CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO PIANO VINCOLATO E DI SISTEMI DI CORPI RIGIDI PIANI SOGGETTI A VINCOLI

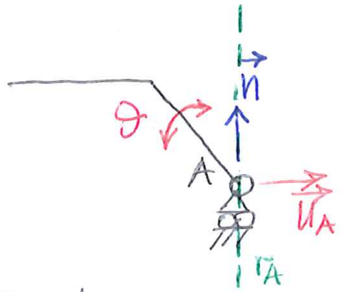
SI È FINORA STUDIATA LA CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO LIBERO: DAL PUNTO DI VISTA DELLE APPLICAZIONI PRESENTA MAGGIORE INTERESSE STUDIARE IL CASO DEL CORPO RIGIDO VINCOLATO, ANCHE ALLO SCOPO DI VALUTARE SE L'INTRODUZIONE DEI VINCOLI LASCIA LIBERE DELLE RESIDUE POSSIBILITÀ DI MOTO.

SI È GIÀ VISTO, QUANDO SI È CONSIDERATA LA STATICA DEL CORPO RIGIDO CHE I VINCOLI SONO DISPOSITIVI CHE LIMITANO LA POSSIBILITÀ DI MOTO DEI CORPI.

IN PARTICOLARE SI È VISTO CHE A SECONDA DEL NUMERO DI EQUAZIONI DI VINCOLO INDIPENDENTI CHE CORRISPONDONO A CIASCUN VINCOLO, IL CORPO VIENE AD ACQUISIRE UN CERTO NUMERO DI GRADI DI VINCOLO.

SI INIZIA A STUDIARE QUALE EFFETTO HANNO VINCOLI SEMPLICI, DOPPI E TRIPLI RISPETTO ALLA POSSIBILITÀ DI DETERMINARE IL C.I.R.

VINCOLI SEMPLICI (CORRISPONDONO A 1 GDV = 1 EQUAZIONE DI VINCOLO)



$C \in r_A$

CARRELLO: NEL PUNTO (A) DOVE È APPLICATO IMPONE CHE NON POSSONO ESSERVI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO IN DIREZIONE $\vec{n}$, PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO.

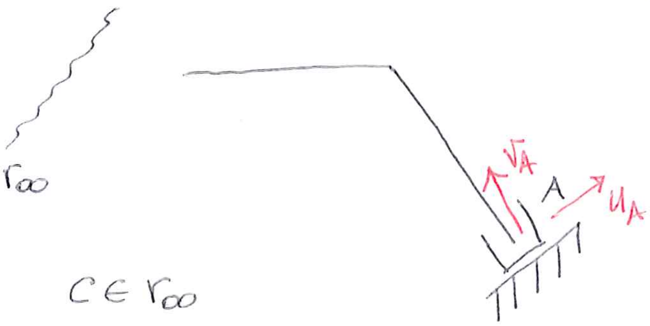
L'EQUAZIONE DI VINCOLO È: $\vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0}$

IL VINCOLO IMPONE UNA CONDIZIONE IN TERMINI DI C.I.R.: POICHÉ LO SPOSTAMENTO IN (A) È DIRETTO $\perp$ A $\vec{n}$, $C \in r_A$.

SI OSSERVI CHE QUESTA CONDIZIONE (APPARTENENZA DI C A UNA RETTA) NON È SUFFICIENTE A LOCALIZZARLO COMPIUTAMENTE.

PATTINO - MANICOTTO (INCASTRO SEMPLICE): IL VINCOLO IN (A) FISSA, BLOCCANDOLA, LA ROTAZIONE:

$\boxed{\vartheta = 0}$ È L'EQUAZIONE DI VINCOLO.



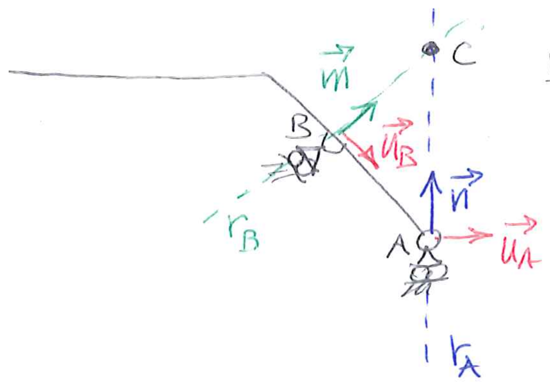
$C \in r_\infty$

VENGONO LASCIATE LIBERE TUTTE LE POSSIBILITÀ DI TRASLAZIONE (OTTENUTE COMBINANDO IN TUTTI I MODI POSSIBILI LE TRASLAZIONI SECONDO I 2 PIANI DI SCORRIMENTO MUTUAMENTE ORTOGONALI (u_A E v_A)

CONSEGUENTEMENTE IL MOTO RISULTANTE È UNA GENERICA TRASLAZIONE: $C = C_\infty$. NON È POSSIBILE UNA LOCALIZZAZIONE PIÙ PRECISA: TUTTAVIA SE SI INTRODUCE LA RETTA IMPROPRIA, r_∞, COME LUOGO DEI PUNTI IMPROPRI, ALLORA $C \in r_\infty$.

NOTA 1. NEL CASO DI VINCOLO SEMPLICE SI RICONOSCE CHE IL C.I.R. DEVE SODDISFARE UNA SOLA CONDIZIONE: SI PUÒ SOLO AFFERMARE CHE C APPARTIENE A UNA BEN PRECISA RETTA (r_A NEL PRIMO CASO; r_∞ NEL SECONDO) MA NON E' LOCALIZZABILE CON MAGGIORE PRECISIONE.
PERALTRO UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A UN VINCOLO SEMPLICE POSSIEDE 2 GDL RESIDUI, CORRISPONDENTI A 2 POSSIBILITÀ DI MOTO INDIPENDENTI (PER ESEMPIO: TRASLAZIONE PARALLELA AL PIANO DI SCORRIMENTO IN (A) E ROTAZIONE ATTORNO AD (A) NEL PRIMO CASO; 2 TRASLAZIONI INDIPENDENTI SECONDO I 2 PIANI DI SCORRIMENTO NEL SECONDO) E FINCHÉ NON SI "ASSEGNA" LA RICETTA SECONDO CUI I DUE MOTI SI COMBINANO NON E' POSSIBILE CARATTERIZZARE UNIVOCAMENTE UNA ROTO-TRASLAZIONE. □

VINCOLI DOPPI O COMBINAZIONE DI 2 VINCOLI SEMPLICI (CORRISPONDONO A 2 GDV = 2 EQUAZIONI DI VINCOLO)



DOPPIO CARRELLO: NEI PUNTI (A) E (B) DOVE SONO APPLICATI IMPONGONO CHE LO SPOSTAMENTO DEBBA ESSERE PARALLELO AL PIANO DI SCORRIMENTO: NE SEGUE CHE LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO SONO:

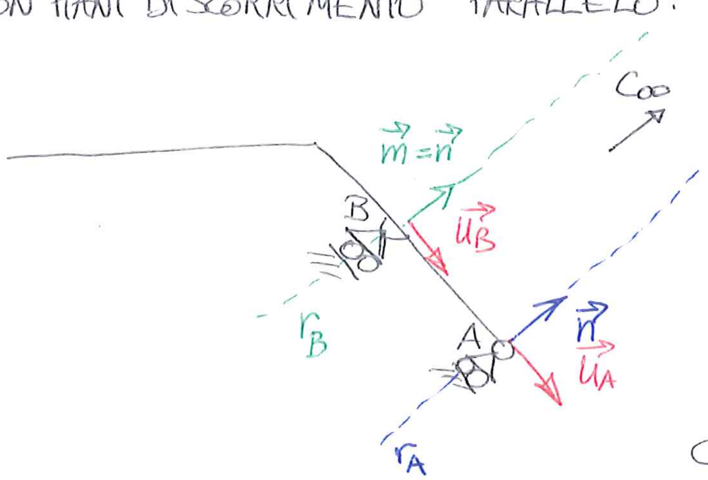
$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \vec{u}_B \times \vec{m} = \boxed{u_{Bm} = 0} \end{cases}$$

LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO IMPONGONO 2 CONDIZIONI AL C.I.R:

$C \in r_A$ PER IL VINCOLO IN (A)
$C \in r_B$ PER IL VINCOLO IN (B)
$\Rightarrow$ C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B.

C E' QUINDI COMPLETAMENTE DEFINITO IN QUESTO CASO!

COME CASO PARTICOLARE SI PUÒ CONSIDERARE QUELLO DI DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO PARALLELO:



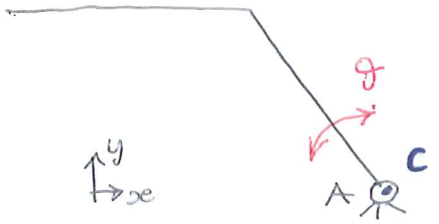
LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO SONO

$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \vec{u}_B \times \vec{n} = \boxed{u_{Bn} = 0} \end{cases}$$

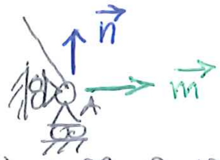
LE 2 EQ. DI VINCOLO IMPONGONO ANCORA 2 CONDIZIONI AL C.I.R:

$C \in r_A$ PER IL VINCOLO IN (A)
$C \in r_B$ PER IL VINCOLO IN (B)
$\Rightarrow$

C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B: POICHÉ SI TRATTA DI RETTE PARALLELE $C = C_\infty$ NELLA DIREZIONE INDIVIDUATA DA $\vec{n}$, ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO CONSENTITO (TRASLAZIONE)



CERNIERA: È EQUIVALENTE A UN DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO ORTOGONALI APPLICATI NEL PUNTO A:



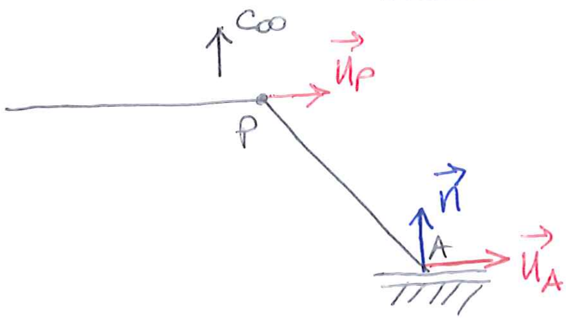
IL PUNTO A NON PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI, E CIÒ CORRISPONDE A 2 EQ. DI VINCOLO

$$\vec{u}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{u_{Ax} = 0} \\ \boxed{u_{Ay} = 0} \end{cases} \qquad [I]$$

NEL CASO DEL DOPPIO CARRELLO SI AVREBBE, IN ANALOGIA CON QUANTO APPENA VISTO: $u_{Am} = 0$ E $u_{An} = 0$; MA SE LE DIREZIONI $\vec{m}$ E $\vec{n}$ COINCIDONO CON GLI ASSI X E Y SI RITROVANO LE [I].

ESSE GARANTISCONO CHE IL PUNTO A NON SUBISCA ALCUNO SPOSTAMENTO:

NE SEGUE DUNQUE $\underline{C \equiv A}$.



PATTINO: È EQUIVALENTE ALLA COMBINAZIONE DI 2 VINCOLI SEMPLICI, CARRELLO E PATTINO-MANICOTTO OPPORTUNAMENTE COLLEGATI

IL PUNTO A PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI SOLO PARALLELI AL PIANO DI SCORRIMENTO E LE ROTAZIONI SONO BLOCCATE: CIÒ CORRISPONDE A QUESTE 2 EQ. DI VINCOLO:

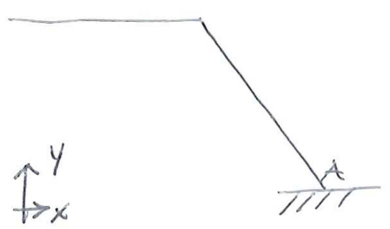
$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \boxed{\vartheta = 0} \end{cases}$$

QUALUNQUE ALTRO PUNTO DEL CORPO RIGIDO, PER ESEMPIO P AVRÀ UNO SPOSTAMENTO $\vec{u}_P = \vec{u}_A$. PERTANTO IL VINCOLO CONSENTE AL CORPO RIGIDO UNA SOLA TRASLAZIONE: $\underline{C = C_\infty}$. LA DIREZIONE È QUELLA INDIVIDUATA DA $\vec{n}$, $\perp$ ALLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO CONSENTITO.

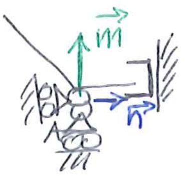
<u>NOTA 2</u> NEL CASO DI VINCOLO DOPPIO SI È VISTO CHE IL C.I.R. È COMPLETAMENTE DETERMINATO.

UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A UN VINCOLO DOPPIO (O A 2 VINCOLI SEMPLICI) POSSIEDE 1 GDL RESIDUO, CORRISPONDENTE IN GENERALE A UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA, PER LA QUALE È SEMPRE DEFINITO IL C.I.R. □

VINCOLI TRIPLI (CORRISPONDONO A 3GDV = 3EQUAZIONI DI VINCOLO)



INCASTRO: È EQUIVALENTE A UN DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO ORTOGONALI ABBINATO A UN PATTINO MANICOTTO, TUTTI APPLICATI NEL PUNTO (A):



PER IL DOPPIO CARRELLO È:

$u_{An} = 0$

$u_{Am} = 0$

PER IL PATTINO MANICOTTO È

$\vartheta = 0$.

EQUIVALENTI ALLE [2]

IL PUNTO (A) NON PUÒ SUBIRE NÉ SPOSTAMENTI NÉ ROTAZIONI: LE EQUAZIONI DI VINCOLO SONO ALLORA LE SEGUENTI:

$$\begin{cases} \vec{u}_A = \vec{0} \quad \begin{cases} \boxed{u_{Ax} = 0} \\ \boxed{u_{Ay} = 0} \end{cases} \quad [2] \\ \boxed{\vartheta = 0} \end{cases}$$

POICHÉ $\vec{u}_A = \vec{0}$ E $\vec{\omega} = \vec{0}$ (VISTO CHE $|\vec{\omega}| = \|\varphi\|$) L'UNICO MOTO RIGIDO POSSIBILE È QUELLO NULLO:

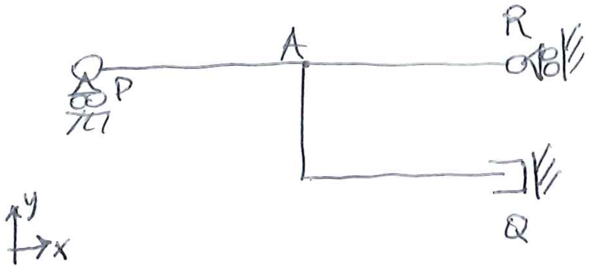
$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{P-A}) = \vec{0}.$$

NE SEGUE CHE NON È POSSIBILE DETERMINARE UN C.I.R.: NON SONO POSSIBILI MOTI.

NOTA 3 NEL CASO DI VINCOLO TRIPLO UN CORPO RIGIDO POSSIEDE 0 G.D.L. RESIDUI E QUINDI NON SONO POSSIBILI MOTI.
NEL CASO CHE I VINCOLI PRESENTI DIANO LUOGO A 3G.D.V. MASSIMO RELATIVI A PUNTI DIVERSI OCCORRE ACCERTARE CHE I VINCOLI COOPERINO EFFICACEMENTE ALLA SOPPRESSIONE DEI MOTI RIGIDI, POICHÉ QUESTO NON È GARANTITO A PRIORI.
OCCORRE EFFETTUARE UNO STUDIO NOTO COME ANALISI CINEMATICA, CONSISTENTE NEL DETERMINARE EVENTUALI SOLUZIONI NON NULLE DEL PROBLEMA CINEMATICO PER IL CORPO RIGIDO VINCOLATO. □

PROBLEMA CINEMATICO DI UN CORPO RIGIDO VINCOLATO.

SI CONSIDERI UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A N VINCOLI SEMPLICI (NEL CASO DI VINCOLI DOPPI O TRIPLI, SI È VISTO COME TRASFORMARLI IN PIÙ VINCOLI SEMPLICI APPLICATI NELLO STESSO PUNTO.



PRESO UN PUNTO ARBITRARIO (PER ESEMPIO IL PUNTO (A)) SI ESPRIMONO GLI SPOSTAMENTI DEI PUNTI VINCOLATI (P), (Q), (R), ECC.) IN FUNZIONE DELLO SPOSTAMENTO DI (A), $\vec{u}_A$ E DELLA ROTAZIONE ϑ DEL CORPO MEDIANTE L'ESPRESSIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA:

$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (P-A)$$
$$\vec{u}_Q = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-A})$$
$$\vec{u}_R = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{R-A})$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

DOVE, AL SOLITO, $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$ E, PER COMPONENTI

$$u_{Px} = u_{Ax} - \vartheta (y_P - y_A)$$
$$u_{Py} = u_{Ay} + \vartheta (x_P - x_A)$$

A QUESTO PUNTO SI IMPONGONO LE EQUAZIONI SCALARI DI VINCOLO:

$$\begin{cases} u_{Py} = 0 \\ \vartheta_Q = 0 \\ u_{Rx} = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{Py} = u_{Ay} + \vartheta (x_P - x_A) = 0 \\ \vartheta_Q = \vartheta = 0 \\ u_{Rx} = u_{Ax} - \vartheta (y_R - y_A) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

E CIÒ DA LUOGO A UN SISTEMA DI N EQUAZIONI LINEARI, OMOGENEO PERCHÉ I VINCOLI SONO PERFETTI (NON DANNO LUOGO A CEDIMENTI) NELLE 3 INCOGNITE u_{Ax}, u_{Ay}, ϑ.
IN TERMINI MATRICIALI SI PUÒ SCRIVERE, INTRODUCENDO LA MATRICE CINEMATICA $[C]_{N\times3}$ DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE E I VETTORI COLONNA $\{\underline{v}\}_{3\times1}$ CHE CONTIENE LE INCOGNITE E $\{\underline{0}\}_{N\times1}$ CHE CONTIENE I TERMINI NOTI, TUTTI NULLI, STANTE LA NATURA OMOGENEA DEL SISTEMA:

$$[C]_{(N,3)} \{\underline{v}\}_{(3,1)} = \{\underline{0}\}_{(N,1)} \qquad \boxed{3}$$

IL SISTEMA $\boxed{3}$ AMMETTE SEMPRE LA SOLUZIONE (BANALE) NULLA: $\{\underline{v}\}_{3,1} = \{\underline{0}\}_{3,1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
CHE CORRISPONDE A $u_{Ax} = 0$; $u_{Ay} = 0$; $\vartheta = 0$
CIÒ COMPORTA CHE LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO A SIA NULLO $\vec{u}_A = \vec{0}$ E CHE SI ANNULLI ANCHE LA ROTAZIONE $\vartheta = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$.
DI CONSEGUENZA LA SOLUZIONE BANALE CORRISPONDE ALLA IMPOSSIBILITÀ DI MOTO RIGIDO E QUINDI AL FATTO CHE I VINCOLI SIANO DISPOSTI IN MODO TALE DA INIBIRE OGNI SPOSTAMENTO/ROTAZIONE, RENDENDO IMMOBILE IL CORPO RIGIDO.
OCCORRE TUTTAVIA VALUTARE SE ESISTONO ALTRE SOLUZIONI OLTRE A QUELLA BANALE, CARATTERIZZATE DA $\{v\} \neq \{\underline{0}\}$.

LA TEORIA DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI OMOGENEI GARANTISCE, APPLICANDOLA AL CASO IN ESAME (PER IL QUALE LA MATRICE $[C]$ NON CAMBIA RANGO SE VIENE "ORLATA" DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI) CHE:

- SE RANGO$([C]) = 3$ (CIOÈ SE DA $[C]$ SI PUÒ ESTRARRE UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO)
  $\Rightarrow$ ESISTE SOLO LA SOLUZIONE BANALE $\{\underline{v}\} = \{\underline{0}\}$
  IL CORPO È GEOMETRICAMENTE <u>DETERMINATO</u> (NON LABILE) E SI MANTIENE IMMOBILE
- SE RANGO$([C]) < 3$ (CIOÈ SE DA $[C]$ NON SI PUÒ ESTRARRE UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO)

$\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE (ALMENO) UNA SOLUZIONE NON BANALE, CIOÈ $\{\underline{v}\} \neq \{\underline{0}\}$

IL CORPO È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO (LABILE) E SUSSISTONO, NONOSTANTE I VINCOLI, POSSIBILITÀ DI MOTO.

SI HANNO I SEGUENTI COROLLARI (PER IL SINGOLO CORPO RIGIDO):

1. CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN CORPO RIGIDO RISULTI CINEMATICAMENTE INDETERMINATO (LABILE) È CHE IL GRADO DI VINCOLO N (CORRISPONDENTE AL NUMERO DI VINCOLI SEMPLICI EQUIVALENTI) SIA INFERIORE AL NUMERO DI G.D.L.: $N < 3$.
   IN TAL CASO INFATTI $[\mathcal{C}]$ HA UN NUMERO N DI RIGHE < 3 E RISULTA RANGO $([\mathcal{C}]) < 3 \Rightarrow$ ESISTONO POSSIBILITÀ DI MOTO
2. CONDIZIONE NECESSARIA (MA NON SUFFICIENTE) AFFINCHÉ UN CORPO RIGIDO RISULTI CINEMATICAMENTE DETERMINATO (NON LABILE) È CHE IL NUMERO N DI VINCOLI SEMPLICI EQUIVALENTI (CIOÈ IL GRADO DI VINCOLO) SIA MAGGIORE O EGUALE AL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ: $N \geq 3$.
   IN TAL CASO INFATTI $[\mathcal{C}]$ HA UN NUMERO DI RIGHE ≥ 3, SICCHÉ È POSSIBILE (MA NON È GARANTITO!) CHE ESISTA UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO: IN TAL CASO RANGO $([\mathcal{C}]) = 3 \Rightarrow$ NON ESISTONO POSSIBILITÀ DI MOTO.

SI PUÒ ESTENDERE IL PROBLEMA CINEMATICO A STRUTTURE COSTITUITE DA M CORPI RIGIDI. CIASCUN CORPO RIGIDO HA (NEL CASO PIANO) 3 GDL, CIOÈ 3 COMPONENTI INDIPENDENTI DI MOTO.
SI HA PERTANTO CHE IL PROBLEMA HA 3M GRADI DI LIBERTÀ TOTALI, OVVERO 3M INCOGNITE CINEMATICHE, E IL SISTEMA RISOLVENTE DIVIENE, IN FORMA MATRICIALE:

$$[\mathcal{C}]_{N\times 3M}\{\underline{v}\}_{3M\times 1} = \{\underline{0}\}_{N\times 1} \quad \text{CON} \quad \{\underline{v}\} = \begin{Bmatrix} u_{Ax}^{(1)} \\ u_{Ay}^{(1)} \\ \vartheta^{(1)} \\ u_{Bx}^{(2)} \\ u_{By}^{(2)} \\ \vartheta^{(2)} \\ \vdots \\ u_{Zx}^{(M)} \\ u_{Zy}^{(M)} \\ \vartheta^{(M)} \end{Bmatrix}$$

DOVE (A) È UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (1), (B) UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (2), ..., (Z) UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (M).

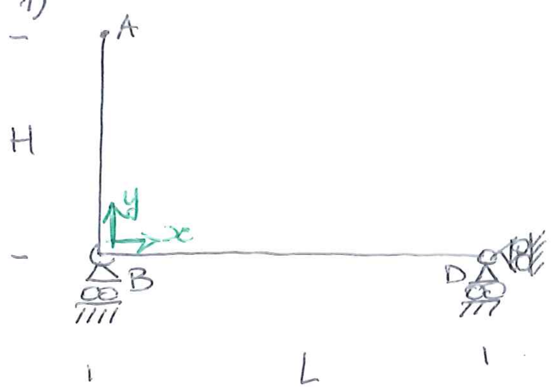
IN QUESTO CASO SI TROVA CHE:

SE RANGO $([\mathcal{C}]) = 3M$ ESISTE SOLO LA SOLUZIONE BANALE: LA STRUTTURA RISULTA GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE) E NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI.

SE RANGO $([\mathcal{C}]) < 3M$ ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE NON BANALE: LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATA (LABILE) E SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI.

ESEMPI DI RISOLUZIONE DEL PROBLEMA CINEMATICO.

1)



1 CORPO RIGIDO = 3GDL $(M=1)$

3 VINCOLI SEMPLICI = 3GDV $(N=3)$

PRESO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE NEL PUNTO (B), LE COORDINATE DEI PUNTI SIGNIFICATIVI RISULTANO:

$(A) = (0, H)$; $(B) = (0,0)$; $(D) = (L, 0)$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO SONO: $u_{By} = 0$; $u_{Dx} = 0$; $u_{Dy} = 0$.
SE SI ASSUMONO COME VARIABILI CINEMATICHE $\vec{u}_A$ e ϑ, SI HA CHE LE INCOGNITE DEL PROBLEMA SONO: u_{Ax}, u_{Ay}, ϑ.
PER IL GENERICO PUNTO (P) SI HA:

$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (P-A) \quad [4]$$

OVVERO, PER COMPONENTI:

$$\begin{cases} u_{Px} = u_{Ax} - \vartheta (y_P - y_A) \\ u_{Py} = u_{Ay} + \vartheta (x_P - x_A) \end{cases}$$

SI TROVA DUNQUE PER u_{By}; u_{Dx}; u_{Dy}:

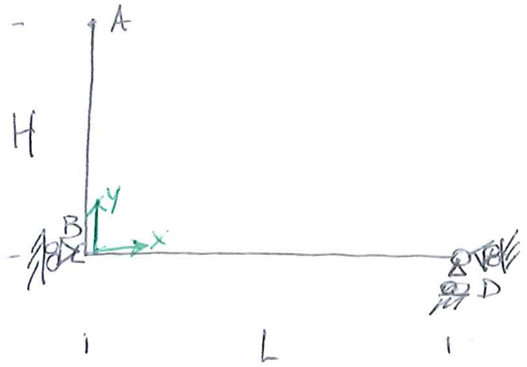
$$\begin{cases} u_{By} = 0 \Rightarrow u_{By} = u_{Ay} + \vartheta (x_B - x_A) = u_{Ay} + \vartheta \cdot 0 = 0 \\ u_{Dx} = 0 \Rightarrow u_{Dx} = u_{Ax} - \vartheta (y_D - y_A) = u_{Ax} - \vartheta (0 - H) = 0 \\ u_{Dy} = 0 \Rightarrow u_{Dy} = u_{Ay} + \vartheta (x_D - x_A) = u_{Ay} + \vartheta (L - 0) = 0 \end{cases}$$

PERTANTO IL SISTEMA DIVIENE:

$$\begin{cases} u_{Ay} = 0 \\ u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ay} + \vartheta L = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & H \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix}_{(3,3)}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{v\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{0\}}$$

SI VEDE CHE $\det([C]) = (-1) \cdot L = -L \neq 0$ E QUINDI SI CONCLUDE CHE RANGO $([C]) = 3$.
NE SEGUE CHE L'UNICA SOLUZIONE POSSIBILE È QUELLA BANALE, $\{v\} = \{0\}$ CIOÈ $u_{Ax} = 0$, $u_{Ay} = 0$, $\vartheta = 0$ IL CHE COMPORTA $\vec{u}_A = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k} = \vec{0}$.
E DUNQUE NE CONSEGUE, PER LA [4] $\vec{u}_P = \vec{0}$ PER OGNI PUNTO (P) DEL CORPO RIGIDO. NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI QUINDI IL CORPO RIGIDO È GEOMETRICAMENTE DETERMINATO (NON LABILE) COME SE FOSSE BLOCCATO DA UN UNICO VINCOLO TRIPLO.

2)



1 CORPO RIGIDO = 3GDL $(M=1)$

3 VINCOLI SEMPLICI = 3GDV $(N=3)$

RISPETTO AL CASO PRECEDENTE È CAMBIATO (DA ORIZZONTALE A VERTICALE) IL PIANO DI SCORRIMENTO DEL VINCOLO IN Ⓑ.

LE COORDINATE DEI PUNTI SIGNIFICATIVI SONO ANCORA:

$A = (0, H)$; $B = (0,0)$; $D = (L,0)$.

LE CONDIZIONI DI VINCOLO SONO QUESTA VOLTA: $u_{Bx}=0$; $u_{Dx}=0$; $u_{Dy}=0$.

SE SI ASSUMONO ANCORA COME VARIABILI CINEMATICHE $\vec{u}_A$ E ϑ, LE INCOGNITE DEL PROBLEMA $u_{Ax}, u_{Ay}, \vartheta$.

IN BASE ALLA [4] SI TROVA, PER u_{Bx}, u_{Dx}, u_{Dy}:

$$\begin{cases} u_{Bx}=0 & \Rightarrow \quad u_{Bx} = u_{Ax} - \vartheta(y_B - y_A) = u_{Ax} - \vartheta(-H) = 0 \\ u_{Dx}=0 & \Rightarrow \quad u_{Dx} = u_{Ax} - \vartheta(y_D - y_A) = u_{Ax} - \vartheta(-H) = 0 \\ u_{Dy}=0 & \Rightarrow \quad u_{Dy} = u_{Ay} + \vartheta(x_D - x_A) = u_{Ay} + \vartheta(L) = 0 \end{cases}$$

E IL SISTEMA DIVIENE:

$$\begin{cases} u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ay} + \vartheta L = 0 \end{cases} \quad [5] \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & H \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix}_{(3,3)}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{v\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{0\}}$$

SI VEDE IMMEDIATAMENTE CHE $[C]$ HA 2 RIGHE EGUALI, DUNQUE LINEARMENTE DIPENDENTI: DI CONSEGUENZA $\det[C] = 0$ E QUINDI SI CONCLUDE CHE RANGO$([C]) < 3$.

UN ESAME DI $[C]$ RIVELA CHE È POSSIBILE ESTRARRE DA $[C]$ ALMENO UNA SOTTOMATRICE 2x2 CON DETERMINANTE $\neq 0$, DUNQUE UN MINORE DI ORDINE 2. CIÒ PORTA A CONCLUDERE CHE RANGO$([C]) = 2$.

CIÒ COMPORTA CHE ESISTA UNA SOLUZIONE NON BANALE, $\{v\} \neq \{0\}$ E DUNQUE IL CORPO È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO (OVVERO LABILE): SONO DUNQUE POSSIBILI MOTI RIGIDI.

PER INDIVIDUARE COME È FATTO IL MOTO RIGIDO NON IMPEDITO DAI VINCOLI CHE SAREBBERO IN NUMERO SUFFICIENTE A CONTRASTARE OGNI MOTO RIGIDO, SE FOSSERO BEN DISPOSTI, SI PROCEDE A RISOLVERE IL SISTEMA [5] SCARTANDO LA PRIMA EQUAZIONE, CHE È UNA RIPETIZIONE DELLA SECONDA, E PONENDO $\vartheta = k$ (PARAMETRO). SI TROVA ALLORA:

$$\begin{cases} u_{Ax} = -kH \\ u_{Ay} = -kL \\ \vartheta = k \end{cases} \quad [5']$$

SI VEDE QUINDI CHE LA SOLUZIONE NON BANALE È DATA DA

$$\{\underline{V}\} = \begin{Bmatrix} -kH \\ -kL \\ k \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} -H \\ -L \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad [6]$$

ED È DEFINITA, COME SEMPRE SUCCEDE NEI SISTEMI INDETERMINATI, A MENO DI UNA COSTANTE, CIOÈ A MENO DEL PARAMETRO k.

IL FATTO CHE $\{\underline{V}\} \neq \{\underline{0}\}$ INDICA CHE IL CORPO RIGIDO PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI DI AMPIEZZA ARBITRARIA (MA PUR SEMPRE INFINITESIMA) INDIVIDUATI DALLA [6]. DA QUESTA OVVIAMENTE PER $k = 0$ SI RITROVA LA SOLUZIONE BANALE, MENTRE PER $k \neq 0$ E QUALSIASI SI OTTIENE UN MOTO RIGIDO INFINITESIMO E COMPATIBILE CON I VINCOLI.

A QUESTO PUNTO SI PUÒ TROVARE IL C.I.R. C, CIOÈ IL PUNTO ATTORNO AL QUALE IL CORPO RIGIDO RUOTA.

RICORDANDO CHE PER DEFINIZIONE DI C.I.R. È $\vec{u}_c = \vec{0}$, CIOÈ $u_{cx} = 0$ E $u_{cy} = 0$

DALLA [4] RISCRITTA PER $P \equiv C$:

$$\vec{0} = \vec{u}_C = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) \Rightarrow \begin{cases} u_{cx} = 0 = u_{Ax} - \vartheta(y_c - y_A) \\ u_{cy} = 0 = u_{Ay} + \vartheta(x_c - x_A) \end{cases} \qquad [7]$$

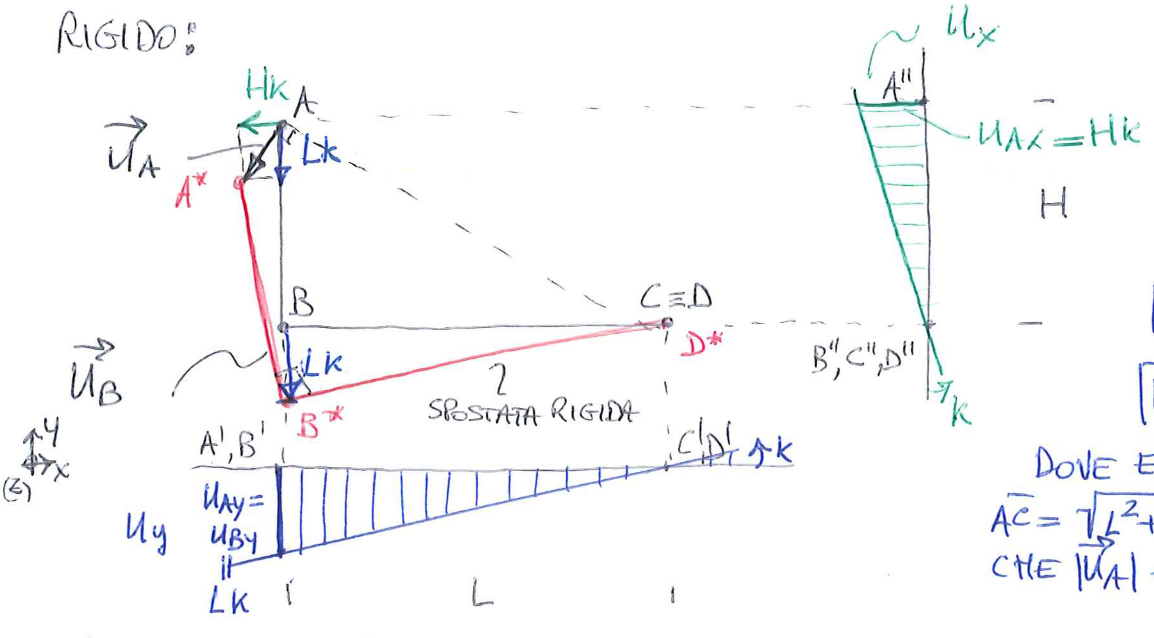
E SOSTITUENDO $u_{Ax} = -kH$; $u_{Ay} = -kL$; $\vartheta = k$ E RICORDANDO CHE $C = (x_c, y_c)$

SI OTTIENE, DATO CHE $x_A = 0$; $y_A = +H$:

$$\begin{cases} -\cancel{k}H - \cancel{k}(y_c - H) = 0 \\ -\cancel{k}L + \cancel{k}(x_c - 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{H} + y_c - \cancel{H} = 0 \\ -L + x_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = +L \\ y_c = 0 \end{cases}$$

DUNQUE C $= (+L, 0)$ E SI TROVA C $\equiv$ D.

DA QUI MEDIANTE I DIAGRAMMI DEGLI SPOSTAMENTI SI PUÒ DETERMINARE LA "SPOSTATA RIGIDA" DELLA TRAVE, CIOÈ LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL CAMPO DI MOTO RIGIDO:



SI NOTI CHE

$|\vec{u}_B| = Lk$

$|\vec{u}_A| = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Ay}^2}$

$|\vec{u}_A| = \sqrt{(H^2 + L^2)k^2}$

$|\vec{u}_A| = k\sqrt{H^2 + L^2}$

DOVE È ANCHE $|\vec{A - C}| = \overline{AC}$

$\overline{AC} = \sqrt{L^2 + k^2}$, SICCHÉ SI VERIFICA CHE $|\vec{u}_A| = k\,\overline{AC}$.

TRACCIANDO A PARTIRE DALLE 2 RETTE FONDAMENTALI 2 RETTE INCLINATE DI UN ANGOLO k (ANTIORARIO, IN QUESTO CASO) A PARTIRE DALLE IMMAGINI DEL PUNTO C, C' E C'' SI COSTRUISCONO I DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_y E u_x PER TUTTI I PUNTI DELLA STRUTTURA.

NOTI QUESTI, SE SI RIPORTANO I VALORI DEGLI SPOSTAMENTI OTTENUTI COMBINANDO LE COMPONENTI X E Y NEI PUNTI SIGNIFICATIVI, IN QUESTO CASO I PUNTI (A), (B), (D), SI PUÒ VISUALIZZARE IL MODO IN CUI LA STRUTTURA SI SPOSTA.

SE POI SI COLLEGANO I PUNTI SIGNIFICATIVI NELLA LORO POSIZIONE "SPOSTATA" SI DETERMINA LA SPOSTATA RIGIDA DELLA STRUTTURA.

NEL CASO IN ESAME (D) ≡ (C) E NON SUBISCE ALCUNO SPOSTAMENTO; (B) HA LA STESSA PROIEZIONE SULLA RETTA VERTICALE DEL PUNTO (C) E QUINDI $u_{Bx} = 0$ (CIOÈ HA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO ORIZZONTALE NULLO), MENTRE LA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO VERTICALE (ORIENTATA VERSO IL BASSO) $u_{By} = -Lk$ È EGUALE A QUELLA DEL PUNTO (A), VISTO CHE LE LORO IMMAGINI, PROIETTATE SULLA RETTA FONDAMENTALE B' E A' COINCIDONO: DUNQUE $u_{Ay} = -Lk$.

PER QUANTO RIGUARDA LE COMPONENTI ORIZZONTALI, L'UNICO PUNTO SIGNIFICATIVO CHE SI SPOSTA IN DIREZIONE ORIZZONTALE È IL PUNTO (A), LA CUI IMMAGINE, PROIETTATA SULLA RETTA FONDAMENTALE VERTICALE, A'' DISTA H DALLA IMMAGINE DEL PUNTO (C). DUNQUE LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DI (A), NEGATIVO SE LA ROTAZIONE $\vartheta = k$ È ANTIORARIA, COME SI È ASSUNTO, VALE $u_{Ax} = -Hk$.

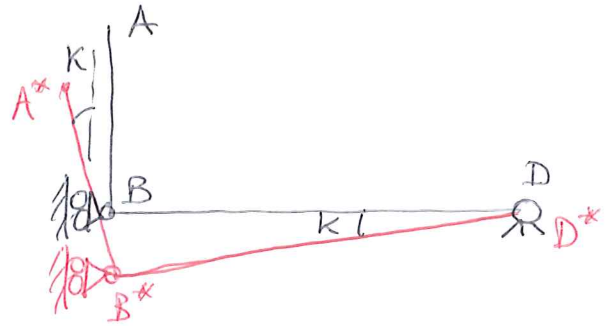
SOMMANDO AD (A) IL SUO SPOSTAMENTO $\vec{u}_A$ SE NE OTTIENE LA NUOVA POSIZIONE, A^*; ANALOGAMENTE SE SI SOMMA AL PUNTO (B) LO SPOSTAMENTO CHE SUBISCE, $\vec{u}_B$, SI OTTIENE LA NUOVA POSIZIONE, B^*; IL PUNTO (D) COINCIDE CON IL C.I.R. E DUNQUE $\vec{u}_D = 0$, SICCHÉ LA NUOVA POSIZIONE $D^* \equiv$ (D).

UNENDO I PUNTI "SPOSTATI", D^*, B^*, A^* SI OTTIENE LA SPOSTATA RIGIDA DELLA TRAVE.

SI NOTI CHE A MENO DI INEVITABILI ERRORI DI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA (CIÒ CHE SI RAPPRESENTA DOVREBBE ESSERE UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO, CHE VIENE PERÒ RAFFIGURATO COME UNO SPOSTAMENTO FINITO, ANCORCHÉ DI AMPIEZZA "PICCOLA") SI TROVA CHE:

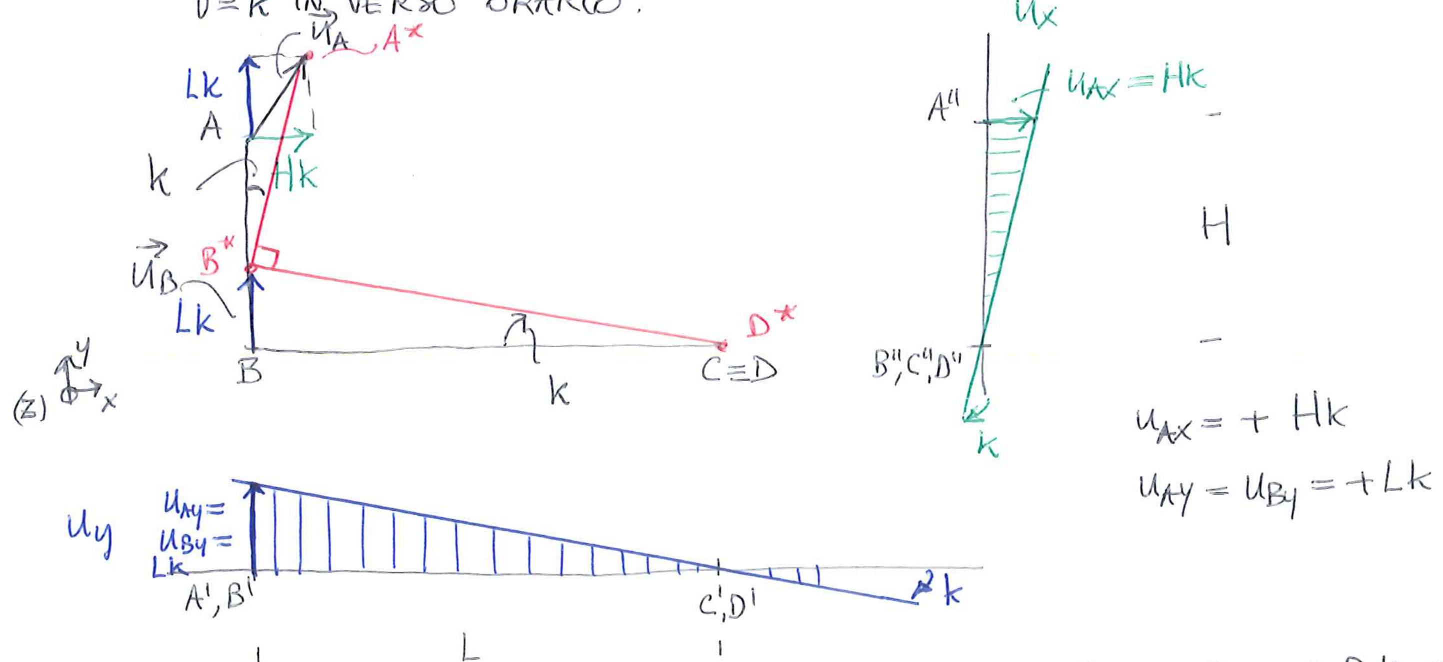
- L'ANGOLO RETTO FRA IL TRATTO AB E BD SI CONSERVA RETTO A SPOSTAMENTO AVVENUTO: I DUE TRATTI RIGIDI NON SI POSSONO "PIEGARE".
- IL PUNTO (A) E IL PUNTO (B) DEBBONO AVERE IL <u>MEDESIMO</u> SPOSTAMENTO VERTICALE PER NON VIOLARE L'IPOTESI DI RIGIDITÀ.
- PER LO STESSO MOTIVO, VISTO CHE IL PUNTO (D) NON SI SPOSTA NÉ VERTICALMENTE NÉ ORIZZONTALMENTE IL PUNTO (B) NON PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI ORIZZONTALI.
- LO SPOSTAMENTO DI OGNI PUNTO <u>DEVE</u> ESSERE ⊥ ALLA CONGIUNGENTE IL PUNTO STESSO CON IL C.I.R.: $\vec{u}_A$ È ⊥ AL VETTORE $(\overrightarrow{A-C}) = (\overrightarrow{A-D})$ E $\vec{u}_B$ È ⊥ AL VETTORE $(\overrightarrow{B-C}) = (\overrightarrow{B-D})$.
- GLOBALMENTE ENTRAMBI I TRATTI RUOTANO DI UN ANGOLO K, ANTIORARIO

SE SI TIENE CONTO DI COME SONO DISPOSTI I VINCOLI, SI VEDE CHE IL MOTO ORA EVIDENZIATO È PERFETTAMENTE COMPATIBILE CON ESSI, A RIPROVA DEL FATTO CHE QUESTI NON SONO DISPOSTI IN MODO EFFICACE A IMPEDIRE I MOTI RIGIDI DEL CORPO, PUR ESSENDO IN NUMERO SUFFICIENTE (SE FOSSERO DISPOSTI CORRETTAMENTE) A RENDERLO "IMMOBILE".



NOTA 4. PER COSTRUIRE LA SPOSTATA RIGIDA È IRRILEVANTE ASSUMERE CHE IL VERSO DELLA ROTAZIONE ATTORNO AL C.I.R. (C) SIA ANTIORARIO OVVERO ORARIO, PURCHÉ I VERSI DELLA ROTAZIONE SIANO COERENTI NEI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO. QUINDI SE RISPETTO ALLA RETTA FONDAMENTALE ORIZZONTALE SI ASSUME UNA ROTAZIONE ORARIA (ANTIORARIA) RISPETTO A (C'), ALLORA ANCHE PER LA RETTA FONDAMENTALE VERTICALE LA ROTAZIONE RISPETTO A (C'') DEVE AVVENIRE IN SENSO ORARIO (ANTIORARIO).

NEL SEGUITO SI ILLUSTRA LA COSTRUZIONE DELLA SPOSTATA RIGIDA PER LA MEDESIMA STRUTTURA DI PAG. 9 ASSUMENDO UNA ROTAZIONE $\vartheta = k$ IN VERSO ORARIO.



$u_{Ax} = +Hk$

$u_{Ay} = u_{By} = +Lk$

PASSANDO DA ROTAZIONE ANTIORARIA A ROTAZIONE ORARIA SI OSSERVA CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO CAMBIANO ORDINATAMENTE DI SEGNO; TUTTAVIA I RAPPORTI FRA LE COMPONENTI RESTANO INVARIATI.

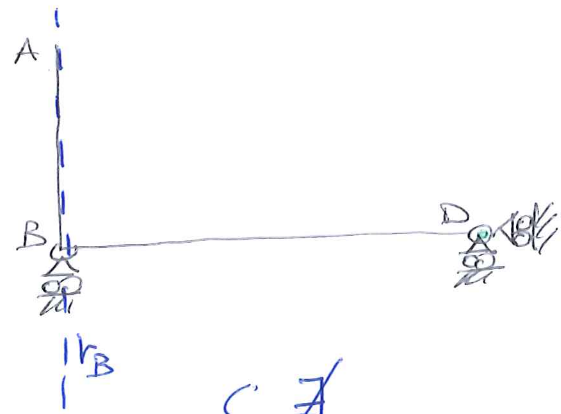
NEL CASO PRECEDENTE IL RAPPORTO $\dfrac{u_{Ay}}{u_{Ax}} = \dfrac{-Lk}{-Hk} = \dfrac{L}{H}$; NEL CASO PRESENTE È INVECE $\dfrac{u_{Ay}}{u_{Ax}} = \dfrac{+Lk}{+Hk} = \dfrac{L}{H}$ □.

IL PROBLEMA CINEMATICO PER IL CORPO RIGIDO VINCOLATO (O ANALISI CINEMATICA) PUÒ ESSERE AFFRONTATO OLTRE CHE CON L'APPROCCIO ANALITICO ORA ESAMINATO ANCHE CON UN METODO GRAFICO, PIÙ RAPIDO.

NELLA LOGICA DEL METODO GRAFICO SI VALUTANO LE CONDIZIONI IMPOSTE DAI VINCOLI AL C.I.R. C DEL CORPO RIGIDO: SE LE CONDIZIONI COSÌ INDIVIDUATE PORTANO A RISULTATI CONTRADDITORI, SI GIUNGE ALLA CONCLUSIONE CHE NON È POSSIBILE DETERMINARE UN C.I.R. CHE SODDISFI TUTTE LE CONDIZIONI CINEMATICHE PRESENTI E DUNQUE IL CORPO RIGIDO DEVE MANTENERSI IMMOBILE: IN QUESTA SITUAZIONE I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI, NON CI SONO LABILITÀ E IL CORPO RIGIDO È GEOMETRICAMENTE DETERMINATO.

SE INVECE LE CONDIZIONI IMPOSTE DA TUTTI I VINCOLI PRESENTI SONO COMPATIBILI CON LA PRESENZA DI UN C.I.R. SI È NELLA SITUAZIONE IN CUI IL CORPO RIGIDO È LABILE (GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO) E SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI RICONDUCIBILI AL C.I.R. APPENA INDIVIDUATO.

COSÌ, PER LA STRUTTURA 1) GIÀ STUDIATA CON IL METODO ANALITICO VALGONO QUESTE CONSIDERAZIONI:



$C \nexists$

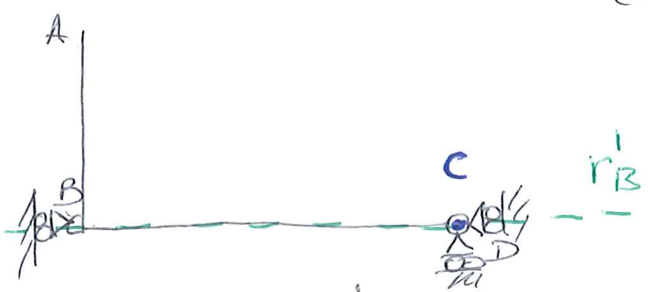
(a) IL CARRELLO IN (B) RICHIEDE CHE IL C.I.R. APPARTENGA ALLA RETTA r_B, $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO:

$C \in r_B$ [+]

(b) IL DOPPIO CARRELLO (EQUIVALENTE A UNA CERNIERA) IN (D) RICHIEDE CHE IL C.I.R. SIA COLLOCATO IN (D) : $C \equiv D$ [++]

CHIARAMENTE $D \notin r_B$ E QUINDI LE 2 CONDIZIONI CINEMATICHE [+], [++] DI ESISTENZA DEL C.I.R. SONO INCONCILIABILI: PERTANTO $\nexists$ C.I.R. NE SEGUE CHE LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE) E NON È SUSCETTIBILE DI SUBIRE SPOSTAMENTI.

INVECE PER LA STRUTTURA 2), GIÀ STUDIATA ANCHE ESSA CON IL METODO ANALITICO VALGONO QUESTE CONSIDERAZIONI:



(a) IL CARRELLO IN (B) RICHIEDE CHE IL C.I.R. APPARTENGA ALLA RETTA r'_B $\perp$ AL (DIVERSO) PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO:

$C \in r'_B$ [•]

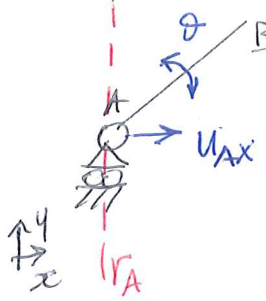
(b) IL DOPPIO CARRELLO (CERNIERA) IN (D) RICHIEDE CHE IL C.I.R. SIA COLLOCATO IN (D):

$C \equiv D$ [••]

QUESTA VOLTA, PERÒ, LE DUE CONDIZIONI CINEMATICHE [•], [••] SONO CONCILIABILI (COMPATIBILI) VISTO CHE $D \in r'_B$: NE SEGUE $C \equiv D$ E LA STRUTTURA, LABILE, È SUSCETTIBILE DI SUBIRE MOTI RIGIDI.

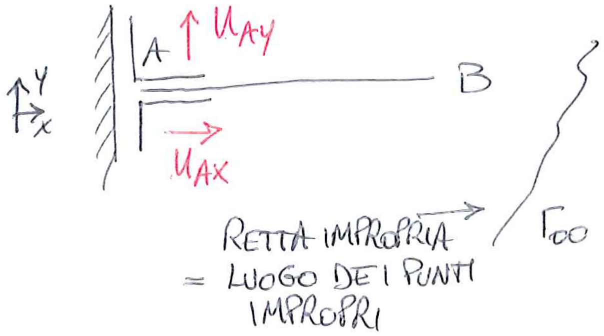
CON LO STESSO APPROCCIO GRAFICO SI CONSIDERANO STRUTTURE CON DIFFERENTE G.D.V.

A) GDV = 1 $\Rightarrow$ STRUTTURE 2 VOLTE IPOSTATICHE:



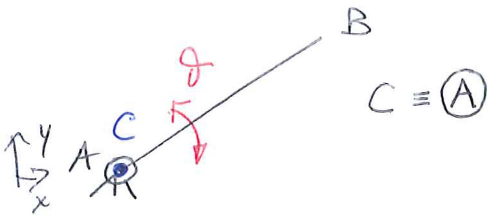
IL VINCOLO IN (A) RICHIEDE CHE SIA: $C \in r_A$ (RETTA $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO)

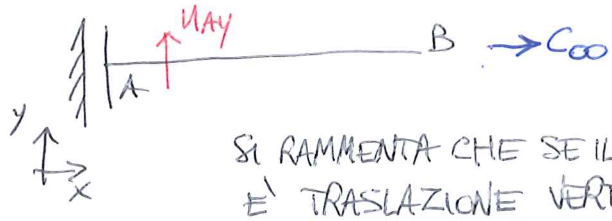
LA CONDIZIONE PUÒ ESSERE SODDISFATTA E QUINDI C.I.R. $\exists$; TUTTAVIA LA POSIZIONE SU r_A NON È DETERMINABILE IN QUANTO IL MOTO RIGIDO HA 2 G.D.L. (u_{Ax} E ϑ), INDIPENDENTI



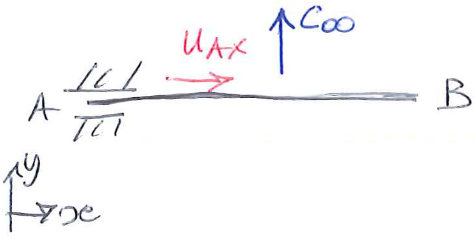
IL VINCOLO IN (A) RICHIEDE CHE C.I.R. SIA C_∞ (PUNTO IMPROPRIO): $C_\infty \in r_\infty$
LA CONDIZIONE PUÒ ESSERE SODDISFATTA E QUINDI C.I.R. $\exists$; TUTTAVIA LA POSIZIONE SU r_∞ NON È DETERMINABILE IN QUANTO IL MOTO RIGIDO HA 2 G.D.L. (u_{Ax} E u_{Ay}), INDIPENDENTI.

B) GDV = 2 $\Rightarrow$ STRUTTURE 1 VOLTA IPOSTATICHE

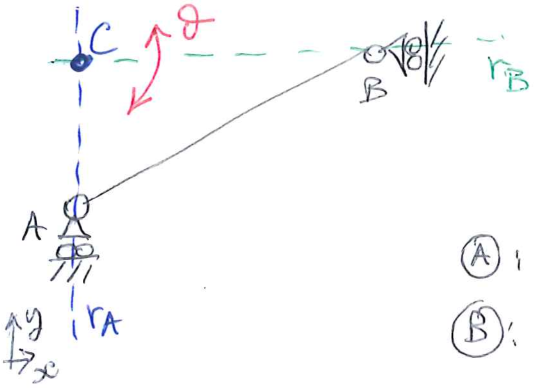




SI RAMMENTA CHE SE IL MOTO CONSENTITO È TRASLAZIONE VERTICALE, IL C.I.R. SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA ORIZZONTALE (CIOÈ IN DIREZIONE $\perp$ ALLO SPOSTAMENTO CONSENTITO)



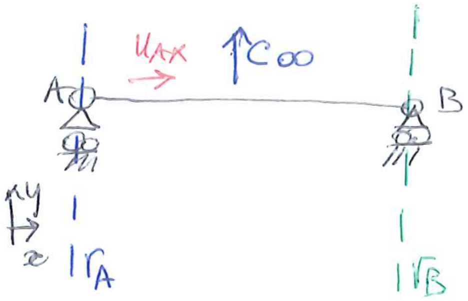
IN QUESTO CASO IL MOTO CONSENTITO È IN DIREZIONE ORIZZONTALE E IL C.I.R. SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO DI UNA RETTA $\perp$, CIOÈ VERTICALE.



IN QUESTA SITUAZIONE LE 2 CONDIZIONI CINEMATICHE RICHIEDONO CHE CONTEMPORANEAMENTE

$$\left.\begin{array}{ll} (A): & C \in r_A \\ (B): & C \in r_B \end{array}\right\}$$

C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B (PUNTO PROPRIO)



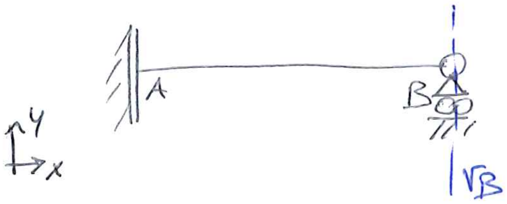
NELLA SITUAZIONE EVIDENZIATA SI HANNO QUESTE DUE CONDIZIONI CINEMATICHE DA SODDISFARE CONTEMPORANEAMENTE:

(A) $C \in r_A$
(B) $C \in r_B$

C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE RETTE PARALLELE r_A E r_B: È IL PUNTO IMPROPRIO DI TALI RETTE.

c) GDV ≥ 3 STRUTTURE ISOSTATICHE O IPERSTATICHE.

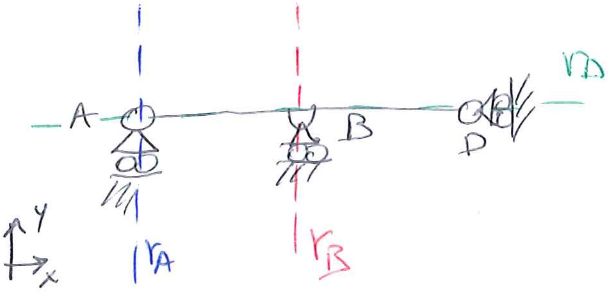
SE I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI, IL PROBLEMA DI DETERMINARE IL C.I.R NON AMMETTE SOLUZIONE: LA TRAVE NON SI PUÒ MUOVERE



PER IL VINCOLO IN (A) $C = C_\infty \rightarrow$

PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

LE 2 CONDIZIONI NON SONO CONCILIABILI (INCOMPATIBILI): $C \nexists$



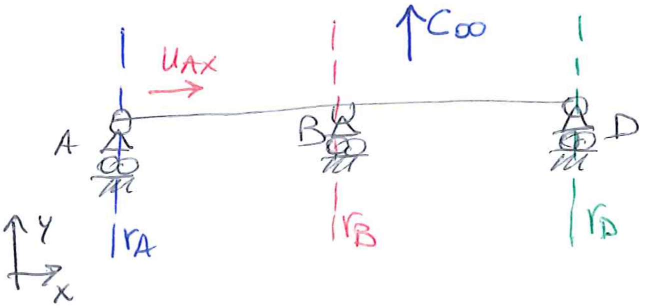
PER IL VINCOLO IN (A) $C \in r_A$

PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

PER IL VINCOLO IN (D) $C \in r_D$

LE 3 CONDIZIONI NON SONO CONCILIABILI (LE TRE RETTE SI INTERSECANO A 2 A 2 IN PUNTI DIVERSI): $C \nexists$.

SE I VINCOLI NON SONO DISPOSTI BENE, IL PROBLEMA DI DETERMINARE IL C.I.R AMMETTE SOLUZIONE: LA TRAVE AMMETTE MOTI RIGIDI



PER IL VINCOLO IN (A) $C \in r_A$

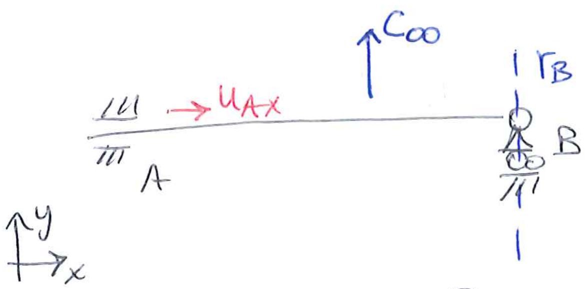
PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

PER IL VINCOLO IN (D) $C \in r_D$

LE 3 CONDIZIONI SONO COMPATIBILI PERCHÉ LE 3 RETTE PARALLELE SI INTERSECANO NEL MEDESIMO P_∞:

$C \equiv C_\infty = P_\infty$

(IN DIREZIONE ORTOGONALE AI 3 PIANI DI SCORRIMENTO)



PER IL VINCOLO IN (A) $C = C_\infty \uparrow$

PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

LE 2 CONDIZIONI SONO COMPATIBILI POICHÉ $C_\infty \in r_B$ (NE È IL PUNTO IMPROPRIO).

NOTA 5. IN GENERALE SE LA STRUTTURA È 2 VOLTE IPOSTATICA (E ANCHE 2 VOLTE LABILE) IL C.I.R. ∃ MA NON PUÒ ESSERE LOCALIZZATO POICHÉ IL MOTO È A 2 G.D.L E QUINDI RISULTA UNA COMBINAZIONE DI 2 ROTO-TRASLAZIONI DIVERSE.

SE LA STRUTTURA È 1 VOLTA IPOSTATICA (1 VOLTA LABILE) IL C.I.R. È COMPIUTAMENTE DETERMINABILE E LA STRUTTURA PUÒ SUBIRE MOTO A 1 G.D.L, RAPPRESENTABILE COME ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R.

SE LA STRUTTURA È ISOSTATICA O IPERSTATICA (NON LABILE) IL PROBLEMA DI DETERMINAZIONE DEL C.I.R. NON AMMETTE SOLUZIONE E LA STRUTTURA SI MANTIENE IMMOBILE.

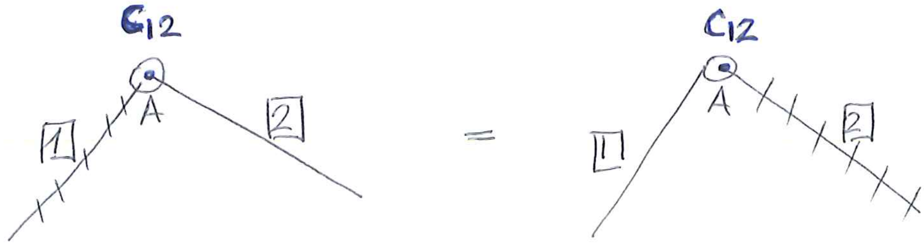
SE LA STRUTTURA È ISOSTATICA O IPERSTATICA MA LABILE IL C.I.R. È DETERMINABILE E LA STRUTTURA PUÒ SUBIRE MOTO A 1 G.D.L, REALIZZABILE COME ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R. □

CINEMATICA DI SISTEMI COSTITUITI DA 2 CORPI RIGIDI MUTUAMENTE VINCOLATI

QUANDO SI HANNO 2 CORPI RIGIDI ARTICOLATI SI DEFINISCE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE RELATIVA (C.I.R.R.) FRA I 2 CORPI.

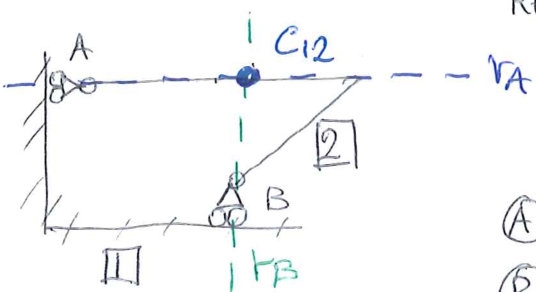
SI TRATTA DEL C.I.R. DEL MOTO DEL SECONDO CORPO (O DEL PRIMO CORPO) RISPETTO AL PRIMO (O AL SECONDO) QUANDO QUESTO VIENE CONSIDERATO FISSO (BLOCCATO)

CONVENZIONALMENTE SI INDICA CON C_{ij} (DOVE GLI INDICI i E j RAPPRESENTANO I DUE CORPI RIGIDI)



NEL CASO DI ARTICOLAZIONE A CERNIERA IL CENTRO RELATIVO È LA CERNIERA STESSA: $C_{12} \equiv A$

ANALOGAMENTE, SE LA ARTICOLAZIONE FRA I 2 CORPI RIGIDI È REALIZZATA MEDIANTE 2 CARRELLI COLLOCATI NEI PUNTI A E B IL CENTRO RELATIVO SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE RETTE r_A ED r_B CHE SONO PERPENDICOLARI AI 2 PIANI DI SCORRIMENTO RELATIVO:

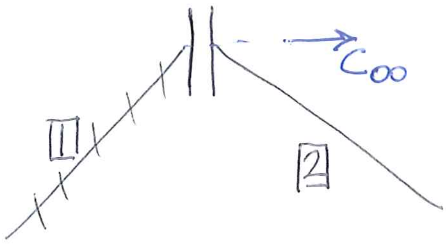


A: $C_{12} \in r_A$

B: $C_{12} \in r_B$

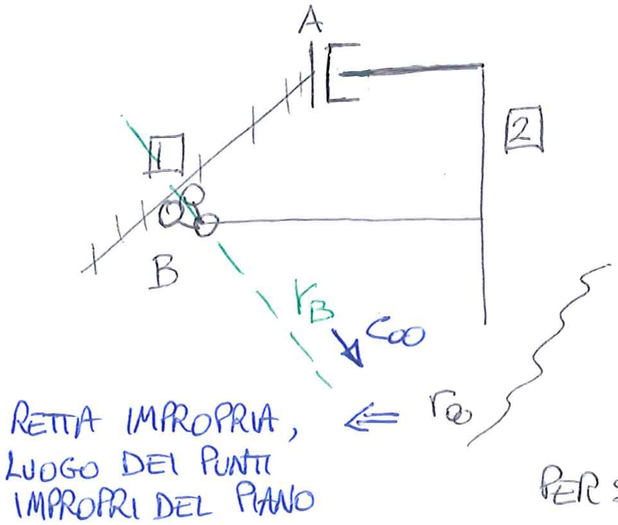
$\Big\}$ C_{12} È UNIVOCAMENTE DETERMINATO

SE L'ARTICOLAZIONE È REALIZZATA MEDIANTE UN PATTINO:



IL CENTRO RELATIVO SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PATTINO.

NEL CASO DI UNA COMBINAZIONE PATTINO-MANICOTTO (INCASTRO SEMPLICE) E CARRELLO SI OSSERVA QUANTO SEGUE:



IN (A) PER LA PRESENZA DEL VINCOLO (PATTINO-MANICOTTO) IL C.I.R.R. SI DEVE TROVARE SULLA RETTA IMPROPRIA:

$C_{12} \in r_\infty$ [*]

IN (B) PER LA PRESENZA DEL CARRELLO, IL C.I.R.R DEVE APPARTENERE ALLA RETTA r_B:

$C_{12} \in r_B$ [**]

PER SODDISFARE LE 2 CONDIZIONI [*] E [**] C_{12} SI DEVE TROVARE NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 RETTE.

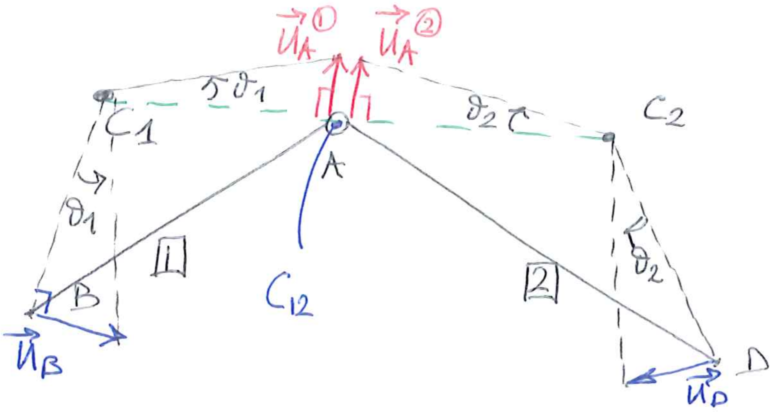
POICHÉ LA RETTA IMPROPRIA È COSTITUITA DI SOLI PUNTI IMPROPRI, MENTRE OGNI ALTRA RETTA È DOTATA DI UN SOLO PUNTO IMPROPRIO (CORRISPONDENTE AL PUNTO IN CUI TUTTE LE RETTE PARALLELE A QUELLA DATA SI INTERSECANO), NE SEGUE CHE $C_{12} \equiv C_\infty$ RELATIVO ALLA RETTA r_B.

LO STUDIO DELLA CINEMATICA DI 2 CORPI RIGIDI MUTUAMENTE VINCOLATI COINVOLGE 3 CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE:

- I DUE C.I.R. ASSOLUTI DEI 2 CORPI, C_1 (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ①) E C_2 (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ②)
- IL C.I.R. RELATIVO, C_{12}, APPENA DEFINITO, (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ① [O IL CORPO ②] SE SI MANTIENE FISSO E BLOCCATO IL CORPO ② [O IL CORPO ①].

VALE LA SEGUENTE PROPRIETÀ (1° TEOREMA DEI CENTRI DI ROTAZIONE): CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ AVVENGA UN MOTO RELATIVO FRA 2 CORPI RIGIDI È CHE I CENTRI ASSOLUTI E QUELLO

RELATIVO SIANO ALLINEATI: $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$.



SI CONSIDERI LA SITUAZIONE INDICATA IN FIGURA: I 2 CORPI RIGIDI $\boxed{1}$ E $\boxed{2}$ SONO VINCOLATI MEDIANTE LA CERNIERA INTERNA (A), $\equiv C_{12}$.

QUESTA IMPONE CHE SIA:

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{u}_A^{(2)}$$

CIOÈ CHE NEL PUNTO (A) LO SPOSTAMENTO DEL CORPO $\boxed{1}$ SIA VETTORIALMENTE (OVVERO IN MODULO, DIREZIONE E VERSO) EGUALE A QUELLO DEL CORPO $\boxed{2}$.

AMMESSO DI CONOSCERE IL CENTRO DI ROTAZIONE ASSOLUTO DEL CORPO $\boxed{1}$, C_1, SI HA CHE

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{\omega}^{(1)} \wedge (\overrightarrow{A - C_1}) \quad [8]$$

DOVE $\vec{\omega}^{(1)}$ È IL VETTORE ROTAZIONE DEL CORPO 1: $\vec{\omega}^{(1)} = \vartheta_1 \vec{k}$.

DALLA [8] SEGUE ALLORA CHE $\vec{u}_A^{(1)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A - C_1})$.

MA POICHÉ $\vec{u}_A^{(2)}$ DEVE ESSERE EGUALE A $\vec{u}_A^{(1)}$ E D'ALTRA PARTE

$$\vec{u}_A^{(2)} = \vec{\omega}^{(2)} \wedge (\overrightarrow{A - C_2}) \quad [8'] \quad , \quad \vec{\omega}^{(2)} = \vartheta_2 \vec{k}.$$

NE SEGUE CHE $\vec{u}_A^{(2)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A - C_2})$ E QUINDI QUEST'ULTIMO DEVE ESSERE ALLINEATO CON $(\overrightarrow{A - C_1})$.

CIÒ COMPORTA NECESSARIAMENTE CHE VALGA L'ALLINEAMENTO

$$C_1 \leftrightarrow (A) \equiv C_{12} \leftrightarrow C_2.$$

SI SUPPONGA ORA DI CONOSCERE LA POSIZIONE DI C_1 E DI C_2 E LA ROTAZIONE ϑ_1 CHE IL CORPO $\boxed{1}$ SUBISCE ATTORNO A C_1. SI VUOLE DETERMINARE LA ROTAZIONE CHE IL CORPO $\boxed{2}$ SUBISCE ATTORNO A C_2, ϑ_2.

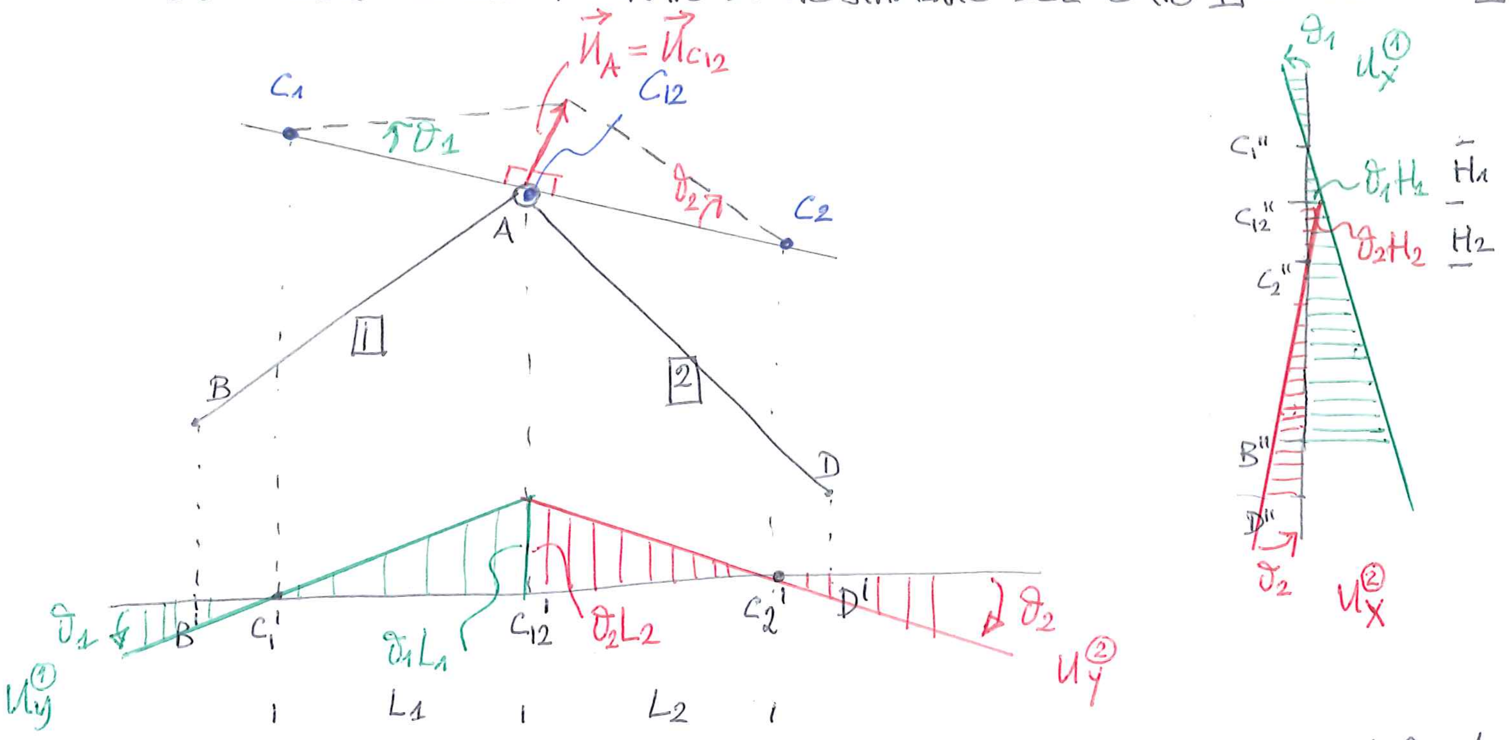
LA DETERMINAZIONE DI C_{12} PERMETTE DI RISOLVERE IL PROBLEMA; OCCORRE PERÒ DISTINGUERE I DUE CASI SEGUENTI:

I) IL PUNTO C_{12} È UN PUNTO PROPRIO

II) IL PUNTO C_{12} È UN PUNTO IMPROPRIO.

SI PROCEDE ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA PER CIASCUNO DEI 2 CASI.

I) C_{12} È UN PUNTO PROPRIO: LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO C_{12} DEVE ALLORA ESSERE COMUNE AL CAMPO DI SPOSTAMENTO DEL CORPO $\boxed{1}$ E DEL CORPO $\boxed{2}$.



IL CORPO RIGIDO $\boxed{1}$ RUOTA DI UN ANGOLO ϑ_1 ATTORNO A C_1: NE SEGUE CHE SULLA RETTA FONDAMENTALE ORIZZONTALE LE SUE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO VERTICALE, $u_y^{(1)}$ SI DETERMINANO RUOTANDO LA RETTA FONDAMENTALE ATTORNO A C_1', PROIEZIONE DI C_1 SULLA RETTA ORIZZONTALE. SE LA DISTANZA $C_1'C_{12}'$ (PROIEZIONE SULLA RETTA ORIZZONTALE DELLA DISTANZA $C_1 C_{12}$ VALE L_1, ALLORA SI TROVA:

$$u^{(1)}_{C_{12}y} = \vartheta_1 \cdot L_1 \quad [o]$$

PRESA ALLORA LA PROIEZIONE SULLA RETTA FONDAMENTALE ORIZZONTALE DI C_2, C_2' SI HA CHE L'ANGOLO DI CUI OCCORRE RUOTARE LA RETTA FONDAMENTALE ATTORNO A C_2' È DEFINITO DALLA CONDIZIONE CHE LA COMPONENTE VERTICALE DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO C_{12} DEVE ESSERE EGUALE AL VALORE FORNITO DALLA [o]:

$$u^{(2)}_{C_{12}y} = \vartheta_2 \cdot L_2 \quad [oo]$$

DOVE L_2 È LA DISTANZA $\overline{C_2'C_{12}'}$, CIOÈ LA PROIEZIONE SULLA RETTA ORIZZONTALE DELLA DISTANZA FRA I PUNTI C_2 E C_{12}, $\overline{C_2C_{12}}$.

EGUAGLIANDO LE [o] E [oo] SI OTTIENE:

$$\vartheta_1 \cdot L_1 = \vartheta_2 \cdot L_2 \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{L_1}{L_2} \quad [x]$$

SI POTEVA ANALOGAMENTE DETERMINARE ϑ_2 OPERANDO SUI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI ORIZZONTALI DELLO SPOSTAMENTO.

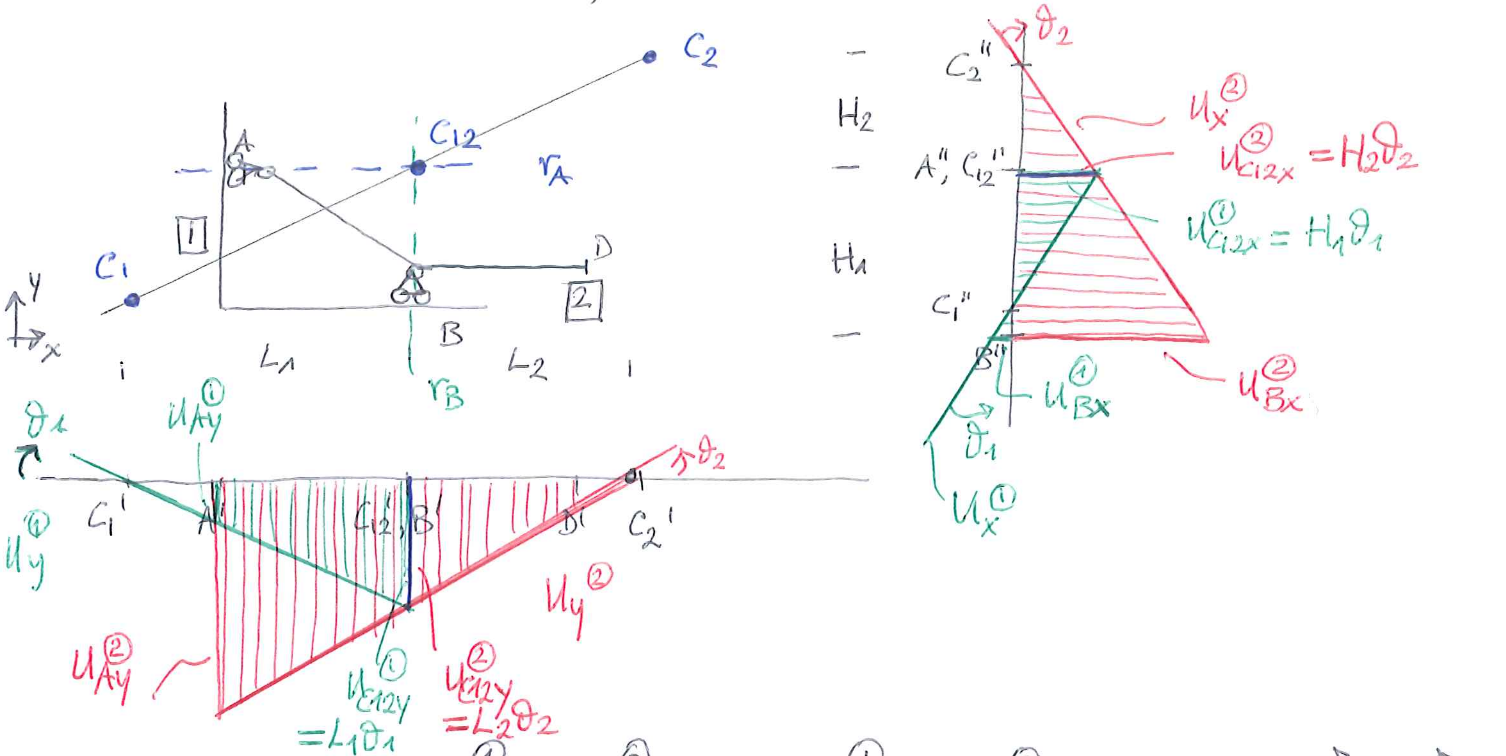
SE $H_1 = C_1''C_{12}''$ (PROIEZIONE SULLA RETTA FONDAMENTALE VERTICALE DELLA DISTANZA $\overline{C_1C_{12}}$) E ANALOGAMENTE $H_2 = C_2''C_{12}''$ (PROIEZIONE SULLA RETTA VERTICALE DELLA DISTANZA $\overline{C_2C_{12}}$) IMPONENDO CHE

$$u^{(1)}_{C_{12}x} = \vartheta_1 H_1 = \vartheta_2 H_2 = u^{(2)}_{C_{12}x}$$

E SI TROVA $\vartheta_2 = \vartheta_1 \dfrac{H_1}{H_2}$ [xx] SI NOTI CHE PER COSTRUZIONE $\dfrac{L_1}{H_1} = \dfrac{L_2}{H_2}$ SICCHÉ

I VALORI FORNITI DALLE [X] E [XX'] COINCIDONO.

NOTA 6 — SI OSSERVI CHE IL CENTRO RELATIVO C_{12} POTREBBE ESSERE UN PUNTO ESTERNO AI DUE CORPI RIGIDI, COME È EVIDENTE NELL'ESEMPIO SEGUENTE:

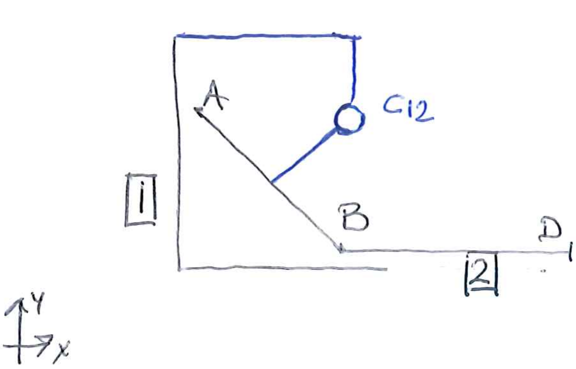


SI NOTI CHE RISULTA $u_{C_{12}y}^{(1)} = u_{C_{12}y}^{(2)}$ E $u_{C_{12}x}^{(1)} = u_{C_{12}x}^{(2)}$ E DUNQUE $\vec{u}_{C_{12}}^{(1)} = \vec{u}_{C_{12}}^{(2)}$ ANCHE SE IL PUNTO C_{12} NON APPARTIENE FISICAMENTE A NESSUNO DEI 2 CORPI.

SI OSSERVI INVECE CHE I PUNTI (A) E (B) NON SUBISCONO EGUALI SPOSTAMENTI: INFATTI, PER QUANTO RIGUARDA IL PUNTO (A), IL RISPETTO DEL VINCOLO RICHIEDE CHE: $u_{Ax}^{(1)} = u_{Ax}^{(2)}$ CIOÈ L'EQUAZIONE $u_{Ax}^{(1)} - u_{Ax}^{(2)} = 0$, MENTRE PER QUANTO RIGUARDA LE COMPONENTI PARALLELE AL PIANO DI SCORRIMENTO RISULTA MANIFESTAMENTE: $u_{Ay}^{(1)} \neq u_{Ay}^{(2)}$

PER QUANTO RIGUARDA IL PUNTO (B), DOVE IL PIANO DI SCORRIMENTO DEL VINCOLO È ORIZZONTALE SI TROVA $u_{By}^{(1)} = u_{By}^{(2)}$, CIOÈ L'EQUAZIONE DI VINCOLO È RISPETTATA: $u_{By}^{(1)} - u_{By}^{(2)} = 0$, MENTRE CHIARAMENTE $u_{Bx}^{(1)} \neq u_{Bx}^{(2)}$.

PERTANTO AI FINI DEL COMPORTAMENTO CINEMATICO LE TRAVI (1) E (2) SI MUOVONO COME SE FOSSERO COLLEGATE DA UNA CERNIERA POSTA IN C_{12}.

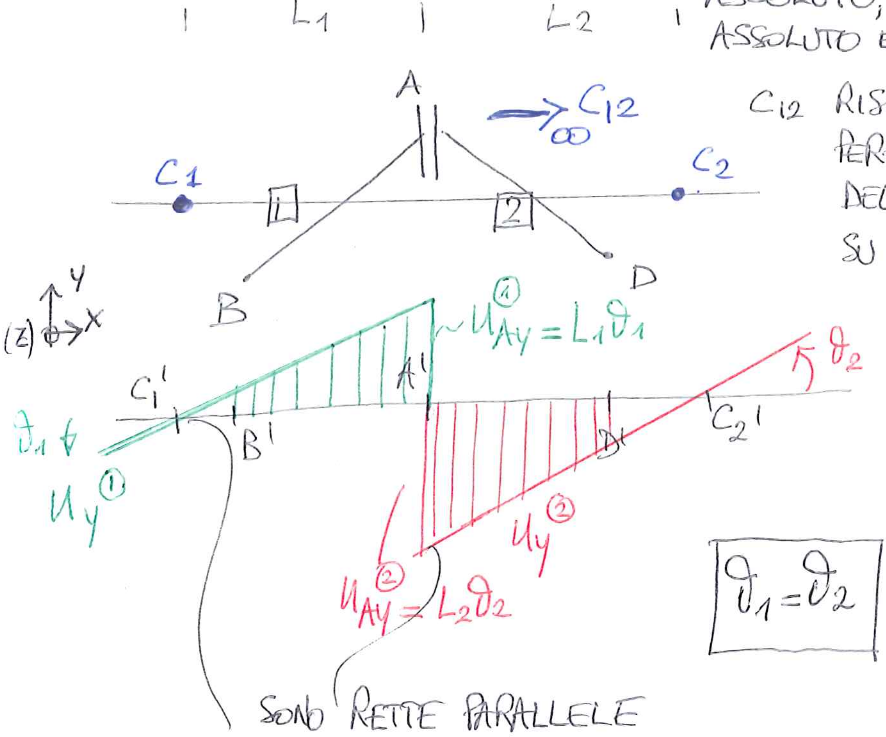


IN FIGURA IL "COLLEGAMENTO EQUIVALENTE" FRA 1 E 2 È STATO RIPORTATO IN UN DIVERSO COLORE E SONO STATI RIMOSSI I DUE VINCOLI SEMPLICI COLLOCATI IN (A) E (B), IL CUI EFFETTO È COMPLETAMENTE INGLOBATO DALLA "CERNIERA EQUIVALENTE" C_{12}. CON QUESTA RAPPRESENTAZIONE RISULTA EVIDENTE CHE GLI SPOSTAMENTI DEI PUNTI (A) E (B) SONO DIVERSI PER LE 2 TRAVI.

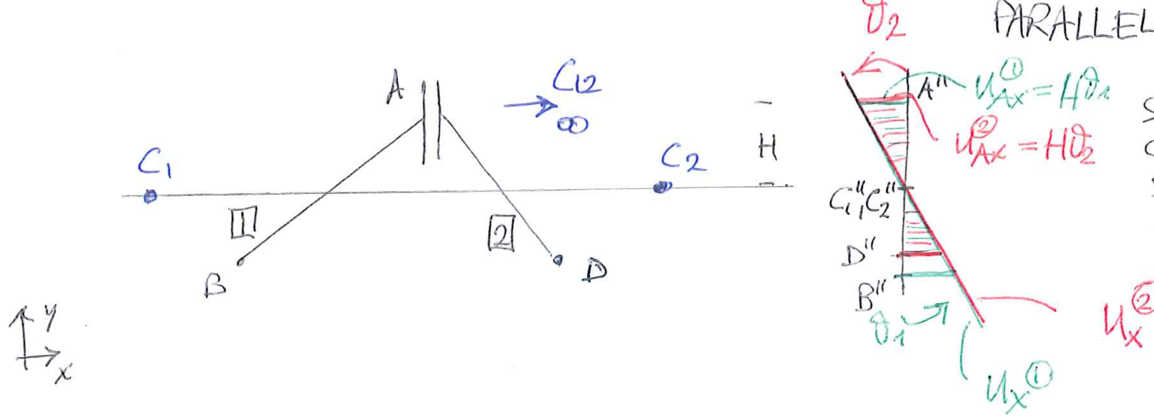
II) C_{12} È UN PUNTO IMPROPRIO:

IN QUESTO CASO I DUE CORPI RIGIDI DEBBONO RUOTARE, CIASCUNO ATTORNO AL PROPRIO CENTRO ASSOLUTO, DI ANGOLI EGUALI: $\vartheta_1 = \vartheta_2$ (IN VALORE ASSOLUTO E IN SEGNO, CIOÈ IN VERSO DI ROTAZIONE)

C_{12} RISULTA IL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PATTINO; C_1 E C_2 SONO ALLINEATI SU UNA RETTA PARALLELA A QUESTA.

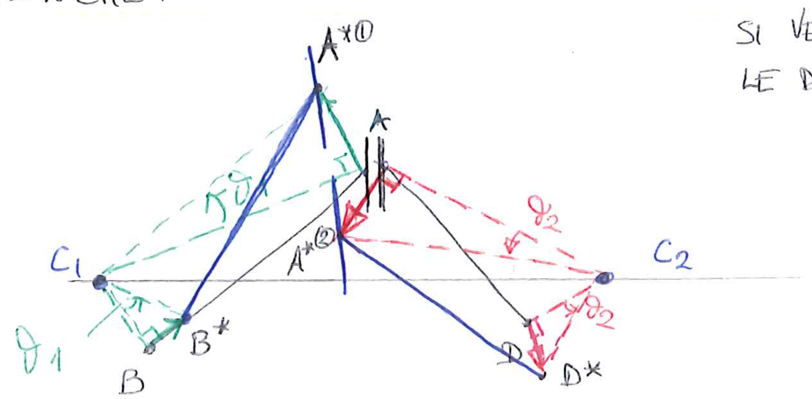


SI OSSERVI CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_y SONO RAPPRESENTATE PER LE 2 TRAVI DA 2 RETTE PARALLELE (DI EGUALE PENDENZA); È ANCHE EVIDENTE CHE LE DUE "FACCE" DEL PATTINO SCORRONO UNA RISPETTO ALL'ALTRA, MA IN MODO TALE DA CONSERVARSI PARALLELE.



SI NOTI CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_x COINCIDONO PER LE DUE TRAVI, A DIFFERENZA DELLE COMPONENTI u_y.

LA CORRISPONDENTE SPOSTATA RIGIDA PUÒ ESSERE RICOSTRUITA CON LE CONSUETE TECNICHE:



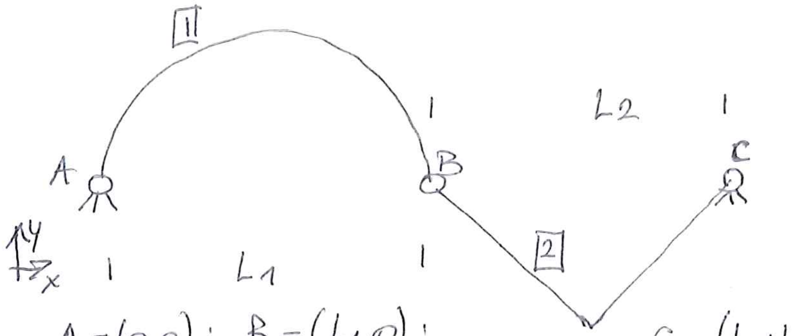
SI VERIFICA CHE IL PATTINO "SCORRE", MA LE DUE "FACCE" SI MANTENGONO PARALLELE.

IN SINTESI SI È VISTO QUANTO SEGUE:

- I VINCOLI <u>INTERNI</u> INDIVIDUANO, SE ESISTE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE <u>RELATIVA</u> FRA DUE CORPI
- I VINCOLI <u>ESTERNI</u> PERMETTONO DI DETERMINARE, SE ESISTE IL C.I.R. ASSOLUTO DEL CORPO AL QUALE SONO APPLICATI.

PROBLEMA CINEMATICO PER UNA STRUTTURA COMPOSTA DA 2 CORPI RIGIDI ARTICOLATI.

SI CONSIDERA DAPPRIMA LA FORMULAZIONE ANALITICA.



$A=(0,0)$; $B=(L_1,0)$; $C=(L_1+L_2,0)$

SI ASSUMONO COME VARIABILI CINEMATICHE

- PER IL CORPO ①: $u_{Ax}, u_{Ay}, \vartheta_1$
- PER IL CORPO ②: $u_{Cx}, u_{Cy}, \vartheta_2$

QUESTE SONO LE INCOGNITE DEL PROBLEMA CINEMATICO: $M=2$, SICCHE' $3M=6$.

SI OSSERVI CHE $\vec{\omega}^{(1)}=\vartheta_1\vec{k}$, $\vec{\omega}^{(2)}=\vartheta_2\vec{k}$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO IMPOSTE DAI VINCOLI <u>ESTERNI</u> FORNISCONO:

PUNTO Ⓐ (CORPO $\boxed{1}$): $\begin{cases} u_{Ax}=0 \\ u_{Ay}=0 \end{cases}$

PUNTO Ⓒ (CORPO $\boxed{2}$): $\begin{cases} u_{Cx}=0 \\ u_{Cy}=0 \end{cases}$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO IMPOSTE DAL VINCOLO <u>INTERNO</u> FORNISCONO:

PUNTO Ⓑ (COMUNE A CORPO $\boxed{1}$ E CORPO $\boxed{2}$): $\begin{cases} u^{(1)}_{Bx}=u^{(2)}_{Bx} \\ u^{(1)}_{By}=u^{(2)}_{By} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{(1)}_{Bx}-u^{(2)}_{Bx}=0 \\ u^{(1)}_{By}-u^{(2)}_{By}=0 \end{cases}$

DALL'EQUAZIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE SI OTTIENE:

$$\vec{u}^{(1)}_B=\vec{u}^{(1)}_A+\vec{\omega}^{(1)}\wedge(\vec{B-A}) \Rightarrow \begin{cases} u^{(1)}_{Bx}=u_{Ax}-\vartheta_1(y_B-y_A) \Rightarrow u^{(1)}_{Bx}=u_{Ax} \\ u^{(1)}_{By}=u_{Ay}+\vartheta_1(x_B-x_A) \Rightarrow u^{(1)}_{By}=u_{Ay}+\vartheta_1 L_1 \end{cases}$$

$$\vec{u}^{(2)}_B=\vec{u}^{(2)}_C+\vec{\omega}^{(2)}\wedge(\vec{B-C}) \Rightarrow \begin{cases} u^{(2)}_{Bx}=u_{Cx}-\vartheta_2(y_B-y_C) \Rightarrow u^{(2)}_{Bx}=u_{Cx} \\ u^{(2)}_{By}=u_{Cy}+\vartheta_2(x_B-x_C) \Rightarrow u^{(2)}_{By}=u_{Cy}-\vartheta_2 L_2 \end{cases}$$

SI OTTIENE COSÌ IL SISTEMA DI EQUAZIONI:

$$\begin{cases} u_{Ax}=0 \\ u_{Ay}=0 \\ u_{Ax}-u_{Cx}=0 \\ u_{Ay}-u_{Cy}+\vartheta_1 L_1+\vartheta_2 L_2=0 \\ u_{Cx}=0 \\ u_{Cy}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ \\ (\mathrm{III}) \\ \\ (\mathrm{V}) \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 & 0 & -1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta_1 \\ u_{Cx} \\ u_{Cy} \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[C]_{6,6} \qquad \{V\}_{6,1} \qquad \{0\}_{6,1}$$

NB: $(\mathrm{III})=(\mathrm{I})-(\mathrm{V})$!

PER QUANTO GIA' VISTO IN PRECEDENZA SI POSSONO TRARRE LE SEGUENTI CONCLUSIONI:

SE RANGO$([\mathcal{C}]) = 6$ LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE)

SE RANGO$([\mathcal{C}]) < 6$ LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATA (LABILE)

NEL CASO IN ESAME LA (III) RIGA DI $[\mathcal{C}]$ È LINEARMENTE DIPENDENTE DALLA (I) E DALLA (V): INFATTI LA COMBINAZIONE LINEARE (I) − (V) = (III).

DI CONSEGUENZA DET$[\mathcal{C}] = 0$ E QUINDI RANGO$([\mathcal{C}]) < 6$.

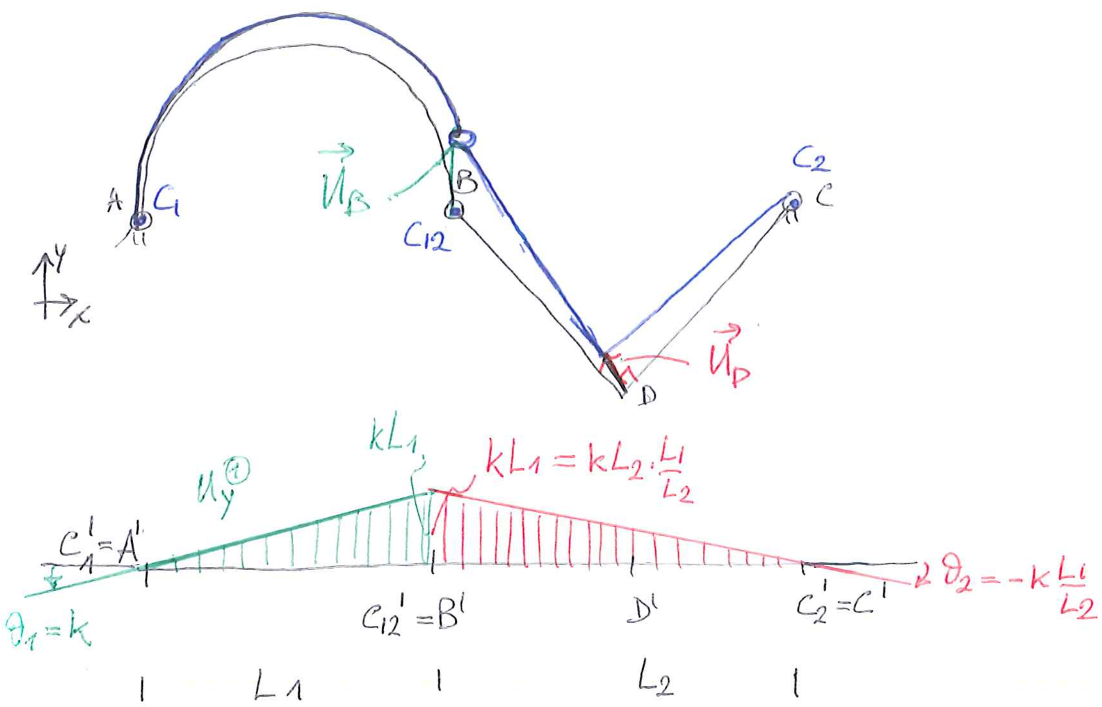
LA SOLUZIONE NON BANALE $\{v\} \neq \{0\}$ SI PUÒ OTTENERE SCARTANDO LA TERZA EQUAZIONE, OTTENIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA PRIMA E DELLA QUINTA.

NE SEGUE: $u_{Ax} = 0$; $u_{Ay} = 0$; $u_{Cx} = 0$; $u_{Cy} = 0$; $\vartheta_1 L_1 + \vartheta_2 L_2 = 0$

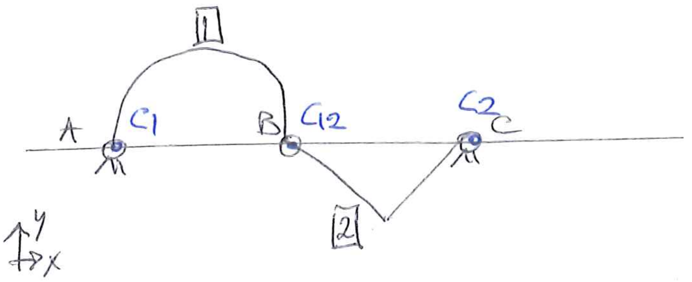
DA CUI SI OTTIENE, PONENDO $\vartheta_1 = k$ $\quad \vartheta_2 = -k \dfrac{L_1}{L_2}$.

· LA SPOSTATA RIGIDA È DI IMMEDIATO TRACCIAMENTO, SE SI RICONOSCE CHE, ESSENDO $C_{12} \equiv B$ LA CONDIZIONE $\vec{u}^{(1)}_{C_{12}} = \vec{u}^{(2)}_{C_{12}}$, OVVERO:

$$u^{(1)}_{Bx} = u^{(2)}_{Bx} = 0; \quad u^{(1)}_{By} = \vartheta_1 L_1 = kL_1; \quad u^{(2)}_{By} = -\vartheta_2 L_2 = -\left(-k\frac{L_1}{L_2}\right)L_2 = +kL_1.$$

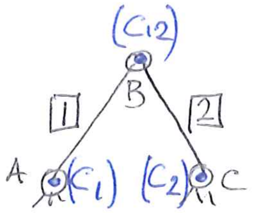


PER LA STRUTTURA IN ESAME SI POTEVA PERVENIRE AD ACCERTARE LA LABILITA' ANCHE CON IL METODO GRAFICO: STANTE IL FATTO CHE I 3 CENTRI C_1, C_{12}, C_2 RISULTANO ALLINEATI, $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$, SI CONCLUDE, PER IL I TEOREMA DEI CENTRI RELATIVI CHE ESISTE UN MOTO RIGIDO CHE COINVOLGE I CORPI $\boxed{1}$ E $\boxed{2}$: CONSEGUENTEMENTE LA STRUTTURA È LABILE.

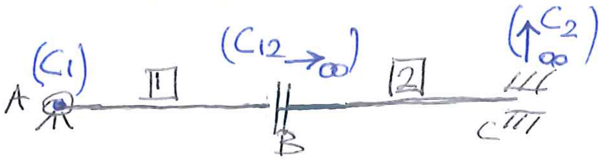


CON LO STESSO METODO GRAFICO SI PUÒ STABILIRE LA LABILITA' (INDETERMINATEZZA GEOMETRICA) O LA NON LABILITA' (DETERMINATEZZA GEOMETRICA) DI

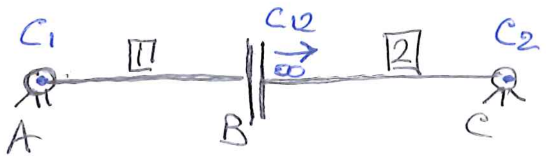
STRUTTURE ISOSTATICHE COSTITUITE DA 2 CORPI RIGIDI



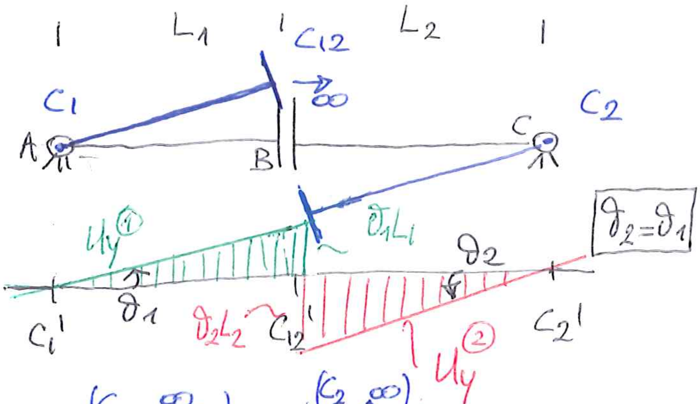
I TRE CENTRI C_1, C_{12}, C_2 NON SONO ALLINEATI: NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI → LA STRUTTURA È NON LABILE



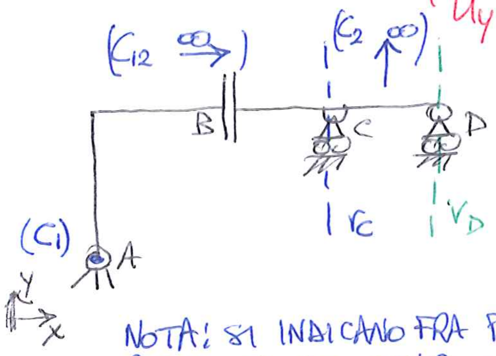
DI NUOVO I 3 CENTRI (2 DEI QUALI IMPROPRI) NON SONO ALLINEATI: LA STRUTTURA È NON LABILE.



IN QUESTO CASO C_1, C_{12} E C_2 SONO ALLINEATI (C_{12} È IL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA ORIZZONTALE CHE UNISCE C_1 E C_2): LA STRUTTURA È LABILE.



IN BASE A QUANTO VISTO QUANDO C_{12} È PUNTO IMPROPRIO SI VERIFICA CHE LA "SPOSTATA RIGIDA" È QUELLA RIPORTATA A FIANCO. LE DUE FACCE DEL PATTINO SCORRONO UNA RISPETTO ALL'ALTRA MA SI MANTENGONO SEMPRE PARALLELE



IN QUESTO ULTIMO CASO, PER IL VINCOLO IN A SI TROVA IMMEDIATAMENTE $C_1 \equiv A$; PER IL VINCOLO INTERNO IN B $C_{12} \to \infty$ (IN DIREZIONE ORIZZONTALE, CIOÈ ⊥ AL PIANO DI SCORRIMENTO); I DUE VINCOLI SEMPLICI IN C E D RICHIEDONO CHE $C_2 \in r_C$ E $C_2 \in r_D$: NE SEGUE, ESSENDO r_C E r_D RETTE PARALLELE VERTICALI CHE $C_2 \uparrow \infty$.

NOTA: SI INDICANO FRA PARENTESI LE POSIZIONI DEI CENTRI QUANDO QUESTI NON DANNO LUOGO A MOTO RIGIDO.

POICHÉ I TRE CENTRI C_1, C_{12} E C_2 NON SONO ALLINEATI LA STRUTTURA È NON LABILE E NESSUN MOTO RIGIDO È POSSIBILE.

STRUTTURE FORMATE DA 3 (O PIÙ) CORPI RIGIDI MUTUAMENTE VINCOLATI.

QUANDO IL SISTEMA È FORMATO DA TRE (O PIÙ) CORPI RIGIDI, LO SI PUÒ STUDIARE INDIVIDUANDO DIVERSE COPPIE DI CORPI. PER OGNI COPPIA SI HA UN C.I.R RELATIVO.

COSÌ NEL CASO DI 3 CORPI RIGIDI, 1, 2, 3 SI POSSONO IDENTIFICARE 3 COPPIE:

- 1 E 2 → C_1, C_2, C_{12}
- 1 E 3 → C_1, C_3, C_{13}
- 2 E 3 → C_2, C_3, C_{23}

SI HANNO QUINDI IN TOTALE 3 C.I.R. ASSOLUTI (C_1, C_2, C_3) E 3 C.I.R.

RELATIVI (C_{12}, C_{13}, C_{23}).

NEL CASO DI 4 CORPI RIGIDI, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ SI POSSONO IDENTIFICARE 6 COPPIE:

$\boxed{1}$ E $\boxed{2}$ → C_1, C_2, C_{12}

$\boxed{1}$ E $\boxed{3}$ → C_1, C_3, C_{13}

$\boxed{1}$ E $\boxed{4}$ → C_1, C_4, C_{14}

$\boxed{2}$ E $\boxed{3}$ → C_2, C_3, C_{23}

$\boxed{2}$ E $\boxed{4}$ → C_2, C_4, C_{24}

$\boxed{3}$ E $\boxed{4}$ → C_3, C_4, C_{34}

E SI HANNO IN TOTALE 4 C.I.R. ASSOLUTI (C_1, C_2, C_3, C_4) E 6 C.I.R. RELATIVI ($C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24}, C_{34}$).

TORNANDO AL CASO DI 3 CORPI RIGIDI, SE I TRE CORPI SI MUOVONO DI MOTO RELATIVO ALLORA DEVONO VALERE GLI ALLINEAMENTI SEGUENTI:

$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$; $C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3$; $C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3$ $[\sim]$

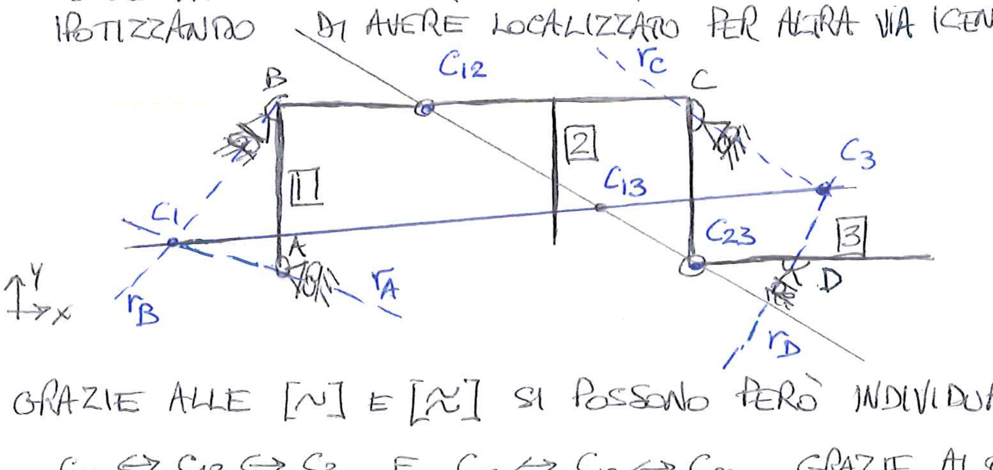
DEVE PERÒ VALERE ANCHE LA SEGUENTE PROPRIETÀ (2° TEOREMA DEI CENTRI DI ROTAZIONE): CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ AVVENGA UN MOTO RELATIVO TRA TRE CORPI RIGIDI $\boxed{i}$, $\boxed{j}$, $\boxed{k}$ È CHE I CENTRI RELATIVI SIANO ALLINEATI:

$C_{ij} \leftrightarrow C_{ik} \leftrightarrow C_{jk}$ [SI NOTI CHE $C_{ij} = C_{ji}$ ECC.].

NEL CASO SOPRA INDICATO, OLTRE AGLI ALLINEAMENTI $[\sim]$ DEVE ESSERE SODDISFATTO ANCHE QUESTO:

$$C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23} \quad [\approx].$$

QUESTA CONDIZIONE È ESSENZIALE QUANDO 2 CORPI NON SONO DIRETTAMENTE COLLEGATI DA VINCOLI INTERNI; PER ESEMPIO IN QUESTA SITUAZIONE, IPOTIZZANDO DI AVERE LOCALIZZATO PER ALTRA VIA I CENTRI C_1 E C_3, SI HA CHE



I VINCOLI INTERNI FISSANO LA POSIZIONE DI C_{12} E DI C_{23}.

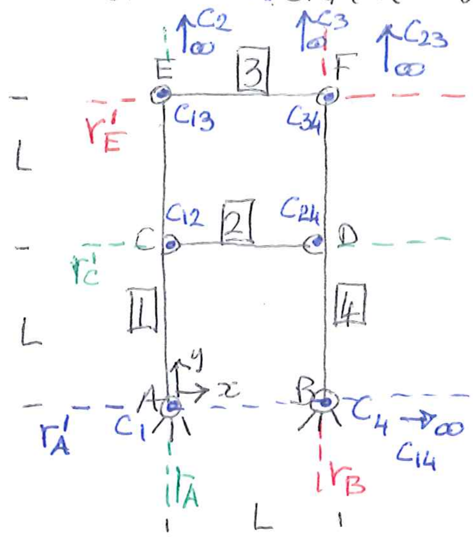
POICHÉ I CORPI $\boxed{1}$ E $\boxed{3}$ NON SONO DIRETTAMENTE COLLEGATI NON SI SA LOCALIZZARE C_{13}.

GRAZIE ALLE $[\sim]$ E $[\approx]$ SI POSSONO PERÒ INDIVIDUARE 2 ALLINEAMENTI:

$C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3$ E $C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23}$, GRAZIE AI QUALI SI PUÒ LOCALIZZARE IL CENTRO C_{13}:

CON GLI STRUMENTI SOPRA RIPORTATI DIVIENE POSSIBILE EFFETTUARE L'ANALISI CINEMATICA CON IL METODO GRAFICO DI STRUTTURE COMPLESSE, SI CONSIDERA COME ESEMPIO UNA STRUTTURA COSTITUITA DA 4 TRAVI (QUADRILATERO ARTICOLATO)

SI CONSIDERA DAPPRIMA LA VERSIONE CON MONTANTI E CORRENTI PARALLELI E DISPOSTI A FORMARE UNA MAGLIA RETTANGOLARE.



SI HANNO $3 \times 4 = 12$ GDL E 12 GDV (STRUTTURA ISOSTATICA)

SE SI FISSA L'ORIGINE DELLE COORDINATE NEL PUNTO A SI HA CHE LE COORDINATE DEI NODI SONO LE SEGUENTI:

$$A = (0,0)\ ;\ B = (L,0)\ ;\ C = (0,L)\ ;\ D = (L,L)\ ;$$
$$E = (0,2L)\ ;\ F = (L,2L).$$

I VINCOLI A TERRA FISSANO IMMEDIATAMENTE LE POSIZIONI DEI CENTRI ASSOLUTI C_1 E C_4:

$$C_1 \equiv A = (0,0) \qquad C_4 \equiv B = (L,0)$$

I VINCOLI INTERNI FISSANO INVECE LE POSIZIONI DEI CENTRI RELATIVI $C_{12}, C_{13}, C_{24}, C_{34}$:

$$C_{12} \equiv C = (0,L)\ ;\ C_{13} \equiv E = (0,2L)\ ;\ C_{24} \equiv D = (L,L)\ ;\ C_{34} \equiv F = (L,2L).$$

RESTANO DA DETERMINARE MEDIANTE ALLINEAMENTI I CENTRI ASSOLUTI C_2, C_3 E I CENTRI RELATIVI C_{14} E C_{23}.

SI PUÒ PROCEDERE IN QUESTO MODO, INDICANDO CON UNA SOTTOLINEATURA LE QUANTITÀ GIÀ NOTE:

1) IL CENTRO C_2 È FISSATO DA QUESTI ALLINEAMENTI:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{C_1} \leftrightarrow \underline{C_{12}} \leftrightarrow C_2 & \Rightarrow C_2 \in r_A \\ C_2 \leftrightarrow \underline{C_{24}} \leftrightarrow \underline{C_4} & \Rightarrow C_2 \in r_B \end{array}\right\} \quad C_2 = (\infty, \infty)$$

2) IL CENTRO C_3 È FISSATO DA QUESTI ALLINEAMENTI:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{C_1} \leftrightarrow \underline{C_{13}} \leftrightarrow C_3 & \Rightarrow C_3 \in r_A \\ C_3 \leftrightarrow \underline{C_{34}} \leftrightarrow \underline{C_4} & \Rightarrow C_3 \in r_B \end{array}\right\} \quad C_3 = (\infty, \infty)$$

3) IL CENTRO (RELATIVO) C_{14} È FISSATO DA QUESTI ALLINEAMENTI:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{C_1} \leftrightarrow C_{14} \leftrightarrow \underline{C_4} & \Rightarrow C_{14} \in r'_A \\ \underline{C_{12}} \leftrightarrow C_{14} \leftrightarrow \underline{C_{24}} & \Rightarrow C_{14} \in r'_C \end{array}\right\} \quad C_{14} = (\infty, 0)$$

4) IL CENTRO (RELATIVO) C_{23} È FISSATO DA QUESTI ALLINEAMENTI:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{C_{12}} \leftrightarrow \underline{C_{13}} \leftrightarrow C_{23} & \Rightarrow C_{23} \in r_A \\ C_{23} \leftrightarrow \underline{C_{24}} \leftrightarrow \underline{C_{34}} & \Rightarrow C_{23} \in r_B \end{array}\right\} \quad C_{23} = (\infty, \infty)$$

5) OCCORRE PERÒ VERIFICARE LE ULTIME 2 CONDIZIONI DI ALLINEAMENTO:

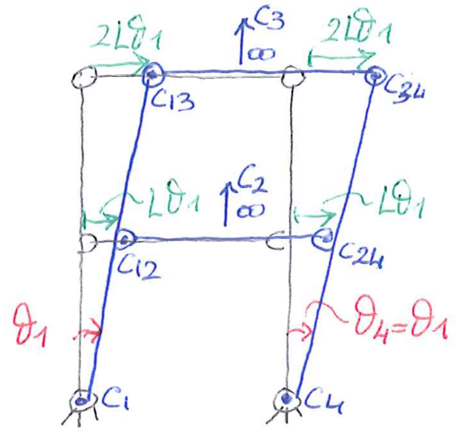
$$\left\{\begin{array}{l} \underline{C_2} \leftrightarrow \underline{C_{23}} \leftrightarrow \underline{C_3} \quad \checkmark \ \text{VERIFICATA POICHÉ } C_2 \equiv C_3 \equiv C_{23}. \\ \underline{C_{13}} \leftrightarrow \underline{C_{14}} \leftrightarrow C_{34} \Rightarrow C_{14} \in r'_E \quad \checkmark \ \text{VERIFICATA PERCHÉ } C_{14} \text{ È PUNTO IMPROPRIO DI } r'_E. \end{array}\right.$$

LE CONDIZIONI CINEMATICHE IMPOSTE DAI VINCOLI E LE CONDIZIONI DI ALLINEAMENTO HANNO PORTATO A DETERMINARE IN MODO UNIVOCO E NON CONTRADDITTORIO I 4 CENTRI ASSOLUTI E I 6 CENTRI RELATIVI: NE SEGUE CHE SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI E QUINDI LA STRUTTURA RISULTA LABILE (GEOMETRICAMENTE INDETERMINATA).

SI OSSERVA CHE, IN BASE ALLE RISULTANZE OTTENUTE SI HA CHE

1) LA TRAVE $\boxed{1}$ RUOTA ATTORNO AD Ⓐ E LA TRAVE $\boxed{4}$ ATTORNO A Ⓑ; IL FATTO CHE C_{14} SIA PUNTO IMPROPRIO RICHIEDE CHE LE TRAVI RUOTINO DELLO STESSO ANGOLO OVVERO CHE SI MANTENGANO PARALLELE A SPOSTAMENTO AVVENUTO.

2) LE TRAVI $\boxed{2}$ E $\boxed{3}$ TRASLANO ORIZZONTALMENTE (C_2, C_3 E C_{23} SONO TUTTI PUNTI IMPROPRI) MANTENENDOSI QUINDI PARALLELE A SPOSTAMENTO AVVENUTO.

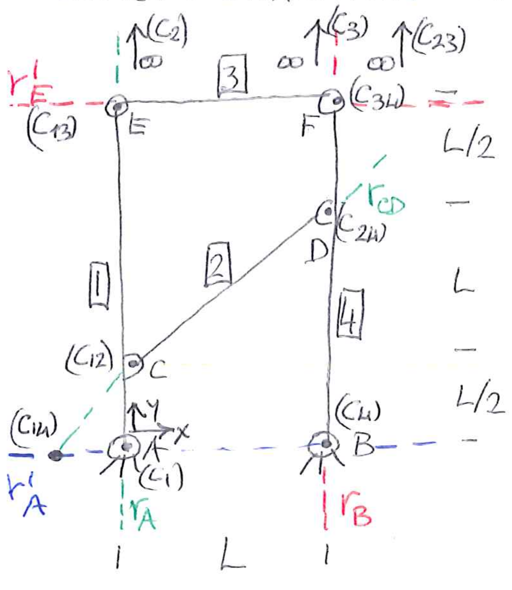


NOTA 7

QUESTO SCHEMA STRUTTURALE E' QUELLO TIPICAMENTE IMPIEGATO NEGLI SCAFFALI, E RISULTA LABILE

PER CONTRASTARE QUESTA LABILITA' SI POSSONO INTRODURRE TIRANTI OBLIQUI (A CROCE DI S. ANDREA) CON FUNZIONE DI "CONTROVENTI"; OPPURE SI UTILIZZANO TASSELLI O ALTRI DISPOSITIVI CHE CONTRASTINO QUESTO MOTO RIGIDO. □

SI PASSA AD ANALIZZARE LA VERSIONE CON MONTANTI VERTICALI PARALLELI E CORRENTI DIVARICATI. LA STRUTTURA E' ANCORA ISOSTATICO.



NOTA: I CENTRI SONO INDICATI FRA PARENTESI POICHE' NON DANNO LUOGO A MOTO RIGIDO.

LE COORDINATE DEI NODI SONO ORA, RIFERITE ALLA ORIGINE Ⓐ:

$$Ⓐ=(0,0)\,;\quad Ⓑ=(L,0)\,;\quad Ⓒ=\left(0,\tfrac{L}{2}\right);$$

$$Ⓓ=\left(L,\tfrac{3}{2}L\right);\quad Ⓔ=(0,2L)\,;\quad Ⓕ=(L,2L)\,.$$

I VINCOLI A TERRA FISSANO LA POSIZIONE DEI CENTRI ASSOLUTI C_1 E C_4:

$$C_1 \equiv Ⓐ = (0,0) \quad ; \quad C_4 \equiv Ⓑ = (L,0)$$

MENTRE I VINCOLI INTERNI FISSANO LA POSIZIONE DEI CENTRI RELATIVI C_{12}, C_{13}, C_{24}, C_{34}:

$$C_{12}\equiv Ⓒ=\left(0,\tfrac{L}{2}\right);\; C_{13}\equiv Ⓔ=(0,2L);\; C_{24}\equiv Ⓓ=\left(L,\tfrac{3}{2}L\right);$$

$$C_{34}\equiv Ⓕ=(L,2L)\,.$$

MEDIANTE GLI ALLINEAMENTI SI DETERMINANO I RESTANTI CENTRI ASSOLUTI (C_2, C_3) E RELATIVI (C_{14}, C_{23}).

PROCEDENDO ORDINATAMENTE SI HA:

1) CENTRO C_2 :

$$\left.\begin{cases} \underline{C_1} \leftrightarrow \underline{C_{12}} \leftrightarrow C_2 & \Rightarrow C_2 \in r_A \\ C_2 \leftrightarrow \underline{C_{24}} \leftrightarrow \underline{C_4} & \Rightarrow C_2 \in r_B \end{cases}\right\} \Rightarrow C_2 = (\infty,\infty)$$

2) CENTRO C_3: $\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 & \Rightarrow C_3 \in r_A \\ C_3 \leftrightarrow C_{34} \leftrightarrow C_4 & \Rightarrow C_3 \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_3 = (\infty, \infty)$

3) CENTRO C_{14}: $\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{14} \leftrightarrow C_4 & \Rightarrow C_{14} \in r'_A \\ C_{12} \leftrightarrow C_{14} \leftrightarrow C_{24} & \Rightarrow C_{14} \in r_{CD} \end{cases} \Rightarrow C_{14} = (-\frac{L}{2}, 0)$

4) CENTRO C_{23}: $\begin{cases} C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23} & \Rightarrow C_{23} \in r_A \\ C_{23} \leftrightarrow C_{24} \leftrightarrow C_{34} & \Rightarrow C_{23} \in r_B \end{cases} \Rightarrow C_{23} = (\infty, \infty)$

5) OCCORRE PERÒ VERIFICARE I DUE RESTANTI ALLINEAMENTI:

$\begin{cases} C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & \checkmark \text{ VERIFICATA POICHÉ } C_2 \equiv C_3 \equiv C_{23} \\ C_{13} \leftrightarrow C_{14} \leftrightarrow C_{34} \Rightarrow C_{14} \in r'_E & \underline{\text{NON VERIFICATA}} \text{ POICHÉ } C_{14} = (-\frac{L}{2}, 0) \notin r'_E \end{cases}$

POICHÉ L'ULTIMO ALLINEAMENTO NON È VERIFICATO, NON SI POSSONO AVERE MOTI RIGIDI: PERTANTO LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE)

SI NOTI CHE LA MODIFICA DELLA PENDENZA DELLA TRAVE $\boxed{2}$ È SUFFICIENTE A RENDERE NON LABILE LA STRUTTURA.
LA SOLUZIONE PRESENTATA NON È TUTTAVIA APPLICATA USUALMENTE COME SCHEMA STATICO NELLE STRUTTURE PORTANTI DI SCAFFALI / SCAFFALATURE.

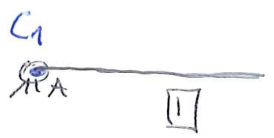
CATENE CINEMATICHE.

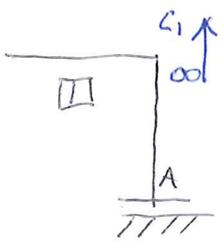
SI PASSA A FISSARE L'ATTENZIONE SULLE "CATENE CINEMATICHE", CIOÈ SU STRUTTURE UNA VOLTA LABILI: POSSONO ESSERE STRUTTURE UNA VOLTA IPOSTATICHE, O STRUTTURE ISOSTATICHE (O ADDIRITTURA IPERSTATICHE) CON DISPOSIZIONE DEI VINCOLI INEFFICACE A CONTRASTARE I MOTI RIGIDI.

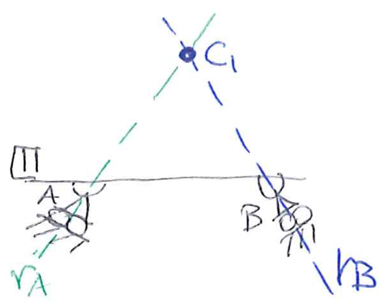
PER QUESTE STRUTTURE LA COSTRUZIONE DEI CENTRI DI ROTAZIONE AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE. IL CAMPO DI SPOSTAMENTI È INDIVIDUATO DA UN UNICO PARAMETRO (LAGRANGIANO): È QUINDI DEFINITO A MENO DI UN "FATTORE DI AMPIEZZA" DOTATO DI SEGNO. IN ALTRI TERMINI LA POSIZIONE DEI CENTRI ASSOLUTI E RELATIVI È COMPLETAMENTE DETERMINATA, MA IL CAMPO DI SPOSTAMENTI HA RAPPRESENTAZIONE NON UNIVOCA: ANCHE FISSANDONE L'AMPIEZZA RESTANO 2 POSSIBILITÀ DI RAPPRESENTAZIONE CARATTERIZZATE DA DIFFERENZE DI SEGNO (LEGATE ALLA SCELTA DI CONSIDERARE ROTAZIONI ORARIE/ANTIORARIE).

COME ESEMPI DI CATENE CINEMATICHE CARATTERIZZATE DA UN SOLO CORPO RIGIDO SI POSSONO AVERE QUESTE:

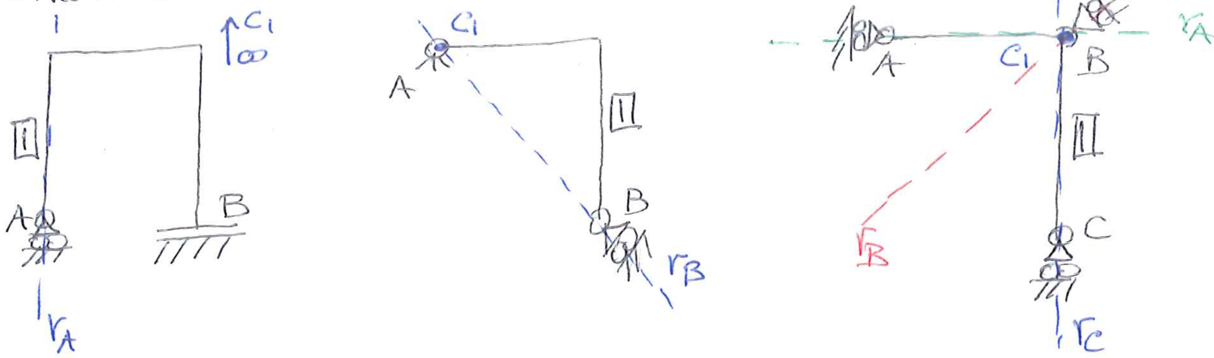
STRUTTURE UNA VOLTA IPOSTATICHE:



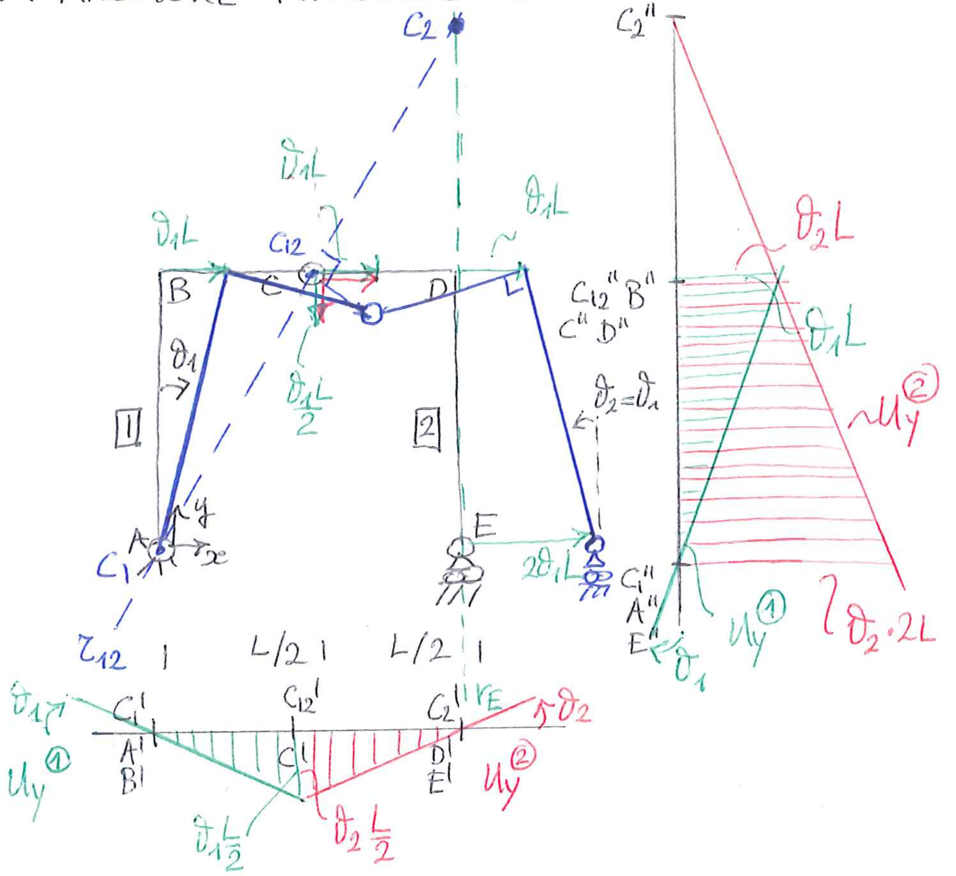




STRUTTURE ISOSTATICHE LABILI:



DI MAGGIORE INTERESSE LE CATENE CINEMATICHE COSTITUITE DA 2 CORPI:



LA STRUTTURA E' <u>UNA VOLTA IPOSTATICA</u>: GDL $= 2 \times 3 = 6$; GDV $= 2(A) + 2(C) + 1(E) = 5$.
IL VINCOLO A TERRA IN Ⓐ FISSA C_1: $C_1 = (0,0)$; IL VINCOLO INTERNO IN Ⓒ FISSA C_{12}: $C_{12} = (\frac{L}{2}, L)$; PER DETERMINARE C_2 OCCORRONO 2 CONDIZIONI:

$$\left.\begin{cases} C_2 \in r_E \\ C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12} \end{cases}\right\} C_2 = (L, 2L)$$

NOTI I CENTRI ASSOLUTI E RELATIVI SI POSSONO COSTRUIRE I DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO E DA QUI LA "SPOSTATA RIGIDA".
SI OSSERVA CHE IL PUNTO C_{12} DEVE SUBIRE EGUALI SPOSTAMENTI (SIA ORIZZONTALI CHE VERTICALI) PER LE DUE TRAVI.

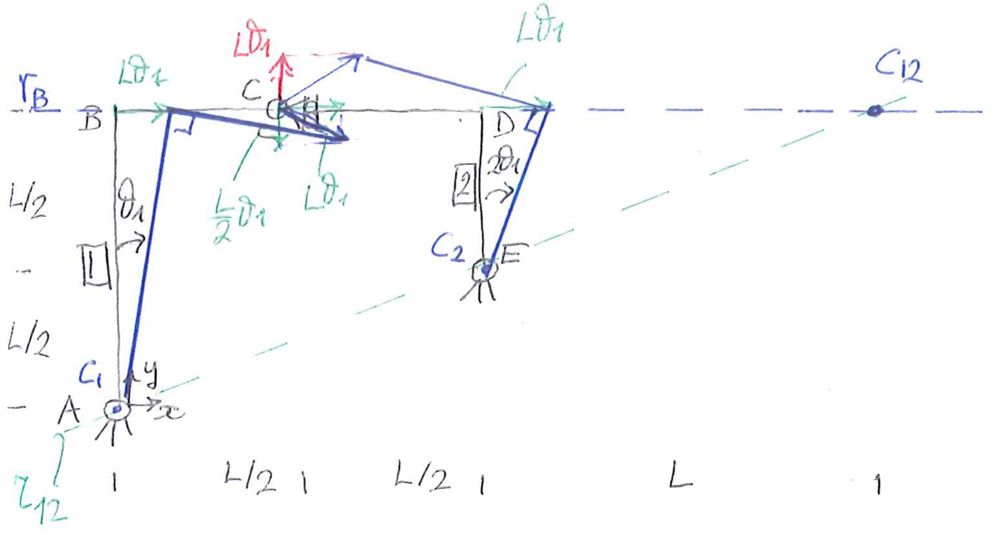
DALL'EGUAGLIANZA DEGLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI SEGUE:

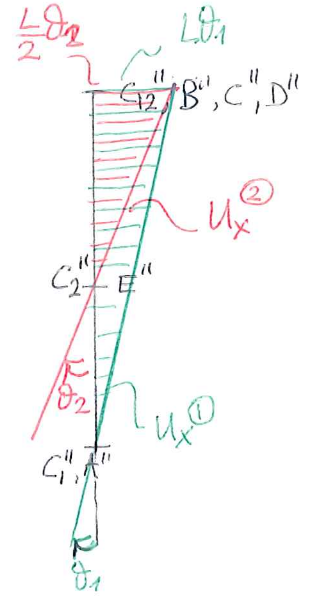
$$u^{(1)}_{C_{12}x} = \vartheta_1 L = \vartheta_2 L = u^{(2)}_{C_{12}x} \Rightarrow \vartheta_1 \cancel{L} = \vartheta_2 \cancel{L} \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1$$

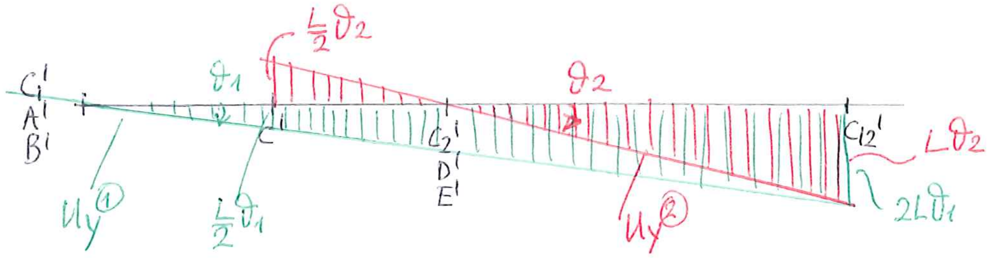
ANALOGAMENTE DALL'EGUAGLIANZA DEGLI SPOSTAMENTI VERTICALI SI HA:

$$u^{(1)}_{C_{12}y} = \vartheta_1 \frac{L}{2} = \vartheta_2 \frac{L}{2} = u^{(2)}_{C_{12}y} \Rightarrow \vartheta_1 \cancel{\tfrac{L}{2}} = \vartheta_2 \cancel{\tfrac{L}{2}} \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1.$$

NEL SECONDO ESEMPIO È C_{12} CHE DEVE ESSERE DETERMINATO CON LA CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO:







LA STRUTTURA E' ANCORA 1 VOLTA IPOSTATICA: GDL = 6; GDV = 5.

I VINCOLI A TERRA FISSANO $C_1 \equiv (A) = (0,0)$ E $C_2 \equiv (E) = (L, \frac{L}{2})$; IL VINCOLO INTERNO IN (C) STABILISCE SOLO CHE $C_{12} \in r_B$.
LA CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_{12} \in r_{12}$ CONSENTE DI LOCALIZZARE COMPLETAMENTE C_{12}: $C_{12} = (2L, L)$

RICORDANDO CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO DEL PUNTO C_{12} DEVONO ESSERE EGUALI SI TROVA:

$$u^{(1)}_{C_{12}y} = 2L\vartheta_1 = L\vartheta_2 = u^{(2)}_{C_{12}y} \quad \Rightarrow \quad 2\vartheta_1 = \vartheta_2 \quad \Rightarrow \vartheta_2 = 2\vartheta_1$$

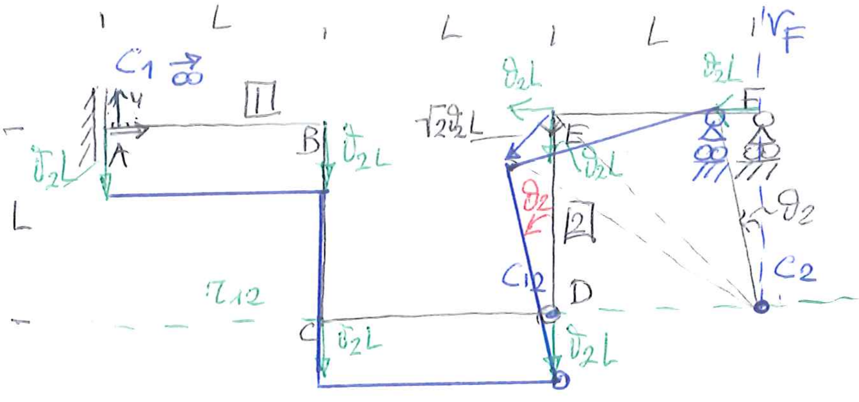
$$u^{(1)}_{C_{12}x} = L\vartheta_1 = \frac{L}{2}\vartheta_2 = u^{(2)}_{C_{12}x} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 = \frac{1}{2}\vartheta_2 \quad \Rightarrow \vartheta_2 = 2\vartheta_1$$

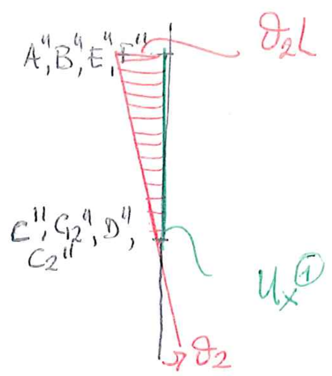
SI OSSERVI INOLTRE CHE NEL PUNTO C DOVE È PRESENTE IL CARRELLO SI TROVA CONTINUITA' DEGLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI (IL VINCOLO INTERNO BLOCCA INFATTI GLI SPOSTAMENTI RELATIVI IN TALE DIREZIONE: $u^{(1)}_{Cx} = u^{(2)}_{Cx} \Rightarrow u^{(1)}_{Cx} - u^{(2)}_{Cx} = 0$), MENTRE GLI SPOSTAMENTI VERTICALI SONO DIFFERENTI, INQUANTO IL CARRELLO SCORRE LUNGO IL PIANO DI SCORRIMENTO.

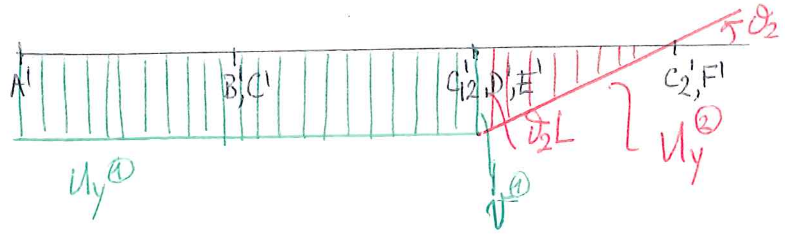
NEL TERZO ESEMPIO SI CONSIDERA LA PRESENZA DI UN PUNTO IMPROPRIO FRA I CENTRI DI ROTAZIONE ASSOLUTI.

LA STRUTTURA E' ANCORA UNA VOLTA IPOSTATICA: GDL = 6, GDV = 5.

I VINCOLI A TERRA FISSANO $C_1 = (\infty, 0)$ E RICHIEDONO CHE $C_2 \in r_F$;
IL VINCOLO INTERNO COMPORTA CHE $C_{12} = (2L, -L)$
PER DETERMINARE C_2 SI DEVE FARE USO DELL'ALLINEAMENTO
$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_{12}$; SI OTTIENE COSÌ $C_2 = (3L, -L)$







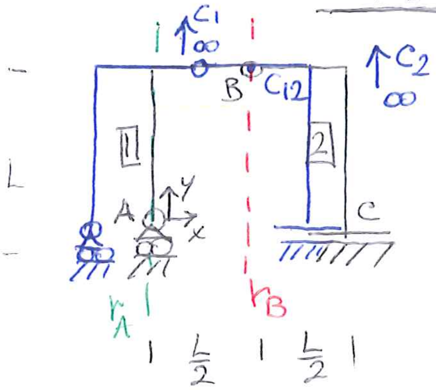
SI OSSERVI CHE LA TRAVE [1] SUBISCE SOLO UNA TRASLAZIONE VERTICALE DI ENTITÀ $v^{(1)} = \vartheta_2 L$ (IL VALORE È DETERMINATO DALLA EGUAGLIANZA DEGLI SPOSTAMENTI DEL PUNTO C_{12}); LA TRAVE [2] RUOTA DI UN ANGOLO ϑ_2 ATTORNO A C_2. OVVIAMENTE AL DIAGRAMMA DELLE COMPONENTI ORIZZONTALI CONTRIBUISCE SOLO LA TRAVE [2].

OCCORRE PRESTARE ATTENZIONE ALLE SITUAZIONI NELLE QUALI SI HA COINCIDENZA DEI CENTRI.

SI POSSONO DISTINGUERE DUE CASI:

1) COINCIDENZA DEI CENTRI ASSOLUTI ($C_1 \equiv C_2$)

SE I CENTRI ASSOLUTI COINCIDONO, ALLORA I DUE CORPI SI MUOVONO COME UN UNICO CORPO RIGIDO: NON SI HANNO MOTI RELATIVI.



PER IL VINCOLO A TERRA IN (C) $C_2 = (\infty, \infty)$

PER IL VINCOLO INTERNO IN (B) $C_{12} = (\frac{L}{2}, L)$

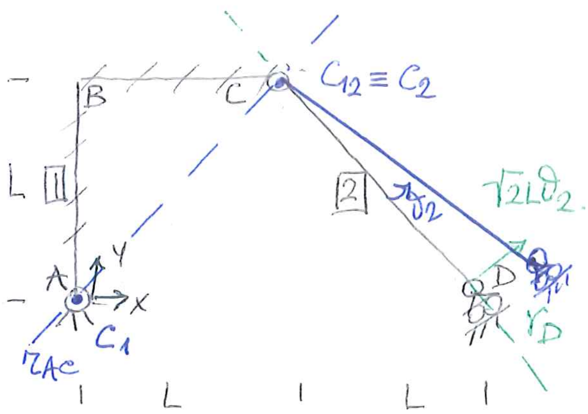
PER IL VINCOLO A TERRA IN (A) $C_1 \in r_A$.

D'ALTRA PARTE L'ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$ IMPONE $C_1 \in r_B$: NE SEGUE $C_1 = (\infty, \infty) \equiv C_2$

2) COINCIDENZA DI UN CENTRO ASSOLUTO CON IL CENTRO RELATIVO ($C_2 \equiv C_{12}$)

SE IL CENTRO ASSOLUTO DI UN CORPO, PER ESEMPIO C_2 COINCIDE CON IL CENTRO RELATIVO C_{12}, ALLORA SI HA CINEMATISMO (CIOÈ MOTO) PARZIALE: IL CORPO [1] RESTA FISSO E IMMOBILE, IL CORPO [2] SI SPOSTA RUOTANDO ATTORNO A $C_2 \equiv C_{12}$.

ANALOGHE CONSIDERAZIONI VALGONO SE $C_1 \equiv C_{12}$.



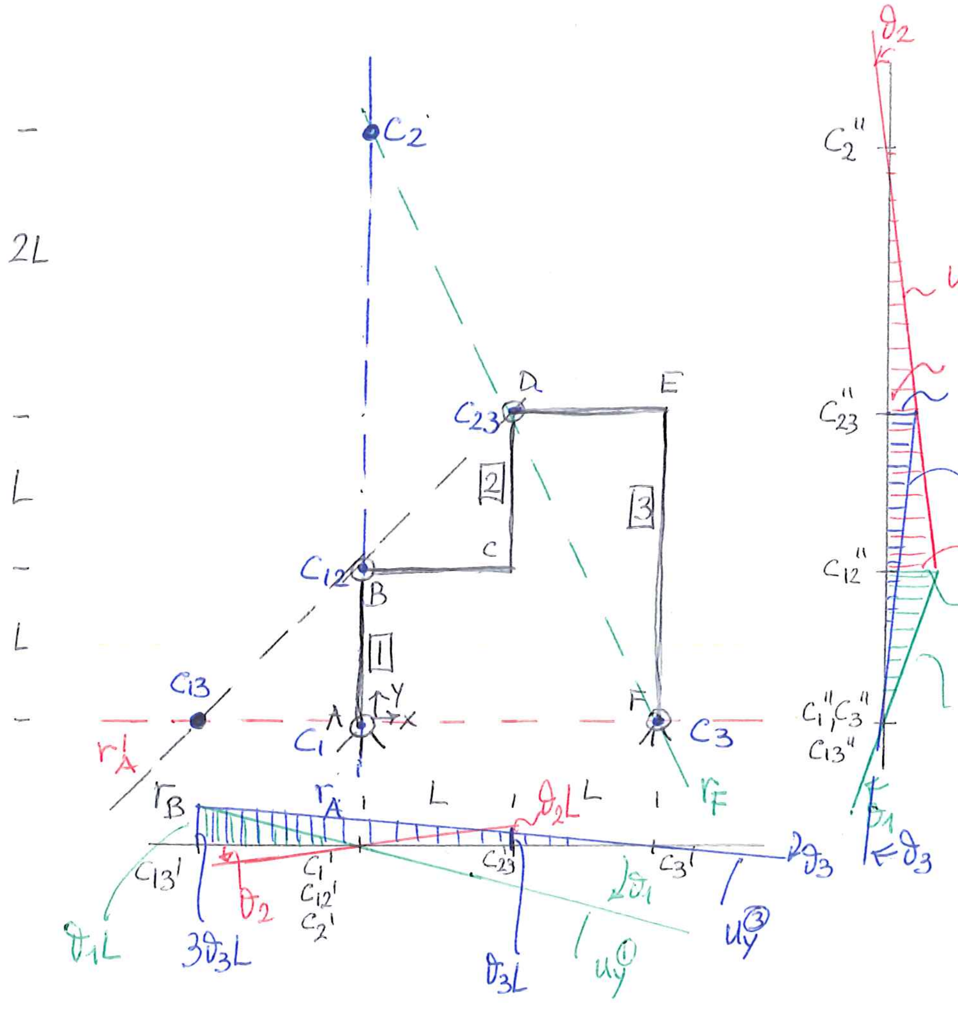
LA STRUTTURA È ANCORA 1 VOLTA IPOSTATICA.

IL VINCOLO A TERRA IN (A) IMPONE $C_1 = (0,0)$; IL VINCOLO INTERNO IN (C) $C_{12} = (L,L)$; IL VINCOLO A TERRA IN D RICHIEDE $C_2 \in r_D$.

L'ALLINEAMENTO $C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2$ COMPORTA CHE $C_2 \in r_{AC}$: PERTANTO $C_2 \equiv C_{12} = (L,L)$

POICHÉ IL PUNTO C_{12} SUBISCE EGUALI SPOSTAMENTI SE LI SI VALUTA SULLE 2 TRAVI, CIOÈ $\vec{u}^{(1)}_{C_{12}} = \vec{u}^{(2)}_{C_{12}}$ ED ESSENDO $C_{12} = C_2$ SI HA $\vec{u}^{(2)}_{C_{12}} = \vec{0}$. MA ALLORA DEVE ESSERE $\vec{u}^{(1)}_{C_{12}} = \vec{0}$ E CIÒ COMPORTA CHE LA TRAVE [1] RESTI FISSA: INFATTI SI AVREBBE $\vec{u}^{(1)}_{C} = \vec{\omega}^{(1)} \wedge (C-A)$, CHE RISULTA $\neq \vec{0}$ SE $\vec{\omega}^{(1)} \neq \vec{0}$, CIOÈ SE $\vartheta_1 \neq 0$ (SI RICORDA CHE $\vec{\omega}^{(1)} = \vartheta_1 \vec{k}$).

COME ULTIMA APPLICAZIONE SI CONSIDERA IL CALCOLO DELLA SPOSTATA RIGIDA DI UNA STRUTTURA UNA VOLTA IPOSTATICA COSTITUITA DA 3 TRAVI: GDL = 3x3 = 9; GDV = 2(A) + 2(B) + 2(D) + 2(F) = 8.



I VINCOLI A TERRA CONSENTONO DI DETERMINARE $C_1 = (0,0)$ E $C_3(2L,0)$; I VINCOLI INTERNI $C_{12} = (0,L)$ E $C_{23} = (L,2L)$.

PER DETERMINARE C_2 SI DEVONO USARE I DUE ALLINEAMENTI SEGUENTI:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in r_A \\ C_2 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_3 \Rightarrow C_2 \in r_F \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 = (0, 4L)$$

INFINE PER DETERMINARE C_{13} SI FA USO DEGLI ULTIMI 2 ALLINEAMENTI:

$$\left.\begin{cases} \underline{C}_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow \underline{C}_3 & \Rightarrow C_3 \in r'_A \\ \underline{C}_{12} \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow \underline{C}_{23} & \Rightarrow C_3 \in r_B \end{cases}\right\} \quad C_3 = (-L, 0)$$

SULLA BASE DEI DIAGRAMMI DEGLI SPOSTAMENTI SI POSSONO RICAVARE I LEGAMI FRA GLI ANGOLI $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

IN CORRISPONDENZA DI C_{12} DEVE RISULTARE $u^{(1)}_{C_{12x}} = u^{(2)}_{C_{12x}} \Rightarrow \vartheta_1 L = 3\vartheta_2 L$
OVVERO $\vartheta_2 = \frac{1}{3}\vartheta_1$.

IN CORRISPONDENZA DI C_{23} DEVE RISULTARE $u^{(2)}_{C_{23x}} = u^{(3)}_{C_{23x}} \Rightarrow 2\vartheta_2 L = 2\vartheta_3 L$
OVVERO $\vartheta_3 = \vartheta_2 = \frac{1}{3}\vartheta_1$

SI GIUNGE COSÌ A DETERMINARE GLI SPOSTAMENTI DI TUTTI I PUNTI SIGNIFICATIVI (IN FUNZIONE DELL'ANGOLO ϑ_1)

- A $u_x = 0$; $u_y = 0$
- B $u_x = \vartheta_1 L$; $u_y = 0$
- C $u_x = \vartheta_1 L$; $u_y = \frac{1}{3}\vartheta_1 L = \vartheta_2 L$
- D $u_x = \frac{2}{3}\vartheta_1 L$; $u_y = \frac{1}{3}\vartheta_1 L$
- E $u_x = \frac{2}{3}\vartheta_1 L$; $u_y = 0$
- F $u_x = 0$; $u_y = 0$

SI PASSA QUINDI A RIPORTARE QUESTI SPOSTAMENTI SUL GRAFICO DELLA STRUTTURA E A TRACCIARE LA "SPOSTATA RIGIDA":