CALCOLO VETTORIALE.

MOTIVAZIONE: NELLO STUDIO DELLA MECCANICA, ACCANTO A GRANDEZZE DETTE <u>SCALARI</u>, CHE SONO CARATTERIZZATE COMPIUTAMENTE DAL LORO VALORE (PER ESEMPIO: LUNGHEZZA, AREA, VOLUME, DENSITA', TEMPERATURA, INTERVALLO DI TEMPO), NE ESISTONO ALTRE (P.ES: FORZE, SPOSTAMENTI, VELOCITA', ACCELERAZIONI) CHE NECESSITANO DI UNA CARATTERIZZAZIONE PIÙ COMPLICATA.
A QUESTE GRANDEZZE, DETTE <u>VETTORIALI</u>, SI ASSOCIA NATURALMENTE IL CONCETTO MATEMATICO DI VETTORE, CHE FORNISCE UNO STRUMENTO UTILE A MODELLARLE E A CONSENTIRE DI FORMULARE IN LINGUAGGIO MATEMATICO UN PROBLEMA RISOLUBILE IN TERMINI QUANTITATIVI.

UN VETTORE È UN'ENTITA' MATEMATICA CARATTERIZZATA DA QUESTI 3 ELEMENTI:

- MODULO: NUMERO $\mathbb{R}^+$ (REALE POSITIVO) → ESPRIME L'INTENSITA' DELLA GRANDEZZA
- DIREZIONE: INDIVIDUA L'INCLINAZIONE DI UNA RETTA ASSOCIATA ALLA GRANDEZZA (PER ESEMPIO MEDIANTE IL COEFFICIENTE ANGOLARE CHE NE ESPRIME LA PENDENZA)
- VERSO: INDIVIDUA L'ORIENTAZIONE SECONDO LA QUALE LA RETTA VIENE PERCORSA

L'INSIEME DIREZIONE + VERSO INDIVIDUA UNA "DIREZIONE ORIENTATA".

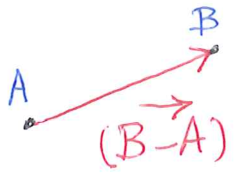
PER DENOTARE UN VETTORE SI ADOTTANO QUESTE GRAFIE:

$\mathbf{v}$ (CARATTERE GRASSETTO), $\underline{v}$, $\vec{v}$, $(\overrightarrow{B-A})$, $(B-A)$ PER INDICARE IL VETTORE NELLA SUA <u>INTEREZZA</u>

SOTTOLINEATURA   FRECCIA

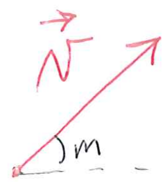
v (CARATTERE CORSIVO), $|\underline{v}|$, $|\vec{v}|$, $|\overrightarrow{B-A}|$, $|B-A|$ PER INDICARE IL SOLO MODULO DEL VETTORE.

<u>NOTA 1</u>: $(\overrightarrow{B-A})$ INDIVIDUA IL VETTORE (SEGMENTO ORIENTATO) INDIVIDUATO DAI 2 PUNTI B E A: È IL VETTORE CHE CHE CONGIUNGE IL PUNTO A (CODA) CON IL PUNTO B (TESTA).



SI PONGA ATTENZIONE CHE IL PRIMO PUNTO INDIVIDUA LA ESTREMITA' "FRECCIATA" E IL SECONDO L'ESTREMITA' FINALE; QUESTA GRAFIA, APPARENTEMENTE OSCURA, APPARIRA' PIÙ CHIARA IN SEGUITO, QUANDO SI VEDRA' CHE UN PUNTO NON INDIVIDUA UN VETTORE, MA LA DIFFERENZA DI POSIZIONE FRA 2 PUNTI, SÌ.

GRAFICAMENTE UN VETTORE SI RAPPRESENTA MEDIANTE UN SEGMENTO FRECCIATO:



IN ESSO LA LUNGHEZZA RAPPRESENTA, IN OPPORTUNA SCALA, IL MODULO; LA INCLINAZIONE RISPETTO A UNA DIREZIONE FISSA LA DIREZIONE; LA PUNTA (DOTATA DI FRECCIA) IL VERSO.

NOTA 2: OVVIAMENTE LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA NON È UNIVOCA: LO STESSO VETTORE È SUSCETTIBILE DI RAPPRESENTAZIONI DIVERSE SE SI ADOTTANO SCALE DIVERSE; PERALTRO LO STESSO VETTORE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO IN ∞ (INFINITI) MODI DIVERSI, TRASLANDOLO PARALLELAMENTE A SE STESSO. □

NOTA 3: I VETTORI PER I QUALI OCCORRE SPECIFICARE IL PUNTO DI APPLICAZIONE SONO DETTI VETTORI APPLICATI; IL PUNTO DI APPLICAZIONE È ESTRANEO ALLA DEFINIZIONE DI VETTORE E COSTITUISCE UN'INFORMAZIONE AGGIUNTIVA □

OPERAZIONI DEFINITE SUI VETTORI

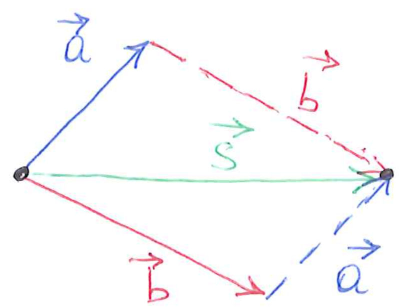
I VETTORI, COME ENTITÀ MATEMATICHE, NON SONO DEFINITI IN SÉ E PER SÉ, MA SONO CARATTERIZZATI DALLE RELAZIONI SECONDO LE QUALI SI RAPPORTANO CON I PROPRI "SIMILI". LE OPERAZIONI FRA VETTORI SI POSSONO INTERPRETARE COME OPPORTUNE GENERALIZZAZIONI DELLE OPERAZIONI CHE SI POSSONO ESEGUIRE CON I NUMERI.

1. ADDIZIONE DI VETTORI

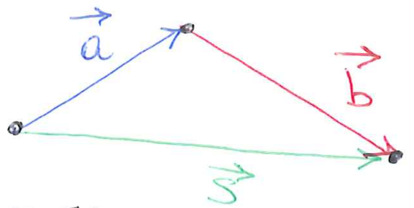
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \qquad [0]$$

DATI 2 VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ L'OPERAZIONE DI ADDIZIONE ASSOCIA A QUESTI UN TERZO VETTORE $\vec{s}$ (SOMMA O RISULTANTE DI $\vec{a}$ E $\vec{b}$) COSÌ DEFINITO:

I) $\vec{s}$ È LA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA INDIVIDUATO SPICCANDO $\vec{a}$ E $\vec{b}$ DA UN UNICO PUNTO: $\vec{a}$ E $\vec{b}$ RISULTANO I LATI DEL PARALLELOGRAMMA



II) $\vec{s}$ È IL LATO DI CHIUSURA (TERZO LATO) DEL TRIANGOLO FORMATO SPICCANDO $\vec{a}$ E $\vec{b}$ UNO DI SEGUITO ALL'ALTRO.



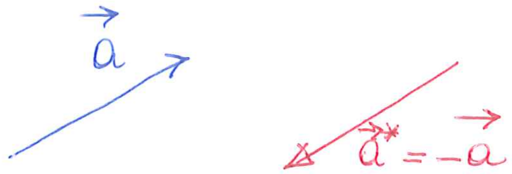
NOTA 4: LE 2 DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI, COME SI NOTA AGEVOLMENTE DALLA COSTRUZIONE. SI NOTI ANCHE CHE LA SOMMA DI VETTORI È UN VETTORE LIBERO. LA NOZIONE DI PUNTO DI APPLICAZIONE DISCENDE DA VALUTAZIONI ESTERNE □

PROPRIETA'

- COMMUTATIVA: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ [1]
- ASSOCIATIVA: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [2]
- ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALL'ADDIZIONE:
  $\exists\ \vec{0}$ TALE CHE $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall\ \vec{a}$ [3]
- ESISTENZA ELEMENTO OPPOSTO:
  $\forall\ \vec{a} \neq \vec{0} \ \exists\ \vec{a}^*$ TALE CHE $\vec{a}+\vec{a}^* = \vec{0} \quad \forall\ \vec{a}$ SICCHÉ $\vec{a}^* = -\vec{a}$ [4]

NOTA 5. LE PROPRIETÀ SOPRA INDICATE COSTITUISCONO UNA SEMPLICE GENERALIZZAZIONE DELLE PROPRIETÀ VALIDE PER GLI INSIEMI NUMERICI.
SI NOTI PERÒ CHE GLI ADDENDI DEVONO ESSERE TUTTI VETTORI IN QUESTO CASO ("NON SI SOMMANO MELE CON PATATE", CIOÈ LE QUANTITÀ CHE SI ADDIZIONANO DEVONO ESSERE FRA LORO OMOGENEE.)
IN PARTICOLARE NELLA [3] COMPARE IL VETTORE NULLO $\vec{0}$ (DA NON CONFONDERE CON IL NUMERO ZERO), CHE È CARATTERIZZATO DALL'AVERE MODULO NULLO, DIREZIONE E VERSO INDETERMINATI. □.

NOTA 6. IL VETTORE OPPOSTO $\vec{a}^* = -\vec{a}$ HA LO STESSO MODULO E LA STESSA DIREZIONE DI $\vec{a}$, MA VERSO OPPOSTO



□.

NOTA 7. IN BASE ALLA COSTRUZIONE DEL VETTORE SOMMA, $\vec{s}$, INDIVIDUATO DALLA [0] SI VEDE CHE IN GENERALE

$$|\vec{s}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

CIOÈ CHE IL VETTORE SOMMA HA MODULO DIVERSO DALLA SOMMA DEI MODULI DEI 2 VETTORI DATI.
INFATTI, PER LA DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE RISULTA:

$$|\vec{s}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad [5]$$

NELLA [5] SI PUÒ VEDERE CHE IL SEGNO DI EGUAGLIANZA VALE SOLO SE I VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ HANNO LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO, CIOÈ SE SONO PARALLELI ED EQUIVERSI.

II

2. SOTTRAZIONE DI VETTORI

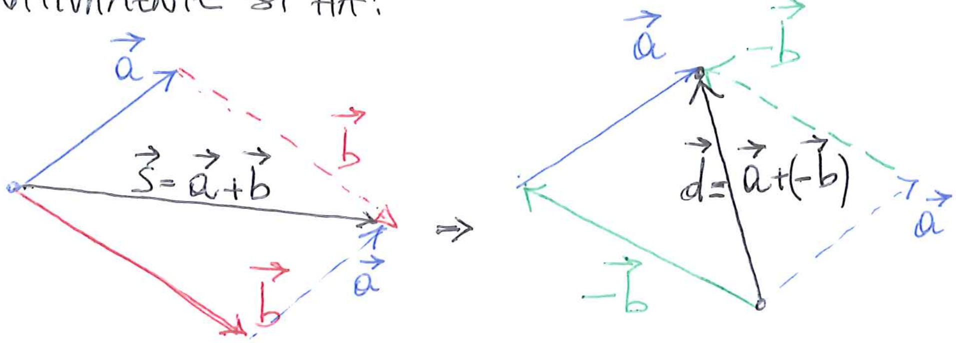
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \qquad [6]$$

DATI 2 VETTORI, $\vec{a}$ E $\vec{b}$, L'OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE ASSOCIA A QUESTI UN TERZO VETTORE, $\vec{d}$, DIFFERENZA DEI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$, COSÌ DEFINITO:

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad \boxed{7}$$

OTTENUTO QUINDI SOMMANDO AL PRIMO VETTORE, $\vec{a}$, L'OPPOSTO DEL SECONDO, $-\vec{b}$.
SI HA INFATTI, PER LA [4] CHE $-\vec{b} = \vec{b}^*$ E CHE $\vec{b} + \vec{b}^* = \vec{0}$.

OPERATIVAMENTE SI HA:



QUINDI $\vec{s}$ E $\vec{d}$ RISULTANO ESSERE LE 2 DIAGONALI (PRINCIPALE E SECONDARIA) DEL PARALLELOGRAMMA CON LATI INDIVIDUATI DAI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$.

NOTA 8. IN BASE ALLA [7] LA DIFFERENZA DI 2 VETTORI È RICONDOTTA ALLA SOMMA DI VETTORI. IL PROCEDIMENTO RICALCA QUANTO VISTO CON I NUMERI: L'INTRODUZIONE DEI NUMERI RELATIVI CONSENTE DI RICONDURRE LA SOTTRAZIONE DI 2 NUMERI ALLA ADDIZIONE DEL PRIMO NUMERO CON L'OPPOSTO DEL SECONDO. □

3. MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO

DATO UN VETTORE $\vec{v}$ E UN NUMERO (REALE) α, $[\alpha \in \mathbb{R}]$ SI DEFINISCE UN NUOVO VETTORE $\vec{w}$ COSÌ FATTO:

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} \qquad [8]$$

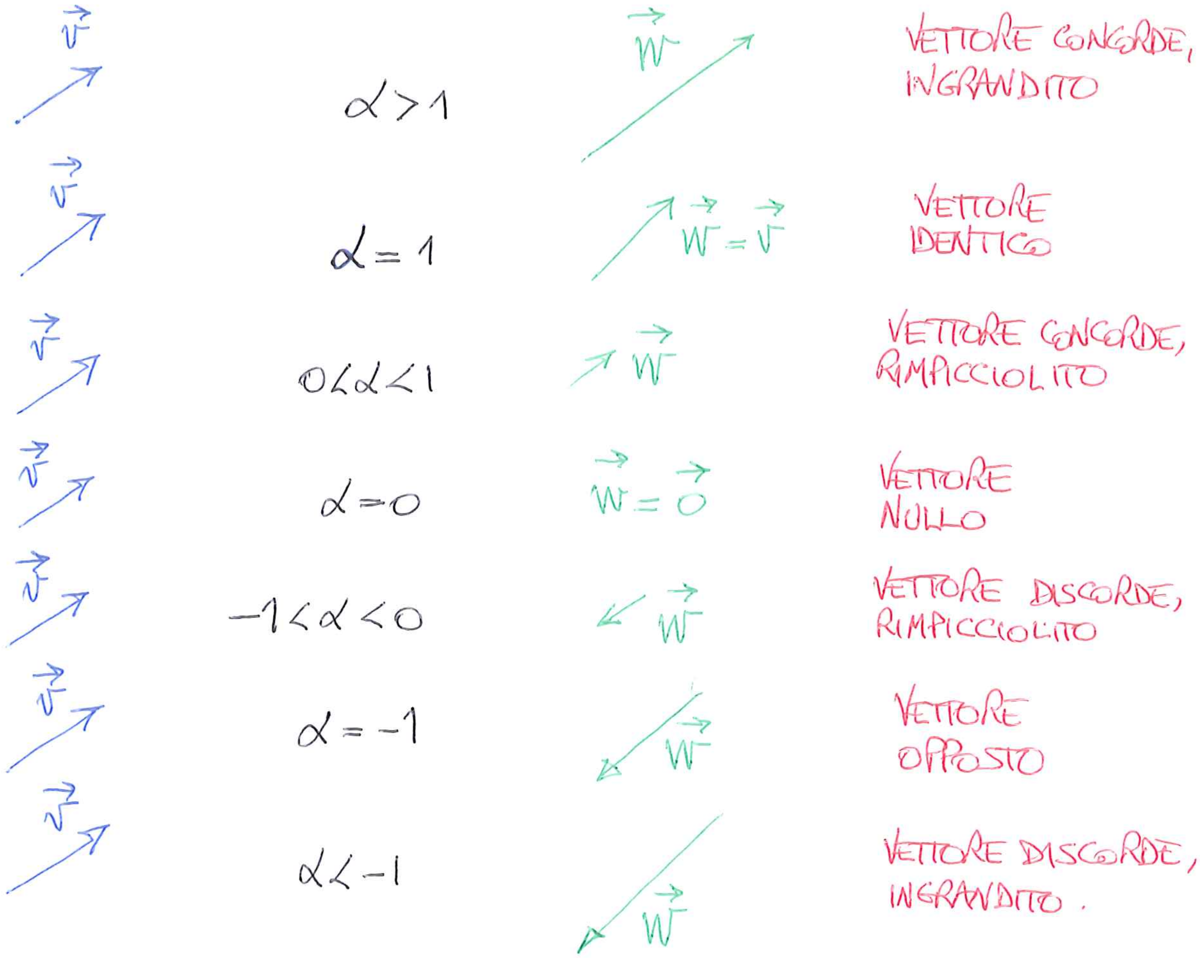
IL VETTORE $\vec{w}$, PRODOTTO DEL VETTORE $\vec{v}$ PER IL NUMERO α (*) RISULTA COSÌ DEFINITO:

- MODULO DATO DA $\|\alpha\| \, |\vec{v}|$ $\qquad$ $\|\cdot\|$ DENOTA IL VALORE ASSOLUTO
- DIREZIONE COINCIDENTE CON QUELLA DI $\vec{v}$
- VERSO $\begin{cases} \text{CONCORDE CON } \vec{v} \text{ SE } \alpha > 0 \\ \text{OPPOSTO A } \vec{v} \text{ SE } \alpha < 0. \end{cases}$

(*) A VOLTE QUESTO È INDICATO COME "PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE"; È MEGLIO EVITARE QUESTA DEFINIZIONE PER NON CREARE AMBIGUITÀ CON IL "PRODOTTO SCALARE DI 2 VETTORI" CHE SI CONSIDERERÀ IN SEGUITO.

SI OSSERVA CHE
- PER $\|\alpha\| > 1$ È $|\vec{w}| > |\vec{v}|$: SI HA DILATAZIONE
- PER $0 < \|\alpha\| < 1$ È $|\vec{w}| < |\vec{v}|$: SI HA CONTRAZIONE
- PER $\alpha = 1$ È $\vec{w} = \vec{v}$ (VETTORE IDENTICO)
- PER $\alpha = -1$ È $\vec{w} = -\vec{v}$ (VETTORE OPPOSTO)
- PER $\alpha = 0$ È $\vec{w} = \vec{0}$ (VETTORE NULLO).

PIÙ SPECIFICAMENTE SI POSSONO AVERE QUESTI CASI:



PROPRIETÀ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\vec{u}, \vec{v}$ VETTORI

- COMMUTATIVA $\alpha \vec{v} = \vec{v} \alpha$ [9]
- ASSOCIATIVA $\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ [10]
- DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DEI NUMERI $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ [11]
- DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DEI VETTORI $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ [12]
- ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZIONE:

  $\exists\ 1\ (\in \mathbb{R})$ TALE CHE $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v}$ [13]

NOTA 9. SI OSSERVI CHE $\alpha = 0$ GENERA, $\forall \vec{v}$, IL VETTORE NULLO; $\alpha = -1$ GENERA, $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$, IL VETTORE OPPOSTO $\vec{v}^* = -\vec{v}$; $\alpha = 1$ LASCIA INALTERATO OGNI VETTORE (GENERA IL VETTORE IDENTICO). □

NOTA 10.

MEDIANTE LA MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO (REALE) È POSSIBILE DEFINIRE $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$ UN VETTORE $\vec{u}$ DI MODULO UNITARIO (VERSORE) PARALLELO E CONCORDE CON IL VETTORE $\vec{v}$.

SI HA INFATTI, SE $\vec{v} \neq \vec{0}$, CHE $|\vec{v}| \neq 0$; SIA $\alpha = \frac{1}{|\vec{v}|}$; PER LA [8] ALLORA $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ È VETTORE CON LA STESSA DIREZIONE DI $\vec{v}$, LO STESSO VERSO DI $\vec{v}$ ($\alpha > 0$) E MODULO UNITARIO.

INFATTI

$$|\vec{u}| = \|\alpha\| \, |\vec{v}| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1. \qquad [14]$$

$\vec{u}$ È QUINDI UN VERSORE ASSOCIATO A $\vec{v}$.

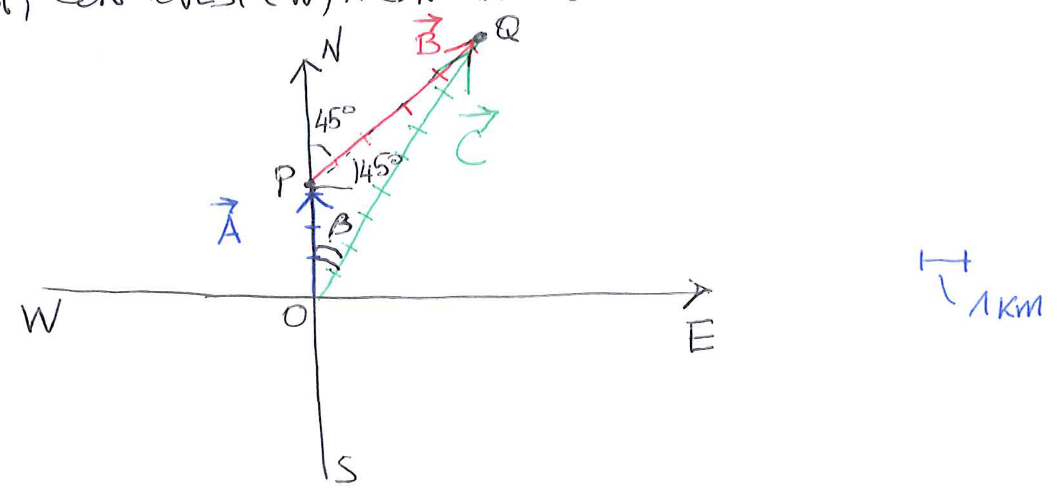
SI NOTI CHE SI PUÒ ALLORA SCRIVERE

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{u} \qquad [15].$$

ESEMPIO DI PROBLEMI FISICI RISOLUBILI MEDIANTE CALCOLO VETTORIALE.

(I) UN'AUTOMOBILE PERCORRE 3 km VERSO NORD, POI 5 km VERSO NORD-EST. RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE QUESTI SPOSTAMENTI E LO SPOSTAMENTO RISULTANTE DETERMINANDONE ANALITICAMENTE MODULO, DIREZIONE E VERSO.

PER RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE IL PROBLEMA SI FA USO DI UN SISTEMA DI ASSI ORTOGONALI ORIENTATI CONVENZIONALMENTE, COME AVVIENE NELLE CARTE GEOGRAFICHE, NEL MODO SEGUENTE: ASSE VERTICALE ORIENTATO DA SUD A NORD, CON IL NORD (N) IN ALTO E IL SUD (S) IN BASSO; ASSE ORIZZONTALE ORIENTATO DA OVEST A EST, CON OVEST (W) A SINISTRA ED EST (E) A DESTRA.

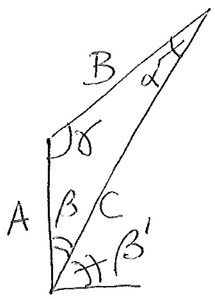


IN UNA OPPORTUNA SCALA SI RIPORTA LO SPOSTAMENTO $\vec{A}$, CON $|\vec{A}| = 3$ KM E ORIENTATO DA S VERSO N, TRACCIANDOLO A PARTIRE DAL PUNTO O (ORIGINE DEGLI ASSI) A SEGUIRE SI SPICCA DAL PUNTO P (DOVE SI COLLOCA LA PUNTA DEL VETTORE $\vec{A}$) IL VETTORE $\vec{B}$, CHE RAPPRESENTA IL SECONDO SPOSTAMENTO: $|\vec{B}| = 5$ KM ED È EGUALMENTE INCLINATO RISPETTO AGLI ASSI N ED E.

LO SPOSTAMENTO RISULTANTE, $\vec{C}$, È DATO DAL VETTORE SOMMA DI $\vec{A}$ E DI $\vec{B}$, OTTENUTO IN QUESTO CASO COME LATO DI CHIUSURA DEL TRIANGOLO FORMATO DA $\vec{A}$ E DA $\vec{B}$.

GRAFICAMENTE SI VEDE CHE $|\vec{C}| \simeq 7$ km E CHE IL VETTORE $\vec{C}$ FORMA UN ANGOLO β CON LA DIREZIONE N.

PER ARRIVARE A UNA DETERMINAZIONE PRECISA SI PROCEDE ANALITICAMENTE RISOLVENDO IL TRIANGOLO DI LATI $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ CON RICORSO A CONSIDERAZIONI TRIGONOMETRICHE.



PER IL TRIANGOLO DI LATI A, B, C E CARATTERIZZATO DAGLI ANGOLI (OPPOSTI AI LATI) α, β, γ IL TEOREMA DEL COSENO AFFERMA CHE:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \qquad [16]$$

SI PUÒ VERIFICARE CHE QUANDO $\gamma = \frac{\pi}{2}$ IL TRIANGOLO DIVIENE RETTANGOLO E LA [16] SI RIDUCE AL TEOREMA DI PITAGORA.

NEL CASO IN ESAME, È NOTO CHE $\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 90° + 45° = 135°$; NE SEGUE $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$

DALLA [16] SEGUE ALLORA CHE L'INCOGNITA LUNGHEZZA DEL LATO C È PARI A:

$$C^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9 + 25 + 15\sqrt{2} = 34 + 15\sqrt{2} = 55{,}213\ [\mathrm{km}^2]$$

NE SEGUE $C = \sqrt{55{,}213} = 7{,}431$ km

MA $C = |\vec{C}| = 7{,}431$ km È QUINDI IL MODULO DEL VETTORE RISULTANTE.

PER DETERMINARE DIREZIONE E VERSO SI PUÒ FARE USO DEL TEOREMA DEI SENI, CHE FORNISCE

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma} \qquad [17]$$

POICHÉ B, C E γ SONO NOTI, LE ULTIME 2 ESPRESSIONI FORNISCONO:

$$\sin\beta = \frac{B}{C}\sin\gamma \qquad [17']$$

OVVERO, NEL CASO IN ESAME, ESSENDO $\sin\gamma = \sin 135° = +\frac{\sqrt{2}}{2} = +0{,}707$

$$\sin\beta = \frac{5}{7{,}431}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2{,}500}{7{,}431}\cdot\sqrt{2} = 0{,}476$$

SI HA DUNQUE $\beta = \arcsin(0.476) = 28°.412$

PERTANTO LO SPOSTAMENTO RISULTANTE FORMA UN ANGOLO $\beta = 28°{,}412$ CON LA DIREZIONE N, OVVERO UN ANGOLO $\beta' = 90° - 28°.412 = 61°{,}588$ CON LA DIREZIONE E. IL VERSO DI $\vec{C}$ SI DESUME AGEVOLMENTE DAL GRAFICO (ORIENTAMENTO POSITIVO VERSO IL QUADRANTE N-E).

(II) UN AEROPLANO SI MUOVE IN DIREZIONE NORD-OVEST CON VELOCITÀ PARI A 125 km/h RISPETTO ALLA TERRA, IN PRESENZA DI UN VENTO CHE SPIRA DA OVEST A VELOCITÀ DI 50 km/h RISPETTO A TERRA.

A QUALE VELOCITÀ E IN QUALE DIREZIONE SI SAREBBE MOSSO L'AEROPLANO IN ASSENZA DI VENTO?

DETTO $\vec{W}$ LA VELOCITÀ DEL VENTO, $\vec{V}_e$ LA VELOCITÀ EFFETTIVA DELL'AEREO E $\vec{V}_S$ LA VELOCITÀ DELL'AEREO IN ASSENZA DI VENTO, SI RICAVA FACILMENTE L'EQUAZIONE CHE GOVERNA IL PROBLEMA:

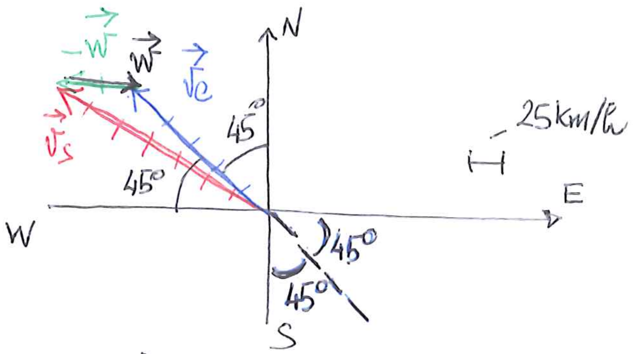
$$\vec{V}_e = \vec{V}_S + \vec{W} \qquad [18]$$

E DA QUI SI DETERMINA LA QUANTITÀ VETTORIALE INCOGNITA $\vec{V}_S$:

$$\vec{V}_S = \vec{V}_e - \vec{W} \qquad [18']$$

NOTANDO CHE LA [18'] SI CALCOLA DALLA [18] RISOLVENDO UNA SEMPLICE EQUAZIONE LINEARE ALGEBRICA FRA GRANDEZZE VETTORIALI.

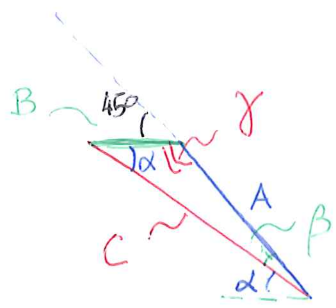
PROCEDENDO COME NEL CASO PRECEDENTE, SI HA:



E SI TROVA CHE $\vec{V}_S$ HA MODULO $|\vec{V}_S| \simeq 160$ km/h E UNA INCLINAZIONE RISPETTO ALL'ASSE N-S MAGGIORE DI 45° (OVVERO UN'INCLINAZIONE RISPETTO ALL'ASSE W-E MINORE DI 45°)

PER LA RISOLUZIONE ANALITICA CI SI BASA ANCORA SU CONSIDERAZIONI DI TRIGONOMETRIA PIANA; IDENTIFICANDO I LATI DEL TRIANGOLO COSTITUITO DAI VETTORI $\vec{V}_e$, $-\vec{W}$, $\vec{V}_S$ RISPETTIVAMENTE CON A, B, C E I CORRISPONDENTI ANGOLI OPPOSTI, α, β, γ SI TROVA PER IL TEOREMA DEL COSENO:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$



PER COSTRUZIONE SI TROVA CHE $\gamma = 180° - 45° = 135°$

NE SEGUE $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$

È DUNQUE

$$C^2 = 125^2 + 50^2 - \cancel{2}\, 125 \cdot 50 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = 125^2 + 50^2 + 125 \cdot 50\sqrt{2} = 15625 + 2500 + 6250\sqrt{2} \; (\text{km/h})^2$$

SICCHÉ

$C^2 = 26\,963{,}835 \; (\text{km/h})^2$ OSSIA $C = \sqrt{26963{,}835} = 164{,}207$ km/h

PERTANTO $|\vec{v}_s| = 164.207$ Km/h

PER IL CALCOLO DELL'INCLINAZIONE RISPETTO ALL'ASSE W-E OCCORRE CONOSCERE L'ANGOLO α. AL PROPOSITO PER IL TEOREMA DEI SENI SI HA:

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

E DUNQUE

$$\sin\alpha = \frac{A}{C}\sin\gamma$$

MA $\sin\gamma = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$, SICCHÉ

$$\sin\alpha = \frac{125}{164.207}\cdot 0.707 = 0.538$$

NE SEGUE $\alpha = \arcsin(0.538) = 32°.566$

SE SI VUOLE VALUTARE L'ANGOLO CHE IL VETTORE $\vec{v}_s$ FORMA CON IL VETTORE $\vec{v}_e$, CORRISPONDENTE ALL'ANGOLO β INDICATO IN FIGURA SI PUÒ SCRIVERE:

$$\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 180° - 32°.568 - 135° = 12°.434.$$

SFRUTTANDO IL FATTO CHE LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO È PARI A UN ANGOLO PIATTO (180°).

SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE E RAPPRESENTAZIONE DI UN VETTORE MEDIANTE LE COMPONENTI.

UTILIZZANDO LE OPERAZIONI FINORA CONSIDERATE È POSSIBILE DARE UNA RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI DI GRANDE UTILITÀ QUANDO SI DEBBONO ESEGUIRE CALCOLI.

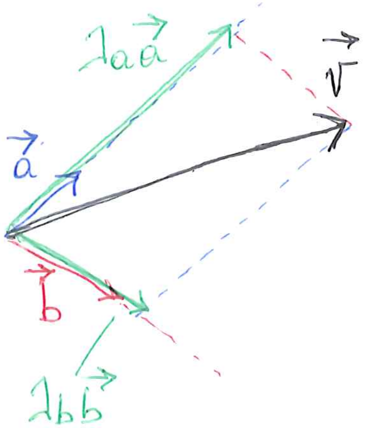
SI INIZIA A CONSIDERARE PER SEMPLICITÀ IL CASO DI VETTORI APPARTENENTI A UNO STESSO PIANO (VETTORI PIANI).

PRESI ALLORA NEL PIANO 2 VETTORI QUALSIASI, $\vec{a}$ E $\vec{b}$ NON ALLINEATI, CIOÈ TALI CHE NON ESISTA UN NUMERO $\alpha \in \mathbb{R}$ TALE CHE RISULTI $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ (COME ACCADREBBE SE ESSI FOSSERO ALLINEATI, CIOÈ PARALLELI), ALLORA È POSSIBILE ESPRIMERE UNIVOCAMENTE OGNI VETTORE DEL PIANO $\vec{v}$ NELLA FORMA:

$$\vec{v} = \underbrace{\lambda_a\vec{a}}_{} + \underbrace{\lambda_b\vec{b}}_{} \quad [19]$$

VETTORE COMPONENTE DI $\vec{v}$ SECONDO $\vec{a}$

VETTORE COMPONENTE DI $\vec{v}$ SECONDO $\vec{b}$



COME SI VEDE DALLA COSTRUZIONE, $\vec{v}$ RISULTA LA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SU LATI PARALLELI AI VETTORI BASE $\vec{a}$, $\vec{b}$.

I NUMERI REALI λ_a, λ_b SONO LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{v}$ RISPETTO ALLA BASE DATA, COSTITUITA DAI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$.

TRATTANDOSI DI UNA COPPIA (ORDINATA) DI NUMERI REALI, ESSI POSSONO ASSUMERE, INDIPENDENTEMENTE L'UNO DALL'ALTRO, VALORI POSITIVI, NEGATIVI O NULLI.

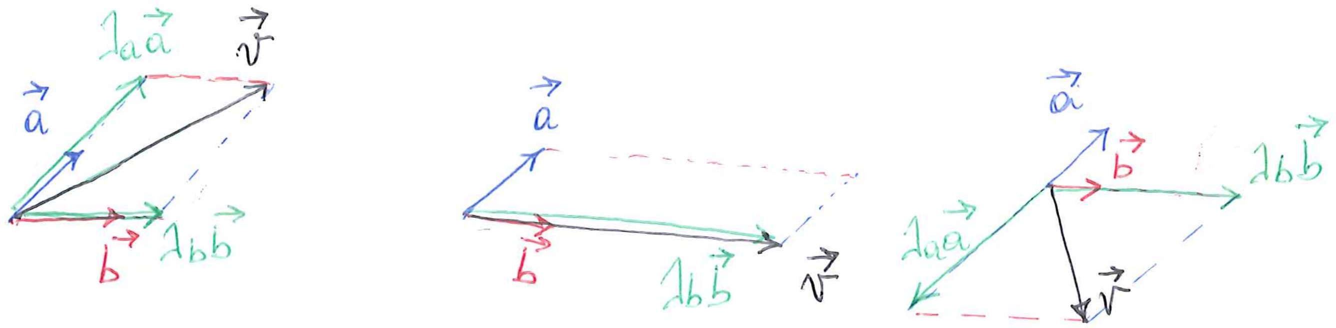
PER ESEMPIO, SE

$\lambda_a > 0$ SIGNIFICA CHE IL VETTORE COMPONENTE $\lambda_a \vec{a}$ HA LO STESSO VERSO DI $\vec{a}$ (OVVERO $\vec{v}$ "PROIETTA" SU $\vec{a}$ "UN'OMBRA" ORIENTATA COME $\vec{a}$);

$\lambda_a = 0$ SIGNIFICA CHE IL VETTORE COMPONENTE $\lambda_a \vec{a} = \vec{0}$, CIOÈ $\vec{v} = \vec{0} + \lambda_b \vec{b}$ OVVERO $\vec{v}$ NON RICEVE ALCUN CONTRIBUTO DA $\vec{a}$ (E DUNQUE "PROIETTA" SU $\vec{a}$ "UN'OMBRA" DI LUNGHEZZA NULLA);

$\lambda_a < 0$ SIGNIFICA CHE IL VETTORE COMPONENTE $\lambda_a \vec{a}$ HA VERSO OPPOSTO AD $\vec{a}$ (OVVERO $\vec{v}$ "PROIETTA" SU $\vec{a}$ "UN'OMBRA" ORIENTATA IN VERSO OPPOSTO AD $\vec{a}$).

LE DIVERSE SITUAZIONI SONO ILLUSTRATE IN FIGURA:



ANALOGHE CONSIDERAZIONI SI APPLICANO AL CASO DI λ_b.

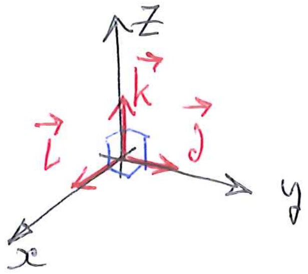
SI È COSÌ VISTO COME OGNI VETTORE DEL PIANO PUÒ ESSERE SCRITTO NELLA FORMA [19]; IN PARTICOLARE I VALORI $\lambda_a = 1, \lambda_b = 0$; $\lambda_a = 0, \lambda_b = 1$; $\lambda_a = 0, \lambda_b = 0$ RAPPRESENTANO RISPETTIVAMENTE I VETTORI $\vec{a}$, $\vec{b}$ E IL VETTORE NULLO, $\vec{0}$.

VICEVERSA, ASSEGNATI I VALORI DI λ_a E λ_b (CIOÈ DELLE COMPONENTI) LA COSTRUZIONE DEL PARALLELOGRAMMA PERMETTE DI RICOSTRUIRE IL VETTORE $\vec{v}$, E CAMBIANDO IN TUTTI I MODI POSSIBILI I VALORI DELLE COMPONENTI SI POSSONO OTTENERE TUTTI I VETTORI DEL PIANO.

NOTA 11. LE COMPONENTI APPENA INTRODOTTE PERMETTONO DI DETERMINARE IN MODO

UNIVOCO, UNA VOLTA FISSATA LA BASE, I VETTORI DEL PIANO NELLO STESSO MODO CON CUI, FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO LE COORDINATE A QUESTO ASSOCIATE PERMETTONO DI DETERMINARE UNIVOCAMENTE LE COORDINATE DEI PUNTI DEL PIANO. [17]

PER COMODITA' OPERATIVA CONVIENE USUALMENTE SCEGLIERE I VETTORI BASE DI MODULO UNITARIO E MUTUAMENTE ORTOGONALI: IN QUESTO MODO QUESTI RISULTANO ASSOCIATI A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE. NEL CASO GENERALE (TRIDIMENSIONALE), SCEGLIENDO GLI ASSI x, y, z IN MODO CHE FORMINO UNA <u>TERNA DESTRA</u> (IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON LE PRIME 3 DITA DI UNA MANO DESTRA), SI IDENTIFICANO I CORRISPONDENTI



VERSORI $\vec{i}$ (ALLINEATO CON L'ASSE x)

$\vec{j}$ (ALLINEATO CON L'ASSE y)

$\vec{k}$ (ALLINEATO CON L'ASSE z)

SI NOTI CHE $|\vec{i}| = 1$; $|\vec{j}| = 1$; $|\vec{k}| = 1$ PER COSTRUZIONE; INOLTRE QUESTI RISULTANO MUTUAMENTE ORTOGONALE.

NELLA BASE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ UN GENERICO VETTORE $\vec{v}$ CHE "VIVE" NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE È SUSCETTIBILE DI ESSERE RAPPRESENTATO IN QUESTA FORMA, CHE COSTITUISCE UNA PARTICOLARE GENERALIZZAZIONE DELLA [19]:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \qquad [20]$$

DOVE v_x, v_y, v_z RAPPRESENTANO LE COMPONENTI (CARTESIANE) DEL VETTORE $\vec{v}$ RISPETTO ALLA BASE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

IN PARTICOLARE v_x È LA COMPONENTE MISURATA NELLA DIREZIONE DELL'ASSE x,

v_y " " " " " " " " y,

v_z " " " " " " " " z.

LA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI, [20], RENDE AGEVOLI LE OPERAZIONI FRA VETTORI GIA' STUDIATE.

SE INFATTI I VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ VENGONO SCOMPOSTI RISPETTO ALLA <u>STESSA</u> BASE, SI HA:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad [20']$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \qquad [20'']$$

E SI VEDE CHE LA SOMMA $\vec{s}$ E LA DIFFERENZA $\vec{d}$ SONO COSIFFATTI:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \quad [21']$$

DI QUI, SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE DI VETTORI E DELLA MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO SI OTTIENE:

$$\vec{s} = (a_x+b_x)\vec{i} + (a_y+b_y)\vec{j} + (a_z+b_z)\vec{k} \quad [21'']$$

D'ALTRA PARTE $\vec{s}$, COME OGNI VETTORE DELLO SPAZIO, PUÒ ESSERE A SUA VOLTA ESPRESSO PER COMPONENTI (SEMPRE NELLA MEDESIMA BASE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$):

$$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k} \quad [21''']$$

A QUESTO PUNTO, PER L'UNICITÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI ESPRESSI NELLA STESSA BASE, DALLE [21''] E [21'''] SEGUE:

$$\begin{cases} s_x = a_x + b_x \\ s_y = a_y + b_y \\ s_z = a_z + b_z \end{cases} \quad [22]$$

LE [22] PERMETTONO DI RICONOSCERE CHE LE COMPONENTI DEL VETTORE SOMMA (RISULTANTE) SI OTTENGONO SOMMANDO I NUMERI CHE RAPPRESENTANO LE COMPONENTI OMOLOGHE (CON LO STESSO NOME) DEI 2 VETTORI ADDENDI.

IN QUESTO MODO UN'OPERAZIONE FRA VETTORI È RICONDOTTA A OPERAZIONI ALGEBRICHE FRA QUANTITÀ NUMERICHE, E NON SI RENDE PIÙ NECESSARIO RICORRERE ALLA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA.

IN MODO ANALOGO SI HA:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} + (-b_x\vec{i} - b_y\vec{j} - b_z\vec{k}) \quad [23']$$

$$\vec{d} = (a_x-b_x)\vec{i} + (a_y-b_y)\vec{j} + (a_z-b_z)\vec{k} \quad [23'']$$

MA

$$\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} \quad [23''']$$

PERTANTO, IDENTIFICANDO I VALORI CHE NELLE [23''] E [23'''] MOLTIPLICANO I VETTORI DELLA BASE SI OTTIENE:

$$\begin{cases} d_x = a_x - b_x \\ d_y = a_y - b_y \\ d_z = a_z - b_z \end{cases} \quad [24]$$

DUNQUE LE COMPONENTI DEL VETTORE DIFFERENZA SONO LE DIFFERENZE DELLE

COMPONENTI OMOLOGHE DEI 2 VETTORI.

PER COMPLETEZZA SI CONSIDERA ANCHE L'ESPRESSIONE PER COMPONENTI DELLA MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UN NUMERO.

SI HA IN QUESTO CASO, TENENDO CONTO DELLA [20] E DELLA [8]:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} = \alpha (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \alpha v_x \vec{i} + \alpha v_y \vec{j} + \alpha v_z \vec{k} \qquad [25']$$

MA D'ALTRA PARTE E' ANCHE

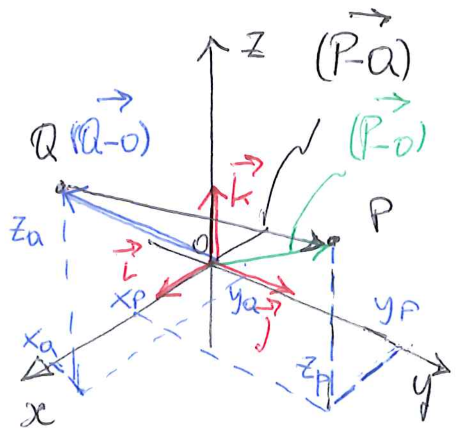
$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \qquad [25'']$$

E PER L'UNICITA' DI RAPPRESENTAZIONE DI $\vec{w}$ NELLA BASE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ DEVE ESSERE:

$$\begin{cases} w_x = \alpha v_x \\ w_y = \alpha v_y \\ w_z = \alpha v_z \end{cases} \qquad [26]$$

DUNQUE LE COMPONENTI DEL VETTORE OTTENUTO MOLTIPLICANDO UN VETTORE DATO PER UN NUMERO SONO PARI ALLE COMPONENTI DEL VETTORE DATO MOLTIPLICATE PER LO STESSO NUMERO.

COME APPLICAZIONE SI CONSIDERA L'ESPRESSIONE PER COMPONENTI DEL VETTORE $\overrightarrow{(P-Q)}$.



QUESTO PUÒ ESSERE PENSATO COME OTTENUTO DALLA DIFFERENZA DEI VETTORI POSIZIONE DEI PUNTI $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ E $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ RISPETTO ALL'ORIGINE $O \equiv (0,0,0)$, RISPETTIVAMENTE DATI DA $\overrightarrow{(P-O)}$ E $\overrightarrow{(Q-O)}$.

INFATTI $\overrightarrow{(P-Q)} = \overrightarrow{(P-O)} - \overrightarrow{(Q-O)}$.

ORA IL VETTORE $\overrightarrow{(P-O)}$ AMMETTE QUESTA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI:

$$\overrightarrow{(P-O)} = (x_P - \underset{\substack{\| \\ 0}}{x_0})\vec{i} + (y_P - \underset{\substack{\| \\ 0}}{y_0})\vec{j} + (z_P - \underset{\substack{\| \\ 0}}{z_0})\vec{k} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k} \qquad [27]$$

ANALOGAMENTE

$$\overrightarrow{(Q-O)} = (x_Q - \underset{\substack{\| \\ 0}}{x_0})\vec{i} + (y_Q - \underset{\substack{\| \\ 0}}{y_0})\vec{j} + (z_Q - \underset{\substack{\| \\ 0}}{z_0})\vec{k} = x_Q \vec{i} + y_Q \vec{j} + z_Q \vec{k} \qquad [28]$$

PERTANTO SI HA: $\overrightarrow{(P-Q)} = (x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}) - (x_Q \vec{i} + y_Q \vec{j} + z_Q \vec{k})$ [29]

OVVERO:

$$\overrightarrow{(P-Q)} = (x_P - x_Q)\vec{i} + (y_P - y_Q)\vec{j} + (z_P - z_Q)\vec{k} \qquad [30]$$

LA [30] RIVELA CHE IL VETTORE $\overrightarrow{(P-Q)}$ AMMETTE COME COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE CARTESIANA ORTOGONALE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ LA DIFFERENZA DELLE COORDINATE OMOLOGHE DEI PUNTI P E Q.

PER ESEMPIO, SE $P = (2, 4, 3)$ E $Q = (1, -5, 2)$ SI OTTIENE:

$\uparrow x_P \quad \uparrow y_P \quad \uparrow z_P \qquad \uparrow x_Q \quad \uparrow y_Q \quad \uparrow z_Q$

$$\overrightarrow{(P-O)} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{(Q-O)} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{(P-Q)} = \overrightarrow{(P-O)} - \overrightarrow{(Q-O)} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) - (\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}) = (2-1)\vec{i} + (4+5)\vec{j} + (3-2)\vec{k}$$

SICCHÉ $\overrightarrow{(P-Q)} = \vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}$

DAL CALCOLO DIRETTO FORNITO DALLA [30] SI OTTIENE:

$$\overrightarrow{(P-Q)} = (2-1)\vec{i} + (4-(-5))\vec{j} + (3-2)\vec{k} = \vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}.$$

<u>NOTA 12.</u> NELLA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI LE <u>3 INFORMAZIONI</u> CHE PERMETTONO DI INDIVIDUARE UN VETTORE (MODULO, DIREZIONE E VERSO) SONO SOSTITUITE DAI <u>3 VALORI NUMERICI</u> DEFINITI DALLE COMPONENTI. SI OSSERVI CHE A DIFFERENZA DEL MODULO, CHE È SEMPRE NUMERO $\in \mathbb{R}^+$ (REALE > 0, $= 0$ SOLO NEL CASO DEL VETTORE NULLO, $\vec{0}$) LE COMPONENTI SONO VALORI $\in \mathbb{R}$, NON VINCOLATI IN SEGNO. PERALTRO, L'UNICO VETTORE CON COMPONENTI TUTTE NULLE È IL VETTORE NULLO: $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ $\square$

ESEMPIO DI RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA FISICO MEDIANTE LA RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI PER COMPONENTI.

SI CONSIDERI UN CICLISTA CHE SI MUOVE VERSO SUD ALLA VELOCITÀ DI 15 km/h: OSSERVA A QUESTA ANDATURA CHE IL VENTO (INDIVIDUATO DA UNA BANDIERINA COLLOCATA SUL MANUBRIO) RISULTA PROVENIRE DA OVEST.
AUMENTANDO LA PROPRIA VELOCITÀ FINO A RAGGIUNGERE 25 km/h OSSERVA CHE IL VENTO RISULTA PROVENIRE DA SUD-OVEST. SI CHIEDE DI DETERMINARE LA DIREZIONE E LA VELOCITÀ DEL VENTO.

DETTA $\vec{v}$ LA VELOCITÀ DEL CICLISTA E $\vec{r}$ LA VELOCITÀ DEL VENTO REALE (DA DETERMINARE), LA VELOCITÀ RILEVATA DAL CICLISTA È QUELLA DEL VENTO APPARENTE, $\vec{w}$, COME È NOTO A CHI HA NAVIGATO IN BARCA A VELA-

LA RELAZIONE FRA VENTO APPARENTE, VENTO REALE E VELOCITA' DEL MEZZO È LA SEGUENTE:

$$\underbrace{\vec{W}}_{\text{VENTO APPARENTE}} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{VENTO REALE}} - \underbrace{\vec{v}}_{\text{VELOCITA' DEL MEZZO}} \qquad [31]$$

LA [31] È UN'EQUAZIONE VETTORIALE CHE VALE IN MODO EVIDENTE NEI CASI ESTREMI:

- SE $\vec{r} = \vec{0}$, ALLORA $\vec{W} = -\vec{v}$ (VENTO APPARENTE È EGUALE ALL'OPPOSTO DELLA VELOCITA' DEL MEZZO, COME SI SPERIMENTA QUANDO SI CORRE NELL'ARIA FERMA: IL "VENTO" CHE SI PERCEPISCE È L'OPPOSTO DELLA PROPRIA VELOCITA').
- SE $\vec{W} = 0$, ALLORA $\vec{r} = \vec{v}$ (VENTO APPARENTE È NULLO QUANDO LA VELOCITA' DEL MEZZO COINCIDE CON LA VELOCITA' DEL VENTO, COME SI SPERIMENTA QUANDO SI NAVIGA CON VENTO IN POPPA).

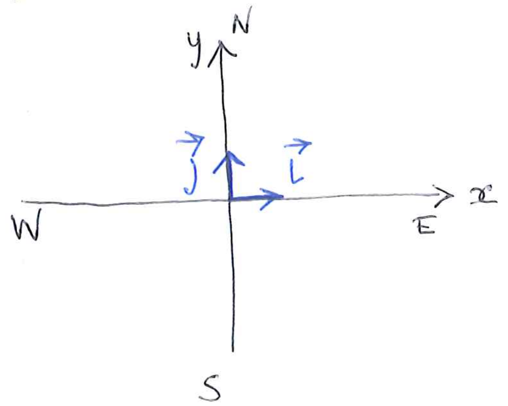
LA [31], CHE SI PUÒ ANCHE RISCRIVERE NELLA FORMA EQUIVALENTE

$$\vec{W} - \vec{r} + \vec{v} = \vec{0} \qquad [31']$$

SI NOTI IL CAMBIO DI SEGNO DAVANTI AI VETTORI $\vec{r}$ E $\vec{v}$ QUANDO LI SI PORTA A PRIMO MEMBRO!

ESPRIME LA CONDIZIONE CHE DEVE ESSERE VERIFICATA NELLE 2 SITUAZIONI.

PER LA SCOMPOSIZIONE DEI VETTORI SI CONSIDERANO 2 ASSI ORTOGONALI x (ORIENTATO ORIZZONTALMENTE DA W A E) E y (ORIENTATO VERTICALMENTE DA S A N); AGLI ASSI x E y SONO ASSOCIATI I VERSORI $\vec{i}$ E $\vec{j}$:

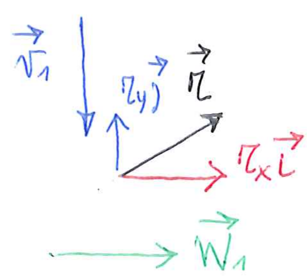


NELLA SITUAZIONE ① SI HA:

$\vec{v} \equiv \vec{v}_1 = -15\,\vec{j}$ km/h (ORIENTATO VERSO S)

$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$ (INCOGNITO)

$\vec{W} = \vec{W}_1 = X\vec{i}$ (ORIENTATO VERSO E)



LA [31'] IN QUESTA SITUAZIONE DIVIENE:

$$\vec{W}_1 - \vec{r} + \vec{V}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad X\vec{i} - (r_x\vec{i} + r_y\vec{j}) + (-15\vec{j}) = \vec{0}$$

CIOÈ ANCHE

$$(X - r_x)\vec{i} + (-r_y - 15)\vec{j} = \vec{0} \qquad [32]$$

DA CUI SEGUONO LE 2 EQUAZIONI SCALARI

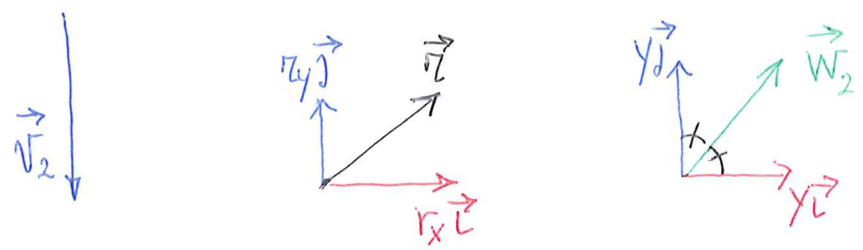
$$\begin{cases} X - r_x = 0 \\ -r_y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = X & \text{km/h} \\ \underline{r_y = -15} & \text{km/h} \end{cases} \qquad [33]$$

NELLA SITUAZIONE ② SI HA INVECE:

$\vec{V} = \vec{V}_2 = -25\vec{j}$ km/h (SEMPRE ORIENTATO VERSO S)

$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$ (INVARIATO RISPETTO ALLA SITUAZIONE ①)

$\vec{W} = \vec{W}_2 = Y\vec{i} + Y\vec{j}$ (ORIENTATO DA SW A NE: SECONDO LA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE: LE COMPONENTI SECONDO X E Y SONO EGUALI E >0)



LA [31'] DIVIENE IN QUESTA SITUAZIONE:

$$\vec{W}_2 - \vec{r} + \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad Y\vec{i} + Y\vec{j} - (r_x\vec{i} + r_y\vec{j}) + (-25\vec{j}) = \vec{0}$$

CIOÈ ANCHE

$$(Y - r_x)\vec{i} + (Y - r_y - 25)\vec{j} = \vec{0} \qquad [34]$$

DA CUI SEGUONO QUESTA VOLTA LE 2 EQUAZIONI SCALARI

$$\begin{cases} Y - r_x = 0 \\ Y - r_y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = Y & \text{km/h} \\ Y = \underbrace{r_y}_{-15} + 25 & \text{km/h} \end{cases} \qquad [35]$$

SE ORA SI CONSIDERA IL SISTEMA COSTITUITO DALLE 4 EQUAZIONI [33] E [35] SI GIUNGE A DETERMINARE LE 4 INCOGNITE X, r_x, r_y, Y:

$r_y = -15$ km/h $\quad Y = +10$ km/h $\quad r_x = +10$ km/h $\quad X = 10$ km/h.

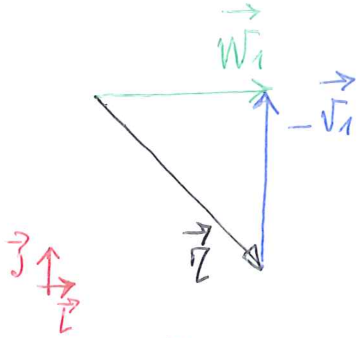
SI TROVANO COSÌ QUESTI RISULTATI

$\vec{v}_1 = -15\vec{j}$ km/h

$\vec{r} = 10\vec{i} - 15\vec{j}$ km/h $\Rightarrow \vec{W}_1 = \vec{r} - \vec{v}_1$

$\vec{W}_1 = 10\vec{i}$ km/h

NELLA SITUAZIONE ① E

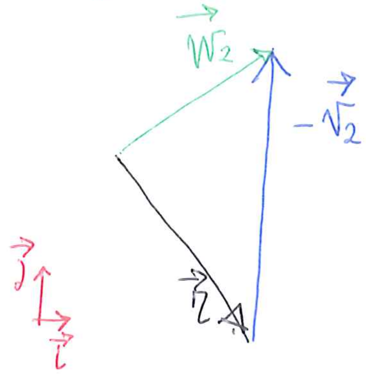


$\vec{v}_2 = -25\vec{j}$ km/h

$\vec{r} = 10\vec{i} - 15\vec{j}$ km/h $\Rightarrow \vec{W}_2 = \vec{r} - \vec{v}_2$

$\vec{W}_2 = 10\vec{i} + 10\vec{j}$ km/h

NELLA SITUAZIONE ②.

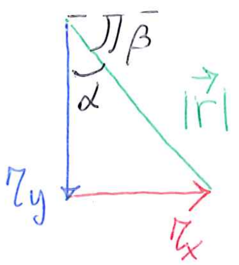


SI OSSERVA CHE IL VENTO REALE $\vec{r}$, CHE <u>NON</u> CAMBIA NELLE 2 SITUAZIONI CONSIDERATE HA QUESTA ESPRESSIONE VETTORIALE PER COMPONENTI:

$$\vec{r} = 10\vec{i} - 15\vec{j} \quad \text{km/h}$$

PERTANTO RISULTA SCOMPOSTO NELLE 2 COMPONENTI $r_x = 10$ km/h E $r_y = -15$ km/h

QUESTE FORMANO I LATI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO: È ALLORA AGEVOLE RICONOSCERE CHE L'IPOTENUSA FORNISCE IL MODULO $|\vec{r}|$ DEL VETTORE.



PER IL TEOREMA DI PITAGORA SI HA ALLORA

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{10^2 + (-15)^2} = \sqrt{100 + 225} = \sqrt{325} \quad \text{km/h}$$

E DUNQUE $|\vec{r}| = 18.028$ km/h

L'INCLINAZIONE DI $\vec{r}$ RISPETTO ALLA DIREZIONE N È INDIVIDUATA DALL'ANGOLO α: CON CONSIDERAZIONI DI TRIGONOMETRIA SI TROVA CHE

$$\tan\alpha = \frac{r_x}{\|r_y\|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

DUNQUE $\alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33°.690$

L'INCLINAZIONE RISPETTO ALLA DIREZIONE W È DATA INVECE DALL'ANGOLO β PER IL QUALE SI HA SEMPLICEMENTE:

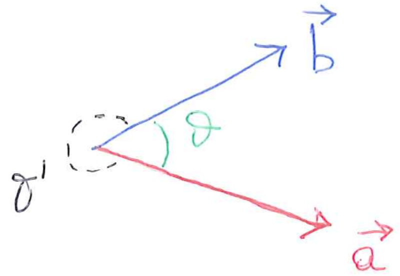
$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 33°.690 = 56°.310.$$

4. MOLTIPLICAZIONE SCALARE DI 2 VETTORI

$$\varsigma = \vec{a} \times \vec{b} \qquad [36]$$

DATI 2 VETTORI, $\vec{a}$ E $\vec{b}$ È POSSIBILE MOLTIPLICARLI FRA LORO IN MODO CHE IL RISULTATO SIA UNO SCALARE, CIOÈ UN NUMERO REALE, $\varsigma \in \mathbb{R}$
LA REGOLA CHE ASSOCIA ς AI 2 VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ È LA SEGUENTE:

$$\varsigma = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\vartheta \qquad [37]$$



SI NOTI CHE $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$, SICCHÉ È IRRILEVANTE MISURARE L'ANGOLO DA $\vec{a}$ VERSO $\vec{b}$ O DA $\vec{b}$ VERSO $\vec{a}$. IN OGNI CASO SI DEVE CONSIDERARE L'ANGOLO PIÙ PICCOLO FRA I DUE CHE $\vec{a}$ E $\vec{b}$ FORMANO (ϑ, NON ϑ')

DOVE ϑ È L'ANGOLO COMPRESO FRA $\vec{a}$ E $\vec{b}$ (CON $\|\vartheta\| \leq \pi = 180°$).
LA [37] RIVELA CHE ς È PARI AL PRODOTTO DEI MODULI DEI 2 VETTORI MOLTIPLICATO PER IL COSENO DELL'ANGOLO COMPRESO.

SI HA QUINDI CHE

- $\varsigma > 0$ QUANDO $\cos\vartheta > 0$, CIOÈ NELL'INTERVALLO $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$
  (ϑ È ANGOLO ACUTO)
- $\varsigma < 0$ QUANDO $\cos\vartheta < 0$, CIOÈ NEGLI INTERVALLI $-\pi \leq \vartheta < -\frac{\pi}{2}$ E $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$
  (ϑ È ANGOLO OTTUSO)
- $\varsigma = 0$ QUANDO $\cos\vartheta = 0$ CIOÈ QUANDO $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$
  (ϑ È ANGOLO RETTO)

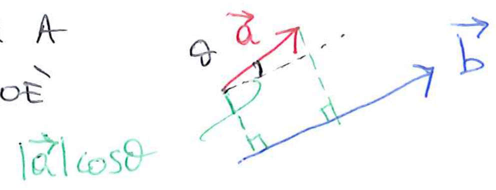
IL VALORE ς È DETTO PRODOTTO SCALARE PERCHÉ IL RISULTATO DELL'OPERAZIONE DEFINITA DALLA [37] È UN NUMERO E NON UN VETTORE.

A LIVELLO DI NOTAZIONE SI POSSONO TROVARE LE SEGUENTI:

$\vec{a} \times \vec{b}$ (TESTI EUROPA CONTINENTALE)
$\vec{a} \bullet \vec{b}$ (TESTI ANGLOSASSONI)
$(\vec{a}, \vec{b})$ (TESTI CON NOTAZIONE DI ANALISI FUNZIONALE).

IN CASO DI DUBBI SULLA INTERPRETAZIONE È SUFFICIENTE CONSIDERARE IL RISULTATO: SE QUESTO È UN NUMERO SI TRATTA DI UN PRODOTTO SCALARE.

IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL PRODOTTO SCALARE È SEMPLICE: LA PROIEZIONE DEL VETTORE $\vec{a}$ SUL VETTORE $\vec{b}$ È PARI A
$|\vec{a}| \cos\vartheta$ E QUINDI $\varsigma = (|\vec{a}|\cos\vartheta)|\vec{b}|$ CIOÈ
IL MODULO DI $\vec{b}$ MOLTIPLICATO PER LA PROIEZIONE DI $\vec{a}$ NELLA DIREZIONE DI $|\vec{b}|$.



CON ANALOGA COSTRUZIONE SI PUÒ MOSTRARE CHE È ANCHE $\varphi = (|\vec{b}|\cos\vartheta)\,\vec{a}$ CIOÈ CHE IL PRODOTTO SCALARE DI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ È PARI ALLA PROIEZIONE DI $\vec{b}$ NELLA DIREZIONE DI $\vec{a}$, MOLTIPLICATA PER IL MODULO DI QUESTO VETTORE.

SE $|\vec{a}| = 1$ SI TROVA CHE

$$\varphi = \underbrace{|\vec{a}|}_{=1}|\vec{b}|\cos\vartheta = 1|\vec{b}|\cos\vartheta \quad [38]$$

QUINDI MEDIANTE LA [38] SI DETERMINA LA PROIEZIONE DEL VETTORE $\vec{b}$ NELLA DIREZIONE DEL VERSORE $\vec{a}$: CIÒ RISULTA DI GRANDE IMPORTANZA PERCHÉ FORNISCE UNO STRUMENTO PER CALCOLARE LE COMPONENTI DI UN VETTORE.

IL PRODOTTO SCALARE GODE DI QUESTE PROPRIETÀ:

- COMMUTATIVA $\quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a} \quad [39]$
- BILINEARE $\quad (\alpha\vec{a})\times(\beta\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\times(\beta\vec{b})) = ((\alpha\vec{a})\times\vec{b})\beta = \alpha\beta\,\vec{a}\times\vec{b} \quad [40] \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$
- DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DI VETTORI (NEI 2 ARGOMENTI)

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{d} = \vec{a}\times\vec{d} + \vec{a}\times\vec{d} \;;\quad \vec{d}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{d}\times\vec{a} + \vec{d}\times\vec{b} \quad [41]$$

INOLTRE L'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO SCALARE È CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ FRA 2 VETTORI:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = 0 \quad [42]$$

$\vec{a}$ È PERPENDICOLARE A $\vec{b}$

SIMBOLO DI IMPLICAZIONE DOPPIA (VALE NEI DUE SENSI)

REGOLA DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

INFATTI SE $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\vartheta = 0$

$$\begin{cases} |\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \\ |\vec{b}| = 0 \iff \vec{b} = \vec{0} \\ \cos\vartheta = 0 \iff \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

I PRIMI 2 CASI EVIDENZIATI POSSONO ESSERE COMPRESI NELLA [42] SE SI AMMETTE CHE IL VETTORE NULLO $(\vec{0})$ È ORTOGONALE A OGNI VETTORE.

SE SI AMMETTE NELLA [37] CHE $\vec{b} = \vec{a}$ SI OTTIENE

ANGOLO FORMATO DA $\vec{a}$ CON SE STESSO

$$\varphi = \vec{a}\times\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cdot\underbrace{\cos 0}_{=1} = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \quad [43]$$

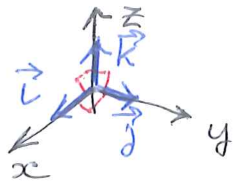
CIOÈ φ FORNISCE IL MODULO DEL VETTORE $\vec{a}$ ELEVATO AL QUADRATO.

QUESTO CONSENTE QUINDI DI CALCOLARE IL MODULO DI UN VETTORE:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\varphi} = \sqrt{\vec{a}\times\vec{a}} \quad [44]$$

OVVIAMENTE LA SCRITTURA HA SENSO SOTTINTENDENDO CHE IL PRODOTTO SCALARE VA ESEGUITO PRIMA DI ESTRARRE LA RADICE QUADRATA: LA RADICE QUADRATA DI UN VETTORE NON È DEFINITA!

SE I VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ SONO SVILUPPATI PER COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE CARTESIANA ORTONORMALE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ SI HA:



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad [\bullet]$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \qquad [\bullet\bullet]$$

E IL PRODOTTO SCALARE ESPRESSO PER COMPONENTI DIVIENE, UTILIZZANDO LE [40] E [41]:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = {} & (a_x \vec{i}) \times (b_x \vec{i}) + (a_x \vec{i}) \times (b_y \vec{j}) + (a_x \vec{i}) \times (b_z \vec{k}) + \\ & + (a_y \vec{j}) \times (b_x \vec{i}) + (a_y \vec{j}) \times (b_y \vec{j}) + (a_y \vec{j}) \times (b_z \vec{k}) + \\ & + (a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i}) + (a_z \vec{k}) \times (b_y \vec{j}) + (a_z \vec{k}) \times (b_z \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = {} & a_x b_x \, \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \, \cancel{\vec{i} \times \vec{j}}^{\,0} + a_x b_z \, \cancel{\vec{i} \times \vec{k}}^{\,0} + \\ & + a_y b_x \, \cancel{\vec{j} \times \vec{i}}^{\,0} + a_y b_y \, \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \, \cancel{\vec{j} \times \vec{k}}^{\,0} + \\ & + a_z b_x \, \cancel{\vec{k} \times \vec{i}}^{\,0} + a_z b_y \, \cancel{\vec{k} \times \vec{j}}^{\,0} + a_z b_z \, \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned} \qquad [45]$$

ORA I PRODOTTI SCALARI DEI VERSORI $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (CON $|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$) VALGONO:

$$\begin{aligned} &\vec{i} \times \vec{i} = 1 \; ; \quad \vec{i} \times \vec{j} = 0 \; ; \quad \vec{i} \times \vec{k} = 0 \; ; \\ &\vec{j} \times \vec{i} = 0 \; ; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 1 \quad\;\; \vec{j} \times \vec{k} = 0 \; ; \\ &\vec{k} \times \vec{i} = 0 \; ; \quad \vec{k} \times \vec{j} = 0 \; ; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 1 \end{aligned}$$

IN QUANTO $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ SONO MUTUAMENTE PERPENDICOLARI (OVVERO FORMANO ANGOLI RETTI, IL CUICOSENO SI ANNULLA); NE SEGUE CHE LA [45] DIVIENE:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad [46]$$

DUNQUE IL PRODOTTO SCALARE DI 2 VETTORI SCRITTI PER COMPONENTI (RISPETTO ALLA <u>MEDESIMA</u> BASE) E' PARI ALLA <u>SOMMA DEI PRODOTTI DELLE COMPONENTI OMOLOGHE</u>.

NEL CASO $\vec{b} = \vec{a}$ LA [46] DIVIENE

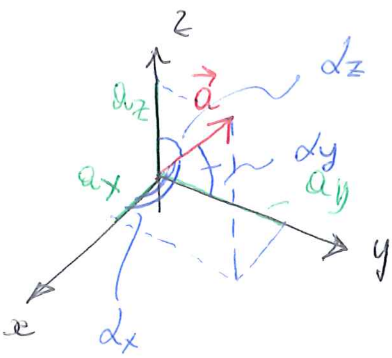
$$\vec{a} \times \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad [47]$$

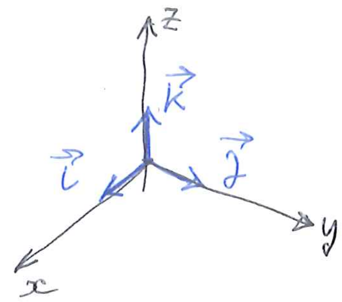
E DALLA [43] SI OTTIENE:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad [48]$$

CIOE' IL MODULO DI UN VETTORE SI OTTIENE SOMMANDO LE COMPONENTI ELEVATE AL QUADRATO

ED ESTRAENDONE LA RADICE: È UNA FORMULAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA GENERALIZZATO





APPLICAZIONI

(I) CALCOLO DELLE COMPONENTI DI UN VETTORE

SIA $\vec a = a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k$ [•]

ALLORA
$$\vec a \times \vec i = (a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k) \times \vec i = a_x \vec i \times \vec i + \cancel{a_y \vec j \times \vec i}^{\,0} + \cancel{a_z \vec k \times \vec i}^{\,0} = a_x$$
$$\vec a \times \vec j = (a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k) \times \vec j = \cancel{a_x \vec i \times \vec j}^{\,0} + a_y \vec j \times \vec j + \cancel{a_z \vec k \times \vec j}^{\,0} = a_y$$
$$\vec a \times \vec k = (a_x \vec i + a_y \vec j + a_z \vec k) \times \vec k = \cancel{a_x \vec i \times \vec k}^{\,0} + \cancel{a_y \vec j \times \vec k}^{\,0} + a_z \vec k \times \vec k = a_z$$

PERTANTO
$$a_x = \vec a \times \vec i$$
$$a_y = \vec a \times \vec j \qquad [49]$$
$$a_z = \vec a \times \vec k$$

E LE [49] COSTITUISCONO LA RICETTA PER CALCOLARE LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec a$.

SI OSSERVA CHE
$$a_x = |\vec a|\overbrace{|\vec i|}^{=1}\cos\alpha_x = |\vec a|\cdot\cos\alpha_x$$
$$a_y = |\vec a|\overbrace{|\vec j|}^{=1}\cos\alpha_y = |\vec a|\cdot\cos\alpha_y \qquad [50]$$
$$a_z = |\vec a|\overbrace{|\vec k|}^{=1}\cos\alpha_z = |\vec a|\cdot\cos\alpha_z$$

DOVE $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ SONO GLI ANGOLI CHE IL VETTORE $\vec a$ FORMA CON GLI ASSI x, y, z.
DA QUI, RICORDANDO LA [48] SI OTTIENE:

$$|\vec a| = \sqrt{|\vec a|^2\cos^2\alpha_x + |\vec a|^2\cos^2\alpha_y + |\vec a|^2\cos^2\alpha_z} = \sqrt{|\vec a|^2(\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z)}$$
$$\cancel{|\vec a|} = \cancel{|\vec a|}\sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z} \Rightarrow 1 = \sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z}$$

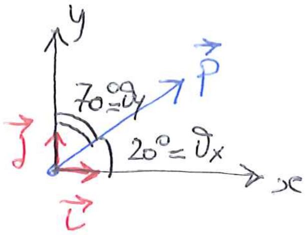
DA CUI SEGUE $\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$ [51]

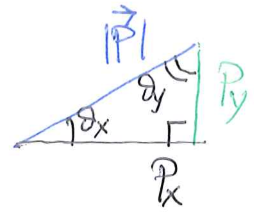
E QUESTI SONO I COSENI DIRETTORI ASSOCIATI AL VETTORE $\vec a$.

NOTA 13. COMBINANDO LA [•] E LE [49] SI OSSERVI CHE RISULTA:
$$\vec a = \underbrace{(\vec a \times \vec i)}_{a_x}\vec i + \underbrace{(\vec a \times \vec j)}_{a_y}\vec j + \underbrace{(\vec a \times \vec k)}_{a_z}\vec k$$

□

SI VOGLIANO DETERMINARE LE COMPONENTI DI UNA FORZA $\vec{P}$ AGENTE NEL PIANO x,y E TALE DA FORMARE CON L'ASSE x UN ANGOLO DI 20° E GIACENTE NEL PRIMO QUADRANTE. E' NOTO CHE $|\vec{P}| = 40$ N





SI HA:

$$P_x = \vec{P} \times \vec{i} = |\vec{P}| \cdot \underbrace{|\vec{i}|}_{=1} \cos 20° = |\vec{P}| \cdot \cos 20° = 40 \cdot 0.9397 = 37.588 \text{ N}$$

$$P_y = \vec{P} \times \vec{j} = |\vec{P}| |\vec{j}| \cdot \cos 70° = |\vec{P}| \cdot \cos 70° = 40 \cdot 0.3420 = 13.681 \text{ N}$$

QUINDI $\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} = 37.588 \vec{i} + 13.681 \vec{j}$ N

COME VERIFICA SI HA CHE $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{1412.836 + 187.164} = \sqrt{1600.000}$

$= 40.000$ N

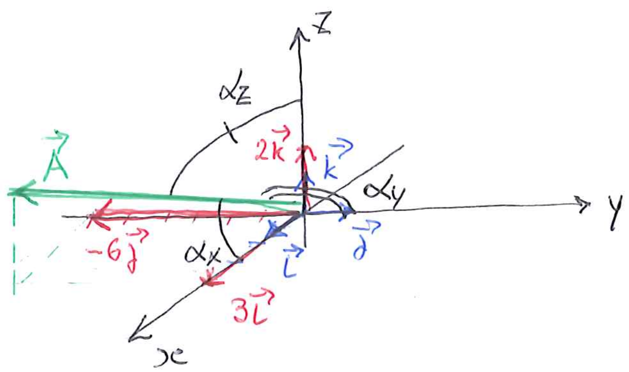
SI OSSERVI ANCHE CHE DALLA COSTRUZIONE TRIGONOMETRICA DEVE RISULTARE

$$P_x = |\vec{P}| \cdot \cos\vartheta_x \quad ; \quad P_y = |\vec{P}| \cdot \sin \vartheta_x$$

O ANCHE

$$P_x = |\vec{P}| \cdot \sin\vartheta_y \quad ; \quad P_y = |\vec{P}| \cos\vartheta_y .$$

UTILIZZANDO IL PRODOTTO SCALARE SI POSSONO DETERMINARE ANGOLI FRA VETTORI. PER ESEMPIO SI DETERMINANO GLI ANGOLI CHE IL VETTORE $\vec{A} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ FORMA CON GLI ASSI COORDINATI



DA QUANTO VISTO SEGUE:

$$A_x = \vec{A} \times \vec{i} = |\vec{A}| |\vec{i}| \cos\alpha_x = |\vec{A}| \cos \alpha_x$$

$$A_y = \vec{A} \times \vec{j} = |\vec{A}| |\vec{j}| \cos\alpha_y = |\vec{A}| \cos \alpha_y$$

$$A_z = \vec{A} \times \vec{k} = |\vec{A}| |\vec{k}| \cos\alpha_z = |\vec{A}| \cos\alpha_z$$

D'ALTRA PARTE $\vec{A} \times \vec{i} = A_x = 3$; $\vec{A} \times \vec{j} = A_y = -6$; $\vec{A} \times \vec{k} = A_z = 2$

SI OTTIENE QUINDI:

$$A_x = |\vec{A}| \cos\alpha_x = 3 \qquad\qquad \cos\alpha_x = \frac{3}{|\vec{A}|}$$

$$A_y = |\vec{A}| \cos\alpha_y = -6 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha_y = \frac{-6}{|\vec{A}|}$$

$$A_z = |\vec{A}| \cos\alpha_z = 2 \qquad\qquad \cos\alpha_z = \frac{2}{|\vec{A}|}$$

D'ALTRA PARTE $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \times \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{9+36+4}$

DUNQUE $|\vec{A}| = \sqrt{49} = 7$

PERTANTO

$$\cos\alpha_x = \frac{3}{7} = 0,4286 \qquad \alpha_x = \arccos\left(\frac{3}{7}\right) = 64°,623$$

$$\cos\alpha_y = \frac{-6}{7} = -0,8571 \qquad \alpha_y = \arccos\left(-\frac{6}{7}\right) = 148°,997$$

$$\cos\alpha_z = \frac{2}{7} = 0,2857 \qquad \alpha_z = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) = 73°,398$$

SI OSSERVI CHE $\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{9+36+4}{49} = \frac{49}{49} = 1$

SULLA BASE DI QUANTO VISTO MEDIANTE IL PRODOTTO SCALARE SI PUÒ DETERMINARE L'ANGOLO FORMATO DA 2 VETTORI.

SIA $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

IN BASE ALLA DEFINIZIONE [37] SI HA:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\vartheta \qquad [52]$$

DOVE ϑ È L'ANGOLO COMPRESO FRA I 2 VETTORI.

QUINDI PER LA [52] SI TROVA:

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \qquad [53]$$

PROCEDENDO CON IL CALCOLO SI HA:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 2 \cdot 6 + 2(-3) + (-1) \cdot 2 = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \times \vec{A}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{\vec{B} \times \vec{B}} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

DUNQUE

$$\cos\vartheta = \frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{21} = 0.1905 \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right) = 79°,019$$

SI OSSERVI CHE LA [53] SUGGERISCE UN METODO ALTERNATIVO DI PROCEDERE:

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \times \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{e}_A \times \vec{e}_B \qquad \text{CON} \quad \vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}, \quad \vec{e}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

OVVERO PER CALCOLARE L'ANGOLO FORMATO DA 2 VETTORI SI POSSONO CALCOLARE I VERSORI CHE INDIVIDUANO LE 2 DIREZIONI E DETERMINARE L'ANGOLO CHE QUESTI FORMANO:

$$\cos\vartheta = \vec{e}_A \times \vec{e}_B$$

IN QUANTO, IN BASE ALLA DEFINIZIONE [37]

$$\vec{e}_A \times \vec{e}_B = \underbrace{|\vec{e}_A|}_{1}\,\underbrace{|\vec{e}_B|}_{1} \cdot \cos\vartheta = \cos\vartheta$$

NEL CASO IN ESAME SI HA:

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}{3} = \frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\vec{e}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}}{7} = \frac{6}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{2}{7}k$$

SI HA DUNQUE:

$$\vec{e}_A \times \vec{e}_B = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{12}{21}-\frac{6}{21}-\frac{2}{21} = \frac{4}{21} = \cos\vartheta$$

PERTANTO

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right) = 79°.019$$

SI CONSIDERI UN ALTRO ESERCIZIO: DATI I VETTORI

$$\vec{r}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{r}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

SI CHIEDE DI CALCOLARE $|\vec{r}_3|$, $|\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3|$, $|2\vec{r}_1-3\vec{r}_2-5\vec{r}_3|$.

SI HA FACILMENTE:

$$|\vec{r}_3| = \sqrt{\vec{r}_3 \times \vec{r}_3} = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3 = (3+2-1)\vec{i} + (-\cancel{2}-4+\cancel{2})\vec{j} + (1+3+2)\vec{k} = 4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$$

DUNQUE

$$|\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3| = \sqrt{(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)\times(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)} = \sqrt{4^2+(-4)^2+6^2} = \sqrt{16+16+36} = \sqrt{68} = 8.246$$

INFINE SI TROVA $2\vec{r}_1-3\vec{r}_2-5\vec{r}_3 = 2(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})-3(2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k})-5(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

SICCHÉ

$$2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 - 5\vec{r}_3 = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + (6\vec{i} + 12\vec{j} - 9\vec{k}) + (5\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k})$$

$$2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 - 5\vec{r}_3 = (\cancel{6} - \cancel{6} + 5)\vec{i} + (-4 + 12 - 10)\vec{j} + (2 - 9 - 10)\vec{k} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 17\vec{k}$$

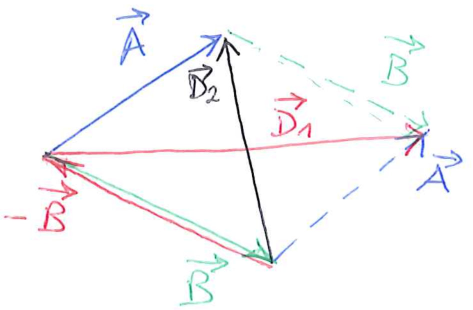
NE SEGUE

$$|2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 - 5\vec{r}_3| = \sqrt{(2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 - 5\vec{r}_3) \times (2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 - 5\vec{r}_3)} = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-17)^2} = \sqrt{25 + 4 + 289}$$

$$= \sqrt{318} = 17.833.$$

MEDIANTE IL PRODOTTO SCALARE SI POSSONO AGEVOLMENTE DIMOSTRARE ALCUNE PROPRIETÀ DI GEOMETRIA PIANA, PER ESEMPIO IL FATTO CHE LE DIAGONALI DI UN ROMBO SONO FRA LORO PERPENDICOLARI.

RICORDANDO CHE UN ROMBO È UN PARALLELOGRAMMA A LATI EGUALI, SE SI IDENTIFICANO 2 LATI ADIACENTI CON I VETTORI $\vec{A}$ E $\vec{B}$, NEL CASO DEL ROMBO È $|\vec{A}| = |\vec{B}|$.



DALLE PROPRIETÀ DEI VETTORI SEGUE IMMEDIATAMENTE, PER QUANTO GIÀ VISTO:

$$\vec{D}_1 = \vec{A} + \vec{B} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \vec{A} - \vec{B}$$

SE DUNQUE LE DIAGONALI FOSSERO FRA LORO PERPENDICOLARI, SI DOVREBBE AVERE $\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = 0$.

NEL CASO IN ESAME SI HA:

$$\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$$

E PER LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE SI OTTIENE

$$\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \vec{A} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{B} \times \vec{A}}_{= \vec{A} \times \vec{B}} - \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{B} = |\vec{A}|^2 + \cancel{\vec{A} \times \vec{B}} - \cancel{\vec{A} \times \vec{B}} - |\vec{B}|^2$$

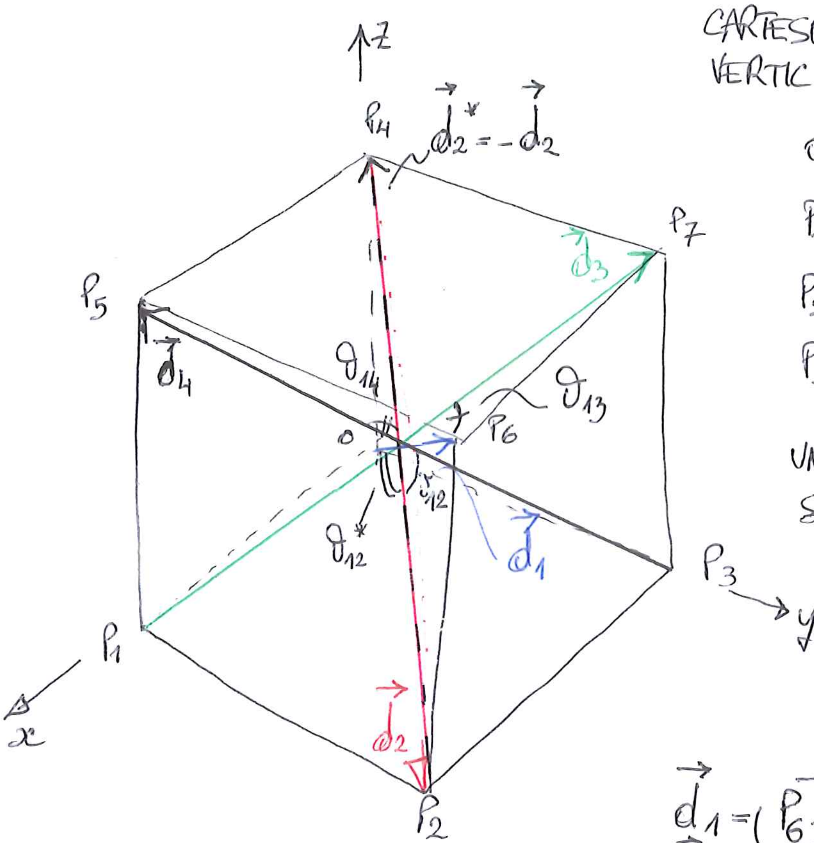
NE SEGUE $\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2$

MA NEL CASO DEL ROMBO $|\vec{B}| = |\vec{A}|$ E QUINDI $|\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2$

PERTANTO $\vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = |\vec{A}|^2 - |\vec{A}|^2 = 0 \iff |\vec{D}_1| |\vec{D}_2| \cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$

E CIÒ DIMOSTRA CHE LE 2 DIAGONALI SONO PERPENDICOLARI.

COME ULTERIORE ESEMPIO, SI CALCOLA L'ANGOLO COMPRESO FRA LE DIAGONALI DI UN CUBO. SI RAMMENTA CHE UN CUBO È UN POLIEDRO (ESAEDRO REGOLARE RETTO) FORMATO DA 6 FACCE, A 2 A 2 PARALLELE E TALI DA FORMARE FRA LORO ANGOLI RETTI.
POICHÉ LE FACCE DI UN CUBO SONO FORMATE DA QUADRATI, SI CONCLUDE CHE TUTTI I CUBI SONO FRA LORO SIMILI E CONGRUENTI, SICCHÉ SI PUÒ OPERARE FACENDO RIFERIMENTO A UN CUBO DI SPIGOLO UNITARIO.
SI RAMMENTA POI CHE UNA DIAGONALE DEL CUBO CONNETTE FRA LORO 2 VERTICI NON APPARTENENTI ALLA STESSA FACCIA.



FACENDO USO DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE, SI HA CHE GLI OTTO VERTICI HANNO QUESTE COORDINATE:

$$O \equiv (0,0,0) \qquad P_4 \equiv (0,0,1)$$
$$P_1 \equiv (1,0,0) \qquad P_5 \equiv (1,0,1)$$
$$P_2 \equiv (1,1,0) \qquad P_6 \equiv (1,1,1)$$
$$P_3 \equiv (0,1,0) \qquad P_7 \equiv (0,1,1)$$

UN SEMPLICE CALCOLO MOSTRA CHE VI SONO 4 DIAGONALI DISTINTE.

QUESTE SONO, PER ESEMPIO; (FISSANDONE ARBITRARIAMENTE IL VERSO) DEFINITE DA QUESTI 4 VETTORI:

$$\vec{d}_1 = (\vec{P_6 - O}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{d}_2 = (\vec{P_2 - P_4}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{d}_3 = (\vec{P_7 - P_1}) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{d}_4 = (\vec{P_5 - P_3}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

I RELATIVI ANGOLI FRA LA DIAGONALE $\vec{d}_1$ E LE RIMANENTI 3 SONO INDICATE IN FIGURA CON $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{14}$

SI OSSERVI PRELIMINARMENTE CHE

$$|\vec{d}_1| = \sqrt{\vec{d}_1 \times \vec{d}_1} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{d}_2| = \sqrt{\vec{d}_2 \times \vec{d}_2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{d}_3| = \sqrt{\vec{d}_3 \times \vec{d}_3} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{d}_4| = \sqrt{\vec{d}_4 \times \vec{d}_4} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

DUNQUE LE 4 DIAGONALI HANNO EGUALE LUNGHEZZA.

SI HA POI, APPLICANDO LE [36] E [37]:

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = |\vec{d}_1||\vec{d}_2| \cos\vartheta_{12} \Rightarrow \cos\vartheta_{12} = \frac{\vec{d}_1 \times \vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|}$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_3 = |\vec{d}_1||\vec{d}_3| \cos\vartheta_{13} \Rightarrow \cos\vartheta_{13} = \frac{\vec{d}_1 \times \vec{d}_3}{|\vec{d}_1||\vec{d}_3|}$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_4 = |\vec{d}_1||\vec{d}_4| \cos\vartheta_{14} \Rightarrow \cos\vartheta_{14} = \frac{\vec{d}_1 \times \vec{d}_4}{|\vec{d}_1||\vec{d}_4|}$$

D'ALTRA PARTE

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = 1.1 + 1.1 + 1.(-1) = 1 + \cancel{1} - \cancel{1} = 1$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_3 = 1.(-1) + 1.1 + 1.1 = -\cancel{1} + \cancel{1} + 1 = 1$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_4 = 1.1 + 1.(-1) + 1.1 = \cancel{1} - \cancel{1} + 1 = 1$$

SI OTTIENE COSÌ

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \\ \cos\vartheta_{13} &= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \\ \cos\vartheta_{14} &= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \vartheta_{12} &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ.529 \\ \vartheta_{13} &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ.529 \\ \vartheta_{14} &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ.529. \end{aligned}\right.$$

CIOÈ GLI ANGOLI FRA I VETTORI COSÌ DEFINITI SONO TUTTI ACUTI.

SE PERÒ, INVECE DI CONSIDERARE LA DIAGONALE DISPOSTA COME IL VETTORE $\vec{d}_2 = (\vec{P_2 - P_4})$ SI SCEGLIESSE COME VERSO QUELLO OPPOSTO, CIOÈ $\vec{d}_2^* = -\vec{d}_2 = (\vec{P_4 - P_2})$ SI AVREBBE

$$\vec{d}_2^* = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

SEGUE POI $|\vec{d}_2^*| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2^* = |\vec{d}_1||\vec{d}_2^*| \cdot \cos\vartheta_{12}^*, \quad \text{DUNQUE} \quad \cos\vartheta_{12}^* = \frac{\vec{d}_1 \times \vec{d}_2^*}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2^*|}$$

E D'ALTRA PARTE $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2^* = 1.(-1) + 1.(-1) + 1.1 = -1 - \cancel{1} + \cancel{1} = -1$,

SICCHÉ

$$\cos\vartheta_{12}^* = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} \qquad \vartheta_{12}^* = 109^\circ.471.$$

SI OSSERVA QUINDI CHE QUESTO È UN ANGOLO OTTUSO, CHE RISULTA PERÒ <u>SUPPLEMENTARE</u> DEL PRECEDENTE:

$$\vartheta_{12} + \vartheta_{12}^* = 70^\circ.529 + 109^\circ.471 = 180^\circ.000 = \pi.$$

ANALOGHE CONSIDERAZIONI VALGONO PER TUTTI GLI ANGOLI FORMATI, IN OGNI MODO POSSIBILE, FRA LE DIAGONALI DI UN CUBO.

5. MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE DI 2 VETTORI

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad [54]$$

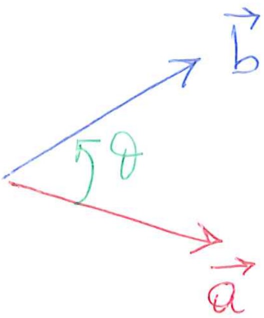
DATI 2 VETTORI $\vec{a}$ e $\vec{b}$ È POSSIBILE MOLTIPLICARLI FRA LORO IN MODO CHE IL RISULTATO SIA ANCORA UN VETTORE.

LA REGOLA CHE ASSOCIA $\vec{c}$ AI 2 VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ È LA SEGUENTE:

- IL MODULO DI $\vec{c}$ È DEFINITO DAL NUMERO REALE POSITIVO ($\in \mathbb{R}^+$):

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\|\sin\vartheta\| \quad [55]$$

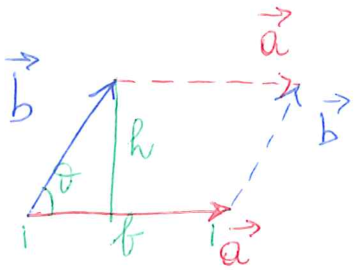
DOVE ϑ È L'ANGOLO MISURATO DA $\vec{a}$ VERSO $\vec{b}$:



SI NOTI CHE $\sin\vartheta = -\sin(-\vartheta)$, SICCHÉ È IMPORTANTE SPECIFICARE COME SI MISURA L'ANGOLO (IN SENSO ANTIORARIO DA $\vec{a}$ VERSO $\vec{b}$).

LA [55] RIVELA CHE $|\vec{c}|$ È PARI AL PRODOTTO DEI MODULI DEI 2 VETTORI PER IL VALORE ASSOLUTO DEL SENO DELL'ANGOLO COMPRESO

NOTA 14 È FACILE VERIFICARE CHE $|\vec{c}|$ RAPPRESENTA L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SUI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$:



L'AREA A È EVIDENTEMENTE PARI A:

$$A = b \cdot h$$

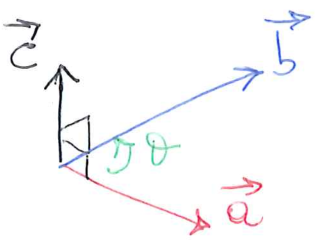
MA $b = |\vec{a}|$

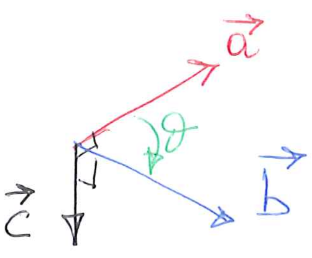
$h = |\vec{b}|\,\|\sin\vartheta\|$

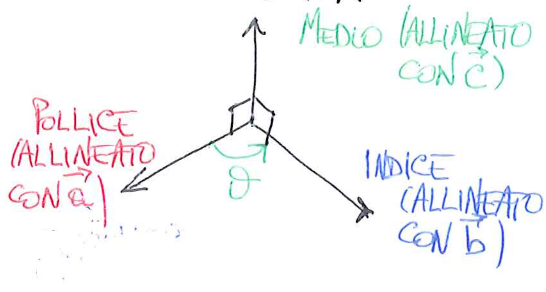
SICCHÉ $A = |\vec{c}|$. $\square$

- LA DIREZIONE DI $\vec{c}$ È PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{a}$ E $\vec{b}$

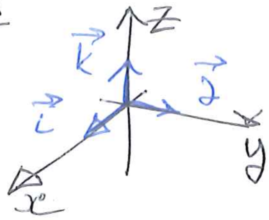
- IL VERSO DI $\vec{c}$ È INDIVIDUATO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA:







SI OSSERVA CHE QUANDO $\vec{a}$ E $\vec{b}$ SONO FRA LORO PERPENDICOLARI, I TRE VETTORI $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ COSTITUISCONO UNA TERNA <u>DESTRA</u> CIOÈ UNA TERNA "CONGRUA" CON L'USUALE ORIENTAZIONE DEGLI ASSI x, y, z E DEI <u>VERSORI BASE</u> $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ AD ESSI RELATIVI.



IL VETTORE $\vec{c}$ PRODOTTO VETTORIALE PERCHÉ IN QUESTO CASO LA MOLTIPLICAZIONE DI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ DEFINITA DALLA [54] DEFINISCE UN VETTORE.

A LIVELLO DI NOTAZIONE SI POSSONO TROVARE LE SEGUENTI:

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ (TESTI EUROPA CONTINENTALE)

$\vec{a} \times \vec{b}$ (TESTI ANGLOSASSONI). [+]

LA NOTAZIONE [+] PUÒ CREARE AMBIGUITÀ CON IL PRODOTTO SCALARE (CHE SUI TESTI ANGLOSASSONI È DENOTATA DALLA "NOTAZIONE PUNTO": $\vec{a} \cdot \vec{b}$; IN CASO DI DUBBI INTERPRETATIVI È SUFFICIENTE CONSIDERARE IL RISULTATO: SE QUESTO È UN VETTORE, SI TRATTA DI UN PRODOTTO VETTORIALE.

IL PRODOTTO VETTORIALE GODE DI QUESTE PROPRIETÀ:

- ANTI-COMMUTATIVA: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ [56] CONSEGUENZA IMMEDIATA DELLA DEFINIZIONE DEL VERSO DI $\vec{c}$.
- BILINEARE: $(\alpha \vec{a}) \wedge (\beta \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \wedge \beta \vec{b}) = ((\alpha \vec{a}) \wedge \vec{b})\beta =$
$= \alpha\beta\, \vec{a} \wedge \vec{b}$ [57], $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ SENZA ALTERARE L'ORDINE DI MOLTIPLICAZIONE DEI VETTORI
- DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA DEI VETTORI (NEI 2 ARGOMENTI)
$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{d} + \vec{b} \wedge \vec{d}$; $\vec{d} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{d} \wedge \vec{a} + \vec{d} \wedge \vec{b}$ [58]
SEMPRE SENZA ALTERARE L'ORDINE DI MOLTIPLICAZIONE DEI VETTORI.

INOLTRE L'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO VETTORIALE È CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA 2 VETTORI:

$\vec{a} \,//\, \vec{b} \iff \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ [59]

$\vec{a}$ È PARALLELO A $\vec{b}$

VETTORE NULLO, NON NUMERO REALE 0.

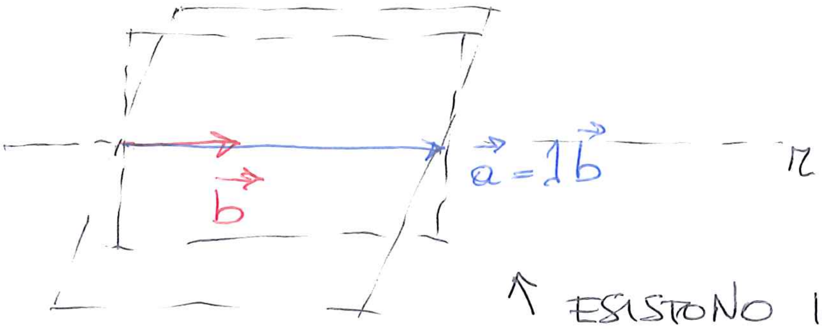
INFATTI SE

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\|\sin\vartheta\| = 0 \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \|\sin\vartheta\| = 0 \Rightarrow \vartheta = 0 \text{ o } \vartheta = \pi \end{cases}$$

IL VETTORE NULLO HA MODULO EGUALE A ZERO: $|\vec{0}| = 0$

I PRIMI 2 CASI POSSONO ESSERE COMPRESI NELLA [59] SE SI AMMETTE CHE IL VETTORE NULLO ($\vec{0}$) È ANCHE // A OGNI VETTORE.

IL TERZO CASO EVIDENZIA LA CIRCOSTANZA CHE SE $\vec{a}$ E $\vec{b}$ SONO PARALLELI, CIOÈ SE SI PUÒ SCRIVERE $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ PER UN VALORE DI $\lambda \in \mathbb{R}^+ \neq 0$, ALLORA I DUE VETTORI NON PERMETTONO DI INDIVIDUARE UN PIANO, MA SOLO UNA RETTA:



↑ ESISTONO INFINITI PIANI CHE SI "APPOGGIANO" ALLA RETTA r

IN PARTICOLARE SE SI AMMETTE NELLA [54] CHE SIA $\vec{b} = \vec{a}$ SI OTTIENE IMMEDIATAMENTE

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = 0 \quad \forall\ \vec{a} \neq \vec{0}. \qquad [60]$$

PER CALCOLARE IL PRODOTTO VETTORIALE DI 2 VETTORI ESPRESSI PER COMPONENTI RISPETTO ALLA MEDESIMA BASE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \qquad [61]$$

SI OTTIENE CHE IL VETTORE

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \qquad [62]$$

SUSCETTIBILE DI ESSERE ESPRESSO PER COMPONENTI NELLA MEDESIMA BASE SI OTTIENE MOLTIPLICANDO FRA LORO I VERSORI $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

ALLO SCOPO, OSSERVANDO CHE PER DEFINIZIONE È $|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1, |\vec{k}| = 1$ APPLICANDO LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE E OSSERVANDO CHE

$\|\sin \vartheta_{xy}\| = 1$; $\|\sin \vartheta_{yz}\| = 1$; $\|\sin \vartheta_{zx}\| = 1$ E CHE, IN BASE ALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA, LA SEQUENZA

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad [63]$$

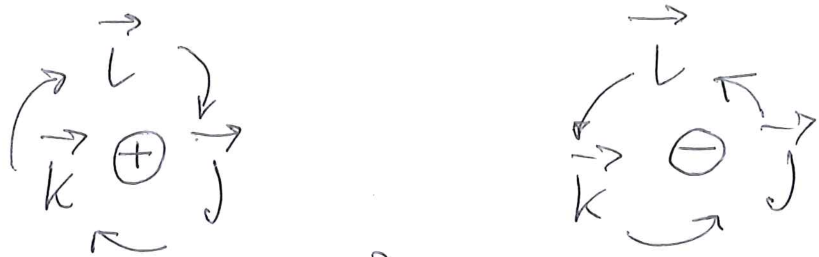
MENTRE LA SEQUENZA

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \qquad [64]$$

D'ALTRA PARTE PER LA [60] È SENZ'ALTRO:

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}. \qquad [65]$$

A SCOPO MNEMONICO PUÒ ESSERE UTILE FISSARE QUESTO DIAGRAMMA CICLICO:



CIOÈ LA SEQUENZA $\vec{i}\wedge\vec{j}$ GENERA IL TERZO VERSORE CON SEGNO ⊕, COME DEL RESTO LA SEQUENZA $\vec{j}\wedge\vec{k}$ E LA $\vec{k}\wedge\vec{i}$ (SEQUENZA "NATURALE"); LA SEQUENZA INVERSA $\vec{j}\wedge\vec{i}$ GENERA INVECE SEMPRE IL TERZO VETTORE, MA CON IL SEGNO ⊖; CONSIDERAZIONI ANALOGHE VALGONO PER $\vec{i}\wedge\vec{k}$ E $\vec{k}\wedge\vec{j}$. (SEQUENZA INVERSA).

SVILUPPANDO QUINDI LE [61] SI TROVA:

$$\vec{c}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\wedge(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

OVVERO, SFRUTTANDO LE [57] E [58]:

$$\vec{c}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\wedge b_x\vec{i}+(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\wedge b_y\vec{j}+(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\wedge b_z\vec{k}$$

$$\vec{c}=a_x\vec{i}\wedge b_x\vec{i}+a_y\vec{j}\wedge b_x\vec{i}+a_z\vec{k}\wedge b_x\vec{i}+a_x\vec{i}\wedge b_y\vec{j}+a_y\vec{j}\wedge b_y\vec{j}+a_z\vec{k}\wedge b_y\vec{j}+$$
$$+a_x\vec{i}\wedge b_z\vec{k}+a_y\vec{j}\wedge b_z\vec{k}+a_z\vec{k}\wedge b_z\vec{k}$$

CIOÈ ANCHE:

$$\vec{c}=a_xb_x\overbrace{\vec{i}\wedge\vec{i}}^{\vec{0}}+a_yb_x\overbrace{\vec{j}\wedge\vec{i}}^{-\vec{k}}+a_zb_x\overbrace{\vec{k}\wedge\vec{i}}^{\vec{j}}+a_xb_y\overbrace{\vec{i}\wedge\vec{j}}^{\vec{k}}+a_yb_y\overbrace{\vec{j}\wedge\vec{j}}^{\vec{0}}+a_zb_y\overbrace{\vec{k}\wedge\vec{j}}^{-\vec{i}}+$$
$$+a_xb_z\underbrace{\vec{i}\wedge\vec{k}}_{-\vec{j}}+a_yb_z\underbrace{\vec{j}\wedge\vec{k}}_{\vec{i}}+a_zb_z\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{k}}_{\vec{0}}$$

QUINDI

$$\vec{c}=-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}+a_xb_y\vec{k}-a_zb_y\vec{i}-a_xb_z\vec{j}+a_yb_z\vec{i}$$

CIOÈ ANCHE:

$$\vec{c}=(\overbrace{a_yb_z-a_zb_y}^{c_x})\vec{i}+(\overbrace{a_zb_x-a_xb_z}^{c_y})\vec{j}+(\overbrace{a_xb_y-a_yb_x}^{c_z})\vec{k} \qquad [66]$$

DA QUI, CONFRONTANDO LA [62] CON LA [66] E OSSERVANDO CHE LA SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE IN UNA ASSEGNATA BASE È UNICA, SI CONCLUDE CHE

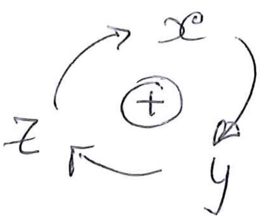
$$C_x = \underbrace{a_y b_z}_{\oplus\; x \to y \to z} - \underbrace{a_z b_y}_{\ominus\; z \to y \to x}$$

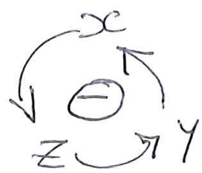
$$C_y = \underbrace{a_z b_x}_{\oplus\; y \to z \to x} - \underbrace{a_x b_z}_{\ominus\; x \to z \to y} \qquad [67]$$

$$C_z = \underbrace{a_x b_y}_{\oplus\; z \to x \to y} - \underbrace{a_y b_x}_{\ominus\; y \to x \to z}$$

SI RICONOSCE COSÌ CHE LA COMPONENTE x DEL VETTORE $\vec{C}$ È UNA COMBINAZIONE DELLE COMPONENTI DEI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ CHE NON CONTENGONO L'INDICE x, NÉ INDICI RIPETUTI: SI OTTIENE QUINDI MOLTIPLICANDO LE COMPONENTI y E z DI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ SCELTE COL SEGNO $\oplus$ QUANDO LA SEQUENZA $x \to y \to z$ È QUELLA NATURALE; CON IL SEGNO $\ominus$ QUANDO LA SEQUENZA È INVERSA: $x \to z \to y$.
DISCORSO ANALOGO VALE PER LE COMPONENTI DI $\vec{C}$ RISPETTO A y E A z.

SI PUÒ QUINDI VEDERE ANCHE QUI L'UTILITÀ DI UN DIAGRAMMA CICLICO PER COMPRENDERE IL SEGNO CORRETTO DA CONSIDERARE:





DAL PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE È POCO AGEVOLE CALCOLARE IL VETTORE $\vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ SFRUTTANDO LE [67]
SI PUÒ INFATTI OSSERVARE CHE IL PRODOTTO VETTORIALE $\vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ PUÒ ESSERE AGEVOLMENTE CALCOLATO SVILUPPANDO IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3x3 COSÌ COSTRUITA:

$$\vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ (x) \quad (y) \quad (z) \end{array} \qquad [68]$$

→ PRIMA RIGA: VERSORI BASE NELL'ORDINE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

→ SECONDA RIGA: COMPONENTI DEL PRIMO VETTORE SECONDO GLI ASSI x, y, z

→ TERZA RIGA: COMPONENTI DEL SECONDO VETTORE, SEMPRE SECONDO GLI ASSI x, y, z.

SE SI SVILUPPA IL DETERMINANTE [68] RISPETTO AGLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA SI HA:

ATTENZIONE!

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = +\vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \quad [69]$$

DETERMINANTE DELLA MATRICE 2X2 OTTENUTA ELIMINANDO LA PRIMA RIGA E LA TERZA COLONNA

SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA PARI $(1+1) \Rightarrow$ CI VUOLE IL SEGNO $+$

DETERMINANTE DELLA MATRICE 2x2 OTTENUTA ELIMINANDO LA PRIMA RIGA E LA PRIMA COLONNA

SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA DISPARI $(1+2)$ $\Rightarrow$ CI VUOLE IL SEGNO $-$

DETERMINANTE DELLA MATRICE 2x2 OTTENUTA ELIMINANDO LA PRIMA RIGA E LA SECONDA COLONNA

SOMMA DEGLI INDICI DI RIGA E COLONNA PARI $(1+3)$ $\Rightarrow$ CI VUOLE IL SEGNO $+$

SI TROVA COSÌ:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i}\,(\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}) - \vec{j}\,(\underbrace{a_x b_z - a_z b_x}) + \vec{k}\,(\underbrace{a_x b_y - a_y b_x}) \quad [70]$$

PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE MENO PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE SECONDARIA

PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE MENO PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE SECONDARIA

PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE MENO PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE SECONDARIA.

OVVERO, TRASFORMANDO IL SECONDO ADDENDO PORTANDO IL SEGNO $-$ ENTRO LA PARENTESI:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{c_x})\,\vec{i} + (\underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{c_y})\,\vec{j} + (\underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{c_z})\,\vec{k} \quad [71]$$

CONFRONTANDO LA [71] CON LA [67] SI VEDE CHE SI OTTENGONO LE STESSE ESPRESSIONI.

NOTA 15 LA NOTA PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI, IN BASE ALLA QUALE SCAMBIANDO TRA LORO 2 RIGHE IL DETERMINANTE CAMBIA SEGNO FORNISCE UNA AGEVOLE DIMOSTRAZIONE CHE $\vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{A} \wedge \vec{B}$.

INFATTI

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{B} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

□

COME ESEMPIO, SI CALCOLA $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ CON

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & +1 & -1 \end{vmatrix}$$

NE SEGUE:

$$\vec{C} = \vec{i} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{1-2} \overset{!}{-} \vec{j} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-3-4} + \vec{k} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{3+2}$$

SICCHÉ

$$\vec{C} = -\vec{i} - (-7)\vec{j} + 5\vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

INVECE

$$\vec{D} = \vec{B} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

SI OTTIENE QUESTA VOLTA:

$$\vec{D} = \vec{i} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{2-1} \underset{!}{-} \vec{j} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{4+3} + \vec{k} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{-2-3}$$

QUINDI

$$\vec{D} = \vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

E SI VERIFICA CHE $\vec{D} = -\vec{C}$ OVVERO $\vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$.

COME APPLICAZIONE SI VUOLE COSTRUIRE UN VETTORE $\vec{C}$ CON $|\vec{C}| = 5$ E CHE RISULTI PERPENDICOLARE AI VETTORI $\vec{A}$ E $\vec{B}$ COSIFFATTI:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j}$$

SI OSSERVI CHE UN VETTORE $\vec{D} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ È CERTAMENTE PERPENDICOLARE AI VETTORI $\vec{A}$ E $\vec{B}$, ANCHE SE, GENERALMENTE, NON È GARANTITO CHE SIA $|\vec{D}| = 5$; IN OGNI CASO SI PUÒ PORRE $\vec{C} = 5 \dfrac{\vec{D}}{|\vec{D}|}$.

SI HA COSÌ:

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\underbrace{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}_{0-3} - \vec{j}\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{0+1} + \vec{k}\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}_{-6-6}$$

NE SEGUE

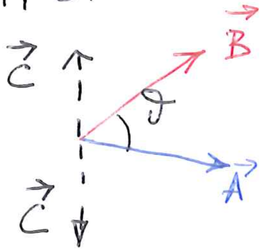
$$\vec{D} = -3\vec{i} - \vec{j} - 12\vec{k}$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{\vec{D}\times\vec{D}} = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-12)^2} = \sqrt{9+1+144} = \sqrt{154} = 12.410$$

IL VETTORE $\vec{C}$ CERCATO È QUINDI DATO DA

$$\vec{C} = \alpha\vec{D} \qquad \text{CON} \quad |\vec{C}| = |\alpha||\vec{D}| = 5 = |\alpha|\sqrt{154}$$

PERTANTO



$$\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{154}}; \quad \vec{C} = \mp\frac{15}{\sqrt{154}}\vec{i} \mp \frac{5}{\sqrt{154}}\vec{j} \mp \frac{60}{\sqrt{154}}\vec{k}$$

SI OSSERVI CHE ESISTONO 2 VETTORI, EGUALI E OPPOSTI CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE INDICATA.

<u>NOTA 16</u> POICHÉ LA MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE DI 2 VETTORI FORNISCE COME RISULTATO UN VETTORE, QUESTO PUÒ ESSERE A SUA VOLTA MOLTIPLICATO VETTORIALMENTE PER UN ALTRO VETTORE, E COSÌ VIA:

$\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}\wedge\ldots$

SI NOTI PERÒ CHE L'<u>ORDINE</u> CON CUI SI ESEGUONO LE OPERAZIONI È IMPORTANTE, NEL SENSO CHE IL RISULTATO <u>DIPENDE</u> DALLA SEQUENZA DELLE OPERAZIONI, CHE DEVE ESSERE INDICATA UTILIZZANDO LE PARENTESI.

SI PUÒ VERIFICARE CHE $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C} \neq \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ [72] E QUINDI LA NOTAZIONE $\vec{A}\wedge\vec{B}\wedge\vec{C}$ È AMBIGUA E NON PUÒ ESSERE UTILIZZATA.

LA DIMOSTRAZIONE DELLA [72] NEL CASO PIÙ GENERALE È LUNGA MA CONCETTUALMENTE SEMPLICE.

PER RENDERSI CONTO CHE LA [72] È VERA, BASTA CONSIDERARE IL CASO PARTICOLARE $\vec{B} = \vec{A}$.

IL PRIMO MEMBRO FORNISCE ALLORA $(\underbrace{\vec{A}\wedge\vec{A}}_{})\wedge\vec{C} = \vec{0}\wedge\vec{C} = \vec{0}$

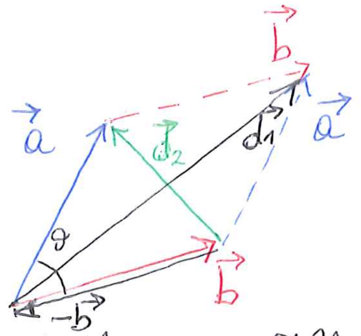
POICHÉ $\vec{A}$ È PARALLELO A SE STESSO E FORNISCE $\vec{0}$ IL VETTORE NULLO $\vec{0}$.

LA SECONDA ESPRESSIONE FORNISCE INVECE $\vec{A} \wedge \underbrace{(\vec{A} \wedge \vec{C})}_{\vec{D}} = \vec{A} \wedge \vec{D}$, DOVE $\vec{D}$ È UN VETTORE $\perp$ AD $\vec{A}$ E $\vec{C}$; MA ALLORA $\vec{A} \wedge \vec{D} \neq \vec{0}$ PERCHÉ È PRODOTTO VETTORIALE DI 2 VETTORI FRA LORO $\perp$. $\square$

ANCHE CON IL PRODOTTO VETTORIALE SI POSSONO AGEVOLMENTE FORMULARE E RISOLVERE DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA.

SI VOGLIA, PER ESEMPIO, DETERMINARE L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA CHE AMMETTE COME DIAGONALI I VETTORI

$$\vec{d}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{d}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$



IN BASE A QUANTO GIA' OSSERVATO SI HA CHE I VETTORI CHE FORMANO I LATI DEL PARALLELOGRAMMA $\vec{a}, \vec{b}$ SONO LEGATI ALLE DIAGONALI DA QUESTE RELAZIONI

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} \qquad [\circ]$$
$$\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} \qquad [\circ\circ]$$

DA QUI, SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO LE 2 EQUAZIONI $[\circ]$ E $[\circ\circ]$ SI OTTIENE:

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 2\vec{a} + \cancel{\vec{b}} - \cancel{\vec{b}} = 2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \quad [*]$$

SE INVECE SI SOTTRAE MEMBRO A MEMBRO LA $[\circ\circ]$ DALLA $[\circ]$ SI HA:

$$\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = \cancel{\vec{a}} + \vec{b} - \cancel{\vec{a}} + \vec{b} = 2\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{d}_1 - \vec{d}_2) \quad [**]$$

SI HA COSÌ CHE LE $[*]$ E $[**]$ ESPRIMONO I LATI DEL PARALLELOGRAMMA IN FUNZIONE DELLE DIAGONALI.

PER IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL PRODOTTO VETTORIALE SI HA POI:

$$A = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\|\sin\vartheta\|.$$

SI PASSA A CALCOLARE $\vec{a} \wedge \vec{b}$, DOPO AVERE OTTENUTO LE ESPRESSIONI DI $\vec{a}$ E DI $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\left[(3+1)\vec{i} + (1-3)\vec{j} + (-2+4)\vec{k}\right] = \frac{1}{2}\left[4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right] = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\left[(3-1)\vec{i} + (1+3)\vec{j} + (-2-4)\vec{k}\right] = \frac{1}{2}\left[2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}\right] = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

SI PASSA QUINDI A CALCOLARE IL PRODOTTO $\vec{a} \wedge \vec{b}$ MEDIANTE LO SVILUPPO DEL DETERMINANTE:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & +1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +\vec{i} \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & +1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i}\,\underbrace{(3-2)}_{1} - \vec{j}\,\underbrace{(-6-1)}_{-7} + \vec{k}\,\underbrace{(4+1)}_{5}$$

DUNQUE

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

NE SEGUE POI

$$A = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}\wedge\vec{b}) \times (\vec{a}\wedge\vec{b})} = \sqrt{1^2+7^2+5^2} = \sqrt{1+49+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = 8.660$$

SI OSSERVI CHE IN ALTERNATIVA SI POSSONO SFRUTTARE LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE PER SEMPLIFICARE I CALCOLI:

INFATTI PER LA [*] E LA [**] SI PUÒ ANCHE SCRIVERE:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2) \wedge \frac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2) = \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\vec{d}_1\wedge\vec{d}_1}_{=\vec{0}} + \vec{d}_2\wedge\vec{d}_1 - \vec{d}_1\wedge\vec{d}_2 - \underbrace{\vec{d}_2\wedge\vec{d}_2}_{=\vec{0}}\Big]$$

DUNQUE $\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{4}\left[\vec{d}_2\wedge\vec{d}_1 - (-\vec{d}_2\wedge\vec{d}_1)\right]$

SICCHÉ $\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{4}\left[2\vec{d}_2\wedge\vec{d}_1\right] = \frac{1}{2}\vec{d}_2\wedge\vec{d}_1$ [+]

SENZA LA NECESSITÀ DI DETERMINARE ESPLICITAMENTE LE ESPRESSIONI DI $\vec{a}$ E $\vec{b}$

DALLA [+] SEGUE:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \\ \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\vec{i}\,\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}_{6-4} - \vec{j}\,\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}_{-2-12} + \vec{k}\,\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{1+9}\right]$$

E QUINDI

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}\left[2\vec{i} + 14\vec{j} + 10\vec{k}\right] = \vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

A QUESTO PUNTO SI OTTIENE SEMPLICEMENTE

$$A = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{1^2+7^2+5^2} = \sqrt{1+49+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = 8{,}660$$

COINCIDENTE CON IL PRECEDENTE.

6. MOLTIPLICAZIONE MISTA DI 3 VETTORI

COMPONENDO LE OPERAZIONI FRA VETTORI GIÀ CONSIDERATE, MERITA UN APPROFONDIMENTO LA MOLTIPLICAZIONE MISTA DI 3 VETTORI $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$f = \vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} \quad [72]$$

OTTENUTA COMBINANDO UN PRODOTTO VETTORIALE E UN PRODOTTO SCALARE: IL RISULTATO È CHIARAMENTE UN NUMERO, IL <u>DOPPIO PRODOTTO MISTO</u>
LA SEQUENZA DELLE OPERAZIONI È UNIVOCAMENTE INDIVIDUATA: PRIMA SI DEVE CALCOLARE IL PRODOTTO VETTORIALE E POI IL PRODOTTO SCALARE:

$$f = \vec{a} \times \underbrace{(\vec{b} \wedge \vec{c})}_{\vec{d}} = \vec{a} \times \vec{d} \quad [73]$$

NE SEGUE CHE NELLA [72] L'USO DELLE PARENTESI È PLEONASTICO.

IL DOPPIO PRODOTTO MISTO GODE DELLE PROPRIETÀ EREDITATE DAL PRODOTTO SCALARE E DA QUELLO VETTORIALE; IN PARTICOLARE SI CONSIDERANO IN DETTAGLIO LE SEGUENTI

- COMMUTATIVA (RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \times \vec{a} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \times \vec{a} \quad [74]$$

SENZA ALTERARE ORDINE DELLA MOLTIPLICAZIONE VETTORIALE

- ANTICOMMUTATIVA (RISPETTO AL PRODOTTO VETTORIALE)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \times (\vec{c} \wedge \vec{b}) \quad [75]$$

- TRILINEARITÀ RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE:

$$\alpha\vec{a} \times (\beta\vec{b} \wedge \gamma\vec{c}) = \alpha\left[\vec{a} \times \beta\gamma(\vec{b} \wedge \vec{c})\right] = (\alpha\beta\gamma)\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c})$$
$$= (\alpha\beta\gamma)\vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c}. \quad [76]$$

PER ESEGUIRE IL DOPPIO PRODOTTO MISTO, SI PUÒ CALCOLARE IL PRODOTTO VETTORIALE COME SVILUPPO DEL DETERMINANTE:

$$\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

OVVERO
$$\vec{d} = \underbrace{(b_y c_z - b_z c_y)}_{d_x}\vec{i} + \underbrace{(b_z c_x - b_x c_z)}_{d_y}\vec{j} + \underbrace{(b_x c_y - b_y c_x)}_{d_z}\vec{k} \quad [77]$$

SI HA POI

$$g = \vec{a} \times \vec{d} = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z$$

$$g = a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \qquad [78]$$

CONFRONTANDO LA [78] CON LA [77] SI VEDE CHE L'ESPRESSIONE DI g SI OTTIENE DA QUELLA DI $\vec{d}$ SOSTITUENDO ORDINATAMENTE $\vec{i}$ CON a_x; $\vec{j}$ CON a_y; $\vec{k}$ CON a_z.

SI PUÒ QUINDI VEDERE FACILMENTE CHE $g = \vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c})$ PUÒ ESSERE OTTENUTO SVILUPPANDO QUESTO DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3X3 COSÌ FATTA:

$$g = \vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1ª RIGA: COMPONENTI X,Y,Z DEL PRIMO VETTORE

2ª RIGA: COMPONENTI X,Y,Z DEL SECONDO VETTORE

3ª RIGA: COMPONENTI X,Y,Z DEL TERZO VETTORE. [78]

IN BASE ALLE PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI SI TROVA CHE:

I) SE IN UN DETERMINANTE SI SCAMBIANO <u>ORDINATAMENTE</u> LE RIGHE (I → II; II → III; III → I OPPURE I → III; III → II; II → I) IL DETERMINANTE NON CAMBIA.

PERTANTO I DOPPI PRODOTTI MISTI $\vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \wedge \vec{a}$ [79]

II) SE IN UN DETERMINANTE SI SCAMBIANO FRA LORO 2 RIGHE, IL DETERMINANTE CAMBIA SEGNO.

PERTANTO I DOPPI PRODOTTI MISTI SEGUENTI RISULTANO:

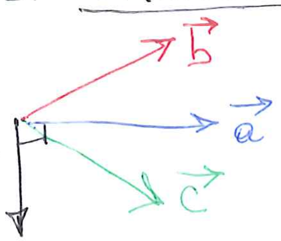
$$\vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} \wedge \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c} \wedge \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} \wedge \vec{a} \qquad [80]$$

L'ANNULLARSI DEL DOPPIO PRODOTTO MISTO SI VERIFICA IN QUESTI CASI:

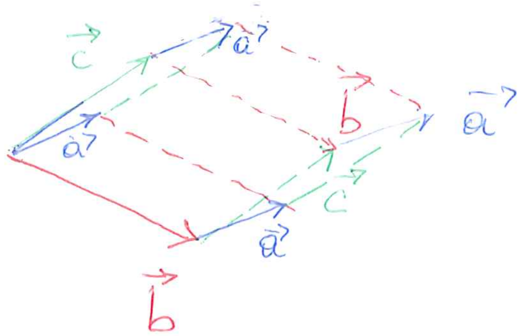
$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{b} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{c} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{b} \parallel \vec{c} \quad \text{o} \quad \vec{a} \perp \vec{d} \qquad [81]$$

NEL CASO GENERALE SI HA CHE L'ANNULLARSI DEL PRODOTTO MISTO È CONDIZIONE DI <u>COMPLANARITÀ</u> FRA 3 VETTORI:

$\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c}$



VICEVERSA, SE $\rho \neq 0$ SI PUÒ VEDERE CHE ESSO RAPPRESENTA IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO SGHEMBO CHE AMMETTE COME SPIGOLI I VETTORI $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:



COME ESEMPIO SI CONSIDERANO I 3 VETTORI

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{c} = 3\vec{i} + \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$$

E SI VUOLE DETERMINARE IL VALORE DEL PARAMETRO α CHE RENDE I TRE VETTORI COMPLANARI.

SI HA, PER QUANTO VISTO:

$$\rho = \vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 \\ 1 & +2 & -3 \\ 3 & \alpha & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad [82]$$

SVILUPPANDO IL DETERMINANTE [82] SI HA:

$$\rho = +2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \alpha & 5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$2(10 + 3\alpha) + 1(5+9) + 1(\alpha - 6) = 20 + 6\alpha + 14 + \alpha - 6 = 28 + 7\alpha$$

E DUNQUE $\quad 28 + 7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{28}{7} = -4$.

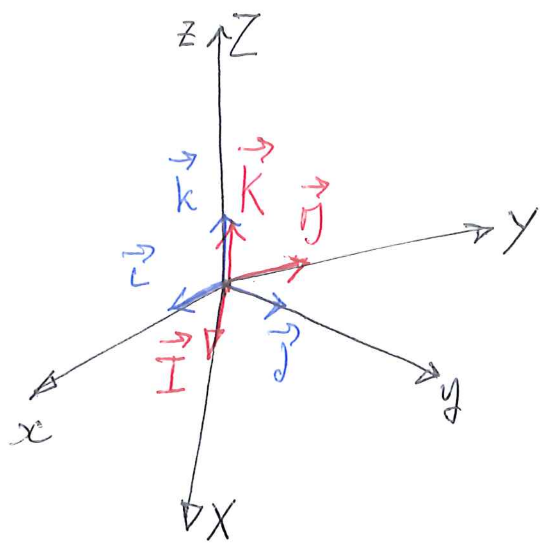
SI PUÒ INFATTI VEDERE CHE PER $\alpha = -4$ IL VETTORE $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $\vec{a}$ E $\vec{b}$: $\vec{c}$ VIENE COSÌ AD APPARTENERE AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{a}$ E $\vec{b}$.

SI LASCIA AL LETTORE VERIFICARE CHE IN QUESTO CASO

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = (4-1)\vec{i} + (-2-2)\vec{j} + (2+3)\vec{k}$$

SICCOME $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, C.V.D.

COME APPLICAZIONE CONCLUSIVA SI CONSIDERA IL PROBLEMA DI RAPPRESENTARE PER COMPONENTI UN VETTORE IN UNA DIVERSA BASE, OTTENUTA PER ROTAZIONE DELLA BASE CANONICA $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ IN UNA NUOVA BASE $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.



SIA IL VETTORE $\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ [83]

LA NUOVA BASE $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ È LEGATA ALLA BASE CANONICA $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ DA QUESTE RELAZIONI:

$$\vec{I} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{K} = \vec{k}.$$

BISOGNA ANZITUTTO VERIFICARE CHE $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ SIANO <u>VERSORI</u>:

$$|\vec{I}| \overset{?}{=} 1 \qquad |\vec{I}| = \sqrt{\vec{I} \times \vec{I}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \checkmark$$

$$|\vec{J}| \overset{?}{=} 1 \qquad |\vec{J}| = \sqrt{\vec{J} \times \vec{J}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1 \checkmark$$

$$|\vec{K}| \overset{?}{=} 1 \qquad |\vec{K}| = \sqrt{\vec{K} \times \vec{K}} = \sqrt{\vec{k} \times \vec{k}} = \sqrt{1} = 1 \qquad \checkmark$$

SUCCESSIVAMENTE OCCORRE VERIFICARE CHE SIANO FRA LORO MUTUAMENTE ORTOGONALI:

$$\vec{I} \times \vec{J} \overset{?}{=} 0 \qquad \vec{I} \times \vec{J} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \checkmark$$

$$\vec{J} \times \vec{K} \overset{?}{=} 0 \qquad \vec{J} \times \vec{K} = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) \times \vec{k} = 0 \qquad \checkmark$$

$$\vec{K} \times \vec{I} \overset{?}{=} 0 \qquad \vec{K} \times \vec{I} = \vec{k} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) = 0 \qquad \checkmark$$

E INFINE CHE $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ FORMINO UNA <u>TERNA DESTRA</u>, COME LA BASE CANONICA $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.

NEL CASO IN ESAME $\vec{I} \wedge \vec{J} \overset{?}{=} \vec{K}$ SI HA

$$\vec{I} \wedge \vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

E SVILUPPANDO IL DETERMINANTE:

$$\vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{i} \underbrace{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix}}_{0} - \vec{j} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}}_{0} + \vec{k} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}}_{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} = \vec{k} \equiv \vec{K} \checkmark$$

ACCERTATA LA VALIDITA' DELLA NUOVA BASE, ORTONORMALE E COSTITUITA DA UNA TERNA DESTRA, SI PASSA A ESPRIMERE $\vec{A}$ NELLA NUOVA BASE:

$$\vec{A} = A_X \vec{I} + A_Y \vec{J} + A_Z \vec{K}$$

D'ALTRA PARTE È NOTO CHE $A_X = \vec{A} \times \vec{I}$; $A_Y = \vec{A} \times \vec{J}$; $A_Z = \vec{A} \times \vec{K}$:
NE SEGUE

$$A_X = \vec{A} \times \vec{I} = (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$$

$$A_Y = \vec{A} \times \vec{J} = (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$A_Z = \vec{A} \times \vec{K} = (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \times \vec{k} = 2$$

QUINDI SI OTTIENE NELLA NUOVA BASE QUESTA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI:

$$\vec{A} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\vec{I} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}\vec{J} + 2\vec{K} \quad [84]$$

OVVIAMENTE LE [83] E [84] RAPPRESENTANO IN BASI DIVERSE (E QUINDI CON COMPONENTI DIVERSE) LO STESSO VETTORE: IL MODULO DEL VETTORE NON DIPENDE DALLA RAPPRESENTAZIONE PER COMPONENTI E DEVE FORNIRE LO STESSO VALORE PER ENTRAMBE LE RAPPRESENTAZIONI.

NEL PRIMO CASO, SI HA:

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \times \vec{A}} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} = 3{,}742$$

NEL SECONDO CASO, RISULTA

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \times \vec{A}} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{27+1+\cancel{6\sqrt{3}}}{4} + \frac{9+3-\cancel{6\sqrt{3}}}{4} + 4}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\frac{28}{4} + \frac{12}{4} + 4} = \sqrt{7+3+4} = \sqrt{14} = 3{,}742.$$

ED È COSÌ CONFERMATO CHE IL MODULO DI UN VETTORE È UNA QUANTITÀ INVARIANTE RISPETTO ALLA BASE RISPETTO ALLA QUALE IL VETTORE RISULTA ESPRESSO.