \theta \vec{i} - y_P \sin \theta \vec{i} + x_P \sin \theta \vec{j} + y_P \cos \theta \vec{j} = x_P (\underbrace{\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}}_{\vec{i}'}) + y_P (\underbrace{-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}}_{\vec{j}'})$$

E DUNQUE $(\vec{P}^* - \vec{O}) = x_P \vec{i}' + y_P \vec{j}'$ [c]

CIÒ COMPROVA CHE LE COMPONENTI DEL VETTORE "RUOTATO" NELLA BASE "RUOTATA" (SOLIDALMENTE CON ESSO) COINCIDONO CON LE COMPONENTI DEL VETTORE ORIGINALE $(\vec{P} - \vec{O})$ NELLA BASE INIZIALE, NON RUOTATA \vec{i}, \vec{j} (RISPETTO ALLA QUALE $(\vec{P} - \vec{O})$ È FISSO).

NEL CASO DI ROTAZIONE DEGLI ASSI, LA BASE \vec{i}, \vec{j} È RUOTATA NELLA BASE \vec{i}', \vec{j}' MA IL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO P, $\vec{P} - \vec{O}$ NON HA SUBITO ROTAZIONE. SI PUÒ QUINDI PENSARE DI ROTTENERE LA SITUAZIONE CERCATA PRENDENDO IL VETTORE $(\vec{P}^* - \vec{O})$ SOLIDALE CON LA BASE RUOTATA E "RIBORRARLO" IN $\vec{P} - \vec{O}$ MEDIANTE UNA "ROTAZIONE INVERSA" \underline{R}' IDENTIFICATA DALL'ANGOLO $-\theta$:

$$(\vec{P} - \vec{O}) = \underline{R}' (\vec{P}^* - \vec{O}) \quad \text{CON } (\vec{P}^* - \vec{O}) \text{ E } (\vec{P} - \vec{O}) \text{ ESPRESSE NELLA BASE } \vec{i}', \vec{j}'$$

$$\underline{R}' = \underline{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{IN QUANTO} \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \end{array}$$

SI HA DUNQUE, ESPRIMENDO $(\vec{P}^* - \vec{O})$ E $(\vec{P} - \vec{O})$ NELLA BASE \vec{i}', \vec{j}' :

$$(\vec{P}^* - \vec{O}) = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (\vec{P}^* - \vec{O}) = x_P \vec{i}' + y_P \vec{j}'; \quad (\vec{P} - \vec{O}) = \begin{Bmatrix} x_P' \\ y_P' \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (\vec{P} - \vec{O}) = x_P' \vec{i}' + y_P' \vec{j}'$$

$$\begin{Bmatrix} x_P' \\ y_P' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_P \cos \theta + y_P \sin \theta \\ -x_P \sin \theta + y_P \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [b]$$

$$(\vec{P} - \vec{O}) = \underline{R}' (\vec{P}^* - \vec{O})$$

PERTANTO $(\vec{P} - \vec{O}) = \underbrace{(x_P \cos \theta + y_P \sin \theta)}_{x_P'} \vec{i}' + \underbrace{(-x_P \sin \theta + y_P \cos \theta)}_{y_P'} \vec{j}'$ [c]

SI TROVA COSÌ IL LEGAME FRA LE COORDINATE DI P ESPRESSE RISPETTO ALLE 2 BASI:

$$\begin{cases} x_P' = x_P \cos \theta + y_P \sin \theta \\ y_P' = -x_P \sin \theta + y_P \cos \theta \end{cases}$$

PERALTRO, SE SI NOTA CHE $(\vec{P} - \vec{O}) = x_P \vec{i} + y_P \vec{j}$ RISPETTO ALLA BASE ORIGINALE \vec{i}, \vec{j} SI DEDUCE DALLA [c] IL LEGAME INVERSO DI QUELLO ESPRESSO DALLA [a], [b]:

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{i}' - \sin \theta \vec{j}' \quad [c]$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{i}' + \cos \theta \vec{j}' \quad [d]$$

MEDIANTE LE [c], [d] SI PUÒ RIESPRIMERE IL VETTORE $(\vec{p}-\vec{o})$ MEDIANTE LA BASE ORIGINALE, \vec{i}, \vec{j} :

38

$$(\vec{p}-\vec{o}) = x_p \underbrace{(\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})}_{\vec{i}} + y_p \underbrace{(\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})}_{\vec{j}} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

DALLE [a], [b], [c], [d] SI RILEVA CHE, MEDIANTE IL TENSORE \underline{R} O IL SUO INVERSO \underline{R}' I LEGAMI FRA LA BASE "FISSA" (\vec{i}, \vec{j}) E QUELLA ROTATA (\vec{i}', \vec{j}') SONO RISPETTIVAMENTE:

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\underline{R}} \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{Bmatrix} \Rightarrow (\text{VECCHIA BASE}) = \underline{R} \cdot (\text{NUOVA BASE}) \quad [e]$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\underline{R}'} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} \Rightarrow (\text{NUOVA BASE}) = \underline{R}' \cdot (\text{VECCHIA BASE}) \quad [f]$$

PER QUANTO RIGUARDA INVECE LE COMPONENTI DI UN VETTORE SI HA INVECE DALLA [d], [b]

$$(\vec{p}^*-\vec{o}) = \underline{R} (\vec{p}-\vec{o}) \quad [g]$$

$$(\vec{p}-\vec{o}) = \underline{R}' (\vec{p}^*-\vec{o}) \quad [h]$$

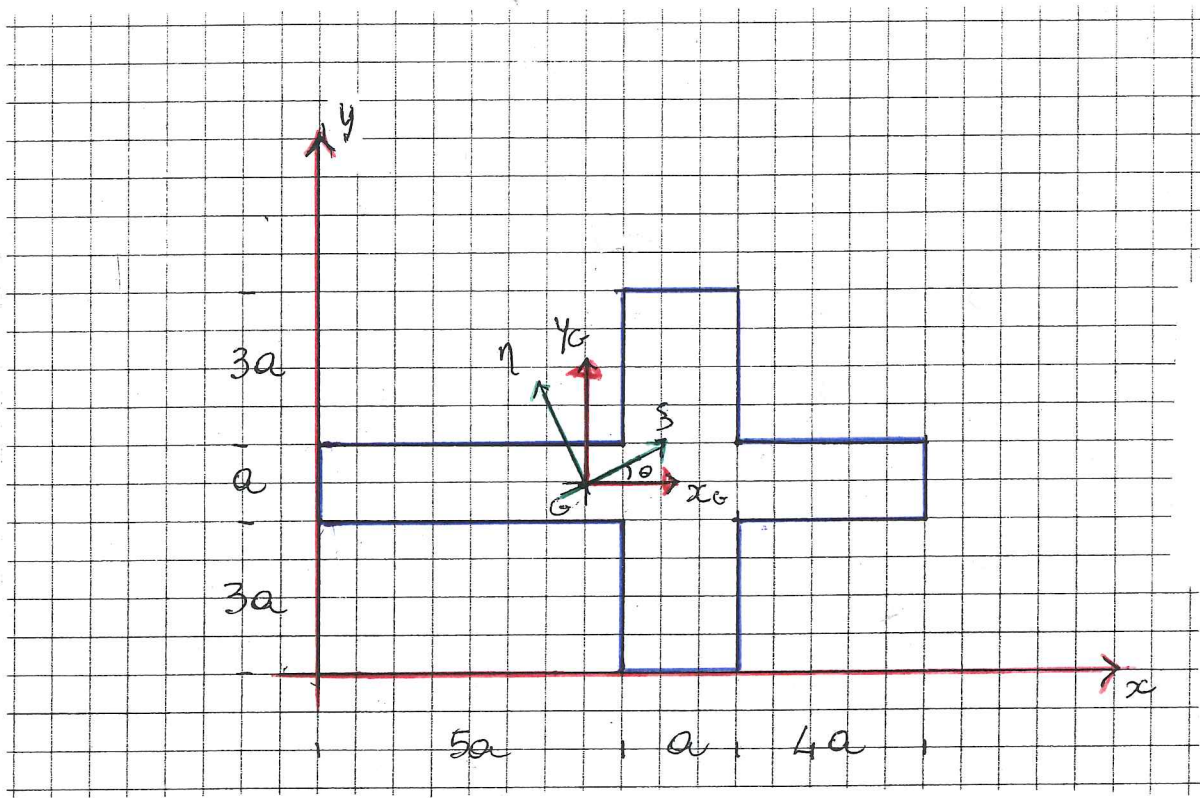
PERTANTO I VETTORI BASE SI TRASFORMANO SECONDO LEGGI DIVERSE [e], [f] RISPETTO ALLE COMPONENTI DI UN VETTORE PER EFFETTO DELLA ROTAZIONE ([g], [h]); TUTTAVIA LE DUE LEGGI SONO LEGATE POICHÉ $\underline{R} \underline{R}' = \underline{R}' \underline{R} = \underline{I}$ E DI CONSEGUENZA $\underline{R}' = \underline{R}^{-1}$.

SI OSSERVI INFINE CHE $\underline{R}' = \underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$: \underline{R} È QUINDI DETTO TENSORE ORTOGONALE. II

Esercizio n. 3 (5 punti)

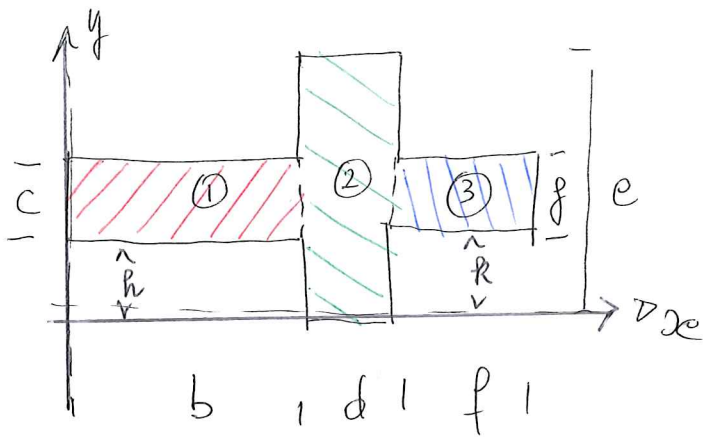
Per la lamina piana omogenea a forma di + asimmetrica indicata in Figura si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



$S_x = \dots 56 a^3 \dots$	$S_y = \dots 83 a^3 \dots$
$x_G = \dots \frac{83}{16} a = 5.1875 a \dots$	$y_G = \dots \frac{7}{2} a = 3.500 a \dots$
$J_{xG} = \dots \frac{88}{3} a^4 = 29.3333 a^4 \dots$	$J_{yG} = \dots \frac{4069}{48} a^4 = 84.7708 a^4 \dots$
$J_{xGyG} = \dots 0 \dots$	$\tan 2\theta = \dots 0 \dots ; \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \dots$
$J_\xi = J_{\max} = \dots \frac{4069}{48} a^4 = 84.7708 a^4 \dots$	$J_\eta = J_{\min} = \dots \frac{88}{3} a^4 = 29.3333 a^4 \dots$

Esercizio 3



$$\begin{aligned}
 b &= 5a \\
 c &= a \\
 d &= a \\
 e &= 7a \\
 f &= 4a \\
 g &= a \\
 h &= 3a \\
 k &= 3a
 \end{aligned}$$

Risultato, con ovvio significato dei simboli:

$$A_1 = b \cdot c$$

$$G_1 = \left(\frac{b}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

$$S_{x_1} = A_1 \cdot y_{G_1}$$

$$S_{y_1} = A_1 \cdot x_{G_1}$$

$$A_2 = d \cdot e$$

$$G_2 = \left(b + \frac{d}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

$$S_{x_2} = A_2 \cdot y_{G_2}$$

$$S_{y_2} = A_2 \cdot x_{G_2}$$

$$A_3 = f \cdot f$$

$$G_3 = \left(b + d + \frac{f}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

$$S_{x_3} = A_3 \cdot y_{G_3}$$

$$S_{y_3} = A_3 \cdot x_{G_3}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$S_x = S_{x_1} + S_{x_2} + S_{x_3}$$

$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} + S_{y_3}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = e/2$$

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} b \cdot c^3 + A_1 \cdot y_{G_1}^2$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{3} b \cdot c^3$$

$$J_{x_1 y_1} = A_1 \cdot x_{G_1} \cdot y_{G_1}$$

$$J_{x_2} = \frac{1}{3} d \cdot e^3$$

$$J_{y_2} = \frac{1}{12} d \cdot e^3 + A_2 \cdot x_{G_2}^2$$

$$J_{x_2 y_2} = A_2 \cdot x_{G_2} \cdot y_{G_2}$$

$$J_{x_3} = \frac{1}{12} f \cdot f^3 + A_3 \cdot y_{G_3}^2$$

$$J_{y_3} = \frac{1}{12} f \cdot f^3 + A_3 \cdot x_{G_3}^2$$

$$J_{x_3 y_3} = A_3 \cdot x_{G_3} \cdot y_{G_3}$$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3}$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3}$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + J_{x_3 y_3}$$

$$J_{x_G} = J_x - A \cdot y_G^2$$

$$J_{y_G} = J_y - A \cdot x_G^2$$

$$J_{x_G y_G} = J_{xy} - A \cdot x_G \cdot y_G = 0$$

$$J_\xi = \max(J_{x_G}, J_{y_G})$$

$$J_\eta = \min(J_{x_G}, J_{y_G})$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} = 0$$

$$\theta = 0 \text{ se } J_{x_G} > J_{y_G}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ se } J_{x_G} < J_{y_G}$$