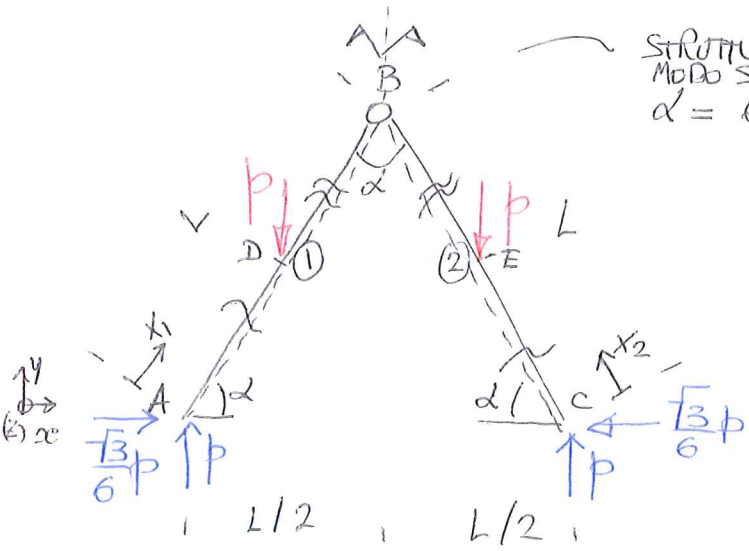


AZIONI INTERNE IN STRUTTURE ARTICOLATE

UNA VOLTA DETERMINATE LE REAZIONI VINCOLARI UNA STRUTTURA ARTICOLATA SI COMPORTA COME QUALSIASI STRUTTURA "APERTA" (TIPO TRAVE SINGOLA O STRUTTURA AD ALBERO): OGNI SEZIONAMENTO EFFETTUATO IN UN PUNTO LA SUDDIVIDE IN 2 (E SOLO 2) PARTI, PER LE QUALI, UTILIZZANDO LE EQUAZIONI CARDINALI OPPORTUNAMENTE PROIETTATE, SI POSSONO DETERMINARE IN OGNI POSIZIONE I VALORI DELLE COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA.

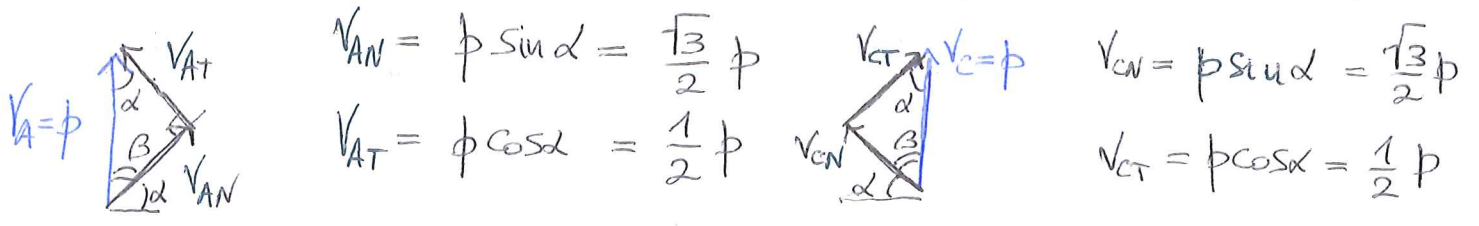
SI CONSIDERA COME ESEMPIO IL CASO DELL'ARCO A 3 CERNIERE GIÀ PRESO IN ESAME. IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



STRUTTURA GEOMETRICAMENTE SIMMETRICA, CARICATA IN MODO SIMMETRICO
 $\alpha = 60^\circ$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

FISSATE LE FIBRE DI RIFERIMENTO, SI RICONOSCE CHE OGNI TRAVE (IN QUESTO CONTESTO SI PARLA DI "FALSO PONTONE") VA SUDDIVISA IN 2 PARTI, AL DI SOPRA E AL DI SOTTO DELLA MEZZERIA, PER UN TOTALE DI 4 SITUAZIONI DA CONSIDERARE: A \rightarrow D; D \rightarrow B; C \rightarrow E; E \rightarrow B.

VISTO CHE LE TRAVI SONO INCLINATE, CONVIENE PROIETTARE LE FORZE PRESENTI NELLA DIREZIONE \perp (O) E IN QUELLA \parallel (O) ALL'ASSE DI OGNI TRAVE.

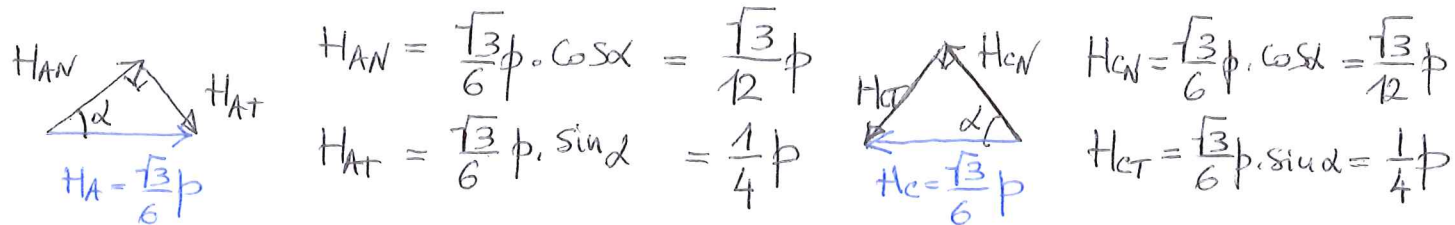


$$V_{AN} = p \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} p$$

$$V_{AT} = p \cos \alpha = \frac{1}{2} p$$

$$V_{cN} = p \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} p$$

$$V_{cT} = p \cos \alpha = \frac{1}{2} p$$

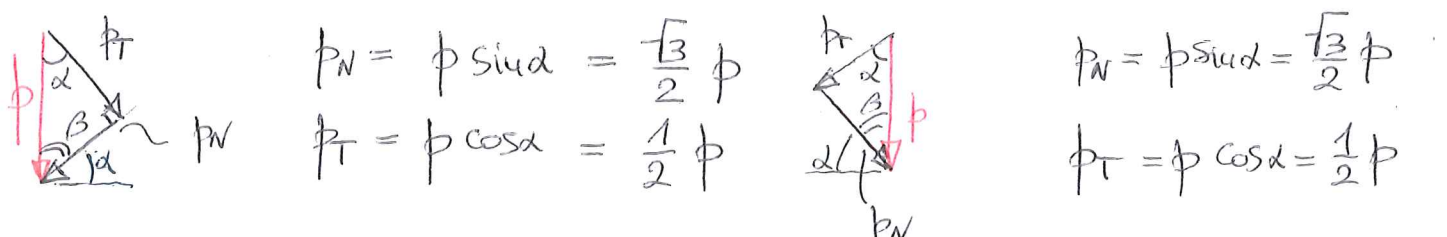


$$H_{AN} = \frac{\sqrt{3}}{6} p \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12} p$$

$$H_{AT} = \frac{\sqrt{3}}{6} p \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} p$$

$$H_{cN} = \frac{\sqrt{3}}{6} p \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12} p$$

$$H_{cT} = \frac{\sqrt{3}}{6} p \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4} p$$



$$P_N = p \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} p$$

$$P_T = p \cos \alpha = \frac{1}{2} p$$

$$P_N = p \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} p$$

$$P_T = p \cos \alpha = \frac{1}{2} p$$

NEI PUNTI (A) E (C) SI PUÒ COSÌ SOSTITUIRE LE REAZIONI (V_A, H_A) (V_C, H_C) CON LE COMPONENTI INDICATE; QUESTE POSSONO ESSERE RICOMBINATE A DUE A DUE DANDO LUOGO, IN CIASCUNO DEI 2 PUNTI A UNA FORZA

PARALLELA ALL'ASSE DELLA TRAVE E UNA FORZA PERPENDICOLARE A QUESTA.

NEL DETTAGLIO SI HA:

2

$$\rightarrow R_{AN} = V_{AN} + H_{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2} p + \frac{\sqrt{3}}{12} p = \frac{7\sqrt{3}}{12} p$$

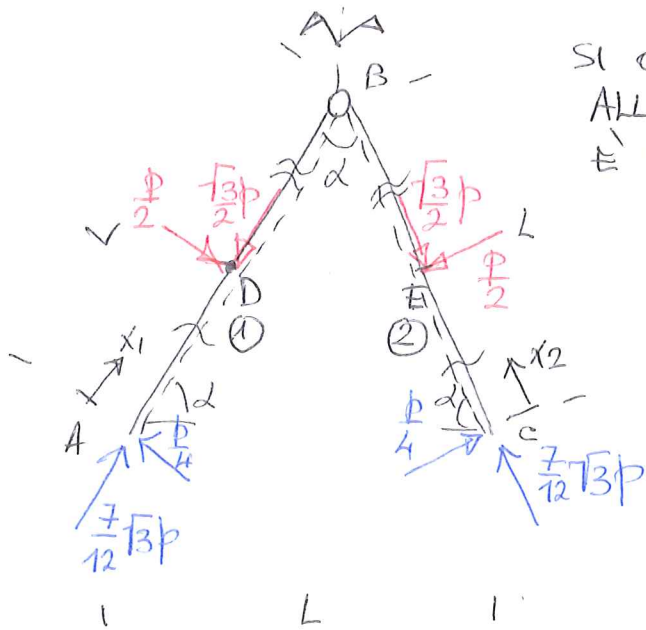
$$\leftarrow R_{AT} = V_{AT} - H_{AT} = \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} p = +\frac{1}{4} p$$

$$\leftarrow R_{CN} = V_{CN} + H_{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2} p + \frac{\sqrt{3}}{12} p = \frac{7\sqrt{3}}{12} p$$

$$\rightarrow R_{CT} = V_{CT} - H_{CT} = \frac{1}{2} p - \frac{1}{4} p = \frac{1}{4} p$$

SI NOTI INFATTI CHE LE COMPONENTI PARALLELE ALL'ASSE SI SOMMANO; QUELLE PERPENDICOLARI SI SOTTRAGGONO (HANNO VERSI OPPOSTI), E PREVALGONO I CONTRIBUTI DOWNTI REAZIONI VERTICALI.
ALLE

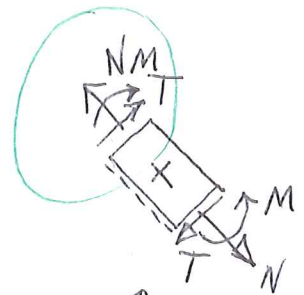
SOSTITUENDO QUINDI LE FORZE PROIETTATE SECONDO LE DIREZIONI INDICATE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DIVIENE:



SI OSSERVI CHE LA SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE VERTICALE PASSANTE PER (B) È PRESERVATA.



CONVENZIONE SEGN AZIONI INTERNE PER TRAVE ①



CONVENZIONE SEGN AZIONI INTERNE PER TRAVE ②

① SI PROCEDE A SPEZZARE LA TRAVE ① IN UN PUNTO X AL DI SOTTO DI (D), EVIDENZIANDO SOLO LO SPEZZONE SUL QUALE SI OPERA

A → D

$$0 < x_1 < L/2$$

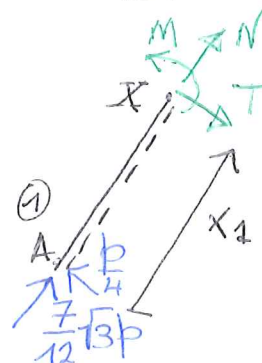
$$\uparrow R_{||} = 0 \quad \frac{7\sqrt{3}}{12} p + N(x_1) = 0$$

$$\leftarrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{p}{4} - T(x_1) = 0$$

$$\sum M_z(x) = 0 \quad -\frac{p}{4} x_1 + M(x_1) = 0$$

$$\left[0 < x_1 < \frac{L}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} N(x_1) &= -\frac{7\sqrt{3}}{12} p \\ T(x_1) &= +\frac{p}{4} \\ M(x_1) &= +\frac{p}{4} x_1 \end{aligned}$$



SI RIPORTANO LE AZIONI CHE CORRISPONDONO A UN LEMBO ESPOSTO CHE GUARDA VERSO L'ALTO

II) SI SPEZZA LA TRAVE ① IN UN PUNTO X AL DI SOPRA DI (D)

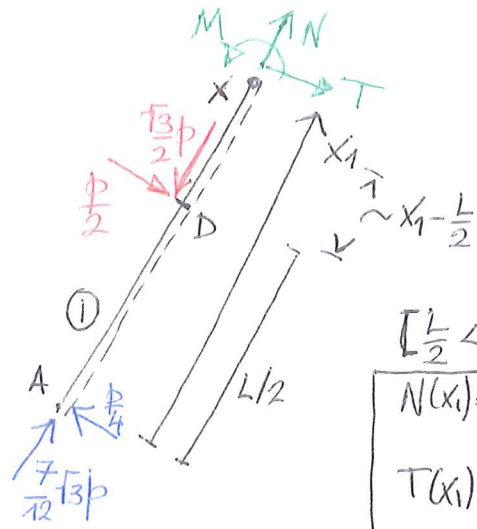
D → B
 $\frac{L}{2} < x_1 < L$

$\rightarrow R_{//} = 0 \quad \frac{7\sqrt{3}p}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}p + N(x_1) = 0$

$\leftarrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{p}{4} - \frac{p}{2} - T(x_1) = 0$

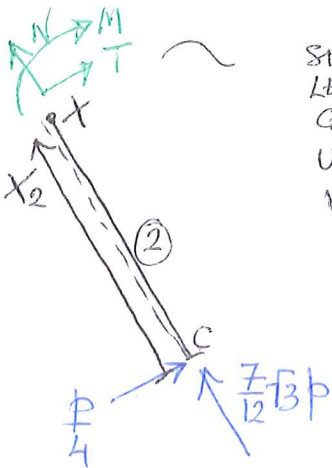
$\int M_z(x) = 0 \quad -\frac{p}{4}x_1 + \frac{p}{2}[x_1 - \frac{L}{2}] + M(x_1) = 0$

$M(x_1) = \frac{p}{4}x_1 - \frac{p}{2}x_1 + \frac{p}{4}L = \frac{p}{4}[L - x_1] - \frac{p}{4}x_1$



$[\frac{L}{2} < x_1 < L]$
 $N(x_1) = -\frac{7\sqrt{3}}{12}p$
 $T(x_1) = -\frac{p}{4}$
 $M(x_1) = \frac{p}{4}[L - x_1]$

III) SI PASSA ALLA TRAVE ② SPEZZANDOLA IN UN PUNTO X AL DI SOTTO DI (E), EVIDENZIANDO SOLO LO SPEZZONE SULQUALE SI OPERA:



SI RIPORTANO LE AZIONI CHE CORRISPONDONO A UN LEMBO CHE GUARDA VERSO L'ALTO

C → E
 $0 < x_2 < \frac{L}{2}$

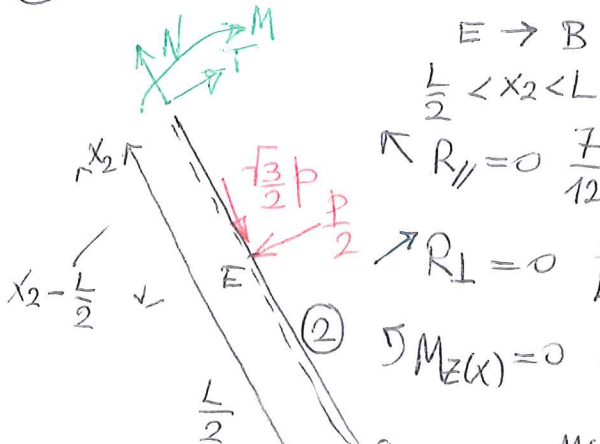
$\leftarrow R_{//} = 0 \quad \frac{7\sqrt{3}p}{12} + N(x_2) = 0$

$\rightarrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{p}{4} + T(x_2) = 0$

$\int M_z(x) = 0 \quad \frac{p}{4}x_2 - M(x_2) = 0$

$[\frac{L}{2} > x_2 > 0]$
 $N(x_2) = -\frac{7\sqrt{3}}{12}p$
 $T(x_2) = -\frac{p}{4}$
 $M(x_2) = \frac{p}{4}x_2$

IV) SI PASSA A SPEZZARE LA TRAVE ② IN UN PUNTO X AL DI SOPRA DI (E):



E → B
 $\frac{L}{2} < x_2 < L$

$\leftarrow R_{//} = 0 \quad \frac{7\sqrt{3}p}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}p + N(x_2) = 0$

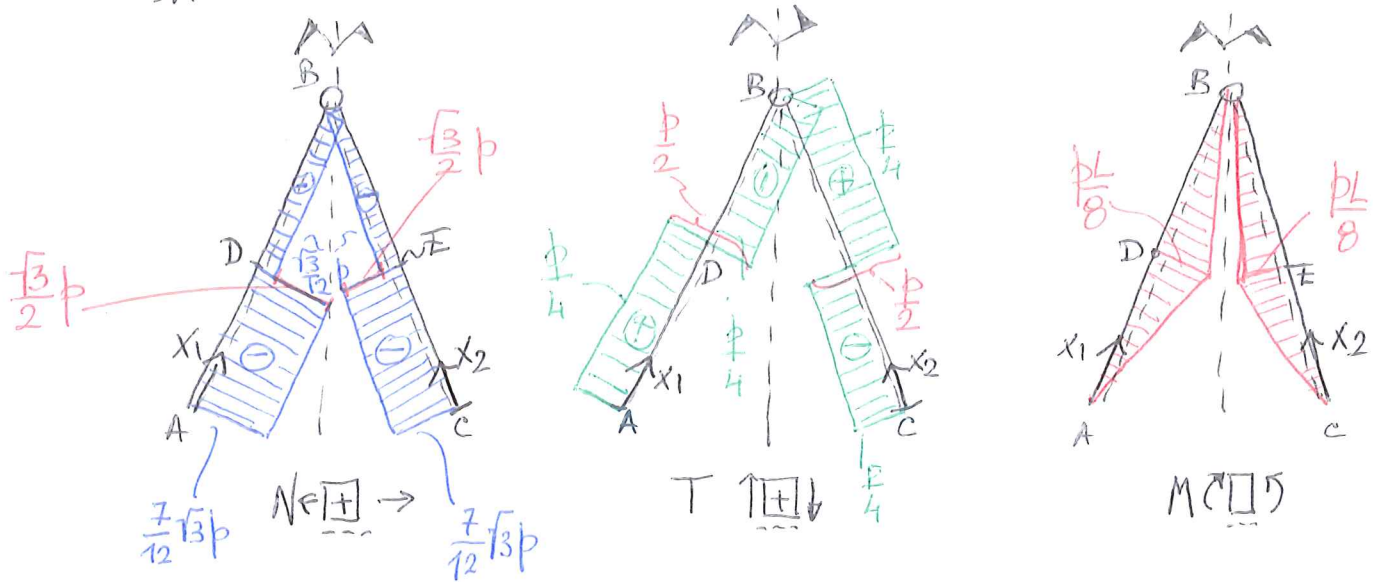
$\rightarrow R_{\perp} = 0 \quad \frac{p}{4} - \frac{p}{2} + T(x_2) = 0$

$\int M_z(x) = 0 \quad \frac{p}{4}x_2 + \frac{p}{2}[x_2 - \frac{L}{2}] - M(x_2) = 0$

$M(x_2) = +\frac{p}{4}x_2 - \frac{p}{2}x_2 + \frac{p}{4}L = \frac{p}{4}[L - x_2] - \frac{p}{4}x_2$

$[\frac{L}{2} < x_2 < L]$
 $N(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{12}p$
 $T(x_2) = +\frac{p}{4}$
 $M(x_2) = \frac{p}{4}[L - x_2]$

SI PASSA A TRACCIARE I DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE:

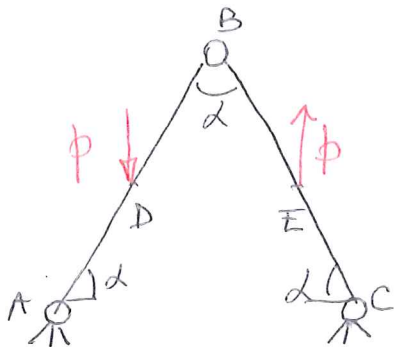


SI OSSERVI CHE $M(x_1=0) = 0$; $M(x_1 = \frac{L^-}{2}) = \frac{pL}{8}$; $M(x_1 = \frac{L^+}{2}) = \frac{pL}{8}$; $M(x_1=L) = 0$
 $M(x_2=0) = 0$; $M(x_2 = \frac{L^-}{2}) = \frac{pL}{8}$; $M(x_2 = \frac{L^+}{2}) = \frac{pL}{8}$; $M(x_2=L) = 0$

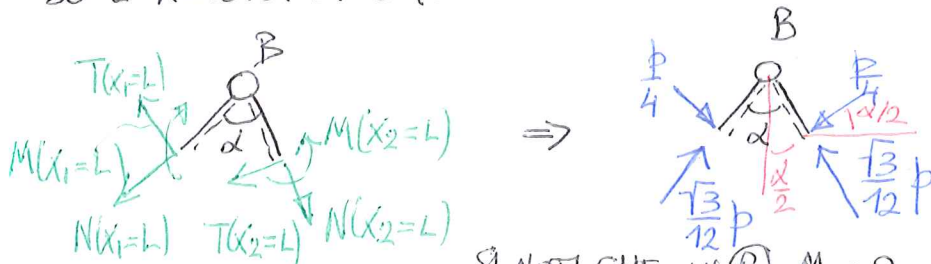
SI OSSERVI INOLTRE CHE I DIAGRAMMI DI N E DIM RISULTANO SIMMETRICI; QUELLO DI T È INVECE ANTI-SIMMETRICO.

QUESTA PROPRIETA' È COMUNE A TUTTE LE STRUTTURE SIMMETRICHE (PER GEOMETRIA E DISPOSIZIONE DEI VINCOLI), CARICATE SIMMETRICAMENTE.

SI PUÒ ANCHE VEDERE CHE PER OTTENERE UN DIAGRAMMA DEL TAGLIO SIMMETRICO SI DOVREBBE CARICARE LA STRUTTURA (SIMMETRICA) IN MODO ANTISIMMETRICO: NEL CASO IN ESAME, PER ESEMPIO, COSÌ:



PER CONCLUDERE, SI VERIFICA L'EQUILIBRIO AL NODO (B). INDICANDO, IN BASE ALLE [2] E [4] LE AZIONI PER $x_1=L$; $x_2=L$, RIPORTANDO LE SOLE AZIONI EFFETTIVAMENTE PRESENTI CON L'EFFETTIVO VERSO, SI HA:



$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SI NOTI CHE IN (B) $M=0$, COME È OVVIO (CERNIERA!)

LE DUE COMPONENTI DI AZIONE ASSIALE SI COMBINANO DANDO LUOGO A UNA RESULTANTE VERTICALE, ORIENTATA VERSO L'ALTO, DI VALORE $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} p \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} p$

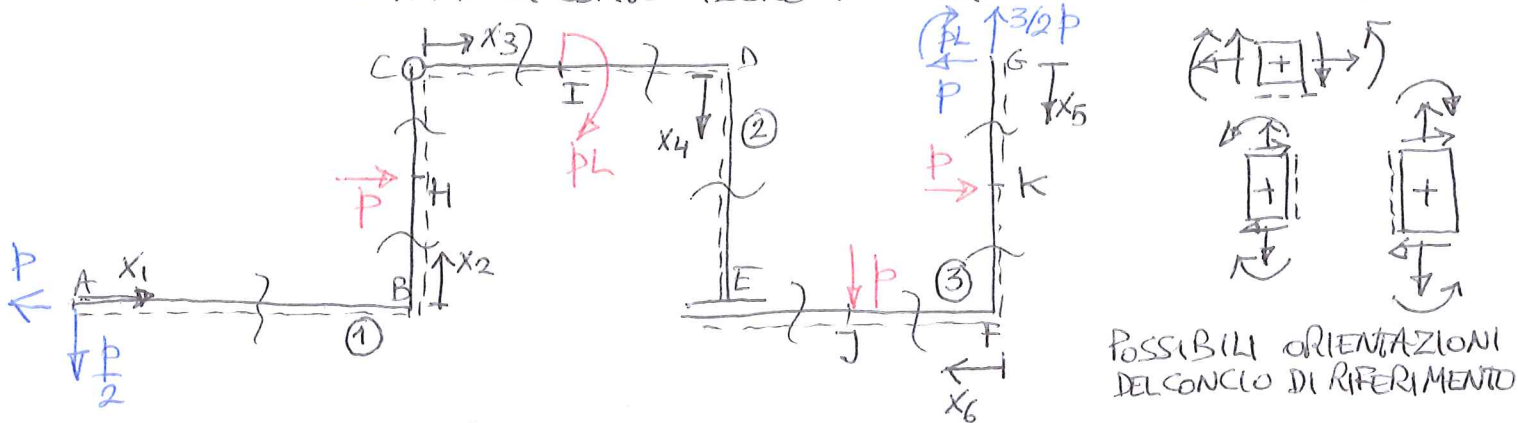
IN MODO SIMILE LE DUE COMPONENTI DI AZIONE TAGLIANTE SI COMBINANO DANDO LUOGO A UNA RISULTANTE VERTICALE, ORIENTATA QUESTA VOLTA VERSO IL BASSO, DI VALORE $2 \cdot \frac{P}{4} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} P$.

5

IL NODO B RISULTA PERTANTO IN EQUILIBRIO.

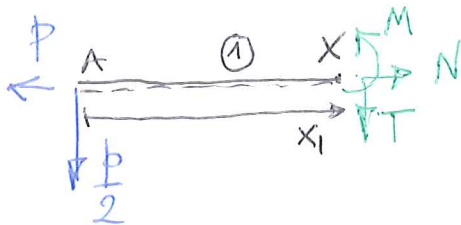
SI ESAMINA ORA LA STRUTTURA GIÀ CONSIDERATA NELLA PRECEDENTE LEZIONE, NELLA QUALE SONO PRESENTI 2 ARTICOLAZIONI SEMPLICI.

SI RIPRENDE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:



SI EVIDENZIANO IN FIGURA LE FIBRE DI RIFERIMENTO, LE ASCISSE CHE PERCORRONO IN DIVERSI TRATTI E LE POSIZIONI (I) DOVE OCCORRE SEZIONARE LA STRUTTURA.

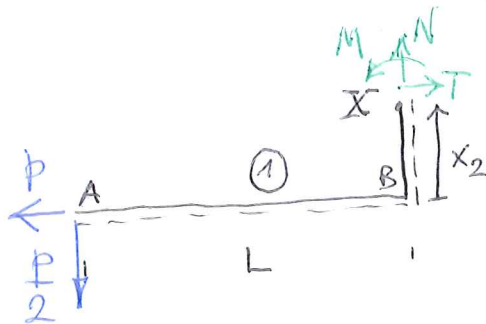
(I) SEZIONE NEL TRATTO $A \rightarrow B$ (SI DISEGNA SOLO LA PARTE UTILIZZATA)
 $0 < x_1 < L$



$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & -P + N(x_1) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & -\frac{P}{2} - T(x_1) = 0 \\ \circlearrowleft M_Z(x) = 0 & +\frac{P}{2}x_1 + M(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(x_1) = +P \\ T(x_1) = -\frac{P}{2} \\ M(x_1) = -\frac{Px_1}{2} \end{cases} \quad [5]$$

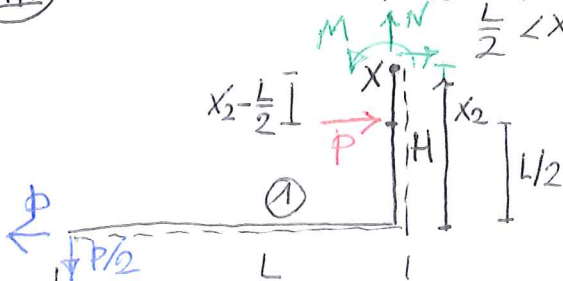
(II) SEZIONE NEL TRATTO $B \rightarrow H$
 $0 < x_2 < \frac{L}{2}$



$$\begin{cases} \uparrow R_{//} = 0 & -\frac{P}{2} + N(x_2) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 & -P + T(x_2) = 0 \\ \circlearrowleft M_Z(x) = 0 & \frac{P}{2}L - Px_2 + M(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(x_2) = +\frac{P}{2} \\ T(x_2) = +P \\ M(x_2) = -P\left[\frac{L}{2} - x_2\right] \end{cases} \quad [6]$$

(III) SEZIONE NEL TRATTO $H \rightarrow C$
 $\frac{L}{2} < x_2 < L$



$$\begin{cases} \uparrow R_{//} = 0 & -\frac{P}{2} + N(x_2) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 & -P_{(A)} + P_{(H)} + T(x_2) = 0 \\ \circlearrowleft M_Z(x) = 0 & \frac{P}{2}L - Px_2 + P\left[x_2 - \frac{L}{2}\right] + M(x_2) = 0 \end{cases}$$

NE SEGUE

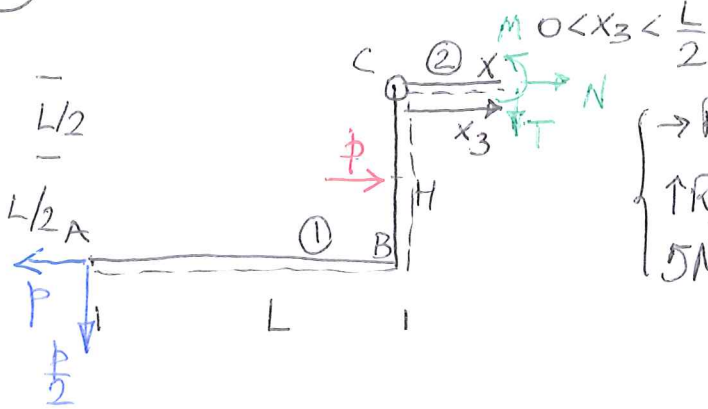
$$M(x_2) = -\cancel{\frac{p}{2}L} + \cancel{px_2} - \cancel{px_2} + \cancel{p} \frac{L}{2} = 0$$

6

PERTANTO

$$\boxed{\begin{aligned} N(x_2) &= +\frac{p}{2} \\ T(x_2) &= 0 \\ M(x_2) &= 0 \end{aligned}} \quad [7]$$

IV SEZIONE NEL TRATTO C → I



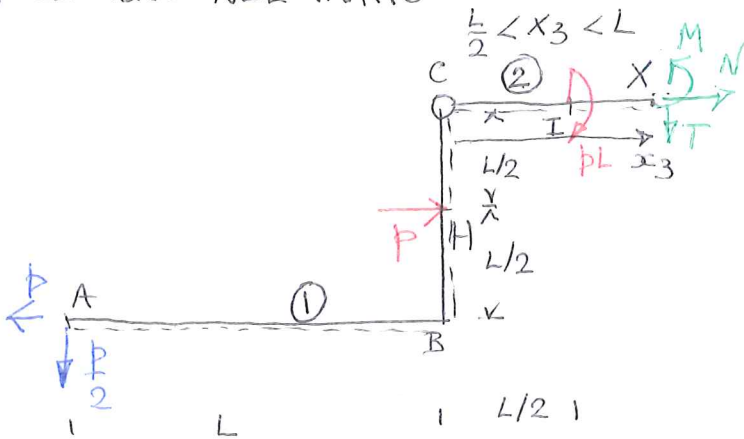
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 - \cancel{p_A} + \cancel{p_{(H)}} + N(x_3) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 - \frac{p}{2} - T(x_3) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 \quad \frac{p}{2}[L+x_3] - \cancel{p_A}L + \cancel{p_{(H)}} \frac{L}{2} + M(x_3) = 0 \end{cases}$$

$$M(x_3) = -\cancel{\frac{pL}{2}} - \frac{p}{2}x_3 + \cancel{pL} - \cancel{\frac{pL}{2}}$$

$0 < x_3 < L/2$

$$\boxed{\begin{aligned} N(x_3) &= 0 \\ T(x_3) &= -\frac{p}{2} \\ M(x_3) &= -\frac{p}{2}x_3 \end{aligned}} \quad [8]$$

V SEZIONE NEL TRATTO I → D



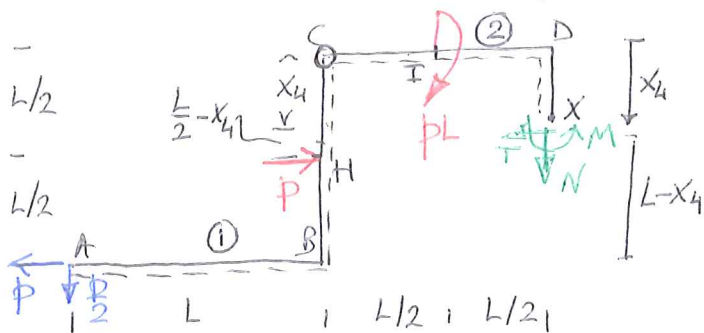
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 - \cancel{p_A} + \cancel{p_{(H)}} + N(x_3) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 - \frac{p}{2} - T(x_3) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 \quad \frac{p}{2}[L+x_3] - \cancel{p_A}L + \cancel{p_{(H)}} \frac{L}{2} + \boxed{-pL} + M(x_3) = 0 \end{cases}$$

$$M(x_3) = -\cancel{\frac{pL}{2}} - \frac{p}{2}x_3 + \cancel{pL} - \cancel{\frac{pL}{2}} + pL$$

$\frac{L}{2} < x_3 < L$

$$\boxed{\begin{aligned} N(x_3) &= 0 \\ T(x_3) &= -\frac{p}{2} \\ M(x_3) &= p[L - \frac{x_3}{2}] \end{aligned}} \quad [9]$$

VI SEZIONE NEL TRATTO D → E
 $0 < x_4 < L$



SI OSSERVI CHE INDICANDO CON $\frac{L}{2} - x_4$ IL BRACCIO DELLA FORZA $p(H)$ SI TROVA CHE IL CONTRIBUTO AL MOMENTO RISULTA CORRETTAMENTE VALUTATO SEMPRE: SE $\frac{L}{2} - x_4 > 0$ ($x_4 < \frac{L}{2}$) È > 0 ; SE $\frac{L}{2} - x_4 < 0$ ($x_4 > \frac{L}{2}$) DIVIENE < 0 .

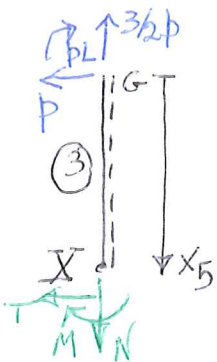
$$\begin{cases} \downarrow R_{//} = 0 + \frac{p}{2} + N(x_4) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 - p(A) + p(H) - T(x_4) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 + \frac{p}{2} \cdot 2L - p[L - x_4] + p(H) \left[\frac{L}{2} - x_4 \right] - pL + M(x_4) = 0 \end{cases}$$

$$M(x_4) = -\cancel{pL} + \cancel{pL} - p x_4 - p \frac{L}{2} + p x_4 + pL = \frac{pL}{2}$$

$0 < x_4 < L$

$\begin{aligned} N(x_4) &= -\frac{p}{2} \\ T(x_4) &= 0 \\ M(x_4) &= \frac{pL}{2} \end{aligned}$	[10]
---	------

VII SEZIONE NEL TRATTO G → K
 $0 < x_5 < \frac{L}{2}$

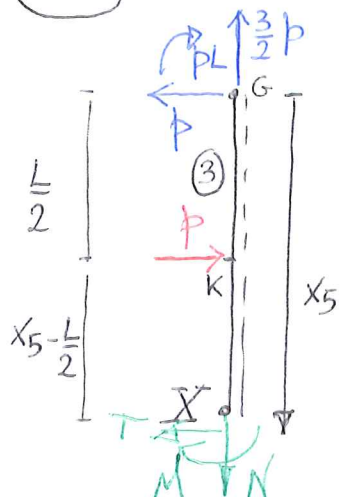


$$\begin{cases} \downarrow R_{//} = 0 - \frac{3}{2}p + N(x_5) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 - p - T(x_5) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 - pL + p x_5 - M(x_5) = 0 \end{cases}$$

$0 < x_5 < \frac{L}{2}$

$\begin{aligned} N(x_5) &= \frac{3}{2}p \\ T(x_5) &= -p \\ M(x_5) &= -p[L - x_5] \end{aligned}$	[11]
---	------

VIII SEZIONE NEL TRATTO K → F
 $\frac{L}{2} < x_5 < L$



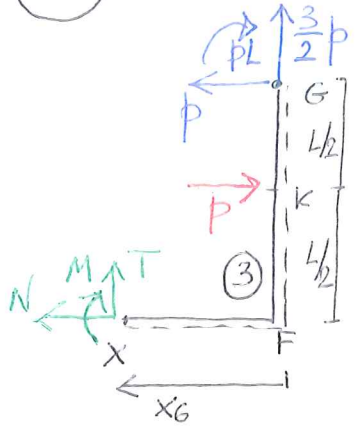
$$\begin{cases} \downarrow R_{//} = 0 - \frac{3}{2}p + N(x_5) = 0 \\ \rightarrow R_{\perp} = 0 - p(G) + p(K) - T(x_5) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 - pL + p x_5 + p \left[x_5 - \frac{L}{2} \right] - M(x_5) = 0 \end{cases}$$

$$M(x_5) = -pL + \cancel{p x_5} - \cancel{p x_5} + \frac{pL}{2} = -\frac{pL}{2}$$

$\frac{L}{2} < x_5 < L$

$\begin{aligned} N(x_5) &= \frac{3}{2}p \\ T(x_5) &= 0 \\ M(x_5) &= -\frac{pL}{2} \end{aligned}$	[12]
--	------

IX SEZIONE NEL TRATTO F → J $0 < x_6 < \frac{L}{2}$



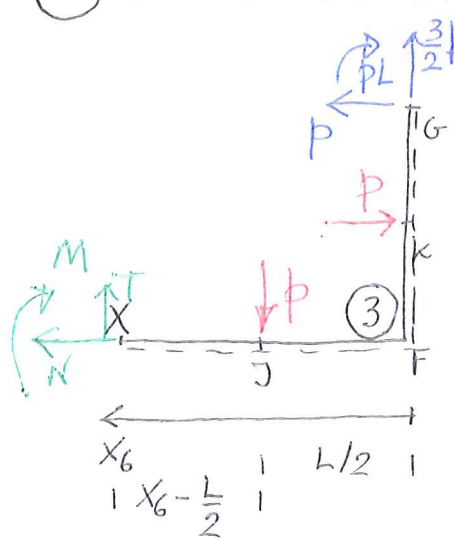
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & -P(G) + P(K) - N(x_6) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{3}{2}P + T(x_6) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 & -PL + P(x_6)L + \frac{3}{2}Px_6 - P\frac{L}{2} - M(x_6) = 0 \\ & M(x_6) = -P\left[\frac{L}{2} - \frac{3}{2}x_6\right] \end{cases}$$

$0 < x_6 < \frac{L}{2}$

$$\begin{aligned} N(x_6) &= 0 \\ T(x_6) &= -\frac{3}{2}P \\ M(x_6) &= -\frac{PL}{2} + \frac{3}{2}Px_6 \end{aligned}$$

 [13]

X SEZIONE NEL TRATTO J → D $\frac{L}{2} < x_6 < L$



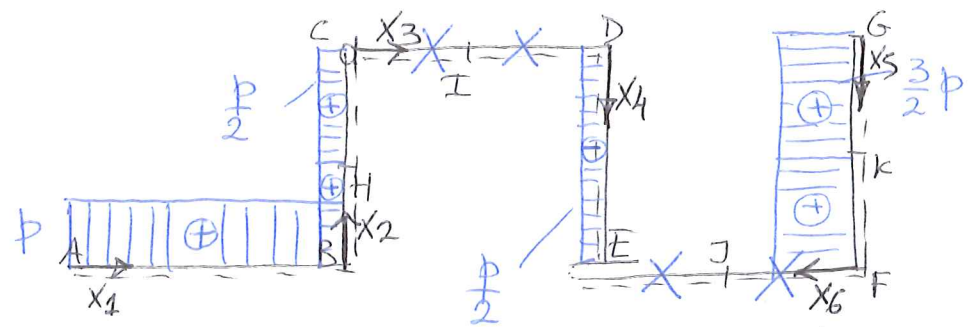
$$\begin{cases} \rightarrow R_{//} = 0 & -P(G) + P(K) - N(x_6) = 0 \\ \uparrow R_{\perp} = 0 & \frac{3}{2}P - P(J) + T(x_6) = 0 \\ \sum M_Z(x) = 0 & -PL + P(x_6)L + \frac{3}{2}Px_6 - P(K)\frac{L}{2} - P(J)\left[x_6 - \frac{L}{2}\right] - M(x_6) = 0 \\ & M(x_6) = \frac{3}{2}Px_6 - \frac{PL}{2} - Px_6 + \frac{PL}{2} = \frac{P}{2}x_6 \end{cases}$$

$\frac{L}{2} < x_6 < L$

$$\begin{aligned} N(x_6) &= 0 \\ T(x_6) &= -\frac{P}{2} \\ M(x_6) &= \frac{P}{2}x_6 \end{aligned}$$

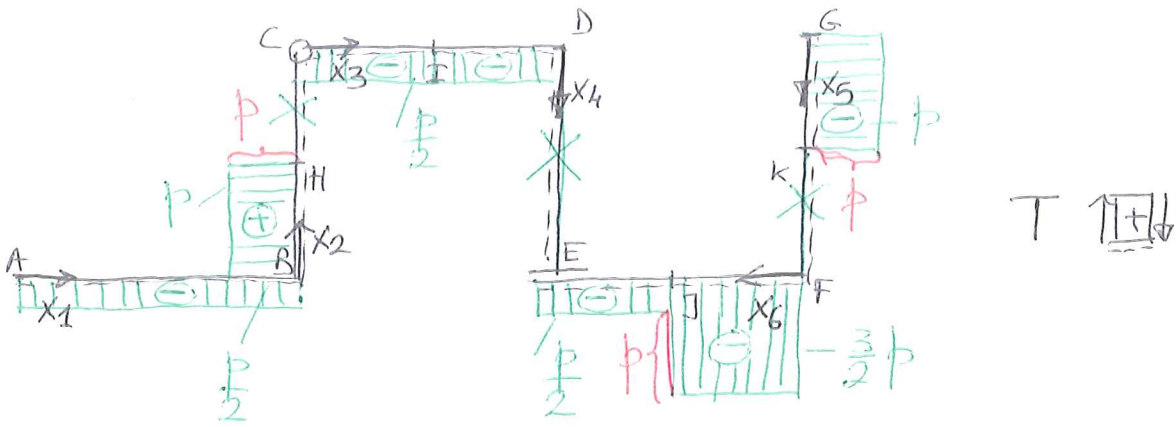
 [14]

DIAGRAMMI:

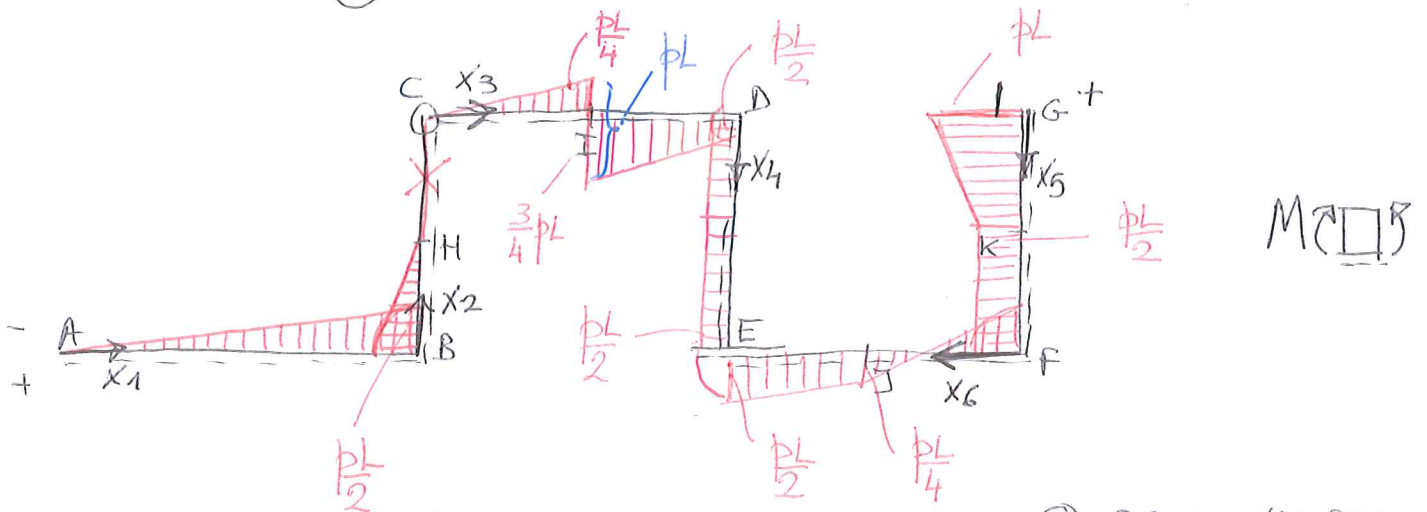


$N \leftarrow \boxed{+} \rightarrow$

SI OSSERVI CHE E-J-F LA PRESENZA DEL PATTINO IN (E) RICHIEDE CHE LA AZIONE ASSIALE SI ANNULLI.



SI OSSERVI CHE $W(H), (J), (K)$ C'E' DISCONTINUITA' PER LA PRESENZA DEI CARICHI APPLICATI; IN $(B), (C), (D), (E), (F)$ T ED N CAMBIANO DI RUOLO PER EFFETTO DELLA DIFFERENTE DIREZIONE DEI TRATTI; PER LA PRESENZA DEL PATTINO IN (E) T SI DEVE ANNULLARE SUL TRATTO DE.



SI OSSERVA CHE IN (C) M SI ANNULLA; HA UN SALTO IN (I) PARI AL VALORE DELLA COPPIA pL ; I RAMI CI E ID HANNO LA MEDESIMA PENDENZA; NEI PUNTI $(B), (D), (E), (F)$ IL MOMENTO E' CONTINUO (E TENDE LE FIBRE DALLO STESSO LATO: QUESTA CONSIDERAZIONE HA VALIDITA' GENERALE); NEI PUNTI $(H), (J), (K)$ PER LA PRESENZA DEI CARICHI M DEVE CAMBIARE PENDENZA.

INFINE SUL TRATTO HC $T=0$ E QUINDI $M=CONST$; TUTTAVIA DOVENDO RISULTARE $M_C=0$ (PER LA PRESENZA DELLA CERNIERA) SU TUTTO IL TRATTO E' $M=0$.

PER MEGLIO VERIFICARE QUANTO SOPRA DETTO SI RAPPRESENTA NEL SEGUITO M IN FORMA "DISTESA":

