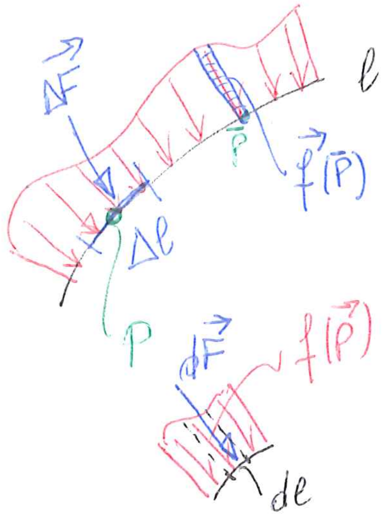
DISTRIBUZIONI CONTINUE DI FORZA (CARICHI DISTRIBUITI)

FINORA SI SONO PRESI IN ESAME SOLO CARICHI CONCENTRATI: FORZE E COPPIE INDIVIDUATI DA UN PUNTO DI APPLICAZIONE, RAPPRESENTABILI IN TERMINI MATEMATICI CON FUNZIONI IMPULSIVE (FUNZIONI GENERALIZZATE).

ORA SI PASSA A CONSIDERARE DISTRIBUZIONI DI FORZA APPLICATE ("SPALMATE") SU PORZIONI DI AMPIEZZA FINITA, NON ASSIMILABILI A PUNTIFORMI

DAL PUNTO DI VISTA DELL'ANALISI MATEMATICA, E LIMITANDOSI A CONSIDERARE SISTEMI PIANI DI TRAVI, SI CONSIDERA UNA PORZIONE DI ASSE DELLA TRAVE SOGGETTA A UNA DISTRIBUZIONE (VETTORIALE) DI FORZA:



SI AMMETTE CHE AD OGNI TRATTO DI LUNGHEZZA $\Delta\ell$ SIA ASSOCIABILE A UNA RISULTANTE $\Delta\vec{F}$.

SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{\Delta\ell \to P} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\ell} = \vec{f}(P)$$

CIOÈ SE AL RINSERRARSI DELL'ELEMENTO DI LINEA $\Delta\ell$ ATTORNO AL PUNTO P IL RAPPORTO $\Delta\vec{F}/\Delta\ell$ SI MANTIENE FINITO, SI DEFINISCE UNA FUNZIONE VETTORIALE DEL PUNTO, LA DENSITÀ LINEARE DI FORZA (CIOÈ LA DENSITÀ DI FORZA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA), $\vec{f}(P)$

DIMENSIONALMENTE RISULTA $[f] = \dfrac{[F]}{[L]}$ CIOÈ UN RAPPORTO FRA FORZA E LUNGHEZZA.

$\vec{f}(P)$, CHE È INTERPRETABILE COME "ALTEZZA" DEL DIAGRAMMA CHE RAPPRESENTA LA DISTRIBUZIONE DI FORZA NEL PUNTO P È UNA QUANTITÀ VETTORIALE POICHÉ È DEFINITA IN TERMINI DI MODULO, DIREZIONE E VERSO.

SI OSSERVI ANCHE CHE $\vec{f}(P)$ È FUNZIONE VETTORIALE DEL PUNTO P, CHE APPARTIENE ALLA LINEA ℓ, NEL SENSO CHE AD OGNI PUNTO DI ℓ, $\vec{f}(P)$ FA CORRISPONDERE UN PARTICOLARE VETTORE CHE DIPENDE DAL PUNTO: IN TERMINI ANALITICI SI PUÒ PARLARE DI CAMPO VETTORIALE POSIZIONALE.

PRESO QUINDI UN ELEMENTO DI LINEA INFINITESIMA $d\ell$ NELL'INTORNO DEL PUNTO P, $\vec{f}(P)$ DEFINISCE UNA "FORZA ELEMENTARE" $d\vec{F}$ COSIFFATTA:

$$d\vec{F} = \vec{f}(P)\, d\ell. \qquad [1]$$

PERTANTO IL VETTORE $d\vec{F}$ "EREDITA" DA $\vec{f}(P)$ DIREZIONE E VERSO: IN MODULO SI TROVA CHE $|d\vec{F}| = |\vec{f}(P)|\, d\ell$; QUINDI $|d\vec{F}|$ RAPPRESENTA GRAFICAMENTE L'AREA DEL RETTANGOLINO DI BASE $d\ell$ E ALTEZZA $|\vec{f}(P)|$.

LA [1] PERMETTE DI OTTENERE

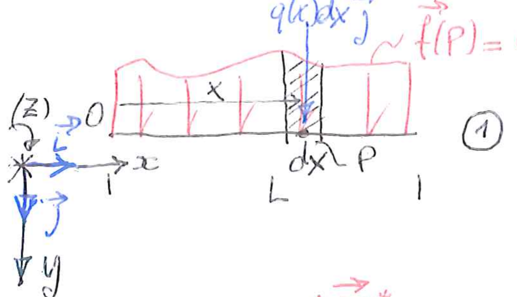
$$\vec{f}(P) = \frac{d\vec{F}}{d\ell} \qquad [2]$$

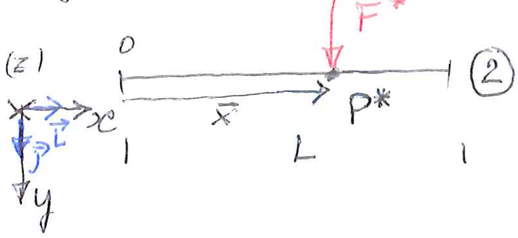
E METTE IN LUCE CHE LA DISTRIBUZIONE LINEARE DI FORZA È INTERPRETABILE COME DERIVATA DELLA FORZA RISULTANTE $\vec{F}$ RISPETTO ALL'ELEMENTO DI LINEA.

PER SEMPLICITÀ SI AMMETTERÀ SEMPRE NEL SEGUITO CHE $\vec{F}$ E $\vec{f}$ SIANO FUNZIONI CONTINUE E SUFFICIENTEMENTE REGOLARI DA RISULTARE DERIVABILI QUASI OVUNQUE (ESCLUSI AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI PUNTI ISOLATI).

UN'ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE CONSISTE NELL'ASSUMERE CHE LA DENSITÀ DI FORZA $\vec{f}(P)$ SIA TALE CHE NON VARÎ DA PUNTO A PUNTO LA DIREZIONE DEL VETTORE $\vec{f}(P)$, CIOÈ CHE SI SIA IN PRESENZA DI UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI FORZE PARALLELE;
QUESTA CIRCOSTANZA PUÒ ESSERE AGEVOLMENTE SUPERATA, MA VIENE QUI INTRODOTTA PER RENDERE PIÙ AGEVOLE LA TRATTAZIONE: SI ASSUME QUINDI CHE $\vec{f}(P) = q(x)\vec{j}$, DOVE x È LA COORDINATA DEL PUNTO P: $P \equiv (x)$.
LIMITANDOSI A CONSIDERARE ELEMENTI RETTILINEI DI TRAVE SOGGETTI A DISTRIBUZIONI CONTINUE DI FORZE PARALLELE SI HA INFATTI CHE L'ELEMENTO DI LINEA dl PUÒ ESSERE SOSTITUITO DA UN SEGMENTO dx MISURATO LUNGO L'ASSE DELLA TRAVE.

IL PROBLEMA CHE CI SI PONE È QUELLO DI TROVARE UN SISTEMA EQUIVALENTE, COSTITUITO DA UNA FORZA CONCENTRATA APPLICATA IN UN OPPORTUNO PUNTO P^*, CON $P^* \equiv (\bar{x})$ CHE PRODUCA GLI STESSI EFFETTI DELLA DISTRIBUZIONE $\vec{f}(P) = q(x)\vec{j}$





SI RICORDA CHE 2 SISTEMI DI FORZE SONO EQUIVALENTI SE (E SOLO SE) HANNO LA STESSA RISULTANTE $\vec{R}$ E IL MEDESIMO MOMENTO RISULTANTE $\vec{M}$ (RISPETTO ALLO STESSO POLO).

DEVE QUINDI RISULTARE:

$$\vec{R}^{①} = \vec{R}^{②}$$
$$\vec{M}^{①}_{(O)} = \vec{M}^{②}_{(O)}.$$

NEL CASO IN ESAME, POICHÉ $\vec{f}(P) = q(x)\vec{j}$ SI HA:

$$\vec{R}^{①} = \int_0^L \vec{f}(P)\,dl = \int_0^L q(x)\vec{j}\,dx = \left[\int_0^L q(x)dx\right]\vec{j},$$

CIOÈ $\vec{R}^{①}$ HA SOLO COMPONENTE SECONDO LA DIREZIONE y; INVECE IL SISTEMA EQUIVALENTE ② FORNISCE:

$\vec{R}^{②} = \vec{F}^*$: NE SEGUE CHE PER AVERE $\vec{R}^{①} = \vec{R}^{②}$ DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE $\vec{F}^* = F_y^*\vec{j}$ (CIOÈ $\vec{F}^*$ È PARALLELA ALLA DIREZIONE y).
INOLTRE SI OTTIENE:

$$\vec{R}^{①} = \vec{R}^{②} \Rightarrow \int_0^L q(x)dx\,\vec{j} = F_y^*\vec{j} \Rightarrow \boxed{F_y^* = \int_0^L q(x)dx} \qquad [3]$$

PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI, SI OSSERVA CHE IL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO $P \equiv (x)$ RISPETTO ALL'ORIGINE $O \equiv (0)$ È ALLINEATO CON L'ASSE x E QUINDI FORNISCE $\vec{P-O} = x\vec{i}$; ANALOGAMENTE $\vec{P^*-O} = \bar{x}\vec{i}$.

NE SEGUE, NEL PRIMO CASO:

$$\vec{M}^{①}_{(O)} = \int_0^L [(\overrightarrow{P-O}) \wedge \vec{f}(P)] dl = \int_0^L (\overrightarrow{P-O}) \wedge q(x)\vec{j}\, dx = \int_0^L x\vec{i} \wedge q(x)\vec{j}\, dx$$

$$= \left[\int_0^L x q(x) dx\right] \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{j}}_{\vec{k}} = \left[\int_0^L x q(x) dx\right] \vec{k}$$

E NEL SECONDO:

$$\vec{M}^{②}_{(O)} = (\overrightarrow{P^* - O}) \wedge \vec{F}^* = \bar{x}\vec{i} \wedge F_y^* \vec{j} = [\bar{x} F_y^*] \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{j}}_{\vec{k}} = [\bar{x} F_y^*] \vec{k}$$

PERTANTO $\vec{M}^{①}_{(O)}$ E $\vec{M}^{②}_{(O)}$ HANNO SOLO COMPONENTE IN DIREZIONE z; SI HA QUINDI CHE, IMPONENDO $\vec{M}^{①}_{(O)} = \vec{M}^{②}_{(O)}$ SI OTTIENE

$$\int_0^L x q(x) dx = \bar{x} F_y^*$$

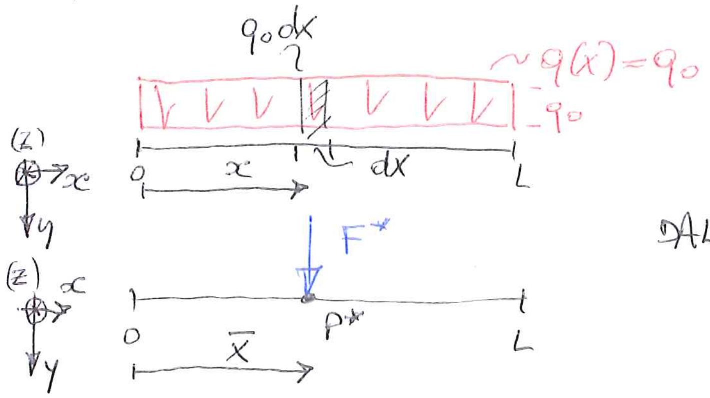
E DUNQUE SI TROVA, PER LA COORDINATA P^* DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE $\vec{F}^*$:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x q(x) dx}{F_y^*} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\int_0^L x q(x) dx}{\int_0^L q(x) dx.}} \qquad [4]$$

PERTANTO SE È NOTA LA FUNZIONE DI CARICO $q(x)$ LE [3] E [4] PERMETTONO DI CALCOLARE AGEVOLMENTE LA RISULTANTE $\vec{F}^*$ E IL PUNTO DI APPLICAZIONE P^* DELLA RISULTANTE PER IL SISTEMA ②, EQUIVALENTE AL SISTEMA ①, DATO.

SI PASSA A CONSIDERARE ALCUNI ESEMPI SIGNIFICATIVI

1) DISTRIBUZIONE DI CARICO UNIFORME (CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO)



RAPPRESENTA, PER ESEMPIO, IL PESO PROPRIO DI UNA TRAVE DI SEZIONE COSTANTE DISPOSTA ORIZZONTALMENTE.

DALLA [3] SI OTTIENE:

$$F_y^* = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L q_0 dx = q_0 \int_0^L dx = q_0 [x]_0^L$$

$$\Rightarrow F_y^* = q_0 L$$

PER UTILIZZARE LA [4] CONVIENE VALUTARE DAPPRIMA IL NUMERATORE:

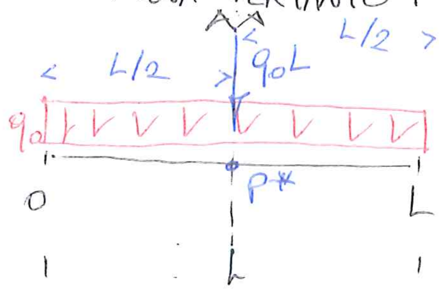
$$\int_0^L x\, q(x) dx = \int_0^L x q_0 dx = q_0 \int_0^L x dx = q_0 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = q_0 \frac{L^2}{2}.$$

IL DENOMINATORE DELLA [4] È IL RISULTATO APPENA OTTENUTO SOPRA, PER CUI SI CONCLUDE:

$$\bar{X} = \frac{\int_0^L x\, q_0\, dx}{\int_0^L q_0\, dx} = \frac{\cancel{q_0}\frac{L^{\cancel{2}}}{2}}{\cancel{q_0}\cancel{L}} = \frac{L}{2}$$

SI OSSERVA CHE LA POSIZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE <u>NON</u> DIPENDE DAL VALORE DEL CARICO DISTRIBUITO, q_0, MA SOLO DA L.

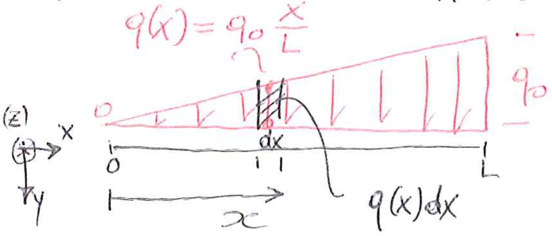
SI TROVA PERTANTO:

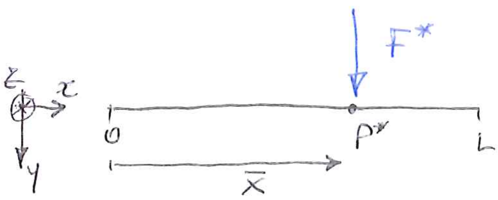


IL RISULTATO È GIUSTIFICABILE SULLA BASE DI CONSIDERAZIONI DI SIMMETRIA.

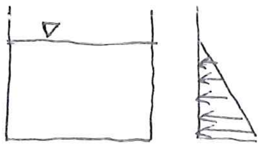
SI OSSERVI CHE LA RISULTANTE HA VALORE PARI ALL'"AREA" DELLA DISTRIBUZIONE DI CARICO, CIOÈ DEL RETTANGOLO DI BASE L E ALTEZZA q_0.

2) DISTRIBUZIONE DI CARICO LINEARE (CARICO LINEARMENTE DISTRIBUITO)





RAPPRESENTA, PER ESEMPIO LA SPINTA DI UN LIQUIDO SULLA PARETE DI UN RECIPIENTE: È NOTO CHE TALE SPINTA DIPENDE LINEARMENTE DALLA PROFONDITÀ:



SI OSSERVI CHE IN QUESTO CASO $q(x)$ NON È COSTANTE: LA SUA ESPRESSIONE PUÒ ESSERE FACILMENTE OTTENUTA CON UNA PROPORZIONE:

$$q(x) : x = q_0 : L \Rightarrow q(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

SI HA POI $q(x=0) = 0$; $q(x=L) = q_0$.

DALLA [3] SI OTTIENE IN QUESTO CASO:

$$F_y^* = \int_0^L q(x)\,dx = \int_0^L q_0 \frac{x}{L}\,dx = \frac{q_0}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{q_0}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{q_0}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{q_0 L}{2}.$$

E DI NUOVO SI TROVA CHE LA RISULTANTE È PARI ALL'"AREA" CHE RAPPRESENTA IL CARICO: IN QUESTO CASO UN TRIANGOLO DI BASE L E ALTEZZA q_0, LA CUI AREA È PARI A $\frac{1}{2}L q_0$.

IL NUMERATORE DELLA [4] FORNISCE ORA:

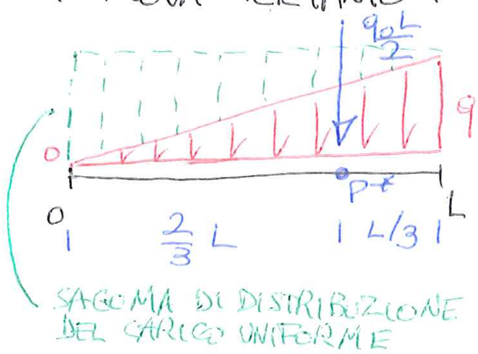
$$\int_0^L x\,q(x)\,dx = \int_0^L x\, q_0 \frac{x}{L}\,dx = \int_0^L \frac{q_0}{L}x^2 dx = \frac{q_0}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{q_0}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{q_0}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{3}\,2}}{3} = \frac{q_0 L^2}{3}$$

PERTANTO IN QUESTO CASO SI TROVA, MEDIANTE LA [4]:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\, q_0 \frac{x}{L} dx}{\int_0^L q_0 \frac{x}{L} dx} = \frac{\frac{q_0 L^2}{3}}{\frac{q_0 L}{2}} = \frac{2}{3} L$$

DI NUOVO, IL RISULTATO È DI VALIDITÀ GENERALE: NON DIPENDE DAL VALORE q_0 DELL'INTENSITÀ MASSIMA DEL CARICO MA SOLO DALLA LUNGHEZZA L DELLA IMPRONTA CARICATA.

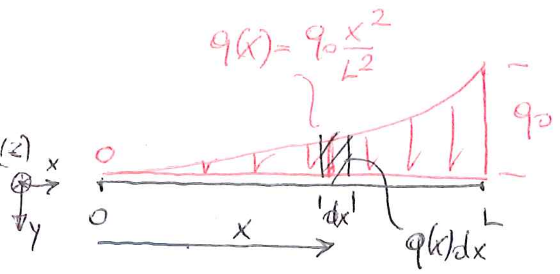
SI TROVA PERTANTO:

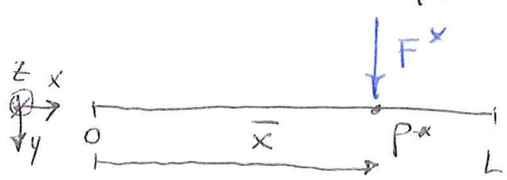


IL RISULTATO NON È SORPRENDENTE: IL CARICO DISTRIBUITO ASSUME VALORI PIÙ ELEVATI VERSO L'ESTREMO DESTRO E IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE, NEL SISTEMA EQUIVALENTE, SI SPOSTA VERSO DESTRA; PIÙ PRECISAMENTE A $\frac{2}{3}L$ DA DOVE IL CARICO DISTRIBUITO È NULLO E A $\frac{1}{3}L$ DA DOVE IL CARICO DISTRIBUITO RAGGIUNGE LA MASSIMA INTENSITÀ, q_0.

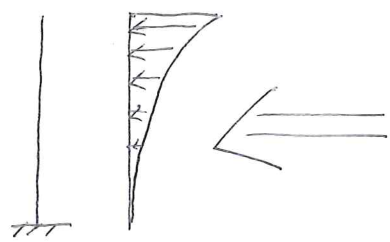
NON DEVE STUPIRE CHE IL VALORE DELLA RISULTANTE SI DIMEZZI RISPETTO AL CASO DI CARICO DISTRIBUITO UNIFORMEMENTE, IN QUANTO L'"AREA" DELLA DISTRIBUZIONE DI CARICO RISULTA DIMEZZATA.

3) DISTRIBUZIONE DI CARICO PARABOLICA





RAPPRESENTA, PER ESEMPIO, LA SPINTA DEL VENTO SU UN EDIFICIO ALTO: LA PRESSIONE CHE IL VENTO ESERCITA PUÒ ESSERE MODELLATA CON UNA LEGGE PARABOLICA A PARTIRE DAL LIVELLO DEL SUOLO.



SI OSSERVI CHE PER GARANTIRE CHE q_0 ABBIA DIMENSIONI CORRETTE $[F]/[L]$ LA DISTRIBUZIONE DI CARICO DEVE CONTENERE IL TERMINE ADIMENSIONALE $x^2/L^2 = (x/L)^2$.
SI VERIFICA ANCHE CHE $q(x=0) = 0$ E $q(x=L) = q_0$

LA [3] FORNISCE IN QUESTO CASO:

$$F_y^* = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L q_0 \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{q_0}{L^2} \int_0^L x^2 dx = \frac{q_0}{L^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{q_0}{L^2}\frac{L^3}{3} = \frac{q_0 L}{3}$$

E ANCORA CORRISPONDE ALL'"AREA" CHE RAPPRESENTA IL CARICO.

IL NUMERATORE DELLA [4] DÀ IN QUESTO CASO

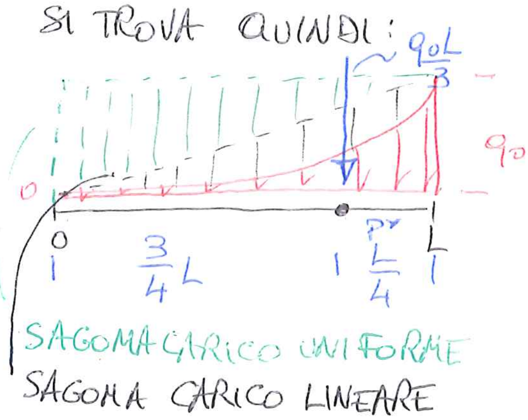
$$\int_0^L x\, q(x) dx = \int_0^L x\, q_0 \frac{x^2}{L^2} dx = \int_0^L q_0 \frac{x^3}{L^2} dx = \frac{q_0}{L^2}\int_0^L x^3 dx = \frac{q_0}{L^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L = \frac{q_0}{\cancel{L^2}} \frac{L^{\cancel{4}\,2}}{4} = \frac{q_0 L^2}{4}$$

PERTANTO SI TROVA PER LA [4]

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\, q_0 \frac{x^2}{L^2}\, dx}{\int_0^L q_0 \frac{x^2}{L^2}\, dx} = \frac{\frac{\cancel{q_0} L^{\cancel{2}}}{4}}{\frac{\cancel{q_0 L}}{3}} = \frac{3}{4} L .$$

E ANCORA IL RISULTATO, DI VALIDITA' GENERALE, COMPORTA CHE LA POSIZIONE DELLA RISULTANTE DEL SISTEMA EQUIVALENTE SIA LA MEDESIMA PER OGNI DISTRIBUZIONE PARABOLICA, INDIPENDENTEMENTE DALLA SUA INTENSITA' MASSIMA, q_0, MENTRE DIPENDE SOLO DALLA AMPIEZZA, L, DELL'IMPRONTA CARICATA.

SI TROVA QUINDI:



IL RISULTATO MOSTRA CHE LA DISTRIBUZIONE PRESENTA VALORI PIÙ ELEVATI DELL'INTENSITA' A DESTRA E CIÒ COMPORTA UN ULTERIORE SPOSTAMENTO VERSO DESTRA DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE DEL SISTEMA EQUIVALENTE, ORA POSTA A $\frac{3}{4}L$ DAL PUNTO DOVE LA DISTRIBUZIONE SI ANNULLA E A $\frac{1}{4}L$ DAL PUNTO DOVE ATTINGE IL VALORE MASSIMO, q_0.

ANCHE LA RISULTANTE SI RIDUCE RISPETTO AL CASO PRECEDENTE IN QUANTO L' "AREA" DI CARICO SI RIDUCE, COME SI VEDE NEL GRAFICO.

ESTENDENDO I RISULTATI OTTENUTI, SI PUÒ VERIFICARE CHE PER UNA DISTRIBUZIONE DI CARICO MONOMIA DEL TIPO

$$q(x) = q_0 \left(\frac{x}{L}\right)^n \qquad (n = 0, 1, \ldots N)$$

SI TROVA CHE LA RISULTANTE DEL CARICO PUÒ ESSERE SCRITTA NELLA FORMA:

$$F_y^* = \frac{q_0 L}{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots, N)$$

E LA POSIZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE (MISURATA A PARTIRE DALL'ORIGINE O DELLA DISTRIBUZIONE DI CARICO) VALE:

$$\bar{x} = L \, \frac{n+1}{n+2}$$

NEL CASO DI DISTRIBUZIONI POLINOMIALI SI PUÒ APPLICARE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER TROVARE RISULTANTE E PUNTO DI APPLICAZIONE DEL SISTEMA EQUIVALENTE A OGNI TERMINE MONOMIO.

CON SIMILI CONSIDERAZIONI SI PUÒ VALUTARE PER DISTRIBUZIONI DI CARICO $q(x)$ PIÙ COMPLICATE, MA PUR SEMPRE NOTE, IL VALORE DELLA RISULTANTE E DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE PER IL SISTEMA EQUIVALENTE. L'UNICA RESTRIZIONE E' LEGATA ALLA POSSIBILITA' DI CALCOLARE (ANALITICAMENTE O CON METODI NUMERICI APPROSSIMATI) GLI INTEGRALI.

CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI IN STRUTTURE SOGGETTE A CARICHI DISTRIBUITI.

LA POSSIBILITA' DI SOSTITUIRE L'EFFETTIVA DISTRIBUZIONE DI CARICO CON UN SISTEMA EQUIVALENTE COSTITUITO DA FORZE CONCENTRATE (NEI CASI IN CUI QUESTO È LECITO) AGEVOLA IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI.

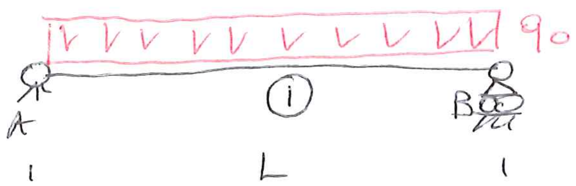
SI TENGA PERÒ PRESENTE IL SEGUENTE PRINCIPIO:

L'EQUIVALENZA STATICA IMPLICA LA SOSTITUIBILITA' <u>SOLO</u> NELL'AMBITO DEL MEDESIMO CORPO RIGIDO.

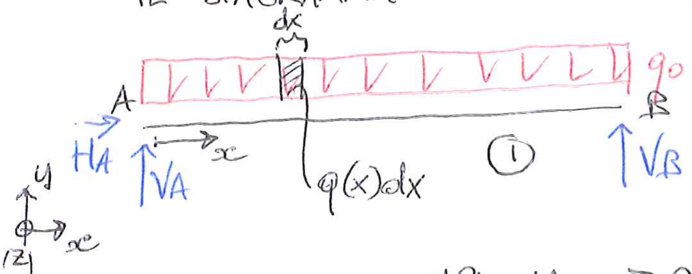
IN ALTRI TERMINI, SE UNO STESSO CARICO DISTRIBUITO SI ESTENDE SU PIÙ CORPI RIGIDI (O SU PIÙ PARTI IN CUI IL CORPO RIGIDO È STATO SUDDIVISO), ALLORA GLI EFFETTI DEL CARICO DISTRIBUITO <u>NON</u> SONO EGUALI A QUELLI DEL SISTEMA EQUIVALENTE. IN QUESTO CASO LA SOSTITUIBILITA' NON È GARANTITA.

SI CONSIDERANO ALCUNI ESEMPI.

A) TRAVE MONOCORPO APPOGGIATA SOGGETTA A CARICO UNIFORME: SOLUZIONE DIRETTA (SENZA SOSTITUZIONE)



IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA



LE EQUAZIONI CARDINALI FORNISCONO:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - \int_0^L q(x)dx + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -\int_0^L x\,q(x)\,dx + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = \int_0^L q_0\,dx \\ V_B L = \int_0^L q_0 x\,dx \end{cases} \quad [5]$$

ORA

$$\int_0^L q_0\,dx = q_0 \int_0^L dx = q_0 [x]_0^L = q_0 L \qquad [*]$$

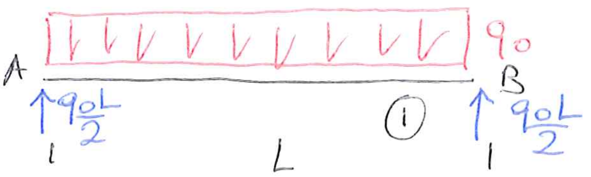
$$\int_0^L q_0 x\,dx = q_0 \int_0^L x\,dx = q_0 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = q_0 \frac{L^2}{2} \qquad [**]$$

SI OTTIENE QUINDI:

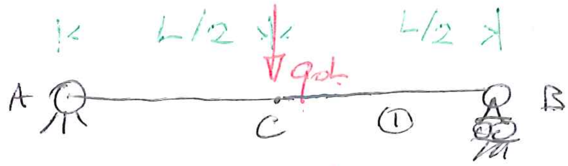
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = q_0 L \\ V_B \cancel{L} = q_0 \frac{L^{\cancel{2}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = q_0 L \\ V_B = q_0 \frac{L}{2} \end{cases} \quad [5']$$

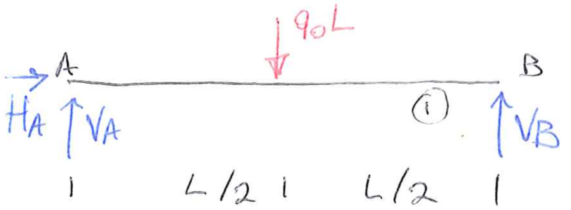
NE SEGUE $\underline{H_A = 0}$, $\underline{V_B = q_0 \frac{L}{2}}$, $\underline{V_A = q_0 \frac{L}{2}}$

E QUINDI IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



SE INVECE SI PROVVEDE A SOSTITUIRE IL CARICO UNIFORME CON IL SISTEMA EQUIVALENTE SI TROVA:



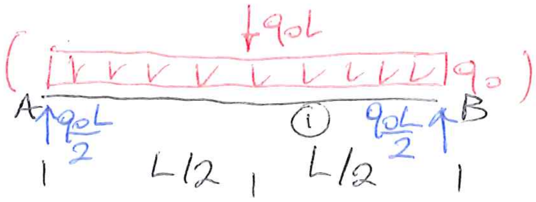


E LE EQUAZIONI CARDINALI FORNISCONO SEMPLICEMENTE:

$$\begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0 L + V_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & \left[-q_0 L\right] \cdot \frac{L}{2} + V_B L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = q_0 L \\ V_B \cancel{L} = q_0 \frac{L^{\cancel{2}}}{2} \end{cases} \quad [5']$$

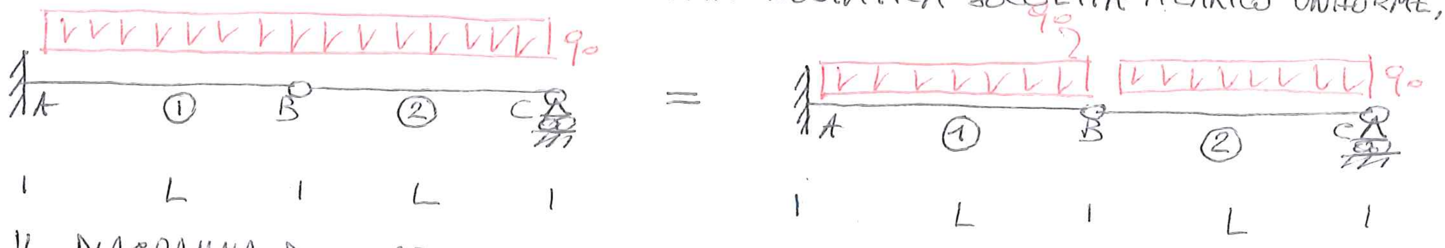
E SI RICONOSCE, CONFRONTANDO LE [5] CON LE [5'] CHE QUESTE ULTIME CONTENGONO DIRETTAMENTE, A SECONDO MEMBRO, I RISULTATI CHE SI OTTENGONO EFFETTUANDO LE 2 INTEGRAZIONI INDICATE IN [*], [**].

NE SEGUE FACILMENTE $\underline{H_A = 0}$; $\underline{V_B = \frac{q_0 L}{2}}$; $\underline{V_A = \frac{q_0 L}{2}}$, CHE DANNO LUOGO AL MEDESIMO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

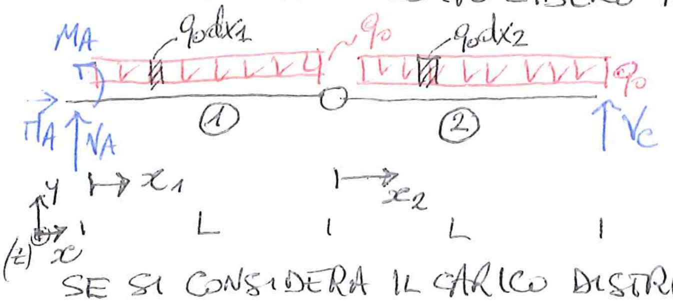


SI TENGA PERÒ CONTO CHE LA SOSTITUIBILITÀ VALE SOLO FINCHÉ SI HA UN UNICO CORPO RIGIDO: IN PARTICOLARE NON SI PUÒ USARE LA SOSTITUZIONE IN QUESTA FORMA PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE

ALTRO ESEMPIO: STRUTTURA ARTICOLATA ISOSTATICA SOGGETTA A CARICO UNIFORME:



IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI SI FA USO DELLE EQUAZIONI CARDINALI PER L'INTERA STRUTTURA (CONSIDERATA COME UNICO CORPO RIGIDO) E DELL'EQ. AUSILIARIA $M^{(2)}_{z(B)} = 0$.

SE SI CONSIDERA IL CARICO DISTRIBUITO, LE REAZIONI VINCOLARI SI DETERMINANO COME SEGUE:

$$① \cup ②: \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A = 0 & [6] \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - \int_0^L q_0\, dx_1 - \int_0^L q_0\, dx_2 + V_c = 0 & [7] \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad M_A - \int_0^L x_1 q_0\, dx_1 - \int_0^L (L+x_2) q_0\, dx_2 + V_c \cdot 2L = 0 & [8] \end{cases}$$

$$\text{EQ. AUSILIARIA} \ \circlearrowleft M^{(2)}_{z(B)} = 0 \quad -\int_0^L x_2 q_0\, dx_2 + V_c \cdot L = 0 \qquad [9]$$

E SI DISPONE DUNQUE DI QUESTO SISTEMA DI 4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE:

$$\begin{cases} H_A = 0 & [6'] \\ V_A + V_c = \int_0^L q_0\, dx_1 + \int_0^L q_0\, dx_2 & [7'] \\ M_A + 2V_c L = \int_0^L x_1 q_0\, dx_1 + \int_0^L (L+x_2) q_0\, dx_2 & [8'] \\ V_c \cdot L = \int_0^L x_2 q_0\, dx_2 & [9'] \end{cases}$$

RISOLVENDO GLI INTEGRALI SI OTTIENE:

$$\int_0^L q_0\, dx_1 = q_0 \int_0^L dx_1 = q_0 \left[x_1\right]_0^L = q_0 L$$

$$\int_0^L q_0\, dx_2 = q_0 \int_0^L dx_2 = q_0 \left[x_2\right]_0^L = q_0 L$$

$$\int_0^L x_1 q_0\, dx_1 = q_0 \int_0^L x_1\, dx_1 = q_0 \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^L = \frac{q_0 L^2}{2}$$

$$\int_0^L (L+x_2) q_0\, dx_2 = q_0 L \int_0^L dx_2 + q_0 \int_0^L x_2\, dx_2 = q_0 L \left[x_2\right]_0^L + q_0 \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^L = q_0 L^2 + q_0 \frac{L^2}{2} = \frac{3}{2} q_0 L^2$$

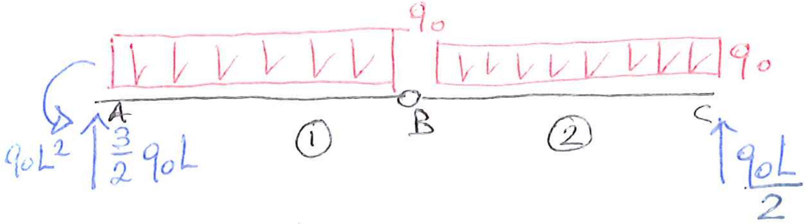
$$\int_0^L x_2 q_0\, dx_2 = q_0 \int_0^L x_2\, dx_2 = q_0 \left[\frac{x_2^2}{2}\right] = \frac{q_0 L^2}{2}$$

E SOSTITUENDO NELLE [6'] - [9'] SI OTTIENE:

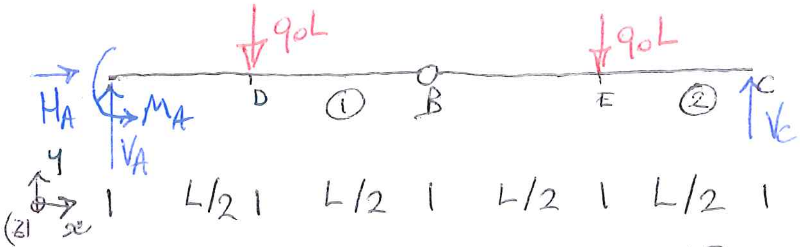
$$\begin{cases} H_A = 0 & [6''] \\ V_A + V_C = 2q_0L & [7''] \\ M_A + 2V_CL = 2q_0L^2 & [8''] \\ V_C \cdot \cancel{L} = \dfrac{q_0L^{\cancel{2}}}{2} & [9''] \end{cases}$$

PERTANTO $\underline{H_A = 0}$; $\underline{V_C = \dfrac{q_0L}{2}}$; $\underline{V_A = \dfrac{3}{2}q_0L}$; $\underline{M_A = q_0L^2}$.

E IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



SI PUÒ PERÒ SOSTITUIRE, NELL'AMBITO DI OGNI CORPO RIGIDO, IL CARICO DISTRIBUITO CON IL SISTEMA EQUIVALENTE. NE RISULTA:



E UTILIZZANDO LE STESSE EQUAZIONI (EQUAZIONI CARDINALI PER IL COMPLESSO ① ∪ ② ED EQUAZIONE AUSILIARIA $M^{②}_{z(B)} = 0$):

$$① \cup ② \quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A = 0 & [10] \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - q_0L_{(D)} - q_0L_{(E)} + V_C = 0 & [11] \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A - q_0L_{(D)} \cdot \dfrac{L}{2} - q_0L_{(E)} \cdot \dfrac{3L}{2} + V_C \cdot 2L = 0 & [12] \end{cases}$$

EQ. AUSILIARIA $\circlearrowleft M^{②}_{z(B)} = 0 \quad -q_0L_{(E)} \cdot \dfrac{L}{2} + V_C \cdot L = 0$ [13]

CHE, SPOSTANDO I TERMINI NOTI A SECONDO MEMBRO, FORNISCONO IL SISTEMA:

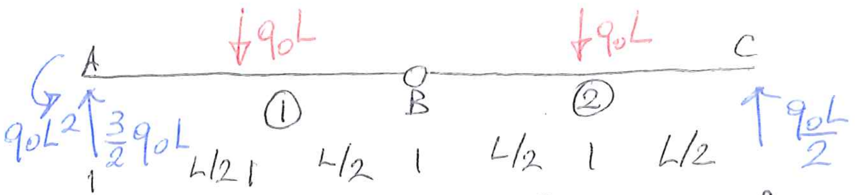
$$\begin{cases} H_A = 0 & [10'] \\ V_A + V_C = 2q_0L & [11'] \\ M_A + 2V_CL = 2q_0L^2 & [12'] \\ V_C\cancel{L} = q_0\dfrac{L^{\cancel{2}}}{2} & [13'] \end{cases}$$

E SI OSSERVA CHE LE [10']-[13'] SONO IDENTICHE ALLE [6'']-[9''] E FORNISCONO IL MEDESIMO RISULTATO: $\underline{H_A = 0}$; $\underline{V_C = \dfrac{q_0L}{2}}$; $\underline{V_A = \dfrac{3}{2}q_0L}$; $M_A = q_0L^2$.

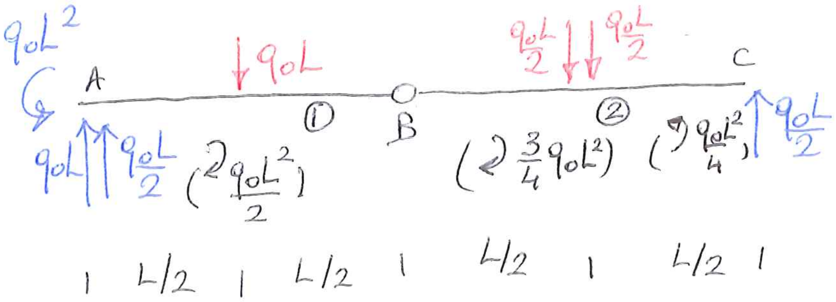
LA SOSTITUZIONE DEL SISTEMA EQUIVALENTE HA, DI FATTO, PORTATO A OTTENERE DIRETTAMENTE I TERMINI NOTI, SENZA PASSARE ATTRAVERSO IL CALCOLO

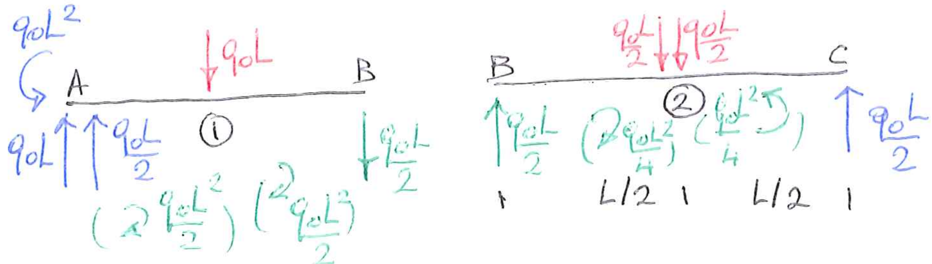
DEGLI INTEGRALI.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

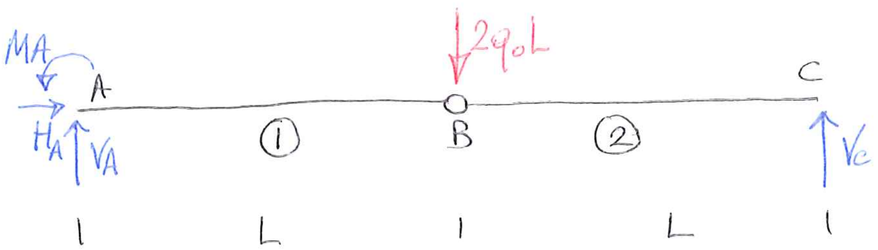


RIVELA, CON QUALCHE SEMPLICE SCOMPOSIZIONE, CHE L'EQUILIBRIO DELLE FORZE VERTICALI E DEI MOMENTI (QUEST'ULTIMO, SIA GLOBALMENTE CHE PER CIASCUNA DELLE 2 TRAVI) E' VERIFICATO!





SE INVECE SI PROCEDESSE A SOSTITUIRE IL CARICO DISTRIBUITO CON UN SISTEMA EQUIVALENTE (VIOLANDO IL REQUISITO CHE CIÒ VENGA FATTO SOLO NELL'AMBITO DEL MEDESIMO CORPO RIGIDO) SI OTTERREBBE:



E PROCEDENDO COME DI CONSUETO IL SISTEMA DI EQUAZIONI RISULTEREBBE:

$$① \cup ② \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 \quad H_A = 0 & [14] \\ \uparrow R_y = 0 \quad V_A - 2q_0L + V_c = 0 & [15] \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 \quad M_A - 2q_0L_{(B)} \cdot L + V_c \cdot 2L = 0 & [16] \end{cases}$$

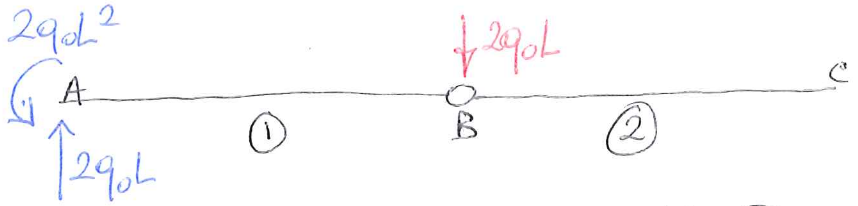
EQ. AUSILIARIA $\circlearrowleft M^{②}_{z(B)} = 0 \quad V_c \cdot L = 0$ [17]

DAL QUALE SEGUIREBBE QUANTO SEGUE:

$$\begin{cases} H_A = 0 & [14'] \\ V_A + V_C = 2q_0L & [15'] \\ M_A + 2V_C L = 2q_0L^2 & [16'] \\ V_C \cdot K = 0 & [17'] \end{cases}$$

CHE FORNISCE QUESTI RISULTATI: $H_A = 0$; $V_C = 0$; $M_A = 2q_0L^2$; $V_A = 2q_0L$

CORRISPONDENTE A QUESTO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:

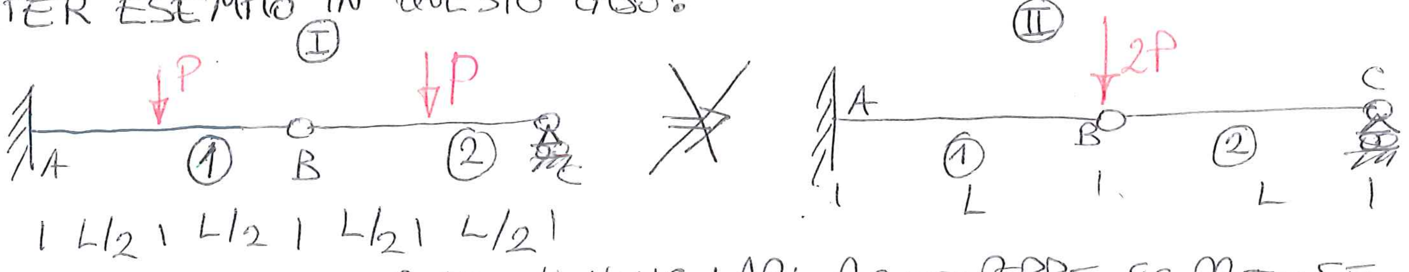


CHE COMPORTEREBBE CHE LA TRAVE ② SIA COMPLETAMENTE SCARICA!

OSSERVANDO LE [6''] - [9''], LE [10'] - [13'] E LE [14'] - [17'] SI OSSERVA CHE LE PRIME 3 EQUAZIONI COINCIDONO: SI TRATTA DELLE EQUAZIONI RELATIVE ALLA STRUTTURA COMPLETA (① ∪ ②), CONSIDERATA COME UNICO CORPO RIGIDO; È SOLO LA [17'] A FORNIRE UN RISULTATO INCOERENTE DA UN PUNTO DI VISTA FISICO (CHE PERALTRO PREGIUDICA COMPLETAMENTE LA CORRETTEZZA DEL PROCEDIMENTO), POICHÉ NEL TRATTARE L'EQUAZIONE AUSILIARIA SI DEVE TENERE CONTO CORRETTAMENTE DI COME IL CARICO DISTRIBUITO SI RIPARTISCE SULLE DUE TRAVI, COSA CHE IN QUESTO CASO NON È STATA FATTA.
CONSIDERAZIONI ANALOGHE ANDRANNO FATTE QUANDO IN UNA TRAVE MONOCORPO SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO SI DOVRANNO CALCOLARE LE AZIONI INTERNE.

SI NOTI CHE IL PROBLEMA CHE L'EQUIVALENZA NON IMPLICA LA SOSTITUIBILITÀ QUANDO NON SI OPERA NELL'AMBITO DELLO STESSO CORPO RIGIDO NON È LEGATA ALLA PRESENZA DI CARICHI DISTRIBUITI: LO STESSO PROBLEMA SI AVREBBE SE SI VOLESSE SOSTITUIRE UN SISTEMA DI CARICHI CONCENTRATI APPLICATI A CORPI DIVERSI CON UN'UNICA FORZA EQUIVALENTE.

PER ESEMPIO IN QUESTO CASO:



IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI RISULTEREBBE SCORRETTO SE SI PROCEDESSE CON LA CONDIZIONE DI CARICO (II).