CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI PIANI.

IN ANALOGIA CON LO STUDIO DELLA STATICA DI SISTEMI RIGIDI PIANI, FIN QUI CONDOTTO, HA SENSO SOFFERMARSI SULL'ASPETTO DUALE DELLA LORO CINEMATICA, CHE CONSISTE NELL'AFFRONTARE L'ANALISI DEI POSSIBILI MOTI, PRESCINDENDO DALLE CAUSE CHE LI PRODUCONO.

CI SI LIMITA, PER SEMPLICITA', AD ANALIZZARE LA CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI NEL PIANO, IN PERFETTA ANALOGIA CON QUANTO SI È FATTO IN AMBITO STATICO: LO SI FA A PARTIRE DALLO STUDIO DEL SINGOLO CORPO RIGIDO.

È INFATTI NOTO CHE, NEL PIANO, UN CORPO RIGIDO POSSIEDE <u>3 G.D.L.</u>, CHE CORRISPONDONO AD ALTRETTANTE POSSIBILITA' DI MOTO (O DI SPOSTAMENTO GENERALIZZATO) INDIPENDENTI.

SE I G.D.L VENGONO "BLOCCATI" UNO DOPO L'ALTRO PER EFFETTO DELLA INTRODUZIONE DI VINCOLI, LE POSSIBILITA' DI MOTO (O DI SPOSTAMENTO) SI RIDUCONO CONSEGUENTEMENTE, E SI ANNULLANO DEL TUTTO QUANDO TUTTI I G.D.L RISULTANO VINCOLATI.

SI INIZIA CON L'ANALIZZARE IL CAMPO DI SPOSTAMENTO DI UN CORPO RIGIDO LIBERO (PRIVO DI VINCOLI): OCCORRE PRELIMINARMENTE OSSERVARE CHE IL VINCOLO DI RIGIDITA', PRESCRIVENDO CHE LA DISTANZA <u>FRA 2 PUNTI QUALSIASI</u> DEL CORPO RIGIDO DEBBA MANTENERSI INVARIANTE (CIOÈ <u>NON POSSA MUTARE</u> PER EFFETTO DEL MOTO) PONE SEVERE LIMITAZIONI SUI MOTI POSSIBILI.

IN SOSTANZA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE GLI UNICI MOTI <u>COMPATIBILI</u> CON IL VINCOLO DI RIGIDITA' SONO

- TRASLAZIONI
- ROTAZIONI.

UNA DIMOSTRAZIONE RIGOROSA DI QUESTA AFFERMAZIONE ESULA DALLO SCOPO DI QUESTE NOTE; CIÒ CHE SI PUÒ MOSTRARE ABBASTANZA AGEVOLMENTE È CHE QUESTI TIPI DI MOTO PRESERVANO LE DISTANZE FRA <u>2 PUNTI QUALSIASI</u> E SONO QUINDI AMMISSIBILI PER UN CORPO RIGIDO.

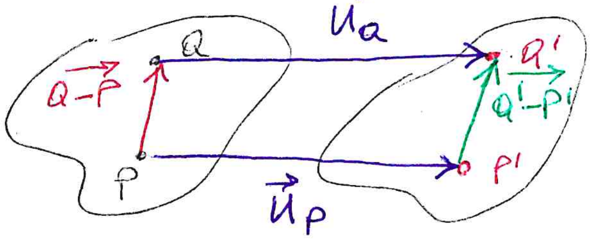
PIÙ SPECIFICAMENTE SI PUÒ AFFERMARE CHE TRASLAZIONI E ROTAZIONI SONO <u>MOTI RIGIDI</u>, CIOÈ NON ALTERANO LE DISTANZE FRA 2 PUNTI COMUNQUE SCELTI.

COMBINANDO OPPORTUNAMENTE TRASLAZIONI E ROTAZIONI SI OTTENGONO ANCORA MOTI RIGIDI, SICCHÉ È LECITO AFFERMARE CHE IL PIÙ GENERALE MOTO CONSENTITO A UN CORPO RIGIDO È UNA <u>ROTO-TRASLAZIONE</u>

1. <u>TRASLAZIONE</u>

UN MOTO È DEFINITO UNA TRASLAZIONE SE RISULTA, IN TERMINI DI SPOSTAMENTI $\vec{u}$, CHE DETTO $\vec{u}_P$ LO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO P, RISULTA CHE

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P \quad \forall \text{ PUNTO } Q. \quad [1]$$



SI PUÒ VEDERE CHE INIZIALMENTE LA DISTANZA FRA P E Q È DATA DA
$d = \overline{PQ} = |\overrightarrow{Q-P}|$; A SPOSTAMENTO AVVENUTO SI HA $d' = \overline{P'Q'} = |\overrightarrow{Q'-P'}|$

SI OSSERVI CHE CON $\overline{PQ}$ SI INTENDE LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO CHE UNISCE P A Q E CHE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO COME IL MODULO DEL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO Q RISPETTO AL PUNTO P [INDIVIDUATO DA UN "SEGMENTO ORIENTATO" DA P A Q, CON LA "FRECCIA" IN Q E LA "CODA" IN P]. 2

ANALIZZANDO LA FIGURA, SI VEDE CHE

$$(\overrightarrow{Q'-P'}) = -\vec{u}_P + (\overrightarrow{Q-P}) + \vec{u}_Q$$

MA $\vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{0}$ E PERTANTO

$$(\overrightarrow{Q'-P'}) = (\overrightarrow{Q-P}) \implies |\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$$

SI NOTI CHE LA IMPLICAZIONE VALE SOLO NEL VERSO INDICATO: $|\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}| \not\Rightarrow (\overrightarrow{Q'-P'}) = (\overrightarrow{Q-P})$!

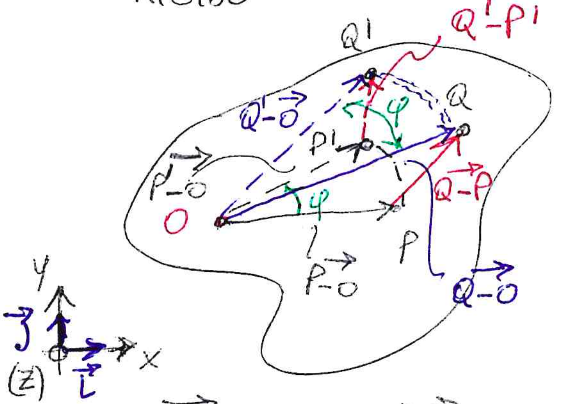
CIOÈ NON SOLO $|\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$, MA I DUE VETTORI HANNO ANCHE LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO.

PERTANTO UNA TRASLAZIONE, DEFINITA DALLA [1], SODDISFA IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!

2. ROTAZIONE

IN UNA ROTAZIONE TUTTI I PUNTI DEL CORPO RIGIDO RUOTANO ATTORNO A UN ASSE, PERPENDICOLARE AL PIANO, L'ASSE DI ROTAZIONE, CHE INTERSECA IL PIANO STESSO IN UN PUNTO O, IL CENTRO DI ROTAZIONE.(*)
QUESTO PUNTO NON SUBISCE ALCUNO SPOSTAMENTO; OGNI ALTRO PUNTO P DESCRIVE UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO $R = |\overrightarrow{P-O}|$, DI APERTURA ANGOLARE φ.

SI HA QUINDI, PRESI DUE PUNTI P E Q QUALSIASI ALL'INTERNO DEL CORPO RIGIDO



SI VUOLE VERIFICARE SE $d = |\overrightarrow{Q-P}|$ È EGUALE A $d' = |\overrightarrow{Q'-P'}|$.

L'EFFETTO DELLA ROTAZIONE È QUELLO DI TRASFORMARE IL VETTORE $(\overrightarrow{P-O})$ NEL VETTORE $(\overrightarrow{P'-O})$, E IL VETTORE $(\overrightarrow{Q-O})$ NEL VETTORE $(\overrightarrow{Q'-O})$. MEDIANTE UN TENSORE DI ROTAZIONE, $\underline{\underline{R}}$ SI HA INFATTI

$$\left.\begin{aligned} (\overrightarrow{P'-O}) &= \underline{\underline{R}}\,(\overrightarrow{P-O}); \\ (\overrightarrow{Q'-O}) &= \underline{\underline{R}}\,(\overrightarrow{Q-O}). \end{aligned}\right\} \quad [2].$$

IL TENSORE DI ROTAZIONE, CHE È RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE 2:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

OPERA SU UN VETTORE TRASFORMANDOLO IN UN ALTRO VETTORE: PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME UNA TRASFORMAZIONE LINEARE NELLO SPAZIO DEI VETTORI.

(*) SI NOTI CHE IL CENTRO DI ROTAZIONE PUÒ ESSERE ESTERNO AL CORPO RIGIDO; QUESTO TUTTAVIA SI MUOVE DI MOTO SOLIDALE, COME SE FOSSE "ATTACCATO" MEDIANTE UNA BARRETTA AL CENTRO DI ROTAZIONE.

L'EFFETTO DI $\underline{\underline{R}}$ PUÒ ESSERE EVIDENZIATO SE SI INTRODUCONO LE COMPONENTI DEI VETTORI:

$$\overrightarrow{(P-O)} = (x_P - x_O)\vec{i} + (y_P - y_O)\vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{(P'-O)} = (x_{P'} - x_O)\vec{i} + (y_{P'} - y_O)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{(Q-O)} = (x_Q - x_O)\vec{i} + (y_Q - y_O)\vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{(Q'-O)} = (x_{Q'} - x_O)\vec{i} + (y_{Q'} - y_O)\vec{j}$$

DOVE $\vec{i}$ E $\vec{j}$ SONO I VERSORI DEGLI ASSI X E Y.

SE POI SI FA USO DI UNA NOTAZIONE MATRICIALE IN CUI SI RAPPRESENTANO RIGA PER RIGA LE COMPONENTI DEI VETTORI:

$$\overrightarrow{(P-O)} = \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix}; \overrightarrow{(P'-O)} = \begin{Bmatrix} x_{P'} - x_O \\ y_{P'} - y_O \end{Bmatrix}; \quad \overrightarrow{(Q-O)} = \begin{Bmatrix} x_Q - x_O \\ y_Q - y_O \end{Bmatrix}; \quad \overrightarrow{(Q'-O)} = \begin{Bmatrix} x_{Q'} - x_O \\ y_{Q'} - y_O \end{Bmatrix}$$

SI HA CHE LA PRIMA DELLE [2] DIVIENE:

$$\overrightarrow{(P'-O)} = \begin{Bmatrix} x_{P'} - x_O \\ y_{P'} - y_O \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}\overrightarrow{(P-O)}} = \begin{Bmatrix} \cos\vartheta(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ \sin\vartheta(x_P - x_O) + \cos\vartheta(y_P - y_O) \end{Bmatrix} \qquad [3]$$

DOVE $\underline{\underline{R}}$ OPERA SU $\overrightarrow{(P-O)}$ MEDIANTE UNA MOLTIPLICAZIONE (RIGHE PER COLONNE) FRA MATRICI.

LA [3] INDICA CHE LE COMPONENTI DEL VETTORE RUOTATO $\overrightarrow{(P'-O)}$, CIOÈ DEL TRASFORMATO DI $\overrightarrow{(P-O)}$ MEDIANTE $\underline{\underline{R}}$, SONO:

$$\left.\begin{aligned} x_{P'} - x_O &= \cos\vartheta(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ y_{P'} - y_O &= \sin\vartheta(x_P - x_O) + \cos\vartheta(y_P - y_O) \end{aligned}\right. \qquad [4]$$

SI È QUINDI CAPITO CHE COSA SUCCEDE AL VETTORE $\overrightarrow{(P-O)}$; CON RAGIONAMENTO ANALOGO SI VEDE COME SI TRASFORMA IL VETTORE $\overrightarrow{(Q-O)}$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x_{Q'} - x_O \\ y_{Q'} - y_O \end{Bmatrix}}_{\overrightarrow{(Q'-O)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_Q - x_O \\ y_Q - y_O \end{Bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}(Q-O)} = \begin{Bmatrix} \cos\vartheta(x_Q - x_O) - \sin\vartheta(y_Q - y_O) \\ \sin\vartheta(x_Q - x_O) + \cos\vartheta(y_Q - y_O) \end{Bmatrix} \qquad [5]$$

SICCHÉ:

$$\left.\begin{aligned} x_{Q'} - x_O &= \cos\vartheta(x_Q - x_O) - \sin\vartheta(y_Q - y_O) \\ y_{P'} - y_O &= \sin\vartheta(x_Q - x_O) + \cos\vartheta(y_Q - y_O) \end{aligned}\right. \qquad [6]$$

OCCORRE ORA VEDERE CHE COSA SUCCEDE AL VETTORE $\overrightarrow{(Q-P)}$, DI COMPONENTI $\begin{Bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{Bmatrix}$.

PER UNA RELAZIONE ANALOGA ALLE [2] SI HA:

$$\overrightarrow{(Q'-P')} = \underline{\underline{R}}\,\overrightarrow{(Q-P)}, \quad \text{CON } \overrightarrow{(Q'-P')} = \begin{Bmatrix} x_{Q'} - x_{P'} \\ y_{Q'} - y_{P'} \end{Bmatrix}$$

D'ALTRA PARTE È ANCHE $\overrightarrow{(Q'-P')} = \overrightarrow{(Q'-O)} - \overrightarrow{(P'-O)}$ E SIMILMENTE

$(\overrightarrow{Q-P}) = (\overrightarrow{Q-O}) - (\overrightarrow{P-O})$

PERTANTO $(\overrightarrow{Q'-P'}) = \underline{R}\left[(\overrightarrow{Q-O})-(\overrightarrow{P-O})\right] = \underbrace{\underline{R}(\overrightarrow{Q-O})}_{(\overrightarrow{Q'-O})} - \underbrace{\underline{R}(\overrightarrow{P-O})}_{(\overrightarrow{P'-O})}$

IN QUANTO $\underline{R}$ È OPERATORE LINEARE.

SE ALLORA SI COMBINANO LE [3] E [5], OVVERO LE [4] E [6] SI TROVA:

$$x'_Q - x'_P = \cos\vartheta(x_Q-x_P) - \sin\vartheta(y_Q-y_P)$$
$$y'_Q - y'_P = \sin\vartheta(x_Q-x_P) + \cos\vartheta(y_Q-y_P).$$

$(\overrightarrow{Q'-P'})$

PER VALUTARE d' SI CONSIDERA CHE $(\overrightarrow{Q'-P'}) \times (\overrightarrow{Q'-P'}) = |\overrightarrow{Q'-P'}|^2 = d'^2$

E SI TROVA:

$$d'^2 = \left[\cos\vartheta(x_Q-x_P) - \sin\vartheta(y_Q-y_P)\right]^2 + \left[\sin\vartheta(x_Q-x_P) + \cos\vartheta(y_Q-y_P)\right]^2$$

$$d'^2 = \left[\cos^2\vartheta(x_Q-x_P)^2 + \sin^2\vartheta(y_Q-y_P)^2 - \cancel{2\sin\vartheta\cos\vartheta(x_Q-x_P)(y_Q-y_P)}\right] +$$
$$+\left[\sin^2\vartheta(x_Q-x_P)^2 + \cos^2\vartheta(y_Q-y_P)^2 + \cancel{2\sin\vartheta\cos\vartheta(x_Q-x_P)(y_Q-y_P)}\right]$$

$$d'^2 = \left[(\underbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{=1})(x_Q-x_P)^2 + (\underbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{=1})(y_Q-y_P)^2\right] = (x_Q-x_P)^2 + (y_Q-y_P)^2$$

D'ALTRA PARTE $d^2 = |Q-P|^2 = (\overrightarrow{Q-P}) \times (\overrightarrow{Q-P}) = (x_Q-x_P)^2 + (y_Q-y_P)^2$ E SI RICONOSCE CHE $d'^2 = d^2 \Rightarrow |\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$

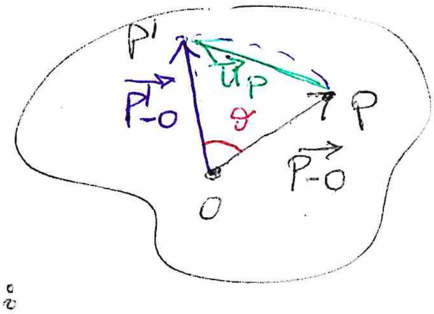
IN QUESTO CASO, TUTTAVIA, $(\overrightarrow{Q'-P'}) \neq (\overrightarrow{Q-P})$ POICHÉ I DUE VETTORI HANNO DIREZIONEE VERSO DIFFERENTE.

SI OSSERVI CHE PER DIMOSTRARE L'INVARIANZA DELLA DISTANZA È STATO NECESSARIO CONSIDERARE 2 PUNTI ASSOLUTAMENTE GENERICI, PRIVI QUINDI DI CONNOTAZIONI PARTICOLARI, COME SAREBBE SE SI ASSUMESSE UNO DEI PUNTI COINCIDENTE CON IL CENTRO DI ROTAZIONE, O. CON QUESTO SI È MOSTRATO CHE UNA ROTAZIONE È UN MOTO CHE RISPETTA IL VINCOLO DI RIGIDITÀ.

SI OSSERVI ANCHE CHE, PER EFFETTO DELLA ROTAZIONE IL PUNTO P SUBISCE QUESTO SPOSTAMENTO, OVVIAMENTE DIRETTO COME LA CONGIUNGENTE P A P':

$\vec{u}_P = (\overrightarrow{P'-O}) - (\overrightarrow{P-O}) = (\overrightarrow{P'-P})$

D'ALTRA PARTE, PER LA PRIMA DELLE [2] È:



$\vec{u}_P = \underline{R}(\overrightarrow{P-O}) - (\overrightarrow{P-O})$ [7]

E SE SI INTRODUCE IL TENSORE IDENTITÀ $\underline{I}$, CHE TRASFORMA OGNI VETTORE IN SE STESSO:

$\underline{I}(\overrightarrow{P-O}) = \overrightarrow{P-O}$, SI PUÒ ANCHE SCRIVERE LA [7] IN QUESTA FORMA:

$$\vec{u}_P = \underline{\underline{R}}(\vec{P-O}) - \underline{\underline{I}}(\vec{P-O}) \quad [7']$$

IL TENSORE IDENTITA' È ANCHE ESSO RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE 2 COSIFFATTA:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SI VERIFICA FACILMENTE, OPERANDO PER COMPONENTI CHE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{I}}(\vec{P-O}) = (\vec{P-O})$$

TENENDO CONTO CHE GLI OPERATORI $\underline{\underline{R}}$ E $\underline{\underline{I}}$ SONO APPLICATI AL MEDESIMO VETTORE, SI PUÒ TRASFORMARE LA [7'] COME SEGUE:

$$\vec{u}_P = [\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}](\vec{P-O}) \quad [8]$$

FACENDO COMPARIRE UN NUOVO TENSORE CHE È LA DIFFERENZA FRA $\underline{\underline{R}}$ E $\underline{\underline{I}}$. LA FORMA MATRICIALE DI $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ È LA SEGUENTE:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}$$

SE SI SVILUPPA LA [8] PER COMPONENTI, INTRODUCENDO IL VETTORE $\vec{u}_P = u_{Px}\vec{i} + u_{Py}\vec{j}$ RAPPRESENTABILE IN FORMA MATRICIALE COME $\vec{u}_P = \begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix}$ SI HA:

$$\begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\cos\theta - 1)(x_P - x_O) - \sin\theta(y_P - y_O) \\ \sin\theta(x_P - x_O) + (\cos\theta - 1)(y_P - y_O) \end{Bmatrix} \quad [8']$$

E QUINDI SI HANNO QUESTE ESPRESSIONI ESPLICITE PER LE COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO RELATIVO AL PUNTO P, $\vec{u}_P$:

$$\begin{aligned} u_{Px} &= (\cos\theta - 1)(x_P - x_O) - \sin\theta(y_P - y_O) \\ u_{Py} &= \sin\theta(x_P - x_O) + (\cos\theta - 1)(y_P - y_O). \end{aligned} \quad [8'']$$

SI È VISTO CHE TRASLAZIONI E ROTAZIONI NON VIOLANO IL VINCOLO DI RIGIDITA' E SONO QUALIFICABILI COME "MOTI RIGIDI". SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE, MA NON LO SI FA IN QUESTA SEDE, CHE SONO GLI UNICI MOTI CHE SODDISFANO QUESTO REQUISITO.

SI PUÒ QUINDI PENSARE CHE IL PIÙ GENERALE MOTO RIGIDO SIA COSTITUITO DALLA COMBINAZIONE TRASLAZIONE + ROTAZIONE, CIOÈ UNA ROTO-TRASLAZIONE.

IN PARTICOLARE, SI PUÒ SCEGLIERE IL PUNTO P COINCIDENTE CON IL CENTRO DI ROTAZIONE; IN QUESTO CASO LO SPOSTAMENTO DEL GENERICO PUNTO Q SI

ESPRIME IN QUESTO MODO:

$$\vec{u}_Q = \underbrace{\boxed{\vec{u}_P}}_{\text{TRASLAZIONE}} + \underbrace{\boxed{[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}](Q-P)}}_{\text{ROTAZIONE}} \qquad [9]$$

CIOÈ, IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{Bmatrix} u_{Qx} \\ u_{Qy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\vartheta - 1 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{Bmatrix} \qquad [9']$$

E PER COMPONENTI:

$$\begin{aligned} u_{Qx} &= u_{Px} + (\cos\vartheta - 1)(x_Q - x_P) - \sin\vartheta\,(y_Q - y_P) \\ u_{Qy} &= u_{Py} + \sin\vartheta\,(x_Q - x_P) + (\cos\vartheta - 1)(y_Q - y_P) \end{aligned} \qquad [9'']$$

SI NOTI CHE LA [9] • SI RIDUCE A PURA TRASLAZIONE SE $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$ (*)

• SI RIDUCE A PURA ROTAZIONE (ATTORNO A P) SE $\vec{u}_P = \vec{0}$

LE [9'] O LE [9''] RIVELANO CHE SE SONO NOTI I PUNTI P E Q CON LE LORO COORDINATE, SE SONO ASSEGNATI L'ANGOLO DI ROTAZIONE ϑ E IL VETTORE $\vec{u}_P$ È POSSIBILE DETERMINARE COMPLETAMENTE IL VETTORE SPOSTAMENTO DEL PUNTO Q, $\vec{u}_Q$.

NEL SEGUITO SI È INTERESSATI AD APPROFONDIRE LA CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI CHE SI SPOSTANO "POCO", CIOÈ, PER ESSERE PIÙ PRECISI, SOGGETTI A MOTI DI AMPIEZZA INFINITESIMA.

AL FINE DELLA VALUTAZIONE DELLA CORRETTA DISPOSIZIONE DEI VINCOLI, PER ESEMPIO, BISOGNA GARANTIRE CHE NON POSSANO AVERE LUOGO SPOSTAMENTI DI AMPIEZZA COMUNQUE PICCOLA E CIÒ BASTA AD ASSICURARE CHE NON SI POSSANO AVERE NEPPURE SPOSTAMENTI DI AMPIEZZA FINITA.

IL VANTAGGIO CHE SI CONSEGUE È QUELLO DI AVERE ESPRESSIONI PIÙ SEMPLICI DA TRATTARE (CINEMATICA LINEARIZZATA, INVECE CHE NON LINEARE) E CHE FORNISCONO COMUNQUE RISULTATI VALIDI QUANDO GLI SPOSTAMENTI SONO PICCOLI, E TANTO PIÙ PRECISI QUANTO PIÙ QUESTI SONO PROSSIMI AL CONCETTO DI INFINITESIMO.

SI INTRODUCONO QUINDI QUESTE 2 IPOTESI:

I) $\vartheta \ll 1$ (rad)

ALLORA IN BASE A QUANTO GIÀ VISTO, SE SI SVILUPPANO IN SERIE DI POTENZE LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE:

$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \dots$$

E SI CONSIDERA SOLO IL PRIMO TERMINE DI OGNI SVILUPPO, SI HA:

(*) È FACILE VEDERE CHE QUESTO CAPITA SE $\vartheta = 0$ (O, IN GENERALE $\vartheta = k \cdot 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$) CIOÈ SE L'ANGOLO DI ROTAZIONE SI ANNULLA

$\sin\vartheta \simeq \vartheta$
$\cos\vartheta \simeq 1$ [10]

II) $|\vec{u}_P| \ll L$, CON L DIMENSIONE CARATTERISTICA DEL CORPO (PER ESEMPIO: RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AL CORPO STESSO)

CON QUESTE IPOTESI, LA FORMA MATRICIALE DI $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ INDICATA NELLE [9'] DIVIENE:

$$[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}] = \begin{bmatrix} 1-1 & -\vartheta \\ \vartheta & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

CIOÈ $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ ASSUME LA FORMA DI UNA MATRICE ANTISIMMETRICA (DIAGONALE PRINCIPALE NULLA ED ELEMENTI EXTRA DIAGONALI EGUALI IN VALORE ASSOLUTO E DI SEGNO OPPOSTO).

IN TERMINI DI COMPONENTI, LA [9''] DIVIENE:

$$u_{Qx} = \boxed{u_{Px}} \boxed{-\vartheta(y_Q - y_P)} \qquad [11]$$
$$u_{Qy} = \boxed{u_{Py}} \boxed{+\vartheta(x_Q - x_P)}$$

TRASLAZIONE INFINITESIMA — ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

UN ESAME DELLA EQ. [11] RIVELA CHE UNA ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA PUÒ ESSERE ESPRESSA MEDIANTE UN PRODOTTO VETTORIALE, PUR DI INTRODURRE UN <u>VETTORE DI ROTAZIONE INFINITESIMA</u> COSIFFATTO:

$$\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$$

↑ ANGOLO DI ROTAZIONE (CON SEGNO) — ↖ VERSORE DELL'ASSE Z.

NOTA: ESATTAMENTE IN QUESTO ORDINE!

INFATTI SE SI SVILUPPA IL PRODOTTO VETTORIALE $\vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})$ SI HA:

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \vartheta \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta \\ y_Q - y_P & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta \\ x_Q - x_P & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \underbrace{[-\vartheta(y_Q - y_P)]}_{\text{COMPONENTE X DI } \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})} + \vec{j} \underbrace{[\vartheta(x_Q - x_P)]}_{\text{COMPONENTE Y DI } \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})} + \vec{k} \cdot 0 \qquad [*]$$

↑ PARTE DI ROTAZIONE CHE INFLUENZA u_{Qx} — ↑ PARTE DI ROTAZIONE CHE INFLUENZA u_{Qy}

PERTANTO NEL CASO DI ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA LA [9] È SOSTITUITA DA:

$$\vec{u}_Q = \boxed{\vec{u}_P} + \boxed{\vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})} \qquad [12]$$

LA CUI ESPRESSIONE PER COMPONENTI COINCIDE CON LA [11].

DALLA [12] SEGUE CHE:

- SE $\vartheta = 0$ (CIOÈ $\vec{\omega} = \vec{0}$) SI HA SOLO UNA TRASLAZIONE:
$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P \text{ , OVVERO}$$
$$u_{Qx} = u_{Px} \quad \text{E} \quad u_{Qy} = u_{Py}$$
- SE $\vec{u}_P = \vec{0}$ SI HA SOLO ROTAZIONE ATTORNO A P:
$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \text{ , OVVERO}$$
$$u_{Qx} = -\vartheta\,(y_Q - y_P)$$
$$u_{Qy} = +\vartheta\,(x_Q - x_P) .$$

L'EQUAZIONE APPENA OTTENUTA, [12], VALE $\forall$ COPPIA DI PUNTI P, Q DEL CORPO RIGIDO IN ESAME; IN PARTICOLARE IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$ CHE VI COMPARE <u>NON DIPENDE</u> DAI PUNTI P, Q SCELTI, MA È UNA PROPRIETÀ DELLA ROTOTRASLAZIONE.

VALE INFATTI IL SEGUENTE TEOREMA: ASSEGNATA UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA, IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA $\vec{\omega}$ <u>NON</u> DIPENDE DALLA COPPIA DI PUNTI P, Q.

QUINDI $\quad \vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \qquad \forall\, P, Q. \qquad \vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$

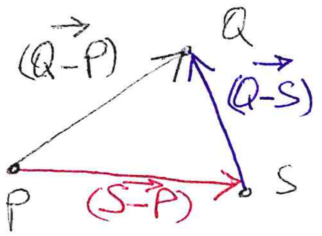
DIMOSTRAZIONE:

SI ASSUMA CHE PER LA COPPIA P, Q SI ABBIA

(a) $\quad \vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P})$

E PER LA COPPIA S, Q SI ABBIA

(b) $\quad \vec{u}_Q = \vec{u}_S + \vec{\omega}' \wedge (\overrightarrow{Q-S})$.



D'ALTRA PARTE RISULTA $(\overrightarrow{Q-P}) = (\overrightarrow{S-P}) + (\overrightarrow{Q-S})$ E DALLA (a) SEGUE:
$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge [(\overrightarrow{S-P}) + (\overrightarrow{Q-S})]$$
$$\vec{u}_Q = \underbrace{[\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{S-P})]}_{\vec{u}_S} + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-S})$$

MA $\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{S-P}) = \vec{u}_S$, PER CUI LA PRECEDENTE EQUAZIONE FORNISCE:

(c) $\quad \vec{u}_Q = \vec{u}_S + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-S})$

MA (c) DEVE FORNIRE LO STESSO RISULTATO DELLA (b) E CIÒ IMPLICA CHE SIA $\quad \vec{\omega}' = \vec{\omega}$. $\square$

SI PUÒ ANCHE VERIFICARE QUESTA PROPRIETÀ: IN UNA ROTAZIONE INFINITESIMA SI HA CHE <u>$\vec{u}_Q$ RISULTA SEMPRE PERPENDICOLARE A $(\overrightarrow{Q-P})$</u>

~~OPERANDO PER COMPONENTI SI VEDE INFATTI DALLA [+] CHE~~

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P}) = -\vartheta(y_Q - y_P)\vec{i} + \vartheta(x_Q - x_P)\vec{j}$$

D'ALTRA PARTE $(\vec{Q-P}) = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j}$ PER CUI

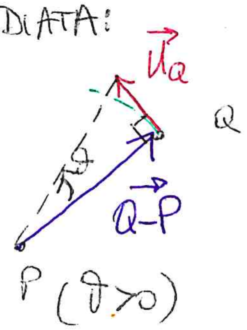
$$[\underset{\vec{a}}{\vec{\omega}} \wedge \underset{\vec{b}}{(\vec{Q-P})}] \times \underset{\vec{c}}{(\vec{Q-P})} = -\vartheta(y_Q - y_P)(x_Q - x_P) + \vartheta(x_Q - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

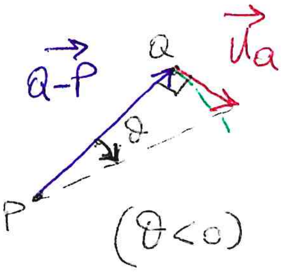
A QUESTO RISULTATO SI PUÒ PERVENIRE ANCHE SFRUTTANDO LA PROPRIETÀ CICLICA DEL PRODOTTO MISTO DI VETTORI: È NOTO INFATTI CHE DATI 3 VETTORI, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ RISULTA

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \times \vec{b}.$$

IN PARTICOLARE SE $\vec{b} = \vec{c}$ SI TROVA DALLA SECONDA FORMA $\vec{c} \wedge \vec{c} \times \vec{a} = 0$ POICHÉ IL PRODOTTO VETTORIALE DI UN VETTORE PER SE STESSO FORNISCE IL VETTORE NULLO. $(\vec{0})$

DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO LA CONSEGUENZA DI QUESTA PROPRIETÀ È IMMEDIATA:





INOLTRE:

$$|\vec{u}_Q| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{Q-P}| \cdot \overbrace{\|\sin\varphi\|}^{1}$$

DOVE φ È ANGOLO FRA $\vec{\omega}$ E $(\vec{Q-P})$ (CHE RISULTANO $\perp$).

NE SEGUE:

$$|\vec{u}_Q| = \|\vartheta\| \, |\vec{Q-P}|$$

DOVE $\|\cdot\|$ DENOTA IL VALORE ASSOLUTO

DI FATTO UNA ROTAZIONE ATTORNO A P DOVREBBE PRODURRE UN MOTO CIRCOLARE NEL QUALE IL PUNTO Q DESCRIVE UN ARCO DI CIRCONFERENZA, DI CENTRO P E RAGGIO $|\vec{Q-P}|$; SE SI LIMITA LA ROTAZIONE A ESSERE INFINITESIMA, SI TROVA CHE IL PUNTO Q SI MUOVE LUNGO LA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN Q, QUINDI IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A $(\vec{Q-P})$.

UNA ULTERIORE PROPRIETÀ DELLA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA [12] È LA SEGUENTE: LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO $\vec{u}_P$ E DELLO SPOSTAMENTO $\vec{u}_Q$ PROIETTATE NELLA DIREZIONE DEL VETTORE $(\vec{Q-P})$ SONO <u>EGUALI</u> (SE COSÌ NON FOSSE, RISULTEREBBE VIOLATO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!)

SI CONSIDERI IL VERSORE $\vec{t}$ ASSOCIATO AL VETTORE $(\vec{Q-P})$:

$$\vec{t} = \frac{(\vec{Q-P})}{|\vec{Q-P}|}$$

E SI CONSIDERI IL PRODOTTO SCALARE DI $\vec{t}$ PER $\vec{u}_Q$

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = [\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})] \times \vec{t}$$

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \vec{u}_P \times \vec{t} + \underset{\vec{a}}{\vec{\omega}} \wedge \underset{\vec{b}}{(\vec{Q-P})} \times \underset{\vec{c}}{\vec{t}}$$

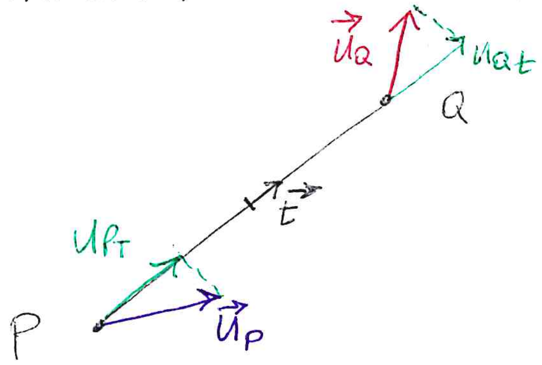
~~E PER LA PROPRIETÀ CICLICA DEL PRODOTTO MISTO, L'ULTIMO TERMINE SVANISCE~~

POICHÉ $\vec{t}$ È PARALLELO A $\vec{Q-P}$ E DUNQUE $(\vec{Q-P}) \wedge \vec{t} = \vec{0}$

NE SEGUE

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \vec{u}_P \times \vec{t}.$$

LA CARATTERIZZAZIONE GRAFICA DI QUESTA PROPRIETÀ È INDICATA IN FIGURA:



$$u_{Qt} = u_{Pt}$$

PERTANTO $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ POSSONO DIFFERIRE SOLO NELLE LORO COMPONENTI ⊥ AL VETTORE $(\vec{Q-P})$.

SE GLI SPOSTAMENTI $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ NON RISPETTASSERO LA PROPRIETÀ ENUNCIATA, SI AVREBBE CHE I PUNTI P E Q SI AVVICINEREBBERO/ALLONTANEREBBERO SECONDO LA LORO CONGIUNGENTE, VIOLANDO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (C.I.R.) DI UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA.

PER OGNI ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA:

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P}) \quad [12]$$

ESISTE UN PUNTO C (PROPRIO O IMPROPRIO) CARATTERIZZATO DA SPOSTAMENTO NULLO, $\vec{u}_C = \vec{0}$.

C È DETTO C.I.R DELLA ROTO-TRASLAZIONE, ED È QUEL PUNTO RISPETTO AL QUALE LO STESSO MOTO È RAPPRESENTABILE/ATTUABILE ESCLUSIVAMENTE COME UNA ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R. STESSO:

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-C}) \quad [13]$$

ANALOGA ALLA [12] QUANDO $\vec{u}_C = \vec{0}$

COME GIÀ DETTO, È ESSENZIALE COMPRENDERE CHE $\vec{\omega}$ È IL MEDESIMO IN ENTRAMBI I CASI ([12] o [13]): IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA È PROPRIETÀ CARATTERIZZANTE IL MOTO ROTO-TRASLATORIO E NON DIPENDE DAL MODO IN CUI QUESTO VIENE RAPPRESENTATO: SE NELLA [12] SI VARIA IL PUNTO P, MANTENENDO FISSATO IL PUNTO Q, CAMBIANO $\vec{u}_P$ E $(\vec{Q-P})$, MA NON $\vec{\omega}$.

PER DETERMINARE C SI SOSTITUISCE NELLA [12] A Q L'INCOGNITO PUNTO C PER IL QUALE DEVE RISULTARE $\vec{u}_C = \vec{0}$:

$$\vec{u}_C = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{C-P}) = \vec{0} \quad [14]$$

DI QUI, NOTO $\vec{u}_P$, $\vec{\omega}$ E $P = (x_P, y_P)$ SI POSSONO RICAVARE LE COORDINATE x_C, y_C DEL PUNTO C.

SE INFATTI SI ESPRIME LA [14] PER COMPONENTI, IN MODO ANALOGO ALLE [11], SI OTTIENE:

$$u_{cx} = 0 = u_{Px} - \vartheta(y_c - y_P) \qquad [14']$$
$$u_{cy} = 0 = u_{Py} + \vartheta(x_c - x_P)$$

QUESTE COSTITUISCONO UN SISTEMA DI 2 EQUAZIONI LINEARI NELLE INCOGNITE x_c, y_c CHE INDIVIDUANO COMPLETAMENTE $C = (x_c, y_c)$.

LE [14'] COMPORTANO CHE SIA:

$$\begin{cases} u_{Px} = \vartheta(y_c - y_P) \\ u_{Py} = -\vartheta(x_c - x_P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{Px} = \vartheta y_c - \vartheta y_P \\ u_{Py} = -\vartheta x_c + \vartheta x_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta y_c = u_{Px} + \vartheta y_P \\ \vartheta x_c = -u_{Py} + \vartheta x_P \end{cases}$$

DA QUI, IPOTIZZANDO CHE $\underline{\vartheta \neq 0}$ SI OTTIENE:

$$\begin{cases} y_c = y_P + u_{Px}/\vartheta \\ x_c = x_P - u_{Py}/\vartheta \end{cases} \qquad [15]$$

CIOÈ LE COORDINATE DEL PUNTO C: $C = \left(x_P - u_{Py}/\vartheta, \; y_P + u_{Px}/\vartheta\right)$.

DALLA [12] E DALLE [15] SI DEDUCE CHE QUANDO $\vec{u}_P = \vec{0}$ (ROTAZIONE INFINITESIMA) SI TROVA $y_c = y_P$; $x_c = x_P$ E DUNQUE $C \equiv P$.

SE INVECE SI HA $\vartheta = 0$, CIOÈ $\vec{\omega} = \vec{0}$ NELLA [12] SI È IN UN CASO DI PURA TRASLAZIONE E LE [15] CADONO IN DIFETTO POICHÉ PER $\vartheta \to 0$ SI HA CHE $x_c \to \infty$, $y_c \to \infty$. E DUNQUE C DIVIENE UN PUNTO <u>IMPROPRIO</u>, CHE PUÒ ESSERE UNIVOCAMENTE DETERMINATO MEDIANTE LA PENDENZA (COEFFICIENTE ANGOLARE) DI UNA RETTA DEL PIANO.

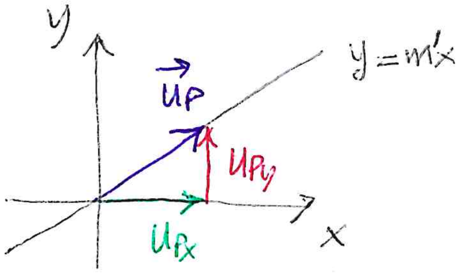
DALLE [15] RESTA INFATTI FISSATO IL RAPPORTO FRA y_c E x_c:

$$\frac{y_c}{x_c} = \frac{y_P + u_{Px}/\vartheta}{x_P - u_{Py}/\vartheta} = \frac{\dfrac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\vartheta}}{\dfrac{\vartheta x_P - u_{Py}}{\vartheta}} \qquad [16]$$

SE DALLA [16] SI CONSIDERA $\lim_{\vartheta \to 0}$ SI OTTIENE:

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{\dfrac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\cancel{\vartheta}}}{\dfrac{\vartheta x_P - u_{Py}}{\cancel{\vartheta}}} = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\vartheta x_P - u_{Py}} = -\frac{u_{Px}}{u_{Py}} \qquad [16']$$

SE ORA SI RAPPRESENTA IN GRAFICO UNA RETTA, SPICCATA DALL'ORIGINE ALLINEATA CON IL VETTORE $\vec{u}_P$, SI TROVA FACILMENTE CHE QUESTA ~~SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA $y = m'x$, DOVE m È IL COEFFI-~~ CIENTE ANGOLARE, PARI AL RAPPORTO FRA LE COMPONENTI DI $\vec{u}_P$:



$$m' = \frac{u_{Py}}{u_{Px}} \quad [17]$$

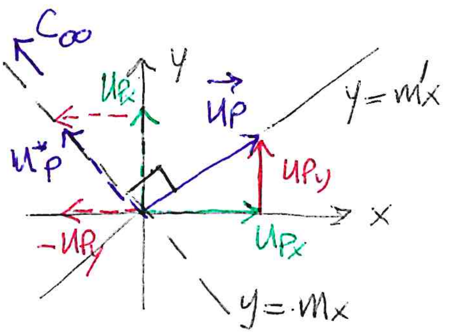
LA RETTA CHE AMMETTE COME COEFFICIENTE ANGOLARE m QUELLO DEFINITO DALLA [16']

$$m = -\frac{u_{Px}}{u_{Py}} = -\frac{1}{m'}$$

È NOTO DA CONSIDERAZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA CHE QUANDO I COEFFICIENTI ANGOLARI DI 2 RETTE SODDISFANO LA CONDIZIONE

$$m\,m' = -1$$

ALLORA LE 2 RETTE SONO PERPENDICOLARI; ED È QUESTO IL CASO.



SE INFATTI SI RIPORTA LUNGO L'ASSE Y UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA u_{Px} E, NEL VERSO NEGATIVO DELL'ASSE X, UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA u_{Py}, QUESTI IDENTIFICANO UN NUOVO VETTORE $\vec{u}^*_P$ COSÌ ESPRIMIBILE:

$$\vec{u}^*_P = (-u_{Py})\vec{i} + (u_{Px})\vec{j}$$

CHE RISULTA PERPENDICOLARE RISPETTO A $\vec{u}_P$:

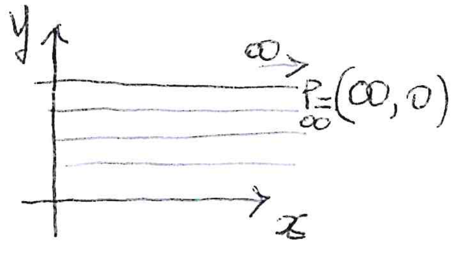
$$\vec{u}_P \times \vec{u}^*_P = (u_{Px})(-u_{Py}) + (u_{Py})(u_{Px}) = 0.$$

IL PUNTO IMPROPRIO (CIOÈ INFINITAMENTE LONTANO) IN DIREZIONE $\vec{u}_P^*$ È IL C.I.R., C_∞
SI CONVIENE DI DENOTARE LE COORDINATE DEI PUNTI IMPROPRI IN QUESTO MODO: $C_\infty = (\infty, m)$, DOVE m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI TUTTE LE RETTE PARALLELE ALLA DIREZIONE DATA.

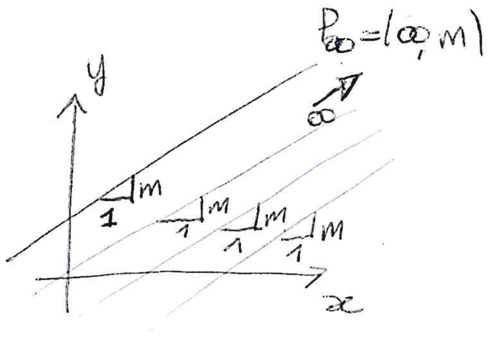
PERTANTO I PUNTI IMPROPRI RISULTANO INDIVIDUATI DALL'AVERE LA PRIMA COORDINATA PARI A ∞; LA SECONDA COORDINATA (CHE SAREBBE ANCORA PARI A ∞, PER QUANTO SOPRA VISTO) È INVECE SOSTITUITA DAL COEFFICIENTE ANGOLARE m COMUNE A UNA FAMIGLIA DI RETTE PARALLELE, AVENTI TUTTE LA STESSA DIREZIONE.

I PUNTI IMPROPRI POSSONO COSÌ INTERPRETARSI COME QUEI PUNTI IN CUI "CONVERGONO" LE RETTE PARALLELE AVENTI LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE CHE, PER LA GEOMETRIA EUCLIDEA, NON AMMETTONO PUNTO DI INTERSEZIONE.

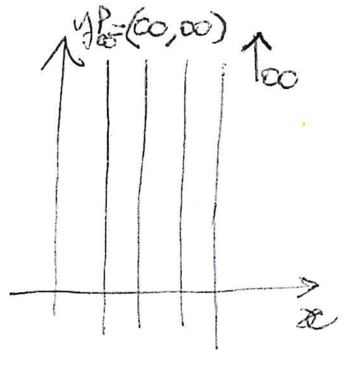
ESEMPI:



RETTE PARALLELE ORIZZONTALI



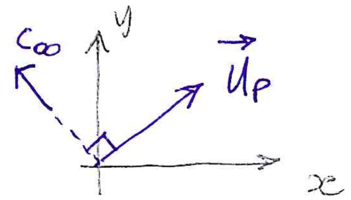
RETTE PARALLELE OBLIQUE (COEFFICIENTE ANGOLARE m)



RETTE PARALLELE VERTICALI

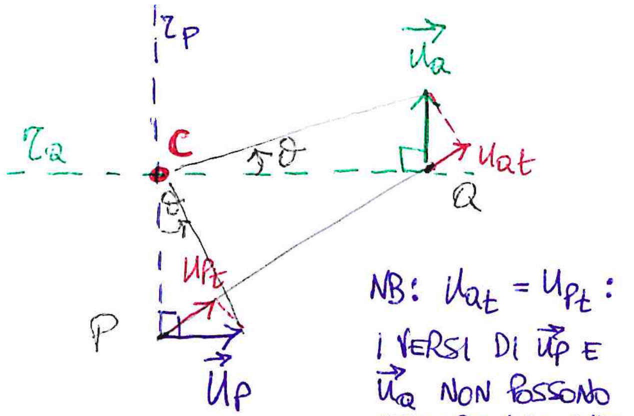
SI NOTI CHE NELL'AMBITO DELLA CONVENZIONE ADOTTATA PER IDENTIFICARE I PUNTI IMPROPRI: $P_\infty = (\infty, m)$ LA NOTAZIONE $P=(0,\infty)$ NON HA ALCUN SIGNIFICATO, A DIFFERENZA DI $P=(\infty,0)$ O DI $P=(\infty,\infty)$ CHE IDENTIFICANO RISPETTIVAMENTE IL PUNTO IMPROPRIO IN DIREZIONE ORIZZONTALE E QUELLO IN DIREZIONE VERTICALE. INFATTI, SE LA PRIMA COORDINATA HA VALORE FINITO, ALLORA NON SI PUÒ PARLARE DI UN PUNTO IMPROPRIO E QUINDI NON HA SENSO CHE LA SECONDA COORDINATA NON ABBIA VALORE FINITO □ 13

SI OSSERVI ANCHE CHE IL C.I.R. NEL CASO DI MOTO DI PURA TRASLAZIONE (CIOÈ CON $\vec{\omega} = \vec{0}$) SI TROVA IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A QUELLA DELLO SPOSTAMENTO:



DETERMINAZIONE GRAFICA DEL C.I.R. NOTI GLI SPOSTAMENTI DI 2 PUNTI.

SE SONO NOTI GLI SPOSTAMENTI DI 2 PUNTI (ARBITRARI MA DISTINTI) SI PUÒ DETERMINARE PER VIA GRAFICA IL C.I.R, C:



NB: $u_{Qt} = u_{Pt}$: I VERSI DI $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ NON POSSONO ESSERE ASSEGNATI A CASO.

INFATTI, NOTA LA ROTOTRASLAZIONE INFINITESIMA

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}), \quad [12]$$

QUESTA, SE VIENE RAPPRESENTATA COME UNA ROTAZIONE INFINITESIMA RISPETTO AL C.I.R. C DEVE FORNIRE:

$$\vec{u}_P = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-C}) \quad [17]$$

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-C}) \quad [18]$$

PER QUANTO VISTO NELLE PAGINE PRECEDENTI [PP. 8–10] SI HA CHE PER LA [17] $\vec{u}_P$ DEVE ESSERE PERPENDICOLARE A $(\overrightarrow{P-C})$; QUESTO ALLORA DEVE TROVARSI SULLA RETTA r_P, PASSANTE PER P E ⊥ A $\vec{u}_P$, E CIÒ FISSA UNA CONDIZIONE CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA DAL PUNTO C: $C \in r_P$.

D'ALTRA PARTE PER LA [18] $\vec{u}_Q$ DEVE ESSERE PERPENDICOLARE A $(\overrightarrow{Q-C})$, CHE DEVE ALLORA TROVARSI SULLA RETTA r_Q, PASSANTE PER Q E ⊥ A $\vec{u}_Q$; CIÒ FISSA UNA SECONDA CONDIZIONE CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA DAL PUNTO C: $C \in r_Q$.

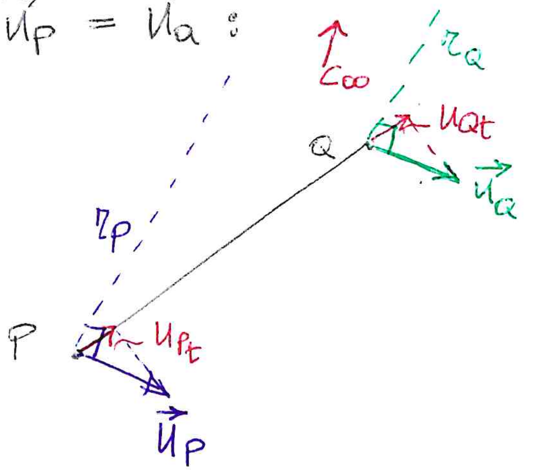
DOVENDO INFATTI C APPARTENERE A 2 RETTE, SEGUE CHE SI TROVERÀ NEL LORO PUNTO DI INTERSEZIONE. POICHÉ 2 RETTE SI INTERSECANO SEMPRE (AL FINITO O ALL'INFINITO) CONSEGUE CHE C È SEMPRE INDIVIDUATO.

NOTA 1. SE È NOTO SOLO LO SPOSTAMENTO DI UN SOLO PUNTO, RISULTA INDIVIDUATA LA RETTA CUI APPARTIENE C, MA QUESTO NON PUÒ ESSERE LOCALIZZATO. □

NOTA 2. NOTA LA POSIZIONE DI C SI HA IMMEDIATAMENTE (SI VEDA LA NOTA ALLA FIGURA DI PAGINA 9)

$$|\vec{u}_Q| = \|\vartheta\| \, |\vec{Q-C}| = \overline{QC}\,\|\vartheta\|$$
$$|\vec{u}_P| = \|\vartheta\| \, |\vec{P-C}| = \overline{PC}\,\|\vartheta\| \qquad □$$

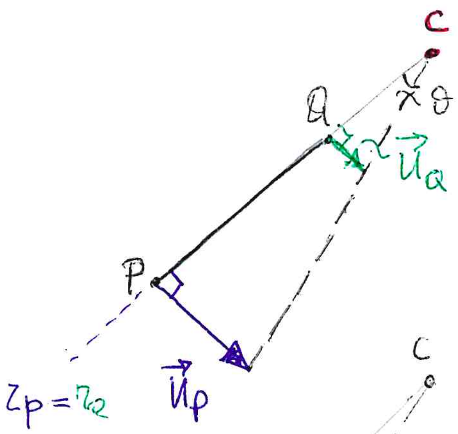
NOTA 3 LA COSTRUZIONE GRAFICA VALE ANCHE NEL CASO PARTICOLARE CHE SIA $\vec{u}_P = \vec{u}_Q$:



IN QUESTO CASO LE 2 RETTE r_P E r_Q, PASSANTI PER P E Q E RISPETTIVAMENTE $\perp$ A $\vec{u}_P$ E A $\vec{u}_Q$ RISULTANO PARALLELE.
IN QUESTO CASO LA LORO INTERSEZIONE È IL PUNTO IMPROPRIO C_∞, DOVE CONVERGONO TUTTE LE RETTE PARALLELE AVENTI IL MEDESIMO COEFFICIENTE ANGOLARE DI r_P E r_Q.

□.

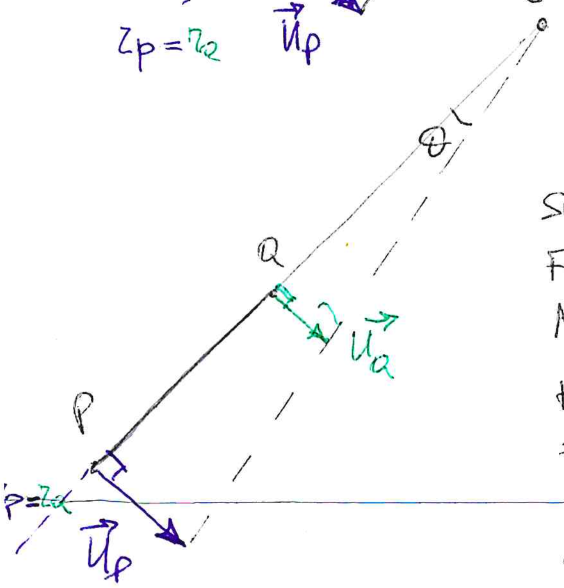
NOTA 4 LA SITUAZIONE SOPRA PRESENTATA PUÒ ESSERE CONSIDERATA IL CASO LIMITE DI QUELLO RIPORTATO IN FIGURA, CHE SI REALIZZA QUANDO $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ SONO PARALLELI MA DISTINTI: $|\vec{u}_P| \neq |\vec{u}_Q|$:



PER QUANTO SOPRA DETTO

$$|\vec{u}_Q| = \overline{QC}\,\|\vartheta\| \qquad [+]$$
$$|\vec{u}_P| = \overline{PC}\,\|\vartheta\| \qquad [++]$$

SE $|\vec{u}_Q| \to |\vec{u}_P|$ CON $Q \neq P$, L'UNICO MODO DI SODDISFARE LE [+] E [++] È CHE $\overline{QC} \to \infty$; $\overline{PC} \to \infty$ E $\|\vartheta\| \to 0$: SOLO IN QUESTO CASO SI PUÒ OTTENERE UN VALORE FINITO ED EGUALE PER $|\vec{u}_P|$ E $|\vec{u}_Q|$



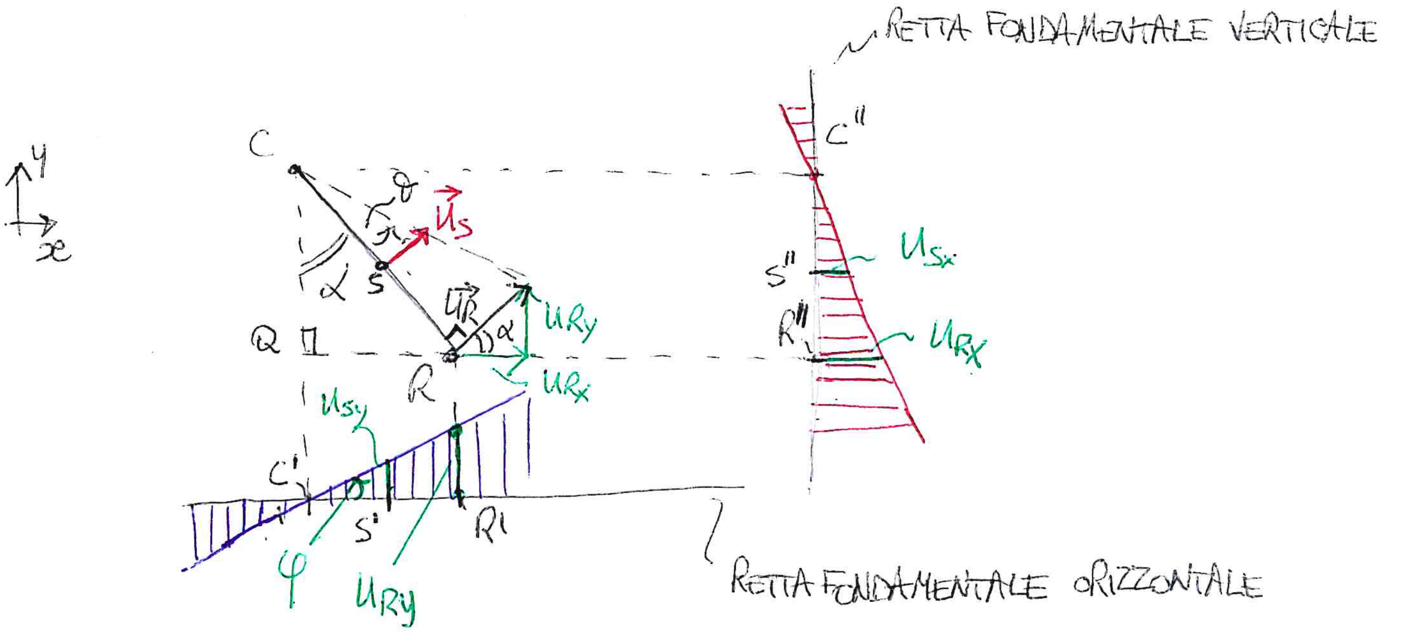
SI VEDE INFATTI CHE, MANTENENDO INVARIATA LA DISTANZA FRA I PUNTI P E Q E IL VALORE DI $\vec{u}_P$, MANO A MANO CHE $\vec{u}_Q$ SI AVVICINA AL VALORE DI $\vec{u}_P$ SI HA CHE IL PUNTO C, SEMPRE GIACENTE SULLE RETTE r_P E r_Q (IN QUESTO CASO COINCIDENTI) SI SPOSTA, ALLONTANANDOSI PROGRESSIVAMENTE DA P E Q.
QUANDO $C = C_\infty$ SI HA $\vec{u}_Q = \vec{u}_P$

DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO.

GLI SPOSTAMENTI IN UNA ROTOTRASLAZIONE INFINITESIMA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI MEDIANTE LE COMPONENTI ORIZZONTALI E VERTICALI, UNA VOLTA CHE SIA NOTA LA POSIZIONE DEL C.I.R., C L'UNICO PUNTO PER IL QUALE È NOTO CHE $\vec{u}_c = \vec{0}$ CIOÈ ANCHE $u_{cx} = 0$ & $u_{cy} = 0$.

UNA VOLTA CHE SIA DATA LA POSIZIONE DI C, LE COMPONENTI ORIZZONTALE (u_{Rx}) E VERTICALE (u_{Ry}) DI QUALSIASI PUNTO R POSSONO ESSERE DETERMINATE SEGUENDO QUESTA COSTRUZIONE.

SI TRACCIANO 2 RETTE FONDAMENTALI, UNA ORIZZONTALE (IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE SI RICAVANO LE COMPONENTI VERTICALI DELLO SPOSTAMENTO, u_y) E UNA VERTICALE (SULLA QUALE SI LEGGONO LE COMPONENTI ORIZZONTALI DELLO SPOSTAMENTO, u_x).



FISSATI I PUNTI C E R, LI SI PROIETTA SULLA RETTA ORIZZONTALE, OTTENENDO LE LORO IMMAGINI, C' E R' E SULLA RETTA VERTICALE, OTTENENDO LE IMMAGINI C'' E R''. A PARTIRE DA C' SI TRACCIA SULLA RETTA FONDAMENTALE UNA RETTA INCLINATA DI φ SULL'ORIZZONTALE, IN VERSO ANTIORARIO (OD ORARIO); L'ORDINATA IN CORRISPONDENZA DI R' RAPPRESENTA LA COMPONENTE u_{Ry}. A PARTIRE DA C'' SI TRACCIA SULLA RETTA VERTICALE UNA RETTA INCLINATA DEL MEDESIMO ANGOLO φ SULLA VERTICALE, NELLO STESSO VERSO ANTIORARIO (OD ORARIO); L'ASCISSA LETTA IN CORRISPONDENZA DI R'' FORNISCE LA COMPONENTE u_{Rx}. SE SI RIPORTANO NEL PUNTO R LE 2 COMPONENTI COSÌ TROVATE SI PUÒ DETERMINARE UNIVOCAMENTE IL VETTORE $\vec{u}_R$.

LA COSTRUZIONE SI BASA SU QUESTE RELAZIONI GEOMETRICHE E TRIGONOMETRICHE:

$(\vec{R-C})$ HA MODULO $|\vec{R-C}| = \overline{RC}$. LE SUE PROIEZIONI SULLE

RETTE FONDAMENTALI VALGONO:

$$\overline{C''R''} = \overline{CQ} = \overline{RC}\cos\alpha$$

$$\overline{C'R'} = \overline{QR} = \overline{RC}\sin\alpha$$

DA QUI È AGEVOLE VERIFICARE CHE

$$u_{Rx} = \overline{C''R''}\cdot\vartheta = \overline{RC}\cos\alpha\,\vartheta \qquad [19]$$

$$u_{Ry} = \overline{C'R'}\cdot\vartheta = \overline{RC}\sin\alpha\,\vartheta \qquad [20]$$

D'ALTRA PARTE $|\vec{u}_R| = |\vec{\omega}\wedge(\overrightarrow{R-C})| = |\vec{\omega}|\cdot|\overrightarrow{R-C}|\cdot 1 = |R-C|\cdot\vartheta = \overline{RC}\cdot\vartheta$

SI HA POI

$$u_{Rx} = |\vec{u}_R|\cdot\cos\alpha = \overline{RC}\cdot\vartheta\cdot\cos\alpha \qquad [21]$$

$$u_{Ry} = |\vec{u}_R|\cdot\sin\alpha = \overline{RC}\cdot\vartheta\cdot\sin\alpha \qquad [22]$$

E L'EGUAGLIANZA DELLE [19] E [21] E DELLE [20] E [22] PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE LE COMPONENTI u_{Rx}, u_{Ry} VALUTATE PERPENDICOLARMENTE ALLE RETTE FONDAMENTALI COINCIDONO CON LE EFFETTIVE COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO $\vec{u}_R$.

PER L'ASSOLUTA GENERALITA' DELLA SCELTA DEL PUNTO R SI CONCLUDE CHE LA COSTRUZIONE GRAFICA APPENA PRESENTATA HA VALIDITA' GENERALE.

IN PARTICOLARE, LE COMPONENTI DI OGNI PUNTO S COMPRESO FRA C ED R SONO RICAVABILI DAI 2 DIAGRAMMI, E RISULTANO FUNZIONI LINEARI DELL'ANGOLO DI ROTAZIONE ϑ E DELLA DISTANZA DA C.