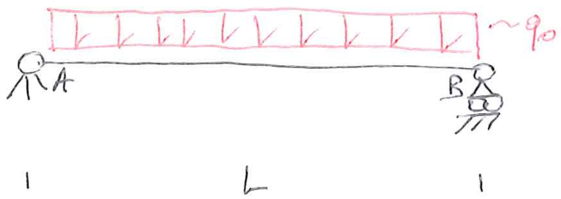
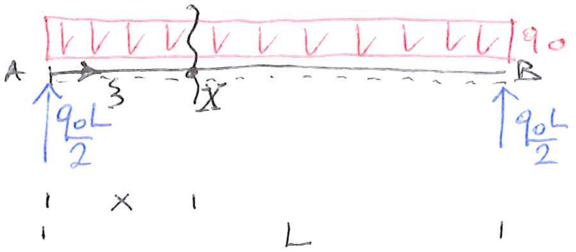
AZIONI INTERNE IN STRUTTURE SOGGETTE A CARICHI DISTRIBUITI.

PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE SI PUÒ PROCEDERE COME DI CONSUETO UTILIZZANDO GLI INTEGRALI PER VALUTARE I CONTRIBUTI DEI CARICHI DISTRIBUITI, COME ILLUSTRATO NEGLI ESEMPI CHE SEGUONO:



TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA SOGGETTA A CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO.

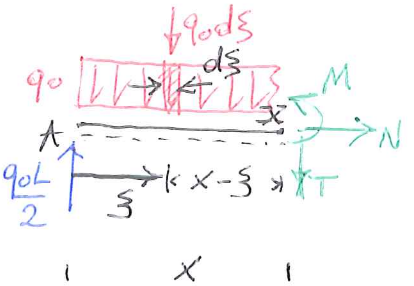
IN BASE A QUANTO GIA' TROVATO, IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE, SI PROCEDE A SEZIONARE IN UNA POSIZIONE GENERICA, X.

OVVIAMENTE, INSIEME ALLA TRAVE ANCHE LA DISTRIBUZIONE DI CARICO RISULTA SEZIONATA, E SULLA PORZIONE CONSIDERATA (AX) SI CONSIDERA SOLO LA RELATIVA PORZIONE DI CARICO.

SI TRATTA POI, MEDIANTE GLI INTEGRALI, DI TENERE CONTO DELLA SOMMA DEI CONTRIBUTI ELEMENTARI $q_0 d\xi$ ALLE EQUAZIONI DI T E DI M.



SI NOTI CHE X DENOTA L'ASCISSA DEL PUNTO DOVE LA TRAVE È SEZIONATA, E RISULTA ESSERE L'ESTREMO SUPERIORE DI INTEGRAZIONE.
PER NON FARE CONFUSIONE, LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE SI DENOTA CON ξ, $0 \leq \xi \leq x$:

$A \rightarrow B$
$0 < x < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{/\!/} = 0 \quad N(x) = 0 & [1] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{q_0 L}{2} - \int_0^x q_0 d\xi - T(x) = 0 & [2] \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad -q_0 \frac{L}{2} x + \int_0^x [x-\xi] q_0 d\xi + M(x) = 0 & [3] \end{cases}$$

GLI INTEGRALI CONTENENTI I CONTRIBUTI DEL CARICO DISTRIBUITO CHE COMPAIONO NELLA [2] E NELLA [3] FORNISCONO

$$\int_0^x q_0 d\xi = q_0 \int_0^x d\xi = q_0 \left[\xi\right]_0^x = q_0 x \qquad [+]$$

$$\int_0^x [x-\xi] q_0 d\xi = \int_0^x x q_0 d\xi - \int_0^x \xi q_0 d\xi = q_0 x \int_0^x d\xi - q_0 \int_0^x \xi d\xi = q_0 x \left[\xi\right]_0^x - q_0 \left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x$$

NB: È COSTANTE RISPETTO A ξ!

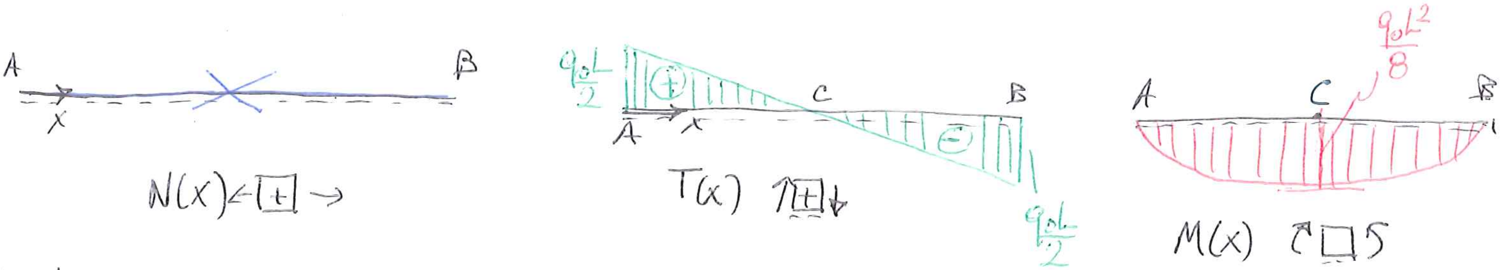
$$= q_0 x \cdot x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$= q_0 \frac{x^2}{2} \qquad [++]$$

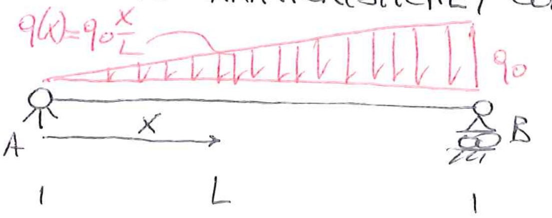
SI TROVA QUINDI:

$$\begin{cases} N(x) = 0 & [1'] \\ T(x) = \dfrac{q_0 L}{2} - q_0 x & [2'] \\ M(x) = q_0 \dfrac{L}{2} x - q_0 \dfrac{x^2}{2} & [3'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 & [1''] \\ T(x) = q_0 \left[\dfrac{L}{2} - x\right] & [2''] \\ M(x) = \dfrac{q_0 x}{2}\left[L - x\right] & [3''] \end{cases}$$

E SI OSSERVA CHE QUESTE ESPRESSIONI VALGONO SU TUTTO L'INTERVALLO AB.
È INTERESSANTE NOTARE CHE $T(x)$ DIVIENE IN QUESTO CASO UNA FUNZIONE LINEARE DI x, E CHE $M(x)$ DIVIENE UNA FUNZIONE QUADRATICA DI x.
I DIAGRAMMI RELATIVI SONO QUESTI:

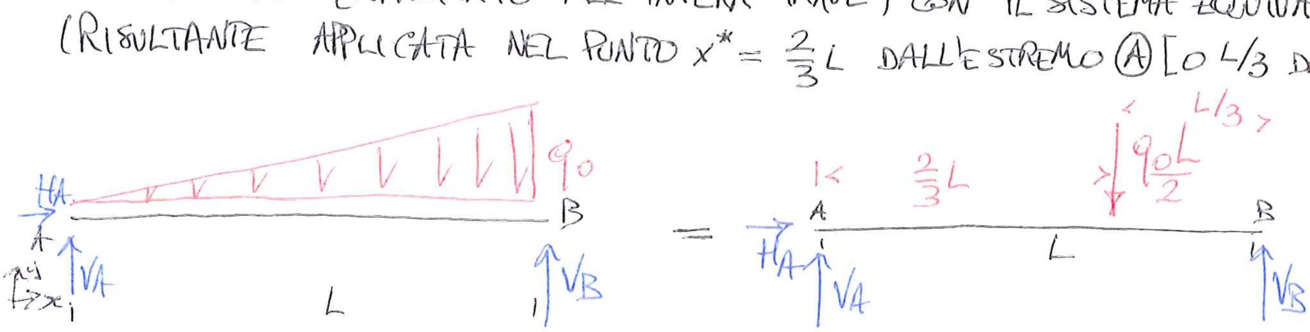


SI NOTI CHE PER $x = \frac{L}{2}$ (PUNTO C) DOVE $T(x) = 0$, SI HA CHE $M(x = \frac{L}{2}) = \frac{q_0 L^2}{8}$, OVVERO $M(x)$ ATTINGE IL VALORE MASSIMO. INOLTRE IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO, CON ANDAMENTO PARABOLICO E RISPETTOSO DELLE CONDIZIONI DI ANNULLAMENTO IMPOSTE DAI VINCOLI DI ESTREMITÀ, QUANDO È RIPORTATO DALLA PARTE DELLE FIBRE TESE VOLGE LA CONCAVITÀ IN MODO DA "ACCOGLIERE" IL CARICO.
QUESTE CARATTERISTICHE, COME SI VEDRÀ, SONO DEL TUTTO GENERALI. □



TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA SOGGETTA A CARICO LINEARMENTE DISTRIBUITO.

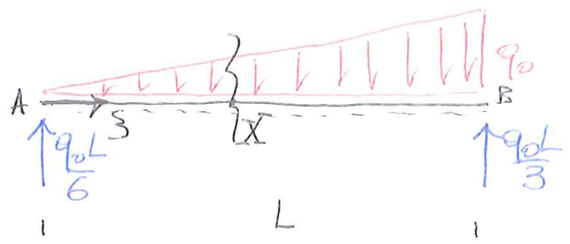
PER IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI È LECITO SOSTITUIRE IL CARICO DISTRIBUITO (APPLICATO ALL'INTERA TRAVE) CON IL SISTEMA EQUIVALENTE (RISULTANTE APPLICATA NEL PUNTO $x^* = \frac{2}{3}L$ DALL'ESTREMO A [O $L/3$ DALL'ESTREMO B]:



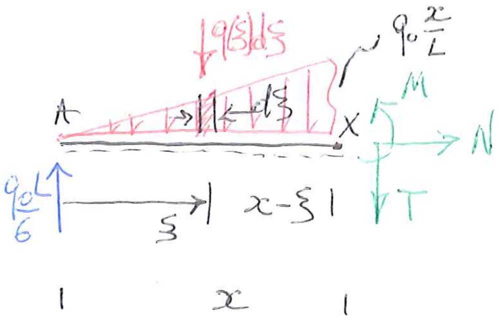
LE EQUAZIONI CARDINALI FORNISCONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - \dfrac{q_0 L}{2} + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_z(A) = 0 & -\dfrac{q_0 \cancel{L}}{2} \dfrac{2}{3} \cancel{L} + V_B \cancel{L} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \dfrac{q_0 L}{6} \\ V_B = \dfrac{q_0 L}{3} \end{cases}$$

SICCHÉ, IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO È IL SEGUENTE



PROCEDENDO A SEZIONARE NELLA GENERICA POSIZIONE X (A DISTANZA x DALL'ESTREMO A) SI TROVA



PROCEDENDO A SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI (OPPORTUNAMENTE PROIETTATE) PER IL TRATTO CONSIDERATO SI OTTIENE:

$A \rightarrow B$

$0 < X < L$

SI NOTI CHE LA RISULTANTE DEL CARICO DISTRIBUITO SU UN TRATTO INFINITESIMO DI LUNGHEZZA $d\xi$ VALE PROPRIO $q(\xi)d\xi$.

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & N(X) = 0 & [4] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{q_0 L}{6} - \int_0^X q(\xi)d\xi - T(X) = 0 & [5] \\ \circlearrowleft M_{z(X)} = 0 & -\frac{q_0 L}{6}X + \int_0^X [X-\xi] q(\xi) d\xi + M(X) = 0 & [6] \end{cases}$$

NEL CASO PRESENTE, POICHÉ $\xi : x = q(\xi) : q_0 \frac{X}{L}$ SI TROVA $q(\xi) = q_0 \frac{X}{L} \cdot \frac{\xi}{x}$, OVVERO $q(\xi) = q_0 \frac{\xi}{L}$ SI OTTIENE DAI 2 INTEGRALI CHE APPAIONO NELLE [5], [6]:

$$\int_0^x q(\xi)d\xi = \int_0^X q_0 \frac{\xi}{L} d\xi = \frac{q_0}{L}\int_0^X \xi d\xi = \frac{q_0}{L}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^X = \frac{q_0}{L}\frac{X^2}{2} = \frac{q_0 X^2}{2L}; \qquad [\star]$$

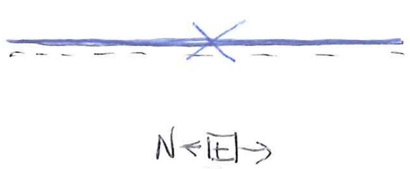
$$\int_0^x [X-\xi] q(\xi) d\xi = \int_0^x [X-\xi] q_0 \frac{\xi}{L} d\xi = \frac{q_0 X}{L}\int_0^x \xi d\xi - \frac{q_0}{L}\int_0^x \xi^2 d\xi = \frac{q_0 X}{L}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^X - \frac{q_0}{L}\left[\frac{\xi^3}{3}\right]_0^X =$$

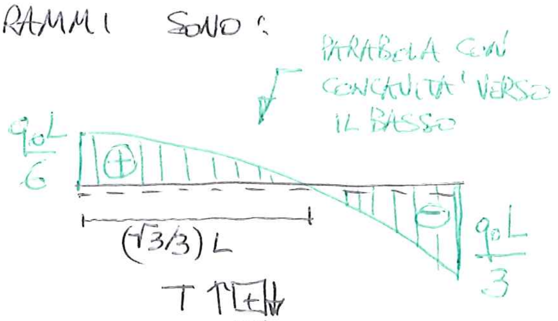
$$= \frac{q_0 X}{L}\frac{X^2}{2} - \frac{q_0}{L}\frac{X^3}{3} = \frac{q_0 X^3}{2L} - \frac{q_0 X^3}{3L} = \frac{q_0 X^3}{6L} \qquad [\star\star]$$

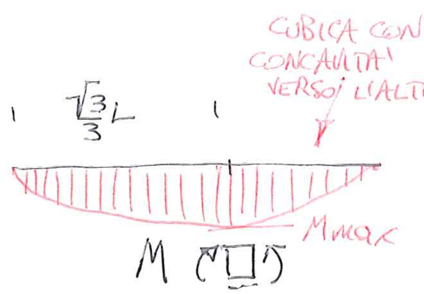
CIÒ COMPORTA CHE

$$\begin{cases} N(X) = 0 & [4'] \\ T(X) = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 X^2}{2L} & [5'] \\ M(X) = \frac{q_0 L}{6}X - \frac{q_0 X^3}{6L} & [6'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(X) = 0 & [4''] \\ T(X) = \frac{q_0 L}{6}\left[1 - \frac{3X^2}{L^2}\right] & [5''] \\ M(X) = \frac{q_0 L}{6}X\left[1 - \frac{X^2}{L^2}\right] & [6''] \end{cases}$$

E I CORRISPONDENTI DIAGRAMMI SONO:







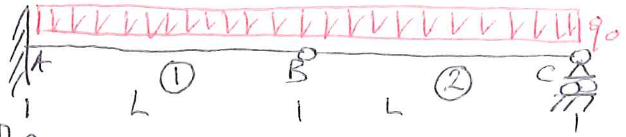
SI NOTI CHE PER LA [5''] È $T(X) = 0$ PER $1 - 3\left[\frac{X}{L}\right]^2 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{3}}L = \frac{\sqrt{3}}{3}L$; IN CORRISPONDENZA SI TROVA $M(X = \frac{\sqrt{3}}{3}L) = M_{max} = \frac{q_0 L^2}{27}\sqrt{3}$. QUESTA VOLTA A UN ANDAMENTO LINEARE DELLA

FUNZIONE DI CARICO CORRISPONDE UN ANDAMENTO QUADRATICO DEL TAGLIO E UN ANDAMENTO CUBICO DEL MOMENTO.

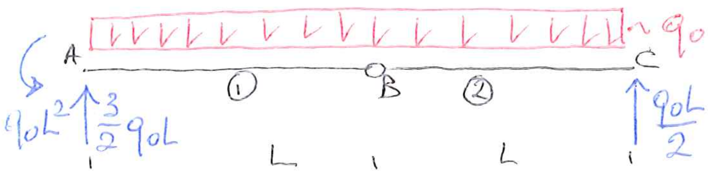
PER CONFRONTO CON I DIAGRAMMI DEL CASO PRECEDENTE SI PUÒ CONCLUDERE CHE SE LA FUNZIONE DI CARICO È UN POLINOMIO DI GRADO n, IL TAGLIO RISULTA ESSERE UN POLINOMIO DI GRADO $n+1$ E IL MOMENTO FLETTENTE UN POLINOMIO DI GRADO $n+2$.

QUESTA È UNA PROPRIETÀ GENERALE DELLA QUALE SI AVRÀ DIMOSTRAZIONE PIÙ AVANTI, NEL CORSO DELLA PRESENTE LEZIONE.

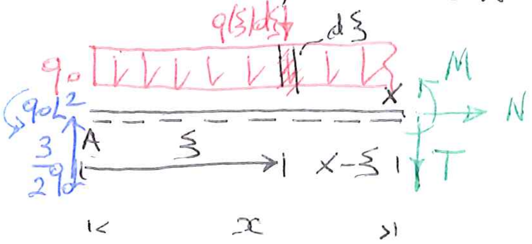
CON LO STESSO CRITERIO SI POSSONO DETERMINARE LE AZIONI INTERNE IN QUESTA STRUTTURA ISOSTATICA:



PER LA QUALE SI È VISTO, NEL CORSO DELL'ULTIMA LEZIONE CHE QUESTO È IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:



SI PROCEDE, COME DI CONSUETO, A SEZIONARE IN UN PUNTO X (A DISTANZA x DALLA ESTREMITÀ A) E SI TROVA:



$A \rightarrow C \qquad 0<x<2L$

$$q(\xi) = q_0$$

SI OSSERVI CHE NON ESSENDOVI AZIONI CONCENTRATE APPLICATE IN CAMPATA, ED ESSENDO IL CARICO DISTRIBUITO ESTESO ALL'INTERA TRAVATA LE EQUAZIONI CHE FORNISCONO LE AZIONI INTERNE SONO UNICHE PER TUTTA LA STRUTTURA.

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 \quad N(x) = 0 & [7] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{3}{2}q_0L - \int_0^x q(\xi)d\xi - T(x) = 0 & [8] \\ \circlearrowleft M_z(x) = 0 \quad q_0L^2 - \frac{3}{2}q_0Lx + \int_0^x [x-\xi]\, q(\xi)d\xi + M(x) = 0 & [9] \end{cases}$$

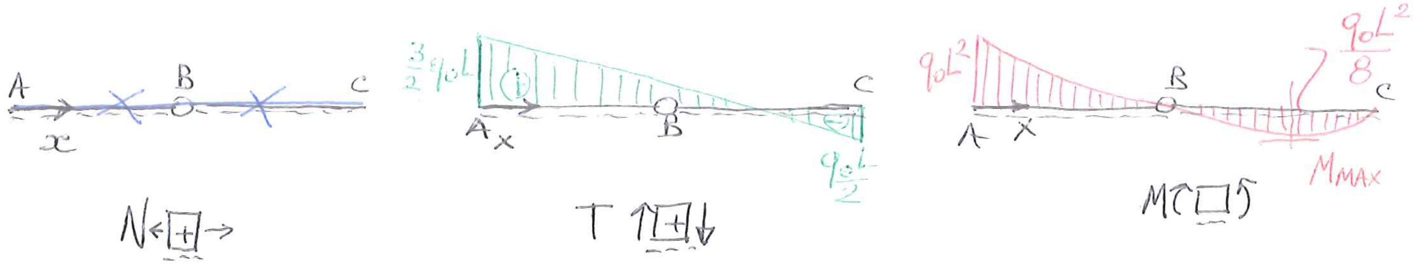
NE SEGUE $\int_0^x q(\xi)d\xi = \int_0^x q_0 d\xi = q_0\int_0^x d\xi = q_0\left[\xi\right]_0^x = q_0x$

$$\int_0^x [x-\xi]\, q(\xi)d\xi = \int_0^x [x-\xi]\, q_0 d\xi = xq_0\int_0^x d\xi - q_0\int_0^x \xi d\xi = xq_0\left[\xi\right]_0^x - q_0\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x$$
$$= q_0 x\cdot x - q_0\frac{x^2}{2} = \frac{q_0x^2}{2}$$

QUINDI

$$\begin{cases} N(x) = 0 & [7'] \\ T(x) = \frac{3}{2}q_0L - q_0x & [8'] \\ M(x) = -q_0L^2 + \frac{3}{2}q_0Lx - \frac{q_0x^2}{2} & [9'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 & [7''] \\ T(x) = q_0\left[\frac{3}{2}L - x\right] & [8''] \\ M(x) = -q_0L^2\left[1 - \frac{3}{2}\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{L^2}\right] & [9''] \end{cases}$$

I DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE SONO DUNQUE I SEGUENTI:

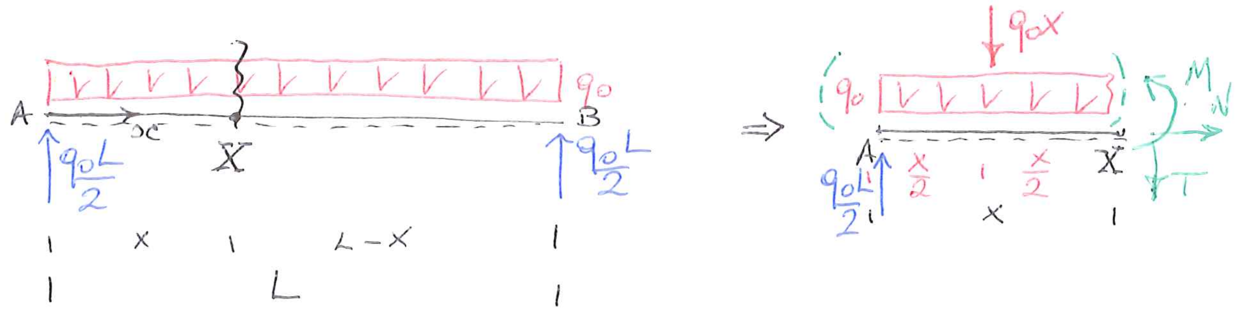


SI OSSERVI CHE, IN BASE ALLA [8''], SI TROVA $T(x)=0$ PER $x=\frac{3}{2}L$; IN CORRISPONDENZA DI TALE VALORE $M\left(x=\frac{3}{2}L\right) = -q_0L^2\left[1-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = -q_0L^2\left[1-\frac{9}{4}+\frac{9}{8}\right] = -q_0L^2\underbrace{\left[\frac{8-18+9}{8}\right]}_{-\frac{1}{8}}$ OVVERO $M\left(x=\frac{3}{2}L\right)=+\frac{q_0L^2}{8}$: QUESTO VALORE RAPPRESENTA UN MASSIMO LOCALE.

SI OSSERVI INOLTRE CHE LA CONDIZIONE IMPOSTA DAL VINCOLO INTERNO IN (B) È SODDISFATTA IN QUANTO RISULTA $M\big|_B = M(x=L) = 0$.

OLTRE AL METODO ORA CONSIDERATO, CHE TIENE IN CONTO MEDIANTE GLI INTEGRALI DEL CONTRIBUTO DEL CARICO DISTRIBUITO, È POSSIBILE CALCOLARE LE AZIONI INTERNE SOSTITUENDO AL CARICO DISTRIBUITO UN SISTEMA EQUIVALENTE. TENENDO PERÒ CONTO CHE LA EQUIVALENZA STATICA IMPLICA LA SOSTITUIBILITÀ SOLO NELL'AMBITO DELLO STESSO CORPO RIGIDO È NECESSARIO OPERARE IN MODO CORRETTO: SEZIONANDO LA STRUTTURA IN UN SUO PUNTO X QUESTA RISULTA SUDDIVISA IN DUE CORPI RIGIDI: LA RISULTANTE DEL CARICO DA CONSIDERARE DEVE TENERE CONTO ESCLUSIVAMENTE DELLA IMPRONTA DEL CARICO CHE GRAVA SULLA PARTE CONSIDERATA.

CON RIFERIMENTO AL PRIMO ESEMPIO SI HA QUINDI:



SI OSSERVI CHE L'IMPRONTA DEL CARICO DISTRIBUITO (IN QUESTO CASO, IN MODO UNIFORME) È PARI ALLA LUNGHEZZA, x, DEL TRATTO CONSIDERATO.

SI TROVA ALLORA CHE LA RISULTANTE, PARI ALL'AREA DELLA FUNZIONE DI CARICO CONSIDERATA, VALE q_0x, ED È APPLICATA, IN QUESTO CASO, A METÀ DEL TRATTO, CIOÈ A DISTANZA $\frac{x}{2}$ DALL'ESTREMO (A) (O, EQUIVALENTEMENTE, A DISTANZA $\frac{x}{2}$ DAL PUNTO X DOVE LA TRAVE È STATA SEZIONATA.

SI OSSERVI CHE LA RISULTANTE COSÌ CALCOLATA DIPENDE DAL PUNTO DOVE LA TRAVE È STATA SEZIONATA, E CIÒ SI RILEVA DAL FATTO CHE ESSA È FUNZIONE DELLA ASCISSA x, MISURATA A PARTIRE DA (A): SI TRATTA INFATTI DI UNA RISULTANTE PARZIALE DEL CARICO DISTRIBUITO.

PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE SI FA USO DELLE EQUAZIONI CARDINALI OPPORTUNAMENTE PROIETTATE:

$A \rightarrow B$

$0 < x < L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{\parallel} = 0 & N(x) = 0 & [10] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & q_0\frac{L}{2} - q_0x - T(x) = 0 & [11] \\ \circlearrowleft M_z(x) = 0 & -q_0\frac{L}{2}x + q_0x\cdot\frac{x}{2} + M(x) = 0 & [12] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 & [10'] \\ T(x) = q_0\frac{L}{2} - q_0x & [11'] \\ M(x) = q_0\frac{L}{2}x - q_0\frac{x^2}{2} & [12'] \end{cases}$$

E SI VERIFICA CHE LE [10'] – [12'] SONO EGUALI ALLE [1] – [3], E COME QUESTE POSSONO ESSERE RISCRITTE NELLA FORMA FATTORIZZATA:

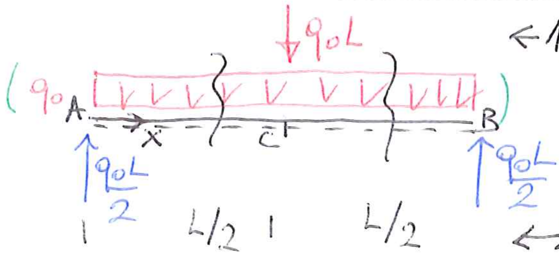
$$\begin{cases} N(x) = 0 & [10''] \\ T(x) = q_0\left[\frac{L}{2} - x\right] & [11''] \\ M(x) = \frac{q_0}{2} x \left[L - x\right] & [12''] \end{cases}$$

SI VEDE QUINDI CHE LA SOSTITUZIONE DELLA RISULTANTE PARZIALE DEL CARICO DISTRIBUITO CORRISPONDE A SOSTITUIRE DIRETTAMENTE NELLE EQUAZIONI CARDINALI [1] – [3] IL RISULTATO DEGLI INTEGRALI, [+] E [++].

NOTA 1. È ESSENZIALE OSSERVARE CHE LA RISULTANTE DEL CARICO DISTRIBUITO CHE SI CONSIDERA NELLE EQUAZIONI CARDINALI SI RIFERISCE ALLA SOLA PARTE CHE VIENE CONSIDERATA; È QUINDI UNA RISULTANTE PARZIALE, COME SI RILEVA DAL FATTO CHE ESSA DIPENDE DALLA VARIABILE x.

SE SI SOSTITUISSE INVECE LA RISULTANTE DELL'INTERO CARICO DISTRIBUITO UNA VOLTA PER TUTTE, SI COMMETTEREBBE UN ERRORE, PERCHÉ IL CARICO DISTRIBUITO VERREBBE ERRONEAMENTE CONSIDERATO APPLICATO NELLA SUA INTEREZZA A UNA SOLA PARTE DELLA STRUTTURA.

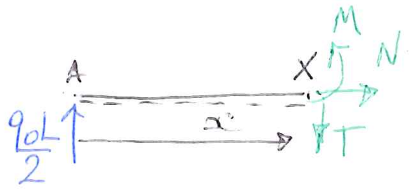
PROCEDENDO IN QUESTO MODO (SI SOTTOLINEA CHE QUESTO È SCORRETTO E CONDUCE A UN RISULTATO ERRONEO) SI AVREBBE:

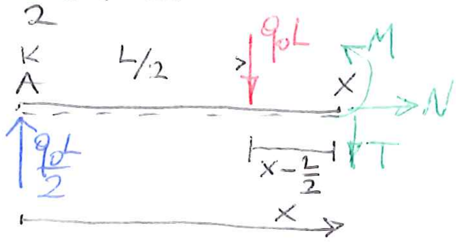


← 1. QUESTA È LA RISULTANTE DELL'INTERO CARICO DISTRIBUITO ED È APPLICATA IN UN PUNTO FISSO: SI TROVA QUINDI LA NECESSITA' DI CONSIDERARE SEPARATAMENTE DUE SITUAZIONI AC E CB.

← 2. SI OSSERVI CHE PROCEDENDO IN QUESTO MODO LA RISULTANTE DEL CARICO NON DIPENDE DAL PUNTO IN CUI SI ROMPE LA STRUTTURA.

$A \to C$ | $C \to B$
$0 < x < \frac{L}{2}$ | $\frac{L}{2} < x < L$



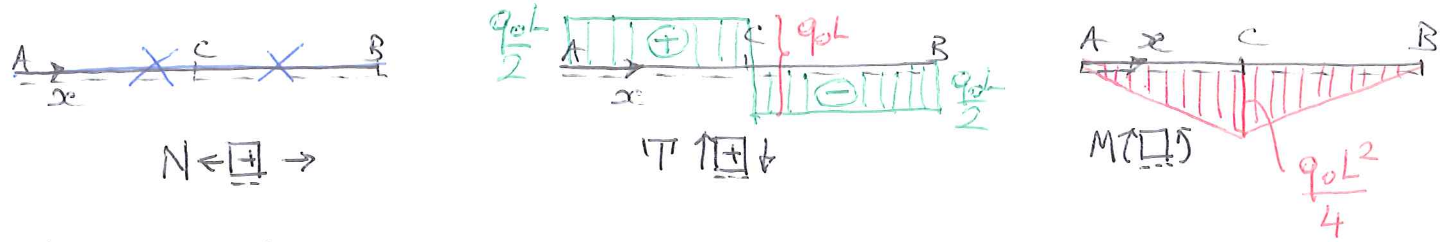


$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & N(x) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{q_0 L}{2} - T(x) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & -\frac{q_0 L}{2} x + M(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & N(x) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{q_0 L}{2} - q_0 L - T(x) = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 & -\frac{q_0 L}{2} x + q_0 L\left[x - \frac{L}{2}\right] + M(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = \frac{q_0 L}{2} \\ M(x) = \frac{q_0 L}{2} x \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = -\frac{q_0 L}{2} \\ M(x) = \frac{q_0 L}{2}\left[L - x\right] \end{cases}$$

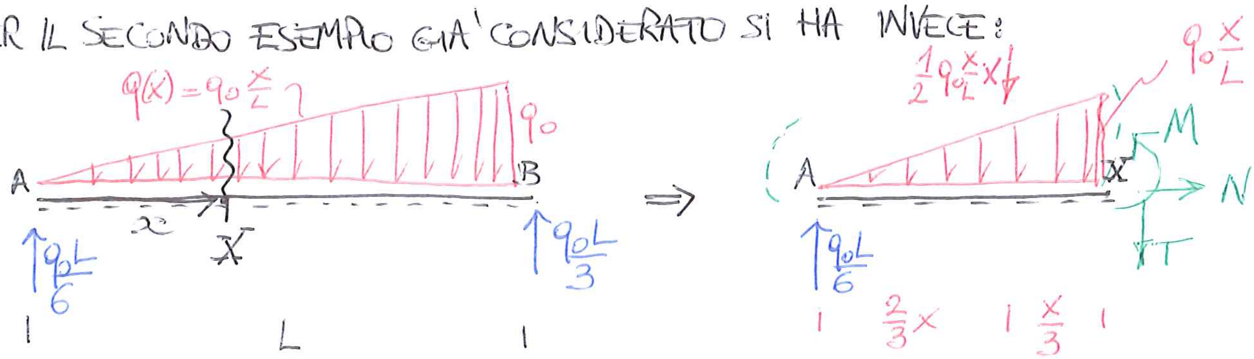
OVVIAMENTE LE EQUAZIONI OTTENUTE SONO COMPLETAMENTE DIVERSE DALLE [1']-[3'] E PRODUCONO DIAGRAMMI MOLTO DIFFERENTI:



QUINDI SOSTITUIRE IL CARICO DISTRIBUITO CON UN UNICO CARICO CONCENTRATO, COME QUI SI È FATTO, OLTRE AD ESSERE CONCETTUALMENTE SCORRETTO (PER LE RAGIONI GIÀ EVIDENZIATE) PORTA A SOVRASTIMARE NOTEVOLMENTE I VALORI DELLE AZIONI INTERNE: T RISULTA QUI SEMPRE PARI AL SUO VALORE MASSIMO (CHE NELLA SOLUZIONE ESATTA VIENE ATTINTO SOLTANTO NEI 2 PUNTI ESTREMI, A E B); M È SEMPRE MAGGIORE DEL VALORE CORRETTO E IL VALORE MASSIMO, RAGGIUNTO SEMPRE IN MEZZERIA È ADDIRITTURA PARI AL DOPPIO DEL VALORE ESATTO.

SI OSSERVA ANCHE CHE L'ANDAMENTO CORRETTO NON PRESENTA DISCONTINUITÀ (SALTI) O PUNTI ANGOLOSI (CAMBIAMENTI DI PENDENZA): L'EFFETTO DEL CARICO DISTRIBUITO È QUELLO DI RENDERE PIÙ "LISCI" I CORRISPONDENTI DIAGRAMMI □

PER IL SECONDO ESEMPIO GIÀ CONSIDERATO SI HA INVECE:



SI OSSERVI CHE ANCHE IN QUESTO CASO L'IMPRONTA DEL CARICO DISTRIBUITO (CHE QUESTA VOLTA, PERÒ, VARIA LINEARMENTE) È PARI ALLA LUNGHEZZA, x, DEL TRATTO CONSIDERATO.

LA RISULTANTE, SEMPRE PARI ALL'AREA DELLA FUNZIONE DI CARICO VALE, IN QUESTO CASO, $\frac{1}{2} q_0 \frac{x^2}{L}$, E DIPENDE QUADRATICAMENTE DA x, POICHÉ SIA LA LUNGHEZZA DEL TRATTO (BASE DEL TRIANGOLO) CHE L'ALTEZZA (ALTEZZA DEL TRIANGOLO) DIPENDONO ENTRAMBE DA x.

È QUINDI EVIDENTE UNA VOLTA DI PIÙ CHE SI TRATTA DI UNA RISULTANTE PARZIALE.

LA POSIZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DIPENDE A SUA VOLTA DA x, E SI COLLOCA A UNA DISTANZA PARI A $\frac{2}{3}x$ DALL'ESTREMO A (O, ALTERNATIVAMENTE, A UNA DISTANZA $x/3$ DAL PUNTO X).

IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE FORNISCE:

$$A \rightarrow B$$
$$0 < x < L$$

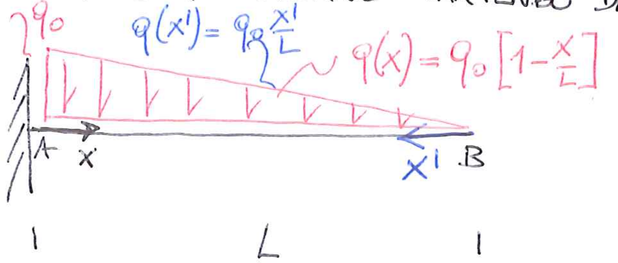
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 \quad N(x) = 0 & [13] \\ \uparrow R_\perp = 0 \quad \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{2L} - T(x) = 0 & [14] \\ \circlearrowleft M_z(x) = 0 \quad -q_0 \frac{L}{6} x + \frac{q_0 x^2}{2L}\frac{x}{3} + M(x) = 0 & [15] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 & [13'] \\ T(x) = \frac{q_0 L}{6} - \frac{q_0 x^2}{2L} & [14'] \\ M(x) = \frac{q_0 L}{6} x - \frac{q_0 x^3}{6L} & [15'] \end{cases}$$

CHE COINCIDONO CON LE [4']-[6'] E COME QUESTE POSSONO ESSERE SCRITTE IN FORMA FATTORIZZATA:

$$\begin{cases} N(x) = 0 & [13''] \\ T(x) = \frac{q_0 L}{6}\left[1 - 3\frac{x^2}{L^2}\right] & [14''] \\ M(x) = \frac{q_0 L x}{6}\left[1 - \frac{x^2}{L^2}\right] & [15''] \end{cases}$$

ANCHE QUI LA SOSTITUZIONE AL CARICO DISTRIBUITO DELLA SUA RISULTANTE PARZIALE CORRISPONDE A SOSTITUIRE DIRETTAMENTE NELLE EQUAZIONI CARDINALI [4]-[6] IL RISULTATO DEGLI INTEGRALI [$\star$] E [$\star\star$].

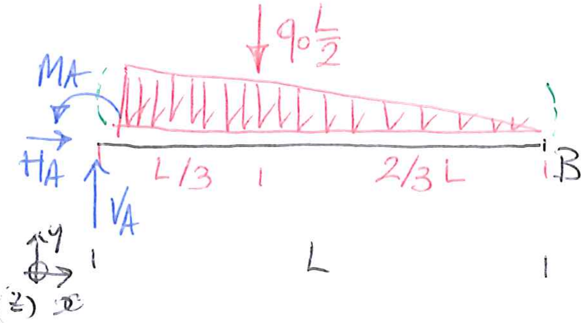
DA QUANTO FINORA ESPOSTO SI VEDONO I VANTAGGI DI SOSTITUIRE AI CARICHI DISTRIBUITI LE LORO RISULTANTI PARZIALI (COLLOCATE NEI PUNTI DI APPLICAZIONE CORRETTI) QUANDO SI TRATTA DI VALUTARE LE AZIONI INTERNE.
SI POSSONO PERÒ PRESENTARE SITUAZIONI IN CUI IL CALCOLO DELLA RISULTANTE PARZIALE (O DEL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE) PUÒ RISULTARE MALAGEVOLE.
È IL CASO DEL SEMPLICE ESEMPIO SEGUENTE, QUANDO SI VOGLIONO CALCOLARE LE AZIONI INTERNE PARTENDO DALL'ESTREMO A:



LA DISTRIBUZIONE DI CARICO È LINEARE DECRESCENTE SECONDO LA COORDINATA x (E CRESCENTE SECONDO LA COORDINATA x') INFATTI, POICHÉ $x' = L - x$, SI HA

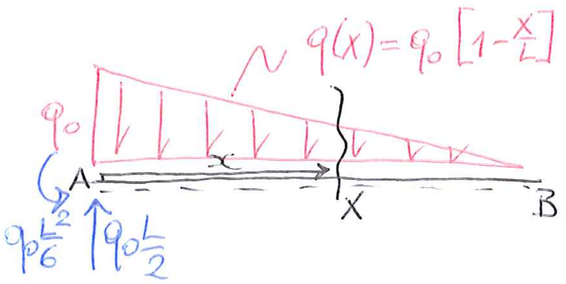
$$q(x') = q_0 \frac{[L-x]}{L} = q_0\left[1 - \frac{x}{L}\right] = q(x)$$

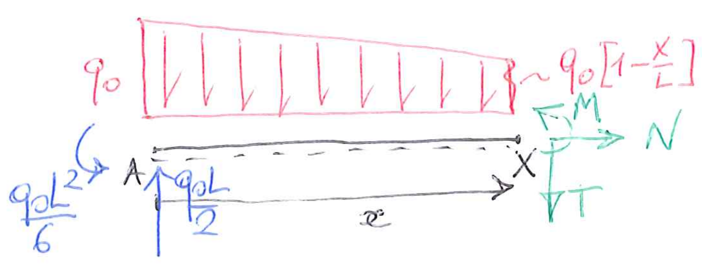
IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI PROCEDE SPEDITAMENTE CON METODI NOTI:



$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - \frac{q_0 L}{2} = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A - q_0 \frac{L}{2}\frac{L}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{q_0 L}{2} \\ M_A = \frac{q_0 L^2}{6} \end{cases}$$

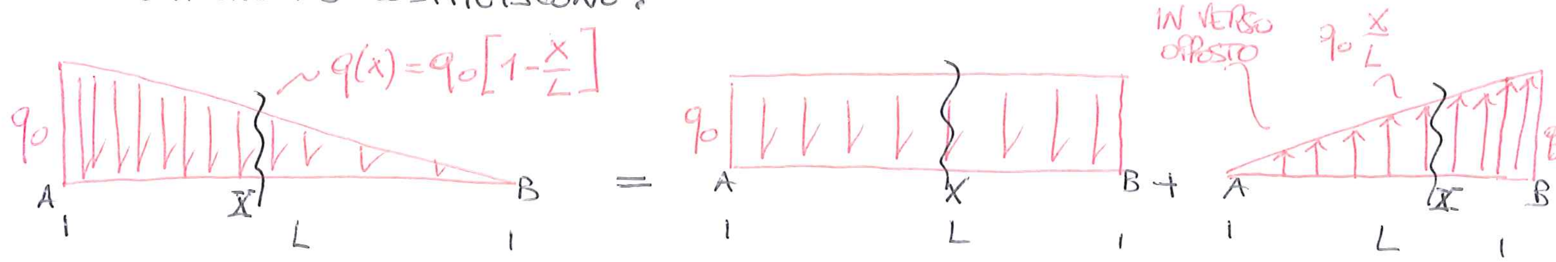
E QUINDI IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO È IL SEGUENTE:





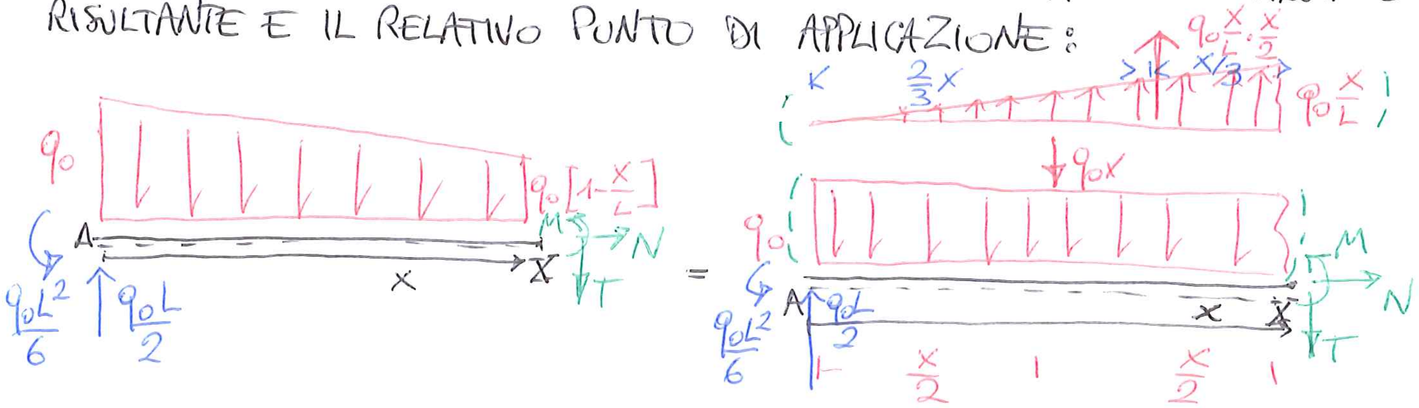
PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE (PARTENDO DALL'ESTREMITÀ A) SI OSSERVA CHE LA PORZIONE DI CARICO GRAVANTE SUL TRATTO AX HA FORMA TRAPEZOIDALE, E NON È IMMEDIATO DETERMINARE IL VALORE DELLA RISULTANTE, E SOPRATTUTTO LA POSIZIONE x^* DEL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE.

CONVIENE SFRUTTARE L'ESPRESSIONE POLINOMIALE DEL CARICO, SCOMPONENDOLO NEI 2 MONOMI CHE LO COSTITUISCONO:



IN QUESTO MODO I 2 COSTITUENTI DANNO LUOGO A DUE DISTRIBUZIONI DI CARICO, UNA UNIFORME (DI ALTEZZA COSTANTE, q_0) E L'ALTRA, LINEARMENTE CRESCENTE, DI ANDAMENTO LINEARE CRESCENTE.

PER ENTRAMBE QUESTE DISTRIBUZIONI DI CARICO E' AGEVOLE VALUTARE LA RISULTANTE E IL RELATIVO PUNTO DI APPLICAZIONE:



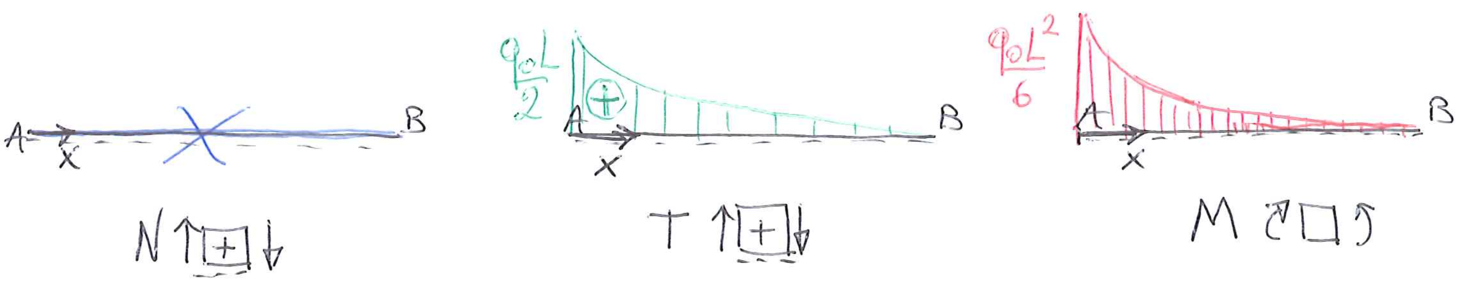
SI TROVA DUNQUE: $A \to B$
$0<x<L$

$$\begin{cases} \rightarrow R_{/\!/} = 0 \quad N(x) = 0 & [16] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{q_0L}{2} - q_0x + q_0\frac{x^2}{2L} - T(x) = 0 & [17] \\ \circlearrowleft M_{z(x)} = 0 \quad \frac{q_0L^2}{6} - \frac{q_0L}{2}x + q_0x\frac{x}{2} - q_0\frac{x^2}{2L}\cdot\frac{x}{3} + M(x) = 0 & [18] \end{cases}$$

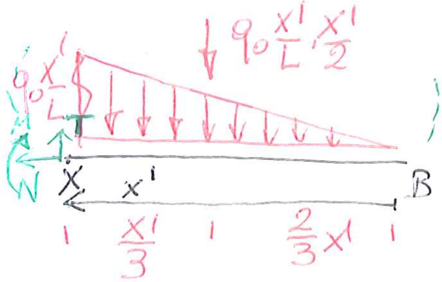
E CON QUALCHE SEMPLIFICAZIONE:

$$\begin{cases} N(x) = 0 & [16'] \\ T(x) = \frac{q_0L}{2}\left[1 - 2\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right] & [17'] \\ M(x) = -\frac{q_0L^2}{6}\left[1 - 3\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right] & [18'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 & [16''] \\ T(x) = \frac{q_0L}{2}\left[1 - \frac{x}{L}\right]^2 & [17''] \\ M(x) = -\frac{q_0L^2}{6}\left[1 - \frac{x}{L}\right]^3 & [18''] \end{cases}$$

L'ANDAMENTO DEI DIAGRAMMI E' IL SEGUENTE:



A SCOPO DI VERIFICA, SI PUÒ CALCOLARE LE AZIONI INTERNE A PARTIRE DA (B) USANDO LA COORDINATA x', RISPETTO ALLA QUALE LA DISTRIBUZIONE DI CARICO RISULTA LINEARE CRESCENTE. NE SEGUE:



$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 \quad -N(x') = 0 & [19] \\ \uparrow R_{\perp} = 0 \quad T(x') - q_0 \dfrac{x'^2}{2L} = 0 & [20] \\ \curvearrowleft M_{z(x')} = 0 \quad -M(x') - q_0 \dfrac{x'^2}{2L} \cdot \dfrac{x'}{3} = 0 & [21] \end{cases}$$

SI HA POI:

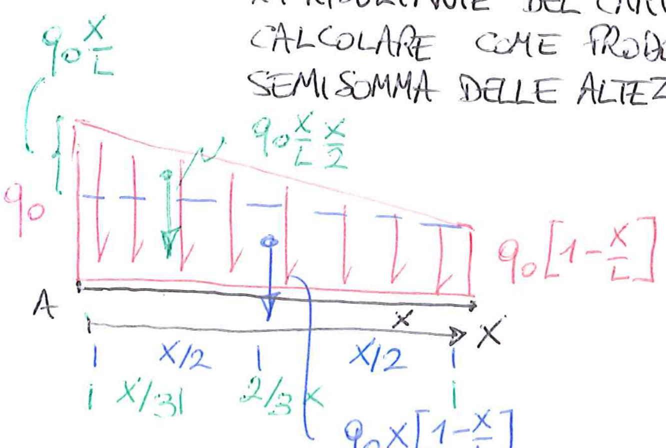
$$\begin{cases} N(x') = 0 & [19'] \\ T(x') = q_0 \dfrac{x'^2}{2L} & [20'] \\ M(x') = -q_0 \dfrac{x'^3}{6L} & [21'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x') = 0 & [19''] \\ T(x') = \dfrac{q_0 L}{2} \left[\dfrac{x'}{L}\right]^2 & [20''] \\ M(x') = -\dfrac{q_0 L^2}{6} \left[\dfrac{x'}{L}\right]^3 & [21''] \end{cases}$$

DA QUI, CON LA SOSTITUZIONE $x' = L - x \Rightarrow \frac{x'}{L} = 1 - \frac{x}{L}$ SI OTTIENE

$$\begin{cases} N(x) = 0 & [19'''] \\ T(x) = \dfrac{q_0 L}{2} \left[1 - \dfrac{x}{L}\right]^2 & [20'''] \\ M(x) = -\dfrac{q_0 L^2}{6} \left[1 - \dfrac{x}{L}\right]^3 & [21'''] \end{cases}$$

DEL TUTTO IDENTICHE ALLE [16''] - [18''] PRECEDENTEMENTE OTTENUTE.

NOTA 2. OVVIAMENTE È POSSIBILE, ANCHE SE NON DEL TUTTO AGEVOLE, CALCOLARE LA RISULTANTE E IL RELATIVO PUNTO DI APPLICAZIONE PER UNA DISTRIBUZIONE DI CARICO A FORMA DI TRAPEZIO.
SI PRESENTANO IN BREVE I RISULTATI.
LA RISULTANTE DEL CARICO È PARI ALL'AREA DEL TRAPEZIO, CHE SI PUÒ CALCOLARE COME PRODOTTO DELLA DIMENSIONE DELLA BASE PER LA SEMISOMMA DELLE ALTEZZE:



$$R = x \cdot \frac{q_0 + q_0\left[1 - \frac{x}{L}\right]}{2} = \frac{q_0 x}{2}\left[2 - \frac{x}{L}\right]$$

$$R = \frac{q_0 x}{2L}\left[2L - x\right] \qquad [22]$$

PER CALCOLARE LA POSIZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE DA (A) SI VALUTA IL MOMENTO RISPETTO AD (A) DEI 2 CONTRIBUTI (RETTANGOLO + TRIANGOLO) IN CUI L'AREA TRAPEZOIDALE SI PUÒ SCOMPORRE:

$$\curvearrowleft M_{z(A)} = q_0 \frac{x^2}{2L} \cdot \frac{x}{3} + q_0 x\left[1 - \frac{x}{L}\right]\frac{x}{2} = q_0 \frac{x^3}{6L} + q_0 \frac{x^2}{2} - q_0 \frac{x^3}{2L} = q_0 \frac{x^2}{2} - q_0 \frac{x^3}{3L}$$

PERTANTO $M_{Z(A)} = \frac{q_0 x^2}{6L}\left[3L - 2x\right]$

NE SEGUE, PER RELAZIONI NOTE:

$$x^* = \frac{M_{Z(A)}}{R} = \frac{\frac{\cancel{q_0} x^{\cancel{2}}}{6\cancel{L}}\left[3L-2x\right]}{\frac{\cancel{q_0}\cancel{x}}{2\cancel{L}}\left[2L-x\right]} = \frac{x}{3}\,\frac{3L-2x}{2L-x} \qquad [23]$$

QUESTA È LA DISTANZA DA A IN CUI VA CONSIDERATA APPLICATA LA RISULTANTE PARZIALE $R(x)$ DEL CARICO DISTRIBUITO, FORNITO DALLA [22]

SI PUÒ VEDERE CHE LA POSIZIONE x^* VARIA IN MODO NON LINEARE CON x:

PER $x=0$ È $x^* = 0$

PER $x = \frac{L}{2}$ È $x^* = \frac{L}{6}\left[\frac{3L-L}{2L-L/2}\right] = \frac{L}{6}\left[\frac{2\cancel{L}}{\frac{3}{2}\cancel{L}}\right] = \frac{L}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{9}L$

PER $x = L$ È $x^* = \frac{L}{3}\left[\frac{3L-2L}{2L-L}\right] = \frac{L}{3}\left[\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}\right] = \frac{L}{3}$.

SI LASCIA COME VERIFICA LA DETERMINAZIONE DELLE AZIONI INTERNE NELL'ESEMPIO CONSIDERATO CON IL METODO APPENA INDICATO, CHE SFRUTTA LE EQUAZIONI [22] E [23].

SI TENGA CONTO CHE SE x^* FORNISCE LA DISTANZA DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE DAL PUNTO A, QUELLA DAL PUNTO X, DOVE SI È SPEZZATA IN DUE PARTI LA STRUTTURA È PARI A $x - x^*$.

LA SITUAZIONE DA CONSIDERARE È QUINDI LA SEGUENTE: