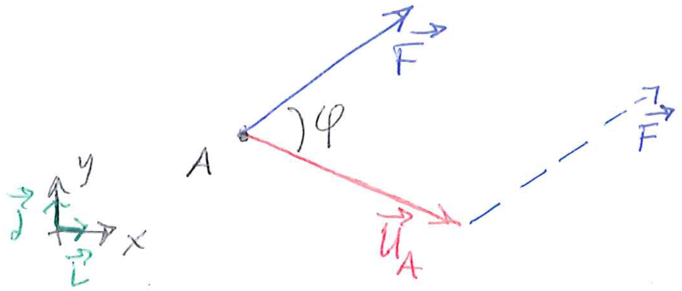
IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV) PER IL CORPO RIGIDO E PER SISTEMI ARTICOLATI DI CORPI RIGIDI.

PER UNA FORZA $\vec{F}$ (COSTANTE) IL CUI PUNTO DI APPLICAZIONE Ⓐ SUBISCE UNO SPOSTAMENTO $\vec{u}_A$ (PER CAUSE NON NECESSARIAMENTE IMPUTABILI ALLA FORZA $\vec{F}$) SI DEFINISCE IL LAVORO COMPIUTO DA $\vec{F}$ SECONDO LA RELAZIONE: 1

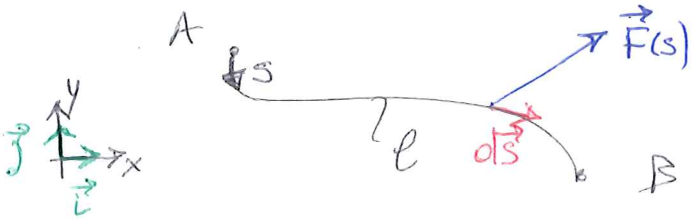
$$\mathcal{L} = \vec{F} \times \vec{u}_A \qquad [1]$$



IL LAVORO È QUINDI UNA GRANDEZZA SCALARE, DIMENSIONALMENTE OMOGENEA AL PRODOTTO $[F]\cdot[L]$; NEL SISTEMA INTERNAZIONALE LA SUA UNITÀ DI MISURA È IL JOULE: $1J = 1N \cdot 1m$.

SE SI RESTRINGE L'ANGOLO φ FORMATO DAI VETTORI $\vec{F}$ E $\vec{u}_A$ ALL'INTERVALLO $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (CORRISPONDENTE A UN ANGOLO GIRO) SI TROVA CHE IL LAVORO RISULTA POSITIVO QUANDO $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; $\mathcal{L} = 0$ PER $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$; $\mathcal{L} < 0$ PER $-\pi \leq \varphi < -\frac{\pi}{2}$ O PER $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$.

NEL CASO CHE LA FORZA $\vec{F}$ SIA INVECE POSIZIONALE, $\vec{F} = \vec{F}(s)$ E VARÎ QUINDI IN MODULO, DIREZIONE E VERSO QUANDO IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE SI MUOVE LUNGO UNA LINEA ℓ CHE CONGIUNGE I PUNTI Ⓐ E Ⓑ, SULLA QUALE È DEFINITA UNA ASCISSA CURVILINEA s, SI DEFINISCE, IN ANALOGIA CON LA [1] IL LAVORO ELEMENTARE $d\mathcal{L}$ CHE $\vec{F}$ COMPIE QUANDO IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE SI SPOSTA DELLA QUANTITÀ INFINITESIMA $d\vec{s}$ (SEMPRE DIRETTA COME LA TANGENTE ALLA LINEA ℓ):



$$d\mathcal{L} = \vec{F} \times d\vec{s}. \quad [2]$$

IL LAVORO COMPLESSIVO COMPIUTO DA $\vec{F}$ QUANDO IL SUO PUNTO D'APPLICAZIONE SI SPOSTA DA Ⓐ A Ⓑ LUNGO ℓ (E CHE PERTANTO DIPENDE IN GENERALE DA ℓ) VALE:

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}(s) \times d\vec{s}. \quad [3]$$

SI OSSERVI CHE SE $\vec{F}$ E $d\vec{s}$ SONO ESPRESSI PER COMPONENTI:

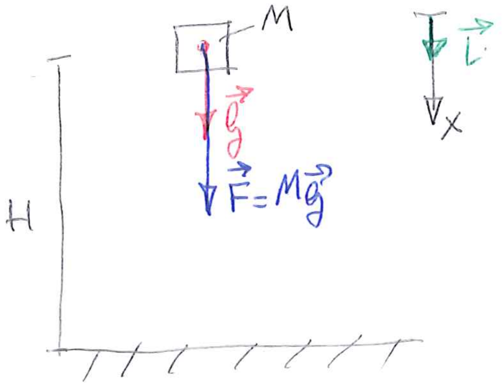
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$
$$d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \qquad [4]$$

LA [2] FORNISCE DIRETTAMENTE:

$$d\mathcal{L} = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \times (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) = F_x\,dx + F_y\,dy \qquad [5]$$

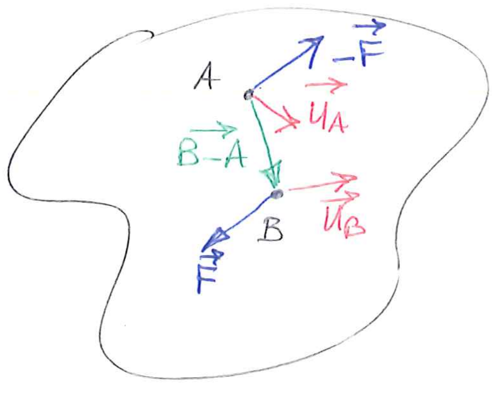
CIOÈ IL LAVORO ELEMENTARE È DATO DALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE COMPONENTI OMOLOGHE DEI VETTORI $\vec{F}$ E $d\vec{s}$.

A TITOLO DI ESEMPIO, UN GRAVE DI MASSA M CHE CADE, PER EFFETTO DELLA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ LUNGO LA VERTICALE PER UN'ALTEZZA H COMPIE IL LAVORO SEGUENTE:



$$\vec{F} = M\vec{g} = Mg\,\vec{i} \qquad (g = |\vec{g}|)$$
$$d\vec{s} = dx\,\vec{i} \qquad d\mathcal{L} = Mg\,\vec{i} \times dx\,\vec{i}$$
$$\mathcal{L} = \int_0^H Mg\,dx = Mg\,[x]_0^H = MgH.$$

NEL CASO DI UNA COPPIA FORMATA DA 2 FORZE EGUALI E OPPOSTE, $\vec{F}$ E $-\vec{F}$, APPLICATE IN 2 PUNTI, (A) E (B) DI UN CORPO RIGIDO CHE SUBISCONO GLI SPOSTAMENTI $\vec{u}_A$ E $\vec{u}_B$, IL LAVORO COMPLESSIVO È PARI ALLA SOMMA DEL LAVORO COMPIUTO DA CIASCUNA DELLE 2 FORZE:



$$\mathcal{L} = -\vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times \vec{u}_B. \qquad [6]$$

D'ALTRA PARTE SE IL CORPO È RIGIDO GLI SPOSTAMENTI $\vec{u}_A$ E $\vec{u}_B$ SONO LEGATI DALLA EQUAZIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE RIGIDA INFINITESIMA:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B-A}) \qquad [7]$$

SE SI SOSTITUISCE LA [7] NELLA [6] SI TROVA:

$$\mathcal{L} = -\vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times \left[\vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B-A})\right] \qquad [8]$$

E IN VIRTÙ DELLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO SCALARE SI HA:

$$\mathcal{L} = \cancel{-\vec{F} \times \vec{u}_A} + \cancel{\vec{F} \times \vec{u}_A} + \vec{F} \times \vec{\omega} \wedge (\vec{B-A}). \qquad [8']$$

IL TERMINE SUPERSTITE CHE COMPARE NELLA [8'] PUÒ ESSERE RISCRITTO,

SFRUTTANDO LE PROPRIETA' CICLICHE DEL PRODOTTO MISTO DI 3 VETTORI:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \times (\vec{a} \wedge \vec{b}):$$

NEL CASO PRESENTE IN CUI $\vec{a} \equiv \vec{F}$; $\vec{b} \equiv \vec{\omega}$; $\vec{c} \equiv (\vec{B-A})$ IN BASE ALLA SECONDA FORMA RISULTA:

$$\mathcal{L} = \vec{\omega} \times (\vec{B-A}) \wedge \vec{F} \qquad [8'']$$

MA $(\vec{B-A}) \wedge \vec{F} = \vec{M}_{(A)} = \vec{M}$ IN QUANTO UNA COPPIA HA MOMENTO CHE E' INVARIANTE CON IL POLO; NE SEGUE, SFRUTTANDO LA PROPRIETA' COMMUTATIVA DEL PRODOTTO SCALARE:

$$\mathcal{L} = \vec{M} \times \vec{\omega} \qquad [8''']$$

SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE $[\vec{M}] = [FL]$ E $\vec{\omega} = [-]$ (CIOE' E' PRIVO DI DIMENSIONI: UNA ROTAZIONE ESPRESSA IN RADIANTI E' DATA DAL RAPPORTO FRA L'ARCO E IL RAGGIO ASSUMENDO QUEST'ULTIMO UNITARIO); NE SEGUE CHE LA [8'''] FORNISCE UN'ESPRESSIONE OMOGENEA, DAL PUNTO DI VISTA DELLE DIMENSIONI, ALLA [1].

NOTA 1. SULLA BASE DI QUANTO FINORA VISTO SI PUO' CONCLUDERE CHE UNA FORZA (QUANTITA' INTENSIVA) "LAVORA" PER UNO SPOSTAMENTO (QUANTITA' ESTENSIVA); NELLO STESSO MODO UN MOMENTO "LAVORA" PER UNA ROTAZIONE $\square$

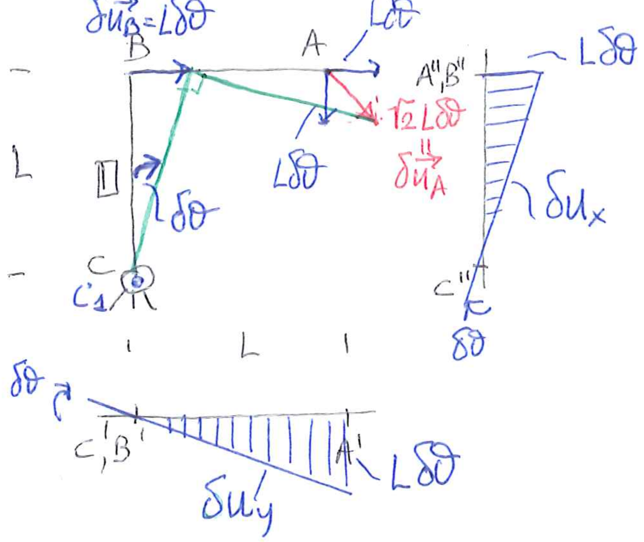
NEL CASO DI ROTAZIONI INFINITESIME $d\vec{\omega}$ IL LAVORO ELEMENTARE COMPIUTO DA UN MOMENTO, IN ANALOGIA CON LA [2] VALE:

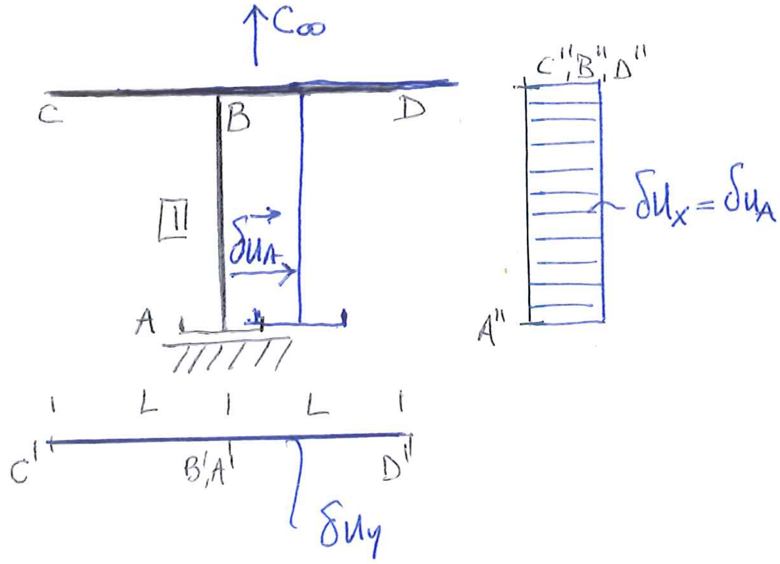
$$d\mathcal{L} = \vec{M} \times d\vec{\omega}. \qquad [9].$$

SPOSTAMENTO VIRTUALE

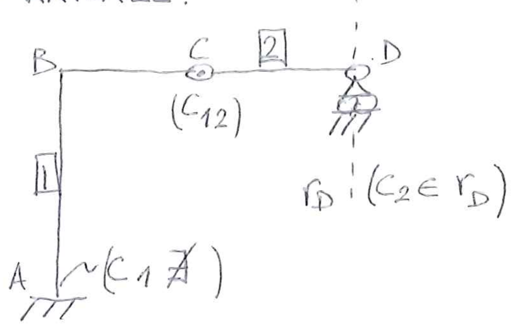
SI DEFINISCE VIRTUALE UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO E COMPATIBILE CON I VINCOLI (INCLUSO QUELLO DI RIGIDITA' NEL CASO DI CORPI RIGIDI).
GLI SPOSTAMENTI VIRTUALI SI DENOTANO CON IL SIMBOLO δ (DELTA): δu_A E' COSI' LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DEL PUNTO A.

ESEMPI:





CHIARAMENTE SE I VINCOLI INIBISCONO OGNI MOTO RIGIDO (COME ACCADE NEL CASO DI STRUTTURE ISOSTATICHE O IPERSTATICHE NON LABILI) NON SONO POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALE.



POICHÉ LE CONDIZIONI CINEMATICHE IMPOSTE DAI VINCOLI IN C E IN D NON SONO COMPATIBILI, NON ESISTE C.I.R. E GLI UNICI SPOSTAMENTI COMPATIBILI CON I VINCOLI SONO TUTTI NULLI.

PER UN CORPO RIGIDO LIBERO (NON VINCOLATO) GLI SPOSTAMENTI VIRTUALI DEBBONO SODDISFARE SOLO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ.

ASSEGNATO QUINDI LO SPOSTAMENTO DI UN GENERICO PUNTO P, $\delta\vec{u}_P$ E UNA ROTAZIONE VIRTUALE $\delta\vec{\omega}$, LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DI UN PUNTO Q QUALSIASI DEL CORPO RIGIDO È ESPRIMIBILE COME:

$$\delta\vec{u}_Q = \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \qquad [10]$$

IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DA UNA FORZA $\vec{F}$ È DEFINITO IN MODO ANALOGO ALLA [1] O ALLA [2] QUANDO LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA È UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE:

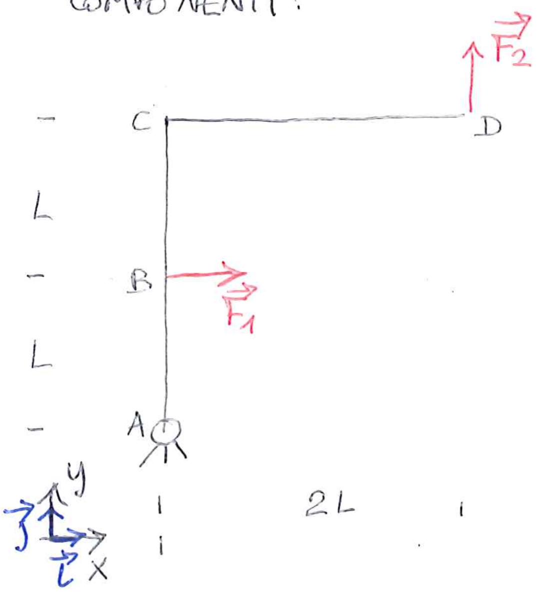
$$\delta\mathcal{L} = \vec{F} \times \delta\vec{u} \qquad [11]$$

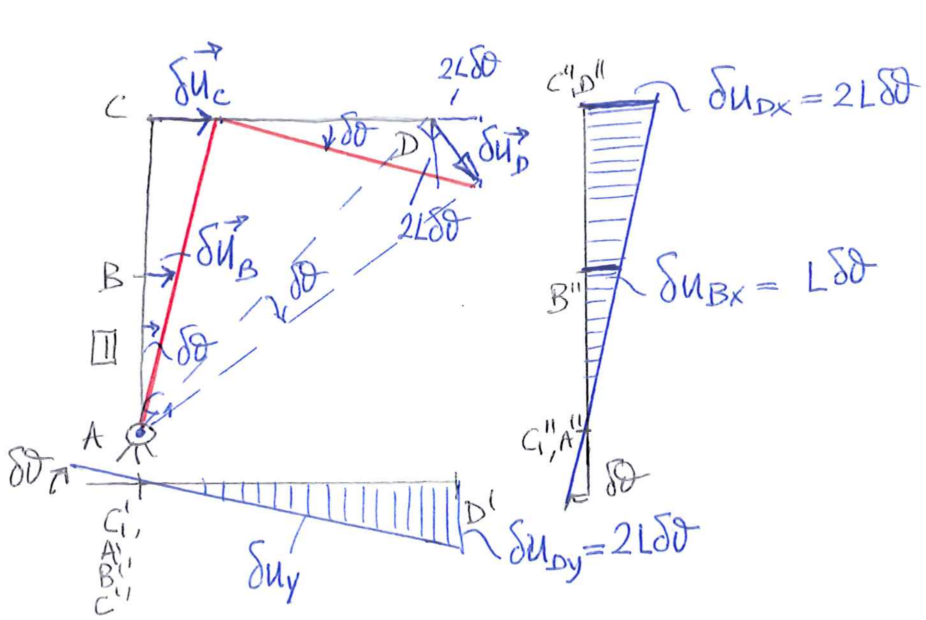
IL LAVORO VIRTUALE, ANALOGAMENTE ALLO SPOSTAMENTO VIRTUALE È INDICATO DAL SIMBOLO δ, COME AVVIENE NELLA [11].

IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DA UN SISTEMA DI FORZE È LA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI COMPIUTI DALLE SINGOLE FORZE:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta\vec{u}_1 + \vec{F}_2 \times \delta\vec{u}_2 + \ldots + \vec{F}_N \times \delta\vec{u}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \delta\vec{u}_i \qquad [12]$$

PER IL CASO ILLUSTRATO IN FIGURA SI HA QUINDI; OPERANDO PER COMPONENTI:





RISULTA:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F_1} \times \delta\vec{u_1} + \vec{F_2} \times \delta\vec{u_2}$$

$$\vec{F_1} = F_1 \vec{i}$$

$$\vec{F_2} = F_2 \vec{j}$$

$$\delta\vec{u_1} = \delta\vec{u_B} = L\delta\vartheta \vec{i}$$

$$\delta\vec{u_2} = \delta\vec{u_D} = 2L\delta\vartheta \vec{i} - 2L\delta\vartheta \vec{j}$$

PERTANTO

$$\delta\mathcal{L} = \underbrace{\left[F_1 \vec{i} \times L\delta\vartheta \vec{i}\right]}_{F_1 L\delta\vartheta} + \underbrace{\left[F_2 \vec{j} \times \left(2L\delta\vartheta\vec{i} - 2L\delta\vartheta\vec{j}\right)\right]}_{F_2 \cdot 2L\delta\vartheta \cdot 0 - F_2 \cdot 2L\delta\vartheta} = F_1 L\delta\vartheta - F_2 \cdot 2L\delta\vartheta$$

$$\delta\mathcal{L} = (F_1 L - 2F_2 L)\,\delta\vartheta$$

NELL'ULTIMA ESPRESSIONE APPARE EVIDENTE CHE IL LAVORO VIRTUALE DIPENDE DALLA COORDINATA LIBERA $\delta\vartheta$ CHE ESPRIME L'AMPIEZZA DELLA ROTAZIONE VIRTUALE ATTORNO AL C.I.R. C_1.

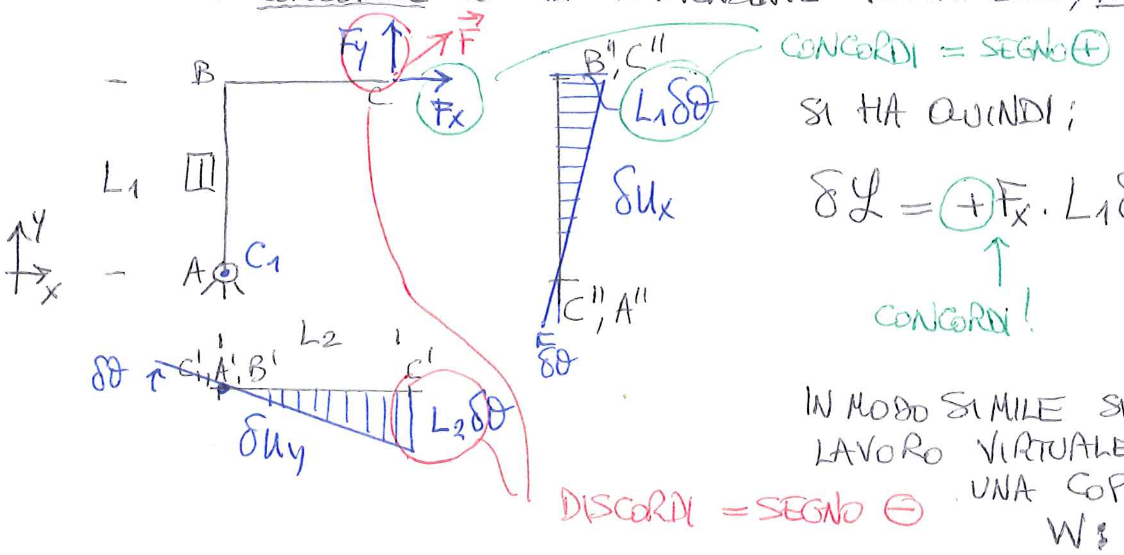
NOTA 2. SE LO SPOSTAMENTO VIRTUALE FOSSE PRODOTTO, NEL PRECEDENTE ESEMPIO, DA UNA ROTAZIONE DI VERSO OPPOSTO, I CONTRIBUTI CHE SI OTTENGONO AVREBBERO, ORDINATAMENTE TUTTI I SEGNI CAMBIATI □

NOTA 3 NELL'ESEMPIO PRESENTATO SI SONO ESPLICITAMENTE INTRODOTTI GLI SVILUPPI PER COMPONENTI DELLE FORZE E DEGLI SPOSTAMENTI E SI È PROCEDUTO A CALCOLARE I PRODOTTI SCALARI PER COMPONENTI.

ESISTE PERÒ UN METODO GRAFICO SPEDITIVO CHE SI BASA SOLO SULLA CONOSCENZA DEI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO VIRTUALE.

COSÌ, SE SI RAPPRESENTANO LE FORZE MEDIANTE LE PROPRIE COMPONENTI SI SOMMANO I LAVORI COMPIUTI DALLE SINGOLE COMPONENTI PER I CORRISPONDENTI SPOSTAMENTI VIRTUALI.

IL SEGNO DI OGNI ADDENDO È <u>POSITIVO</u> SE LA COMPONENTE DELLA FORZA È <u>CONCORDE</u> CON IL CORRISPONDENTE SPOSTAMENTO, <u>NEGATIVO SE DISCORDE</u>:



SI HA QUINDI:

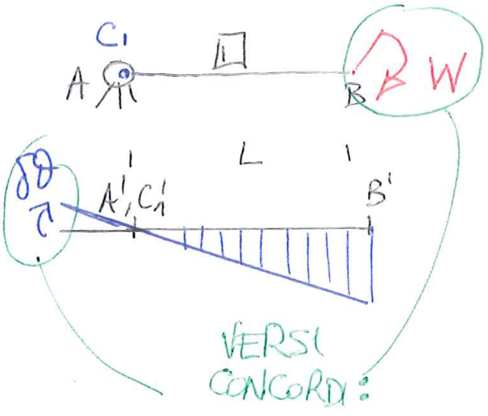
$$\delta\mathcal{L} = (+) F_x \cdot L_1\delta\vartheta \,(-)\, F_y\, L_2\delta\vartheta$$

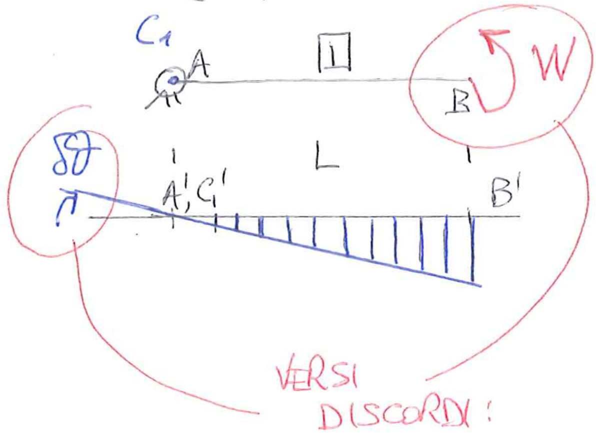
CONCORDI! DISCORDI!

IN MODO SIMILE SI VALUTA IL LAVORO VIRTUALE PRODOTTO DA UNA COPPIA DI MOMENTO W:

IL LAVORO VIRTUALE DELLA COPPIA W SI OTTIENE MOLTIPLICANDO IL MODULO DI W CON L'AMPIEZZA DELLA ROTAZIONE $\delta\vartheta$ DEL CORPO RIGIDO.

IL SEGNO DIPENDE DAL FATTO CHE IL VERSO DELLA COPPIA E DELLA ROTAZIONE SIANO CONCORDI ($\oplus$) O DISCORDI ($\ominus$):





$\delta\mathcal{L} = +W\,\delta\vartheta$

CONCORDI!

$\delta\mathcal{L} = -W\,\delta\vartheta$

DISCORDI!

$\square$

LAVORO VIRTUALE DI UN CORPO RIGIDO LIBERO.

VALE IL SEGUENTE TEOREMA: IL LAVORO VIRTUALE DI UN CORPO RIGIDO LIBERO SOGGETTO A UN SISTEMA DI N FORZE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ APPLICATE RISPETTIVAMENTE AI PUNTI $Q_1, Q_2, \dots Q_N$ DIPENDE SOLO DALLA RISULTANTE $\vec{R}$ E DAL MOMENTO RISULTANTE:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{R} \times \delta\vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta\vec{\omega} \qquad [13]$$

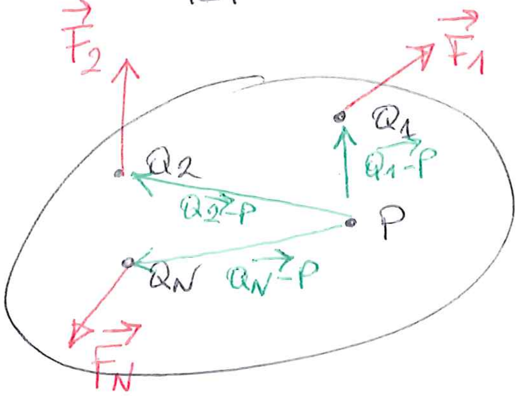
NELLA [13] $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ [14'] È LA RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE

P È UN GENERICO PUNTO, SCELTO COME POLO PER CALCOLARE IL MOMENTO RISULTANTE

$$\vec{M}_{(P)} = (\overrightarrow{Q_1 - P}) \wedge \vec{F}_1 + (\overrightarrow{Q_2 - P}) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\overrightarrow{Q_N - P}) \wedge \vec{F}_N =$$

$$\vec{M}_{(P)} = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{Q_i - P}) \wedge \vec{F}_i \qquad [14'']$$

È IL MOMENTO RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE RISPETTO AL POLO P.



DIMOSTRAZIONE: PER LA [10] SI HA:

$$\delta\vec{u}_{Q_1} = \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q_1 - P})$$

$$\delta\vec{u}_{Q_2} = \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q_2 - P})$$

$$\delta\vec{u}_{Q_N} = \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q_N - P})$$

E IN GENERALE:

$$\delta\vec{u}_{Q_i} = \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q_i - P})$$

PERTANTO PER LA [12] SI TROVA:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta\vec{u}_{Q_1} + \vec{F}_2 \times \delta\vec{u}_{Q_2} + \dots + \vec{F}_N \times \delta\vec{u}_{Q_N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \delta\vec{u}_{Q_i}$$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \left[\delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_1 - P})\right] + \vec{F}_2 \times \left[\delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_2 - P})\right] + \dots + \vec{F}_N \times \left[\delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_N - P})\right]$$

$$\delta\mathcal{L} = \left[\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N\right] \times \delta\vec{u}_P + \vec{F}_1 \times \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_1 - P}) + \vec{F}_2 \times \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_2 - P}) + \dots + \vec{F}_N \times \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_N - P})$$

$$\delta\mathcal{L} = \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] \times \delta\vec{u}_P + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_i - P}) \qquad [15]$$

IL SECONDO TERMINE DELLA [15] PER LA NOTA PROPRIETA' CICLICA DEL PRODOTTO MISTO $\vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \wedge \vec{b}$ CON $\vec{a} = \vec{F}_i$, $\vec{b} = \delta\vec{\omega}$, $\vec{c} = (\vec{Q_i - P})$ FORNISCE NELLA SECONDA FORMA:

$$\delta\mathcal{L} = \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] \times \delta\vec{u}_P + \delta\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{N} \left[(\vec{Q_i - P}) \wedge \vec{F}_i\right] \qquad [16]$$

E DA QUI, SOSTITUENDO LE [14'], [14''] TENUTO CONTO DELLA PROPRIETA' COMMUTATIVA DEL PRODOTTO SCALARE, SI OTTIENE:

$$\delta\mathcal{L} = \vec{R} \times \delta\vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta\vec{\omega}. \qquad [13]$$

□

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.) PER CORPI RIGIDI.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO NELLA CONFIGURAZIONE C, LIBERO O SOGGETTO A VINCOLI PERFETTI, LISCI, BILATERI E' CHE IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ADESSO APPLICATE SIA NULLO PER TUTTI I POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALI A PARTIRE DA C

$$\boxed{\delta\mathcal{L} = 0 \quad \forall\, \delta\vec{u}_P,\ \forall\, \delta\vec{\omega} \iff \text{EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO} \iff \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{cases}} \qquad [17]$$

NOTA 4: L'ULTIMA IMPLICAZIONE SEGUE DALLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO, RAPPRESENTATE, PER QUANTO VISTO NELLA LEZIONE 1, DALLE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad , \quad \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \qquad (\forall P.)$$

SI OSSERVI CHE NELLE [17] IL POLO (P) RISPETTO AL QUALE VIENE VALUTATO IL MOMENTO RISULTANTE E' IL MEDESIMO PUNTO AL QUALE CI SI RIFERISCE PER RAPPRESENTARE LA ROTO-TRASLAZIONE RIGIDA INFINITESIMA VIRTUALE:

$$\delta\vec{u}_Q = \delta\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{Q - P}) \qquad [10].$$

□

IL PLV SI PUÒ COSÌ SINTETIZZARE:

$$\boxed{\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall\, \delta \vec{u}_P,\ \forall\, \delta \vec{\omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{cases}} \qquad [17']$$

E RAPPRESENTA LA PIÙ GENERALE LEGGE DELL'EQUILIBRIO. SU DI ESSO SI PUÒ FONDARE DIRETTAMENTE LA STATICA DEI CORPI RIGIDI COME UNA DISCIPLINA AUTONOMA, SVINCOLATA DA OGNI DERIVAZIONE DALLE LEGGI DELLA DINAMICA.

LA DIMOSTRAZIONE SI BASA SU UN CORPO RIGIDO LIBERO: IN SEGUITO SI VEDRÀ COME TENERE CONTO DELLA PRESENZA DI VINCOLI ASSUNTI PERFETTI [SENZA CEDIMENTI], LISCI [SENZA ATTRITO] E BILATERI [SE BLOCCANO UNA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO SECONDO UN DETERMINATO VERSO, BLOCCANO ANCHE LA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO NEL VERSO OPPOSTO].

DIMOSTRAZIONE:

(a) <u>CONDIZIONE NECESSARIA</u>: CORPO RIGIDO IN EQUILIBRIO $\Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0 \ \forall \delta \vec{u}_P, \forall \vec{\omega}$.

PER IL CORPO RIGIDO IL LAVORO VIRTUALE SI PUÒ SCRIVERE, GRAZIE ALLA [13] NELLA FORMA:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega} \qquad [13]$$

MA SE IL CORPO RIGIDO È IN EQUILIBRIO SONO SODDISFATTE LE EQUAZIONI CARDINALI E PERTANTO:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{E} \quad \vec{M}_{(P)} = \vec{0}$$

SEGUE QUINDI DALLA [13]:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{0} \times \delta \vec{u}_P + \vec{0} \times \delta \vec{\omega} = 0$$

QUALUNQUE SIANO $\delta \vec{u}_P$ E $\delta \vec{\omega}$. □

(b) <u>CONDIZIONE SUFFICIENTE</u>:

SI HA $\delta \mathcal{L} = 0 \ \forall \delta \vec{u}_P, \forall \delta \vec{\omega} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0},\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0}$

POICHÉ PER LA [13]

$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega} = 0 \qquad \forall \delta \vec{u}_P, \forall \delta \vec{\omega} \qquad [17'']$$

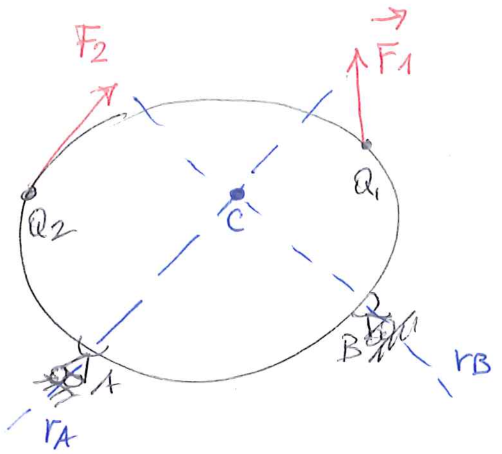
SI PUÒ SCEGLIERE, PER ESEMPIO, $\delta \vec{\omega} = \vec{0}$ E $\delta \vec{u}_P$ PARALLELO A $\vec{R}$ E $\delta \vec{u}_P \neq \vec{0}$

ALLORA $\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_P = 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$; ANALOGAMENTE, PRESO $\delta \vec{u}_P = \vec{0}$ E $\delta \vec{\omega} \neq \vec{0}$ MA $\delta \vec{\omega}$ PARALLELO A $\vec{M}$ E SI TROVA

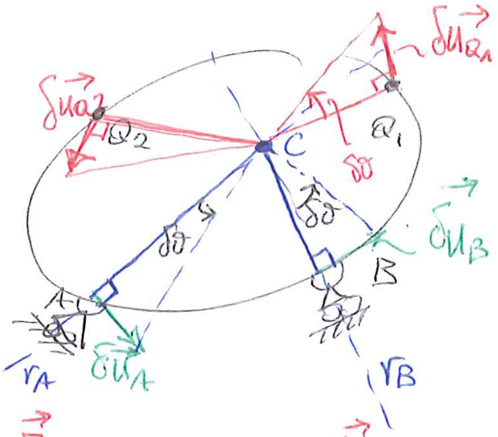
ALLORA $\delta \mathcal{L} = \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{(P)} = \vec{0}$

QUINDI PER L'ARBITRARIETÀ DELLA SCELTA DI $\delta \vec{u}_P$ E DI $\delta \vec{\omega}$ SEGUE DALLA [17''] $\vec{R} = \vec{0}$ E $\vec{M}_{(P)} = \vec{0}$, CIOÈ LE EQUAZIONI CARDINALI □

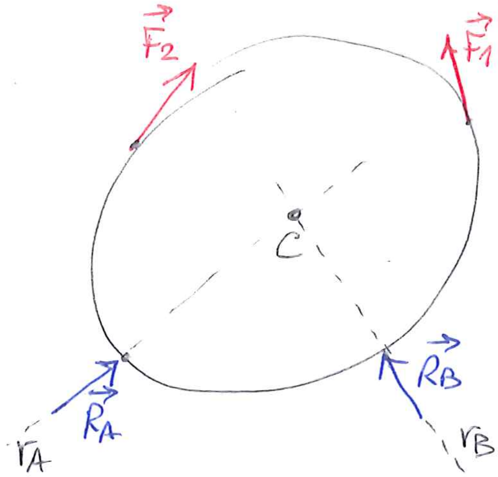
NEL CASO IN CUI IL CORPO RIGIDO SIA SOGGETTO A VINCOLI (PERFETTI, LISCI, BILATERI) SI DIMOSTRA CHE LE REAZIONI VINCOLARI <u>NON ENTRANO</u> NELL'ESPRESSIONE DEL LAVORO VIRTUALE.



LO SPOSTAMENTO VIRTUALE COMPATIBILE CON I VINCOLI E' CHIARAMENTE UNA ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R, C



IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, D'ALTRA PARTE E' QUELLO INDICATO: POICHE' I VINCOLI SONO PERFETTI, LE REAZIONI $\vec{R_A}$ E $\vec{R_B}$ SONO DIRETTE $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO E QUINDI DIRETTE VERSO C (SECONDO LE RETTE r_A E r_B).



IL LAVORO VIRTUALE CALCOLATO CON RIFERIMENTO AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO VALE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F_1} \times \delta\vec{u}_{Q_1} + \vec{F_2} \times \delta\vec{u}_{Q_2} + \vec{R_A} \times \delta\vec{u}_A + \vec{R_B} \times \delta\vec{u}_B \quad [18]$$

DOVE $\delta\vec{u}_{Q_1} = \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_1 - C})$; $\delta\vec{u}_{Q_2} = \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{Q_2 - C})$; $\delta\vec{u}_A = \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{A - C})$;

$\delta\vec{u}_B = \delta\vec{\omega} \wedge (\vec{B - C})$ CON $\delta\vec{\omega} = \delta\theta \vec{k}$.

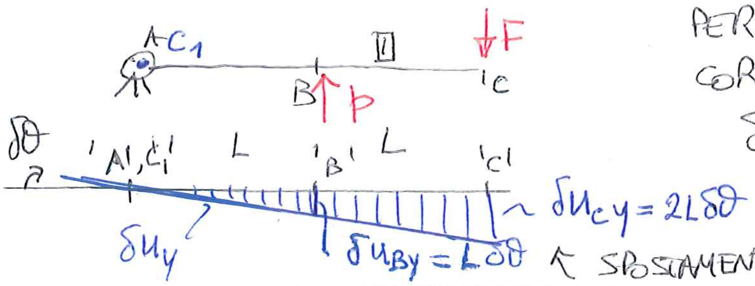
D'ALTRA PARTE $\delta\vec{u}_A$ E' $\perp$ A $\vec{R_A}$ E $\delta\vec{u}_B$ E' $\perp$ A $\vec{R_B}$: $\vec{R_A} \times \delta\vec{u}_A + \vec{R_B} \times \delta\vec{u}_B = 0$

E QUINDI LA [18] DIVIENE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F_1} \times \delta\vec{u}_{Q_1} + \vec{F_2} \times \delta\vec{u}_{Q_2} \quad [18']$$

CIOE' DIPENDE <u>SOLTANTO</u> DALLE FORZE ATTIVE.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL P.L.V. PER DETERMINARE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA CATENA CINEMATICA.



PER LA CONDIZIONE NECESSARIA, SE IL CORPO RIGIDO E' IN EQUILIBRIO, ALLORA

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta\theta.$$

$$\delta \mathcal{L} = -p\, \delta u_{By} + F \delta u_{Cy}$$

← SPOSTAMENTO VIRTUALE (COMPATIBILE CON VINCOLO IN A).

QUINDI $\delta\mathcal{L} = -pL\delta\vartheta + F \cdot 2L\delta\vartheta$

$$\delta\mathcal{L} = (-pL + 2FL)\delta\vartheta = (-p+2F)L\delta\vartheta \quad [19]$$

D'ALTRA PARTE SE SUSSISTE EQUILIBRIO DEVE RISULTARE $M_{Z(A)} = 0$ (IN MODO DA NON FARE COMPARIRE LE REAZIONI VINCOLARI È UNA EQUAZIONE "PURA") E QUINDI:

$$\int M_{Z(A)} = 0 \quad p\cancel{L} - 2F\cancel{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 2F.}$$

PERTANTO SE SUSSISTE L'EQUILIBRIO $-p+2F=0$ E DALLA [19] SEGUE:

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta.$$

PER LA CONDIZIONE SUFFICIENTE SI PARTE DALLA [19] E SI AMMETTE CHE SIA VERIFICATA $\forall\, \delta\vartheta$:

$$\delta\mathcal{L} = (-p+2F)L\delta\vartheta = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta \; [19'] \Rightarrow -p+2F=0 \Rightarrow p=2F$$

QUINDI SOLO SE $p=2F$ (CIOÈ SE p E F SODDISFANO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO) $\delta\mathcal{L}=0$ <u>INDIPENDENTEMENTE</u> DAL VALORE DI $\delta\vartheta$.

SI OSSERVI INFATTI CHE NELLA [19'] PER LA REGOLA DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO, SE $\delta\vartheta \neq 0$ (CIOÈ SE HA UN VALORE QUALSIASI) L'UNICO MODO PERCHÉ SI VERIFICHI $\delta\mathcal{L}=0$ È CHE SIA $p=2F$.

<u>NOTA</u>: POICHÉ NELL'ESPRESSIONE DEL LAVORO VIRTUALE <u>NON</u> INTERVENGONO LE REAZIONI VINCOLARI NEL PUNTO (A), NULLA SI PUÒ DIRE A LORO RIGUARDO. QUESTE DEVONO ESSERE VALUTATE IN UN SECONDO TEMPO.
PER STRUTTURE ISOSTATICHE NON LABILI QUESTE POSSONO ESSERE CALCOLATE CON IL METODO ILLUSTRATO DI SEGUITO II.

CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI DI STRUTTURE ISOSTATICHE <u>(NON LABILI)</u> MEDIANTE IL PLV.

IL PLV PERMETTE DI DETERMINARE, <u>UNA PER VOLTA</u> LE REAZIONI VINCOLARI DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.

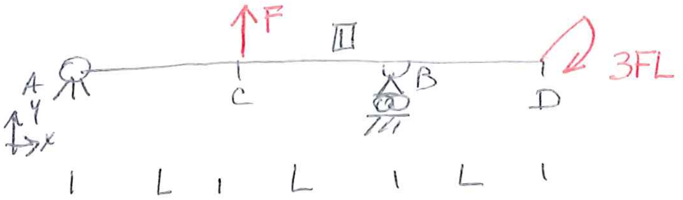
OPERATIVAMENTE SI SEGUE QUESTO PROCEDIMENTO:

(1) SI METTE IN EVIDENZA LA REAZIONE VINCOLARE INCOGNITA "LIBERANDO" LA CORRISPONDENTE COMPONENTE DI SPOSTAMENTO.
SI "DEGRADA" IL VINCOLO PRESENTE NEL PUNTO RIDUCENDO QUINDI DI UNA UNITÀ IL GDV DELLA STRUTTURA: QUESTA DIVIENE 1 VOLTA IPOSTATICA (CATENA CINEMATICA)

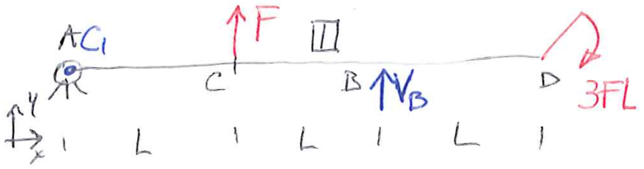
(2) SI INDIVIDUA UN CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI (= INFINITESIMI E COMPATIBILI CON I RESTANTI VINCOLI) CHE DIPENDE DA UN UNICO PARAMETRO LIBERO, O LAGRANGIANO; PER ESEMPIO $\delta\vartheta$.

(3) SI CALCOLA IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DAI CARICHI PRESENTI (IVI INCLUSA LA REAZIONE VINCOLARE MESSA IN EVIDENZA) PER LO SPOSTAMENTO VIRTUALE E SI IMPONE $\boxed{\delta\mathcal{L} = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta}$ QUESTA EQUAZIONE FORNISCE LA REAZIONE CERCATA.

ESEMPIO: PER LA STRUTTURA ISOSTATICA IN FIGURA SI VUOLE CALCOLARE V_B!

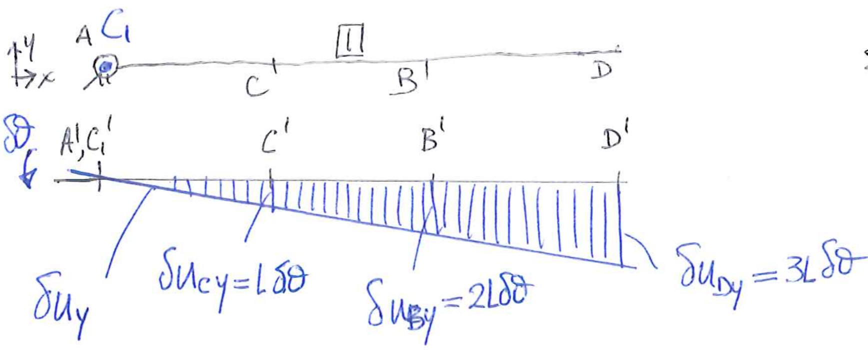


(1) SI ELIMINA IL VINCOLO IN B (ESSENDO UN VINCOLO SEMPLICE, "DEGRADARLO" SIGNIFICA SOPPRIMERLO) EVIDENZIANDO LA REAZIONE V_B:



$C_1 = (0,0)$

(2) SI E' OTTENUTA UNA CATENA CINEMATICA COSTITUITA DA UN UNICO CORPO RIGIDO E SI OTTIENE FACILMENTE CHE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE $C_1 \equiv A$;
SI COSTRUISCE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI!



SI RILEVA CHE I PUNTI DI APPLICAZIONE DELLE FORZE SUBISCONO QUESTE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO, IN FUNZIONE DEL PARAMETRO LAGRANGIANO $\delta\vartheta$:

$\delta u_{Cy} = -L\delta\vartheta$; $\delta u_{By} = -2L\delta\vartheta$;
$\delta\vartheta_D = +\delta\vartheta \,(\circlearrowleft)$

(3) SI CALCOLA IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DA TUTTI I CARICHI PRESENTI (INCLUSO V_B):

$$\delta\mathcal{L} = F\cdot(-L\delta\vartheta) + V_B\,(-2L\delta\vartheta) + 3FL\,\delta\vartheta$$

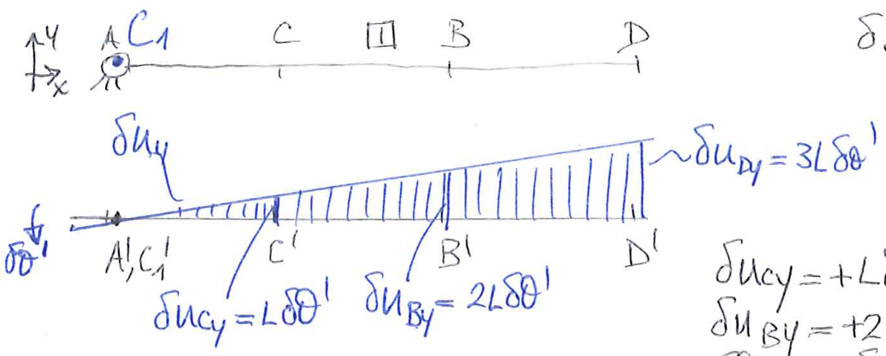
E SI IMPONE CHE SIA: $\delta\mathcal{L} = 0 \quad \forall\,\delta\vartheta$.

NE SEGUE:

$$\delta\mathcal{L} = \left[-FL - 2V_B L + 3FL\right]\delta\vartheta = 0 \quad \forall\,\delta\vartheta \Rightarrow \left[-FL - 2V_B L + 3FL\right] = 0$$

E DUNQUE: $\cancel{2}F\cancel{L} - \cancel{2}V_B\cancel{L} = 0$ $\quad \boxed{V_B = +F}$

<u>NOTA 6</u>: LO SPOSTAMENTO VIRTUALE POTEVA ANCHE ESSERE COSTRUITO CON IL VERSO OPPOSTO, ASSUMENDO UN PARAMETRO LIBERO $\delta\vartheta' = -\delta\vartheta$; IN QUESTO CASO SI HA:



$$\delta\mathcal{L} = F\cdot L\delta\vartheta' + V_B\cdot 2L\delta\vartheta' - 3FL\,\delta\vartheta' = 0 \quad \forall\,\delta\vartheta'$$

$$\delta\mathcal{L} = \left[FL + 2V_B L - 3FL\right]\delta\vartheta' = 0 \quad \forall\,\delta\vartheta'$$

$$\Rightarrow \left[FL + 2V_B L - 3FL\right] = 0$$

$\delta u_{Cy} = +L\delta\vartheta'$
$\delta u_{By} = +2L\delta\vartheta'$
$\delta\vartheta_D = -\delta\vartheta'\,(\circlearrowright)$

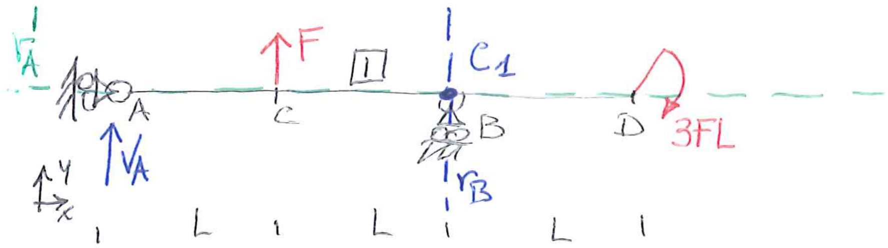
$\cancel{2}V_B\cancel{L} - \cancel{2}F\cancel{L} = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = F}$

IL RISULTATO <u>NON</u> CAMBIA!

II

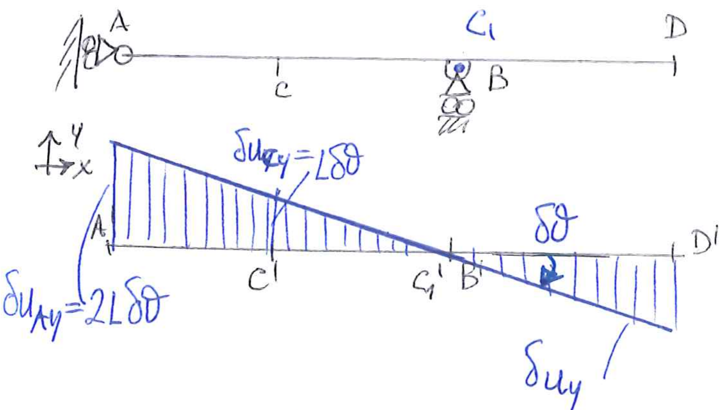
PER LA STESSA STRUTTURA DI PARTENZA, SE SI VUOLE CALCOLARE LA REAZIONE VA SI PROCEDE COSÌ:

(1) SI DEGRADA LA CERNIERA IN (A) SOSTITUENDOLA CON UN CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE, IN MODO DA EVIDENZIARE LA FORZA INCOGNITA VA:



(2) PER LA CATENA CINEMATICA COSÌ OTTENUTA SI DETERMINA IL C.I.R C_1; PER IL VINCOLO IN (A) SI DEVE TROVARE SULLA RETTA r'_A, ⊥ AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO IN A, DUNQUE SULLA RETTA ORIZZONTALE PASSANTE PER (A); PER IL VINCOLO IN (B) SI DEVE TROVARE SULLA RETTA r_B, ⊥ AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO IN B, DUNQUE SULLA RETTA VERTICALE PASSANTE PER (B); C_1 È QUINDI IL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r'_A E r_B, E COINCIDE DUNQUE CON IL PUNTO (B).

UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE POSSIBILE È ALLORA IL SEGUENTE:



$$C_1 = (2L, 0)$$

$$\delta u_{Ay} = +2L\delta\theta$$
$$\delta u_{Cy} = +L\delta\theta$$
$$\delta\theta_D = +\delta\theta \ (\circlearrowright)$$

(3) CALCOLANDO IL LAVORO VIRTUALE SI TROVA:

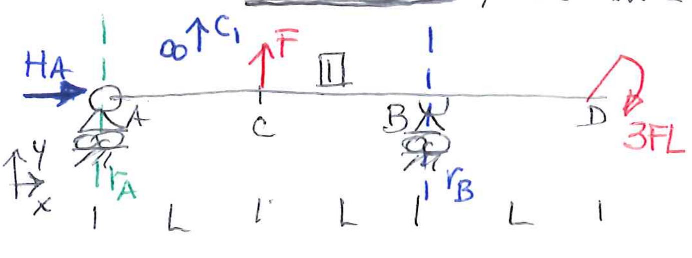
$$\delta \mathcal{L} = V_A \cdot 2L\delta\theta + FL\delta\theta + 3FL\cdot\delta\theta = 0 \quad \forall\delta\theta$$

$$\delta \mathcal{L} = [2V_A L + FL + 3FL]\delta\theta = 0 \quad \forall\delta\theta \quad \Rightarrow \quad [2V_A\cancel{L} + 4F\cancel{L}] = 0$$

OVVERO $\quad 2V_A + 4F = 0 \quad \boxed{V_A = -2F}$

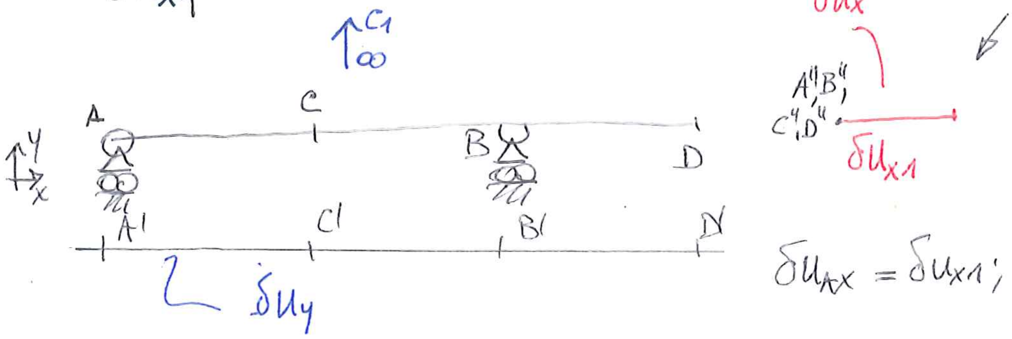
SE INFINE SI VUOLE CALCOLARE LA REAZIONE HA SI PROCEDE COSÌ:

(1) SI DEGRADA LA CERNIERA IN (A) SOSTITUENDOLA CON UN CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE, COSÌ DA EVIDENZIARE LA FORZA INCOGNITA HA:



(2) PER LA CATENA CINEMATICA COSÌ OTTENUTA SI TROVA AGEVOLMENTE
PER IL VINCOLO POSTO IN Ⓐ QUESTO DEVE TROVARSI SULLA RETTA VERTICALE PASSANTE PER Ⓐ, r_A ($\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL VINCOLO, ORIZZONTALE); PER IL VINCOLO POSTO IN Ⓑ SI DEVE INVECE TROVARE SULLA RETTA VERTICALE PASSANTE PER Ⓑ, r_B (PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO, CHE È ANCORA ORIZZONTALE); NE SEGUE CHE C_1 È IL PUNTO IMPROPRIO DELLE RETTE VERTICALI (NEL SENSO CHE APPARTIENE A TUTTE LE RETTE PARALLELE VERTICALI): $C_1 = (\infty, \infty)$.

LO SPOSTAMENTO VIRTUALE È ALLORA UNA TRASLAZIONE ORIZZONTALE DI ENTITÀ δu_{x1}:



SI OSSERVI CHE IL DIAGRAMMA DELLE COMPONENTI ORIZZONTALI DI SPOSTAMENTO DEGENERA IN UN SEGMENTO; QUELLO DELLE COMPONENTI VERTICALI È NULLO: PERTANTO SI HA:

$$\delta u_{Ax} = \delta u_{x1}; \quad \delta u_{Cy} = 0; \quad \delta\vartheta_D = 0$$

(3) CALCOLANDO IL LAVORO VIRTUALE SI TROVA:

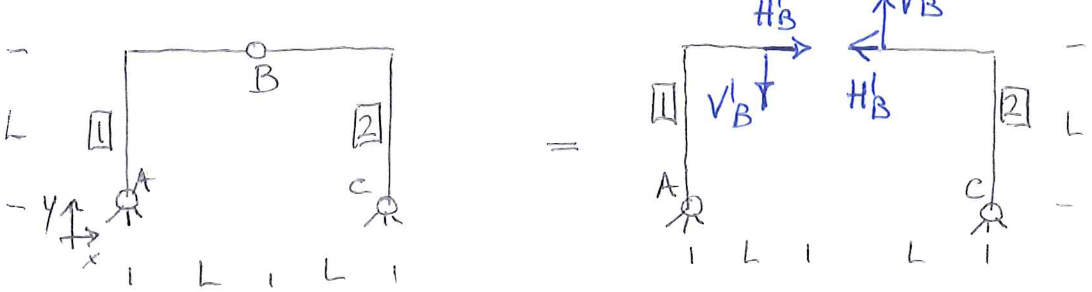
$$\delta \mathcal{L} = H_A \cdot \delta u_{x1} + F \cdot 0 + 3FL \cdot 0 = 0 \quad \forall\, \delta u_{x1}$$

$$\delta \mathcal{L} = [H_A]\,\delta u_{x1} = 0 \quad \forall\, \delta u_{x1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_A = 0}$$

SI SONO COSÌ DETERMINATE, APPLICANDO 3 VOLTE IL PLV SU 3 DIVERSE CATENE CINEMATICHE, TUTTE LE REAZIONI VINCOLARI DELLA STRUTTURA ISOSTATICA ASSEGNATA.

PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI DI VINCOLI INTERNI OCCORRE DI NUOVO "DEGRADARE" IL VINCOLO METTENDO IN EVIDENZA LE DUE REAZIONI CHE LE 2 PARTI SI TRASMETTONO MUTUAMENTE ATTRAVERSO IL VINCOLO.
OVVIAMENTE I VERSI DELLE 2 REAZIONI DEBBONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

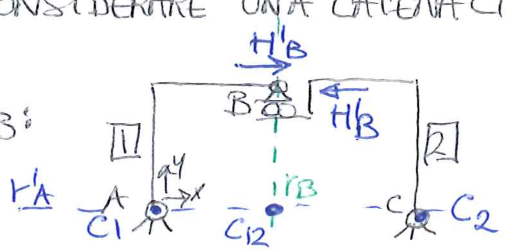
ECCO ALCUNI ESEMPI



OVVIAMENTE SI DEVE CONSIDERARE UNA CATENA CINEMATICA PER VOLTA:

• PER DETERMINARE H'_B:

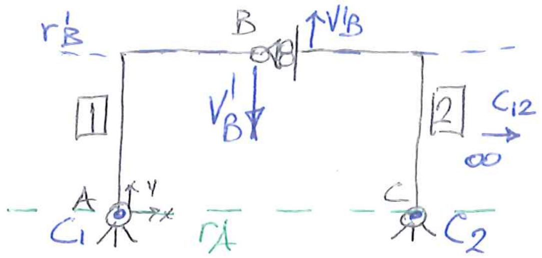
SI NOTI ALLINEAMENTO
$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$.



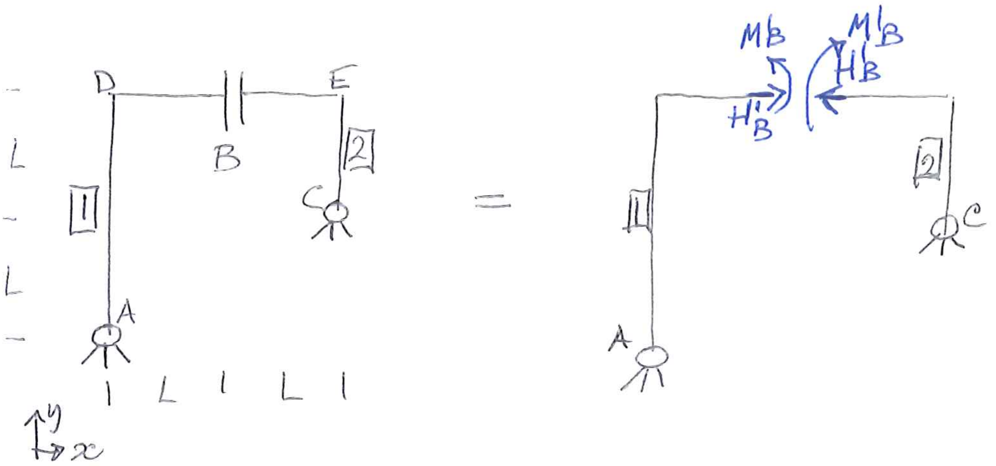
$C_1 \equiv Ⓐ = (0,0)$
$C_2 \equiv Ⓒ = (2L, 0)$
$C_{12} = (L, 0) \quad \begin{cases} C_{12} \in r_B \\ C_{12} \in r'_A \end{cases}$

• PER DETERMINARE V'_B:

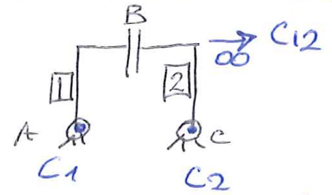
SI NOTI L'ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$.



$C_1 \equiv A = (0,0)$
$C_2 \equiv C = (2L,0)$
$C_{12} = (\infty,0)$ $\begin{cases} C_{12} \in r'_A \\ C_{12} \in r'_B \end{cases}$



SI NOTI CHE SE I PILASTRI DELLA TRAVE [1] E [2] FOSSERO DI EGUALE LUNGHEZZA, LA STRUTTURA SAREBBE LABILE:

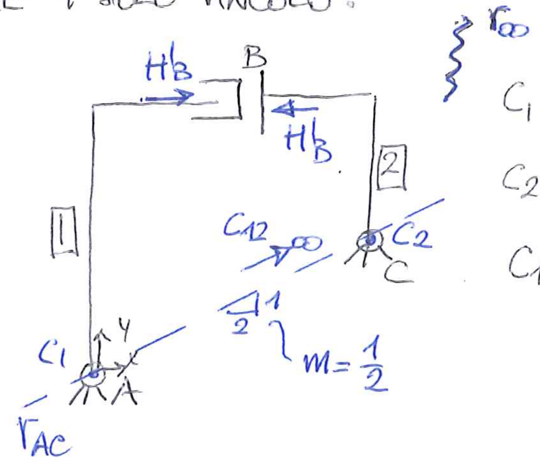


$\Rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$!

ANCHE IN QUESTO CASO SI DEVE CONSIDERARE UNA CATENA CINEMATICA PER VOLTA, DEGRADANDO SEMPRE 1 SOLO VINCOLO:

• PER DETERMINARE H'_B:

SI NOTI CHE PER LA PRESENZA DEL PATTINO-MANICOTTO IN B $C_{12} \in r_\infty$; PER L'ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$, $C_{12} \in r_{AC}$ NE SEGUE CHE C_{12} È PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA r_{AC}.

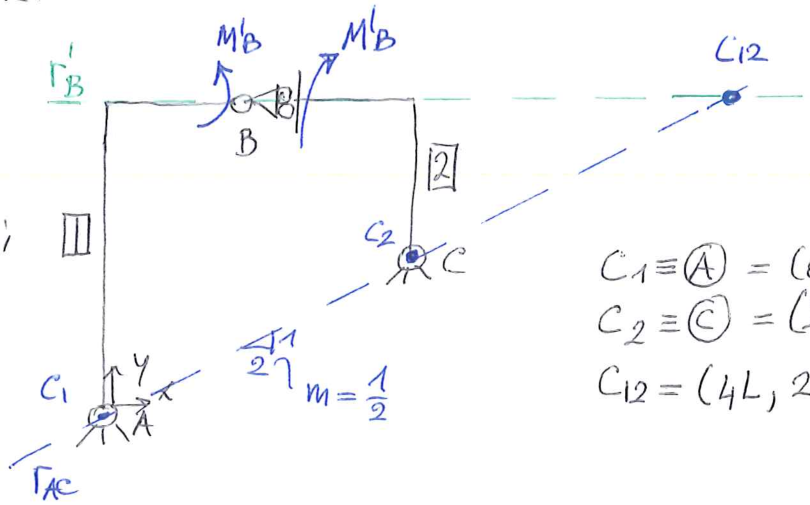


$C_1 \equiv A = (0,0)$
$C_2 \equiv C = (2L,L)$
$C_{12} = (\infty, \frac{1}{2})$

È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI r_{AC}.

• PER DETERMINARE M'_B:

SI NOTI CHE PER LA PRESENZA DEL CARRELLO IN B $C_{12} \in r'_B$; PER L'ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$, $C_{12} \in r_{AC}$; NE SEGUE CHE C_{12} È IL PUNTO DOVE r'_B E r_{AC} SI INTERSECANO.



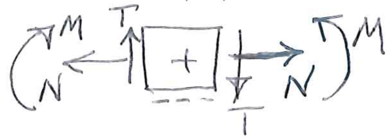
$C_1 \equiv A = (0,0)$
$C_2 \equiv C = (2L,L)$
$C_{12} = (4L, 2L)$

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE DI r_{AC} È $y = \frac{1}{2}x$; QUELLA DI r'_B È $y = 2L$; L'INTERSEZIONE È DUNQUE $C_{12} = (4L, 2L)$.

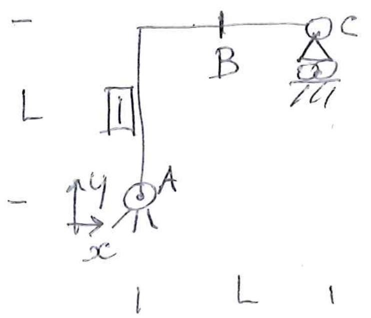
CALCOLO DI COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA IN UN PUNTO DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE) MEDIANTE IL P.L.V.

SI PROCEDE IN MODO ANALOGO AL CALCOLO DI REAZIONI DI VINCOLI INTERNI: SI INTRODUCE UNA SCONNESSIONE CHE "RILASCI" LA SOLA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO ASSOCIATA ALL'AZIONE INTERNA DA CALCOLARE.

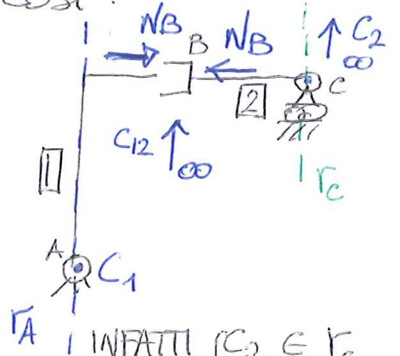
I VERSI DELLE AZIONI INTERNE DEVONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE E VANNO SCELTI CONFORMEMENTE A QUELLI ASSUNTI POSITIVI NELLA CONVENZIONE DEL CONCIO ELEMENTARE:



PER ESEMPIO, SE SI DEVONO CALCOLARE LE AZIONI INTERNE NEL PUNTO B DELLA STRUTTURA IN FIGURA SI PROCEDE COSÌ:



CALCOLO DI N:



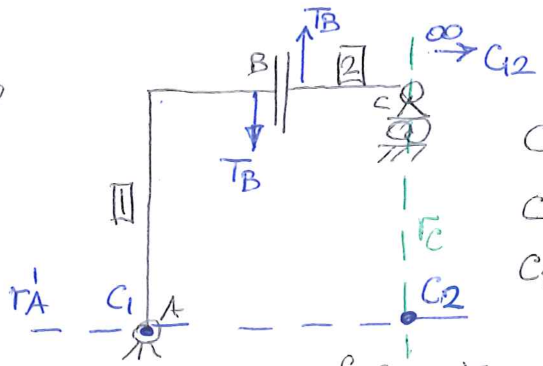
$C_1 = (A) = (0,0)$

$C_{12} = (\infty, \infty)$

$C_2 = (\infty, \infty)$

INFATTI $\begin{cases} C_2 \in r_C \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_A \end{cases}$

CALCOLO DI T:

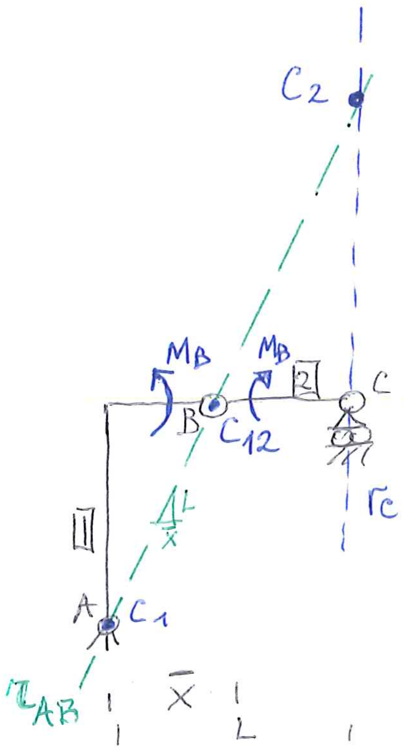


$C_1 \equiv (A) = (0,0)$

$C_{12} = (\infty, 0)$

$C_2 = (L, 0)$

INFATTI: $\begin{cases} C_2 \in r_C \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_A' \end{cases}$



CALCOLO DI M:

$C_1 \equiv (A) = (0,0)$

$C_{12} \equiv (B) = (\bar{x}, L)$

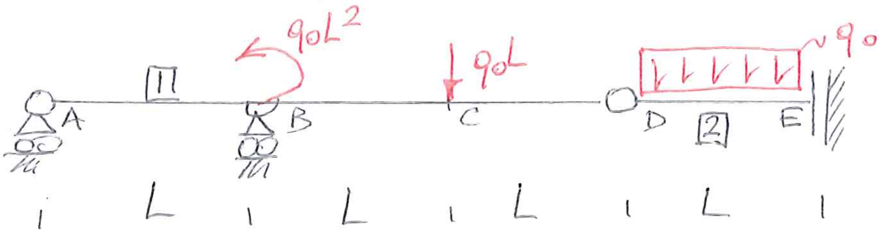
$C_2 = \left(L, \frac{L^2}{\bar{x}}\right)$

INFATTI $\begin{cases} C_2 \in r_C \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{AB} \end{cases}$

E LA PENDENZA DELLA RETTA r_{AB} È INDIVIDUATA DAL COEFFICIENTE ANGOLARE $m = \frac{L}{\bar{x}}$.

SI CONCLUDE LO STUDIO DEL PLV PER SISTEMI RIGIDI CON UNA BREVE RASSEGNA DI ESERCIZI RIASSUNTIVI, CHE SINTETIZZANO IL MODUS OPERANDI DA APPLICARE IN SITUAZIONI SIGNIFICATIVE.

I) PER LA STRUTTURA ISOSTATICA QUI RAFFIGURATA, SI CALCOLINO LA REAZIONE VERTICALE IN Ⓐ, V_A, E IL MOMENTO FLETTENTE NEL PUNTO Ⓒ, M_c. 16

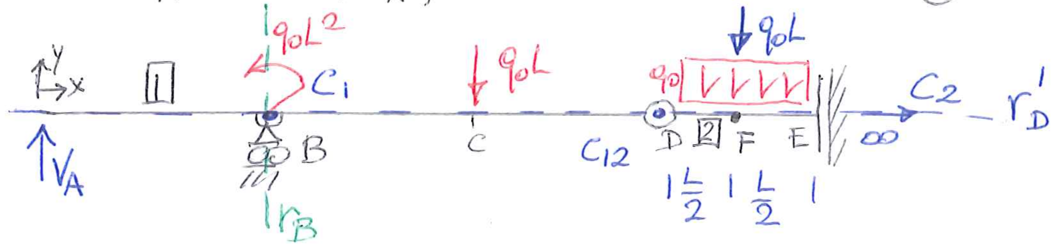


$2\times3 = 6$ GDL

$1(A)+1(B)+2(D)+2(E)=6$ GDV

$\Rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.

PER IL CALCOLO DI V_A, SI ELIMINA IL VINCOLO IN Ⓐ EVIDENZIANDO LA REAZIONE V_A:



PER LA CATENA CINEMATICA COSÌ EVIDENZIATA SI RICONOSCE CHE:

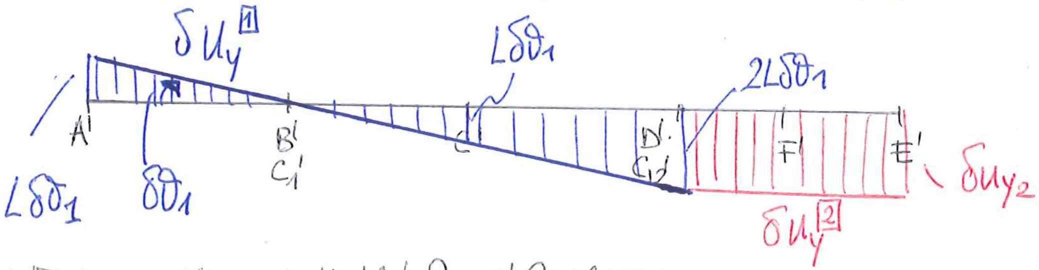
$C_{12} \equiv D = (3L, 0)$

$C_2 = (\infty, 0)$

MENTRE C_1 È INDIVIDUATO DALLE 2 CONDIZIONI: $\begin{cases} C_1 \in r_B \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \in r'_D \end{cases}$

NE SEGUE $C_1 \equiv B = (L, 0)$

SI PROCEDE A COSTRUIRE IL CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI GENERATO DA UNA ROTAZIONE VIRTUALE $\delta\vartheta_1$ NELLA TRAVE $\boxed{1}$:



$\delta u^{[1]}_{C_{12}y} = \delta u^{[2]}_{C_{12}y}$

$\Rightarrow \boxed{2L\delta\vartheta_1 = \delta u_{y2}}$

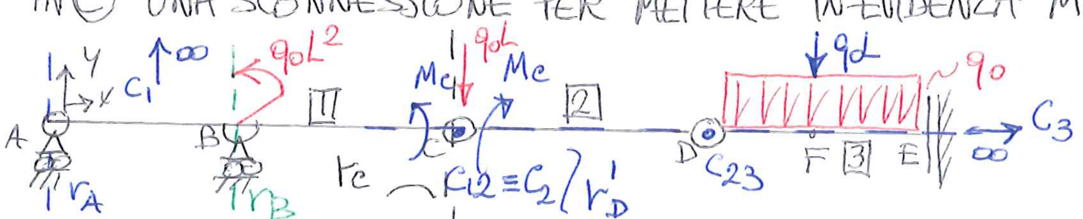
INFINE SI VALUTA IL LAVORO VIRTUALE:

$$\delta\mathcal{L} = V_A \cdot L\delta\vartheta_1 - q_0L^2 \cdot \delta\vartheta_1 + q_0L \cdot L\delta\vartheta_1 + q_0L \cdot \delta u_{y2} = 0 \qquad \forall\, \delta\vartheta_1, \delta u_{y2}$$

$$\delta\mathcal{L} = \left[V_A L - \cancel{q_0L^2} + \cancel{q_0L^2} + q_0L \cdot 2L\right]\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta_1$$

$$\Rightarrow V_A \cancel{L} + 2q_0L^{\cancel{2}} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{V_A = -2q_0L}$$

PER IL CALCOLO DI M_C, SI RIPARTE DALLA STRUTTURA ISOSTATICA INTRODUCENDO IN Ⓒ UNA SCONNESSIONE PER METTERE IN EVIDENZA M_c:



PER LA NUOVA CATENA CINEMATICA, COSTITUITA DA 3 CORPI RIGIDI SI DETERMINANO CENTRI ASSOLUTI E RELATIVI.

PER I VINCOLI A TERRA IN (A) E (B) SI TROVANO QUESTE 2 CONDIZIONI PER C_1:

$$\begin{cases} C_1 \in r_A \\ C_1 \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_1 = (\infty, \infty)$$, CIOÈ NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 RETTE VERTICALI r_A E r_B

IL VINCOLO A TERRA IN E DETERMINA $C_3 = (\infty, 0)$; I VINCOLI INTERNI IN (C) E (D) DETERMINANO $C_{12} \equiv (C) = (2L, 0)$ E $C_{23} \equiv (D) = (3L, 0)$.

PER DETERMINARE C_2 OCCORRE FARE USO DI QUESTI 2 ALLINEAMENTI: $\begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \\ C_3 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_2 \end{cases}$

IL PRIMO DETERMINA $C_2 \in r_C$ (RETTA VERTICALE PASSANTE PER (C), DATA DALLO ALLINEAMENTO DI C_1 E C_{12}); IL SECONDO $C_2 \in r_D'$ (RETTA ORIZZONTALE PASSANTE PER (D), DATA DALL'ALLINEAMENTO DI C_{23} E C_3): NE SEGUE $C_2 \equiv (C) = (2L, 0) \equiv C_{12}$

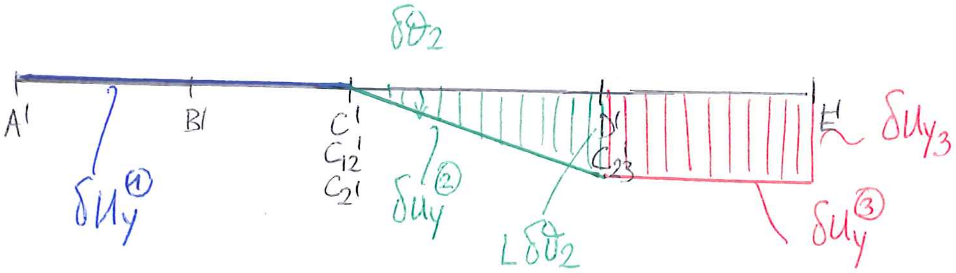
POICHÉ $C_{12} \equiv C_2$ SEGUE CHE IL CORPO [1] RESTA IMMOBILE (IL CINEMATISMO CHE COINVOLGE [1] E [2] È PARZIALE)

COME VERIFICA SI DETERMINA C_{13} MEDIANTE I DUE ALLINEAMENTI $\begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 \\ C_{12} \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_{23} \end{cases}$

IL PRIMO IMPONE A C_{13} DI APPARTENERE ALLA RETTA IMPROPRIA, r_∞; IL SECONDO DI APPARTENERE ANCORA ALLA RETTA r_D: SI OTTIENE QUINDI $C_{13} = (\infty, 0) \equiv C_3$.

IL FATTO CHE $C_{13} \equiv C_3$ ASSICURA CHE ANCHE IL CINEMATISMO CHE COINVOLGE [1] E [3] È PARZIALE E QUINDI È CONFERMATO CHE LA TRAVE [1] NON SI SPOSTA.

SE ALLORA SI SCEGLIE COME PARAMETRO LAGRANGIANO LA ROTAZIONE $\delta\vartheta_2$ SI HA QUESTO CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI:



LO SPOSTAMENTO DI C_{23} GARANTISCE CHE SIA

$$\delta u_{y3} = L\,\delta\vartheta_2$$

PER IL CALCOLO DEL LAVORO VIRTUALE SI TROVA:

$$\delta\mathcal{L} = q_0 L^2 \cancel{\cdot 0} + q_0 L \cancel{\cdot 0} + M_C^{[1]} \cancel{\cdot 0} + M_C^{[2]} \cdot \delta\vartheta_2 + q_0 L \cdot \delta u_{y3} = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2, \delta u_{y3}$$

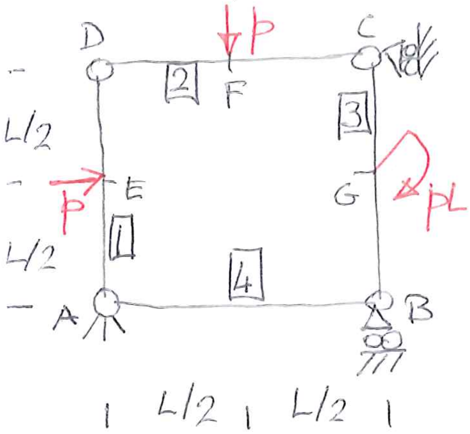
NE SEGUE

$$\delta\mathcal{L} = \left[M_C + q_0 L \cdot L\right] \delta\vartheta_2 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2$$

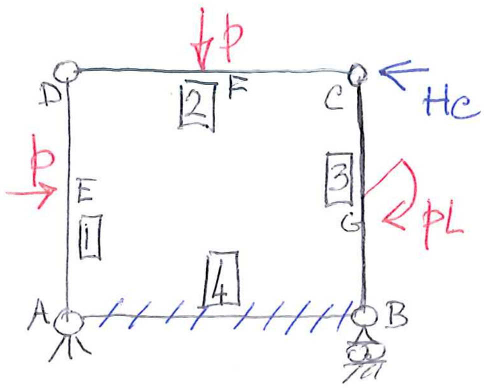
$$\Rightarrow M_C + q_0 L^2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_C = -q_0 L^2}$$

II) PER LA STRUTTURA ISOSTATICA AD ANELLO CHIUSO NON RIGIDO (IPOSTATICO) GIÀ CONSIDERATA NELLA LEZIONE 7, PAG. 11 SI USA IL PLV PER CALCOLARE DIRETTAMENTE LE REAZIONI VINCOLARI A TERRA (SENZA LA NECESSITÀ DI "ROMPERE" PRELIMINARMENTE L'ANELLO).

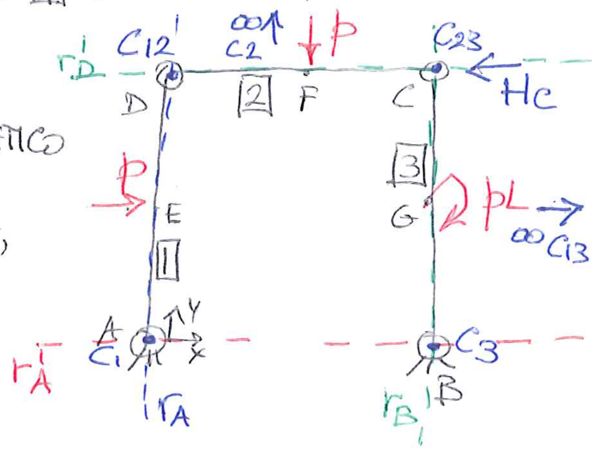
LA STRUTTURA È QUI RIPROPOSTA CON LA MEDESIMA CONDIZIONE DI CARICO.



1) CALCOLO DI H_C: SI OSSERVA CHE LA TRAVE $\boxed{4}$ È ISOSTATICA, DUNQUE FISSA.



LA STRUTTURA È QUINDI RICONDUCIBILE, DAL PUNTO DI VISTA CINEMATICO ALLA SEGUENTE CATENA CINEMATICA, CON 2 CERNIERE A TERRA IN (A) E IN (B)



SI TROVA AGEVOLMENTE

$C_1 = (0,0) \equiv A$

$C_3 = (L,0) \equiv B$

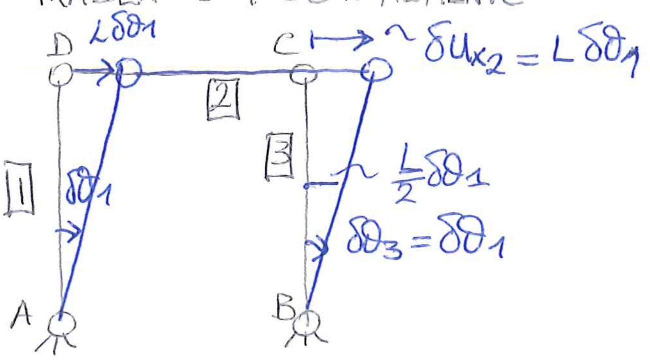
$C_{12} = (0,L) \equiv D$

$C_{23} = (L,L) \equiv C$

$$C_2: \begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \; : \; C_2 \in r_A \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \; : \; C_2 \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_2 = (\infty, \infty)$$

$$C_{13}: \begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \; : \; C_{13} \in r'_A \\ C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23} \; : \; C_{13} \in r'_D \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (\infty, 0)$$

IL FATTO CHE C_{13} SIA PUNTO IMPROPRIO FA SÌ CHE LE TRAVI $\boxed{1}$ E $\boxed{3}$ RUOTINO ATTORNO A C_1 E A C_3 MANTENENDOSI PARALLELE; $\delta\vartheta_1 = \delta\vartheta_3$; LA TRAVE $\boxed{2}$ TRASLA ORIZZONTALMENTE.



PERCHÉ GLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI SIANO EGUALI IN (D) E IN (C) SI TROVA

$$\delta u_{x_2} = L\,\delta\vartheta_1$$

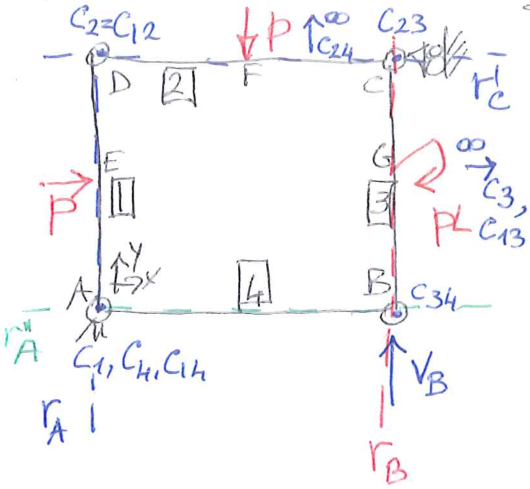
PER IL LAVORO VIRTUALE SI HA:

$$\delta \mathcal{L} = p_{(E)} \cdot \frac{L}{2}\,\delta\vartheta_1 + p_{(F)} \cdot 0 - H_C \cdot L\,\delta\vartheta_1 + pL_{(G)} \cdot \delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta_1$$

$$\delta \mathcal{L} = \left(p\frac{L}{2} - H_C L + pL\right)\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall\, \delta\vartheta_1$$

$$\frac{3}{2}p\cancel{L} - H_C\cancel{L} = 0 \Rightarrow \boxed{H_C = \frac{3}{2}p}$$

2) CALCOLO DI V_B:



SI TROVA FACILMENTE:

$C_1 = (0,0) \equiv A$ $\quad C_{12} = (0,L) \equiv D$

$C_4 = (0,0) \equiv A$ $\quad C_{23} = (L,L) \equiv C$

$C_{14} = (0,0) \equiv A$ $\quad C_{34} = (L,0) \equiv B$

PER I RIMANENTI CENTRI SI USANO QUESTE CONDIZIONI DI ALLINEAMENTO:

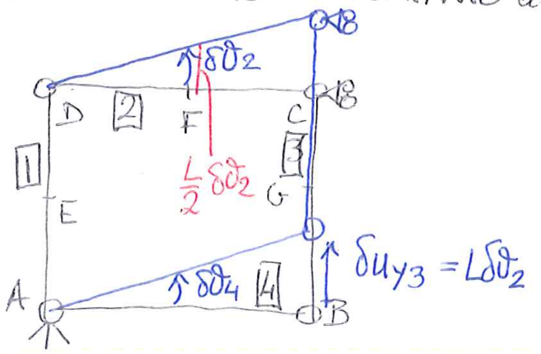
$$C_3: \begin{cases} C_3 \in r'_C \\ C_3 \leftrightarrow C_{34} \leftrightarrow C_4 : C_3 \in r'_A \end{cases} \Rightarrow C_3 = (\infty, 0)$$

$$C_2: \begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 : C_2 \in r_A \\ C_3 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_2 : C_2 \in r'_C \end{cases} \Rightarrow C_2 = (0,L) \equiv D$$

$$C_{13}: \begin{cases} C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} : C_{13} \in r'_C \\ C_{13} \leftrightarrow C_{34} \leftrightarrow C_{14} : C_{13} \in r'_A \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (\infty, 0)$$

$$C_{24}: \begin{cases} C_2 \leftrightarrow C_{24} \leftrightarrow C_4 : C_{24} \in r_A \\ C_{23} \leftrightarrow C_{24} \leftrightarrow C_{34} : C_{24} \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_{24} = (\infty, \infty)$$

POICHE' $C_3 \equiv C_{13}$ LA TRAVE [1] RESTA FISSA E IL CINEMATISMO [1]-[3] È PARZIALE.
POICHE' C_{24} È PUNTO IMPROPRIO LE TRAVI [2] E [4] RUOTANO (RISPETTO A C_2 E A C_4) MA MANTENENDOSI PARALLELE: $\delta\vartheta_2 = \delta\vartheta_4$; LA TRAVE [3] TRASLA VERTICALMENTE.
IL CINEMATISMO È PERTANTO QUELLO INDICATO E IL PLV FORNISCE:

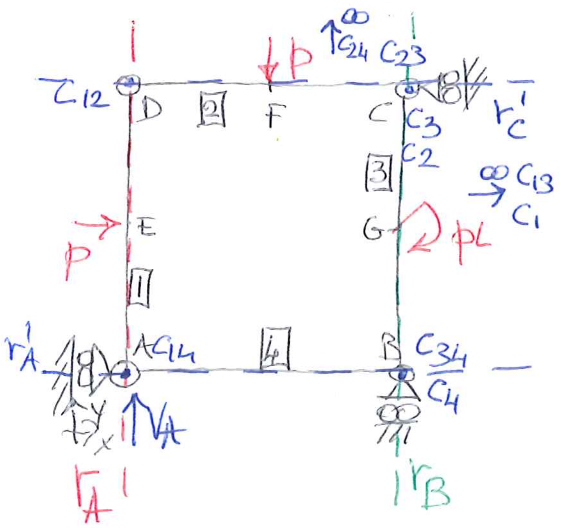


$$\delta\mathcal{L} = P_{(E)} \cdot 0 - P_{(F)} \cdot \frac{L}{2}\delta\vartheta_2 + pL_{(G)} \cdot 0 + V_B \cdot \delta u_{y3} = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2, \delta u_{y3}$$

$$\delta\mathcal{L} = \left(-\frac{P\cancel{L}}{2} + V_B \cancel{L}\right)\delta\vartheta_2 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2$$

$$-\frac{P}{2} + V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{P}{2}}$$

3) CALCOLO DI V_A:



SI TROVA IN MODO SEMPLICE:

$C_{14} = (0,0) \equiv A$

$C_{34} = (L,0) \equiv B$

$C_{12} = (0,L) \equiv D$

$C_{23} = (L,L) \equiv C$

$$C_4: \begin{cases} C_4 \in r'_A \\ C_4 \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_4 = (0,L)$$

$$C_3: \begin{cases} C_3 \in r_B \\ C_3 \in r'_C \end{cases} \Rightarrow C_3 = (L,L)$$

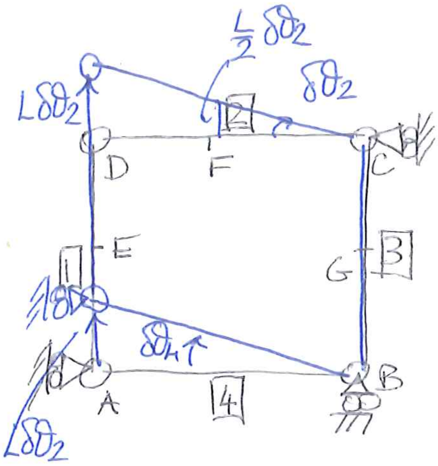
I RESTANTI CENTRI SI DETERMINANO CON CONDIZIONI DI ALLINEAMENTO:

$$C_{24}: \begin{cases} C_{23} \Leftrightarrow C_{24} \Leftrightarrow C_{34} \,;\, C_{24} \in r_B \\ C_{12} \Leftrightarrow C_{14} \Leftrightarrow C_{24} \,;\, C_{24} \in r_A \end{cases} \Rightarrow C_{24} = (\infty, \infty)$$

$$C_2: \begin{cases} C_2 \in r'_C \\ C_2 \Leftrightarrow C_{24} \Leftrightarrow C_4 \,;\, C_{24} \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_2 = (L, L)$$

$$C_1: \begin{cases} C_1 \in r'_A \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \,;\, C_1 \in r'_C \end{cases} \Rightarrow C_1 = (\infty, 0)$$

$$C_{13}: \begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 \,;\, C_{13} \in r'_C \\ C_{13} \Leftrightarrow C_{14} \Leftrightarrow C_{34} \,;\, C_{13} \in r'_A \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (\infty, 0)$$

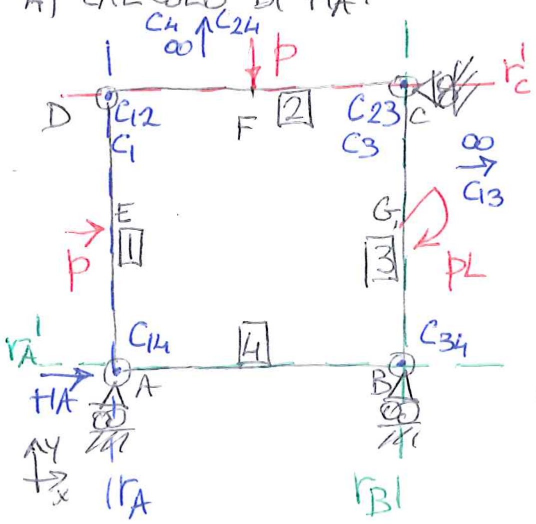


IL FATTO CHE C_{24} SIA PUNTO IMPROPRIO COMPORTA CHE LE TRAVI [2] E [4] RUOTINO RISPETTIVAMENTE ATTORNO A C_2 E C_4 MANTENENDOSI PARALLELE: $\delta\vartheta_2 = \delta\vartheta_4$, MENTRE IL FATTO CHE $C_{13} \equiv C_1$ COMPORTA CHE LA TRAVE [3] RESTI FISSA (CINEMATISMO [1] - [3] È PARZIALE).

IL PLV FORNISCE: $\delta\mathcal{L} = V_A \cdot L\delta\vartheta_2 + p_{(E)} \cdot 0 - p_{(F)} \cdot \frac{L}{2}\delta\vartheta_2 + pL \cdot 0 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2$

$$\delta\mathcal{L} = \left(V_A \cdot \cancel{L} - p\frac{\cancel{L}}{2}\right)\delta\vartheta_2 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_2 \Rightarrow V_A - \frac{p}{2} = 0 \quad \boxed{V_A = \frac{p}{2}}$$

4) CALCOLO DI H_A:



SI TROVA DIRETTAMENTE:

$C_{14} = (0,0) \equiv A$

$C_{34} = (L,0) \equiv B$

$C_{12} = (0,L) \equiv D$

$C_{23} = (L,L) \equiv C$

$$C_4: \begin{cases} C_4 \in r_A \\ C_4 \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_4 = (\infty, \infty)$$

$$C_3: \begin{cases} C_3 \in r_B \\ C_3 \in r'_C \end{cases} \Rightarrow C_3 = (L, L)$$

$$C_{13}: \begin{cases} C_{12} \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_{13} \,;\, C_{13} \in r'_C \\ C_{13} \Leftrightarrow C_{14} \Leftrightarrow C_{34} \,;\, C_{13} \in r'_A \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (\infty, 0)$$

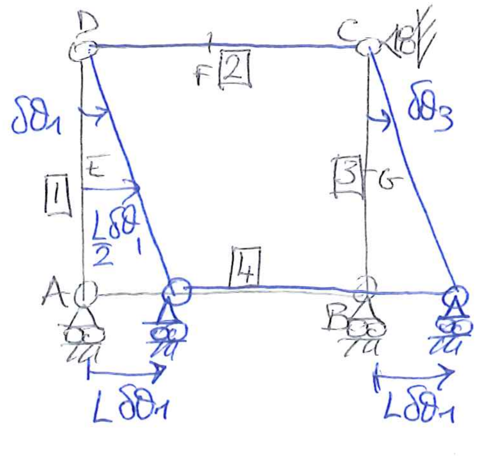
SEGUONO GLI ALTRI CENTRI DEFINITI DA ALLINEAMENTI:

$$C_1: \begin{cases} C_1 \in r_A \\ C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 \,;\, C_1 \in r'_C \end{cases} \Rightarrow C_1 = (0, L)$$

$$C_2: \begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \\ C_2 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_3 \end{cases} \Rightarrow C_2 \in r'_C$$

$$C_{24}: \begin{cases} C_2 \Leftrightarrow C_{14} \Leftrightarrow C_{24} \,;\, C_{24} \in r_A \\ C_{23} \Leftrightarrow C_{24} \Leftrightarrow C_{34} \,;\, C_{24} \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_{24} = (\infty, \infty)$$

ORA DAL FATTO CHE $C_{24} \equiv C_4$ SEGUE CHE LA TRAVE [2] RESTA IMMOBILE (CINEMATISMO [2] - [4] È PARZIALE); INOLTRE C_{13} È PUNTO IMPROPRIO SICCHÉ [1] E [3] RUOTANO MANTENENDOSI PARALLELI: $\delta\vartheta_1 = \delta\vartheta_3$. IL CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI (CINEMATISMO) È IL SEGUENTE:



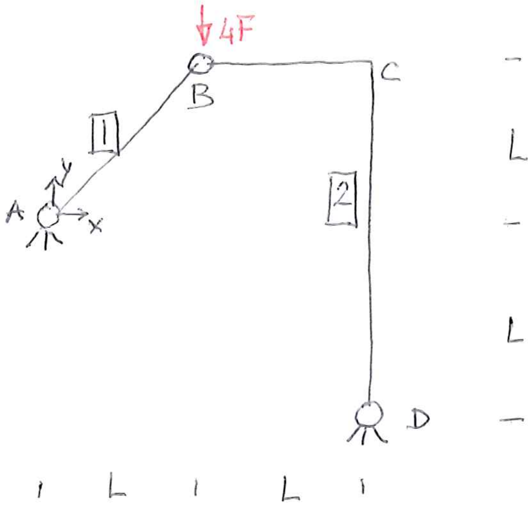
IL P.L.V. FORNISCE A QUESTO PUNTO:

$$\delta\mathcal{L} = H_A \cdot L\delta\vartheta_1 + p_{(E)} \cdot \frac{L}{2}\delta\vartheta_1 + p_{(F)} \cdot 0 - pL_{(G)} \cdot \delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_1$$

$$\delta\mathcal{L} = \left(H_A \cdot \cancel{L} + \frac{p\cancel{L}}{2} - p\cancel{L}\right)\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_1$$

$$\Rightarrow \left(H_A - \frac{p}{2}\right) = 0 \qquad \boxed{H_A = +\frac{p}{2}}$$

PER LA STRUTTURA ISOSTATICA RIPORTATA IN FIGURA SI VOGLIONO CALCOLARE CON IL PLV LA REAZIONE ORIZZONTALE H_D E IL MOMENTO FLETTENTE IN C, M_C.

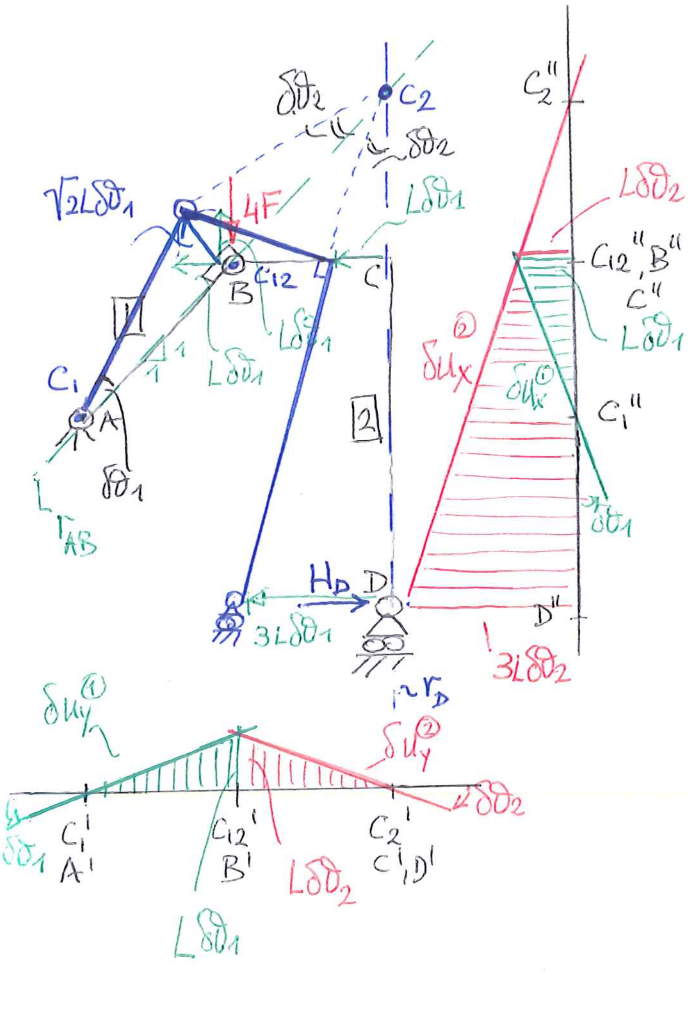


SI VERIFICA AGEVOLMENTE CHE:

$$GDL = 2 \times 3 = 6$$
$$GDV = 2(A) + 2(B) + 2(D)$$
} ISOSTATICA

LE 3 CERNIERE A, B, D NON SONO ALLINEATE PER CUI LA STRUTTURA È NON LABILE.

PER CALCOLARE H_D IL VINCOLO IN D DEVE ESSERE DEGRADATO IN MODO DA EVIDENZIARE LA REAZIONE ORIZZONTALE: SI SOSTITUISCE QUINDI LA CERNIERA CON UN CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE.



PER LA CATENA CINEMATICA COSÌ OTTENUTA SI TROVA CHE

$$C_1 = (0,0) \equiv A$$
$$C_{12} = (L, L) \equiv B$$

MENTRE PER C_2 SI HANNO QUESTE 2 CONDIZIONI:

$$\begin{cases} C_2 \in r_D \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \; : \; C_2 \in r_{AB} \end{cases} \Rightarrow C_2 = (2L, 2L)$$

PERTANTO IL CORPO RIGIDO 1 RUOTA ATTORNO AD A E IL CORPO RIGIDO 2 ATTORNO A C_2 (CHE NON APPARTIENE AL CORPO, MA È DA CONSIDERARE SOLIDALE CON ESSO).

DAI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO SI RICAVA, PER L'EGUAGLIANZA DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DI C_{12}:

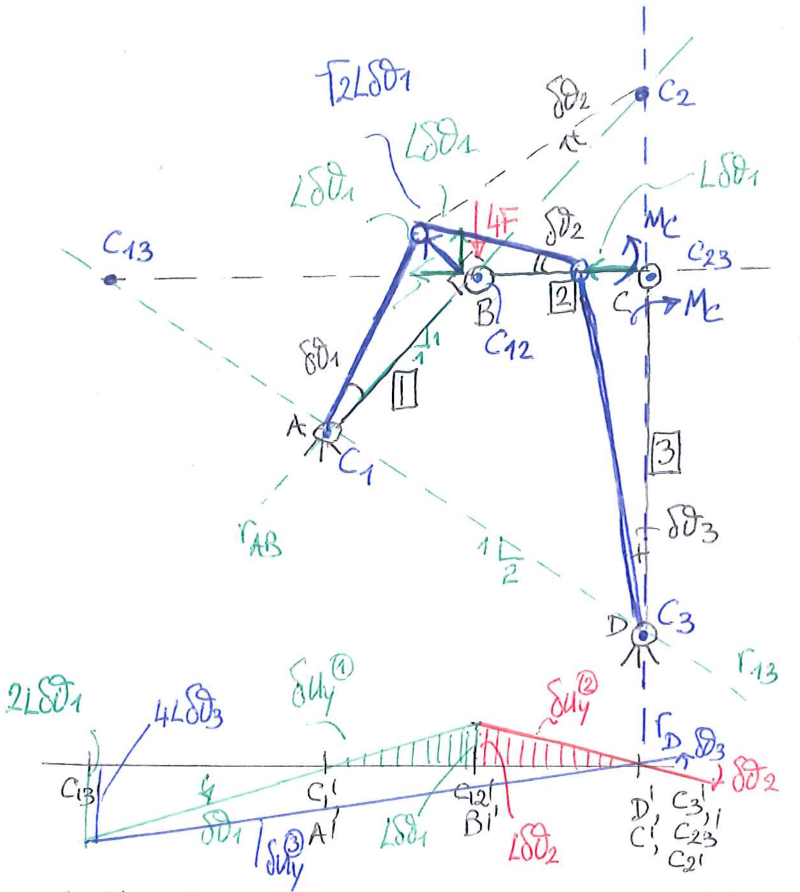
$$\delta u^{(1)}_{C_{12}y} = \delta u^{(2)}_{C_{12}y} \Rightarrow L\delta\vartheta_1 = L\delta\vartheta_2 \Rightarrow \boxed{\delta\vartheta_1 = \delta\vartheta_2}$$
$$\delta u^{(1)}_{C_{12}x} = \delta u^{(2)}_{C_{12}x} \Rightarrow L\delta\vartheta_1 = L\delta\vartheta_2 \Rightarrow \boxed{\delta\vartheta_1 = \delta\vartheta_2}$$

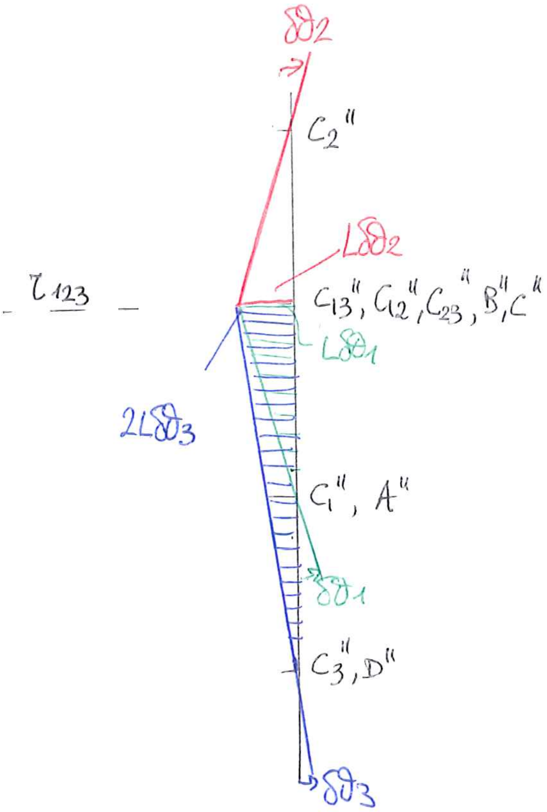
APPLICANDO IL PLV E OSSERVANDO CHE PER IL CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI CONSIDERATI ENTRAMBE LE FORZE ATTIVE COMPIONO LAVORO NEGATIVO, SI HA:

$$\delta\mathcal{L} = -4F \cdot L\delta\vartheta_1 - H_D \cdot 3L\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_1 \Rightarrow (-4F\cancel{L} - 3H_D\cancel{L})\delta\vartheta_1 = 0 \; \forall \delta\vartheta_1$$

$$\Rightarrow 3H_D = -4F \Rightarrow \boxed{H_D = -\frac{4}{3}F}$$

NEL SECONDO CASO SI OTTIENE UNA CATENA CINEMATICA INSERENDO UNA CERNIERA INTERNA IN Ⓒ (CHE SUDDIVIDE LA STRUTTURA IN 3 CORPI RIGIDI, PER POTERE EVIDENZIARE IL MOMENTO FLETTENTE IN Ⓒ.





PER QUESTA CATENA CINEMATICA SI RICONOSCE CHE:

$C_1 = (0,0) \equiv A$

$C_3 = (2L, -L) \equiv D$

$C_{12} = (L, L) \equiv B$

$C_{23} = (2L, L) \equiv C$

PER C_2 VALGONO QUESTE CONDIZIONI:

$$C_2 : \begin{cases} \underline{C}_1 \Leftrightarrow \underline{C}_{12} \Leftrightarrow C_2 \quad ; \quad C_2 \in r_{AB} \\ \underline{C}_3 \Leftrightarrow \underline{C}_{23} \Leftrightarrow C_2 \quad ; \quad C_2 \in r_D \end{cases} \Rightarrow C_2 = (2L, 2L)$$

MENTRE PER C_{13} DEVONO SUSSISTERE QUESTI ALLINEAMENTI:

$$C_{13} : \begin{cases} \underline{C}_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow \underline{C}_3 \quad ; \quad C_{13} \in r_{13} \\ \underline{C}_{12} \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow \underline{C}_{23} \quad ; \quad C_{13} \in r_{123} \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (-2L, L)$$

DAI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO SI OTTIENE:

$$\delta u^{③}_{C13y} = \delta u^{①}_{C13y} \Rightarrow 2L\delta\vartheta_1 = 4L\delta\vartheta_3 \Rightarrow \delta\vartheta_1 = 2\vartheta_3 \; ; \; \delta\vartheta_3 = \frac{1}{2}\delta\vartheta_1$$

$$\delta u^{②}_{C23x} = \delta u^{③}_{C23x} \Rightarrow L\delta\vartheta_2 = 2L\delta\vartheta_3 \Rightarrow \delta\vartheta_2 = 2\delta\vartheta_3 \; ; \; \delta\vartheta_3 = \frac{1}{2}\delta\vartheta_2$$

$$\delta u^{①}_{C12y} = \delta u^{②}_{C12y} \Rightarrow L\delta\vartheta_1 = L\delta\vartheta_2 \Rightarrow \delta\vartheta_1 = \delta\vartheta_2 \; ; \; \delta\vartheta_2 = \delta\vartheta_1$$

APPLICANDO IL PLV SI HA, DISTINGUENDO I CONTRIBUTI DEL MOMENTO APPLICATO ALLA [2] E ALLA [3]:

$$\delta \mathcal{L} = -4F \cdot L\delta\vartheta_1 - M_c^{(2)}\delta\vartheta_1 - M_c^{(3)} \cdot \frac{1}{2}\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_1$$

DUNQUE

$$\delta \mathcal{L} = \left(-4FL - \frac{3}{2}M_c\right)\delta\vartheta_1 = 0 \quad \forall \delta\vartheta_1 \Rightarrow \quad -4FL - \frac{3}{2}M_c = 0 \quad \frac{3}{2}M_c = -4FL$$

$$\boxed{M_c = -\frac{8}{3}FL}$$