CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI DI STRUTTURE ARTICOLATE.

SI È VISTO NEL CORSO DELL'ULTIMA LEZIONE CHE SE SI ASSEMBLANO MEDIANTE VINCOLI INTERNI 2 O PIÙ TRAVI RIGIDE SI POSSONO OTTENERE STRUTTURE ISOSTATICHE CHE PRESENTANO UN NUMERO DI GDV IMPUTABILI AI VINCOLI ESTERNI MAGGIORE DI TRE.

CIÒ COMPORTA CHE NON SI POSSANO DETERMINARE LE REAZIONI DEI VINCOLI A TERRA UTILIZZANDO SOLTANTO LE EQUAZIONI CARDINALI RIFERITE A UN UNICO CORPO RIGIDO.

LA RAGIONE DI QUESTO COMPORTAMENTO È CHE LA STRUTTURA OTTENUTA NON RISULTA INTERNAMENTE RIGIDA, MA ARTICOLATA: SONO PRESENTI INFATTI DELLE POSSIBILITÀ DI SPOSTAMENTI/ROTAZIONI RELATIVI FRA LE PARTI COSTITUENTI CHE DEVONO ESSERE NEUTRALIZZATI DA ULTERIORI VINCOLI A TERRA.

PER DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI SI POSSONO UTILIZZARE 2 METODI

1) <u>METODO DELLA COMPLETA SCONNESSIONE</u>: SI "ROMPONO" TUTTI I VINCOLI INTERNI PRESENTI, SOSTITUENDOLI CON LE REAZIONI INTERNE CHE QUESTI ESERCITANO: CI SI RICONDUCE COSÌ A UN SISTEMA DI N CORPI RIGIDI ISOLATI, PER CIASCUNO DEI QUALI SI POSSONO SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI. RISOLVENDO IL SISTEMA ACCOPPIATO DI 3N EQUAZIONI (IN 3N INCOGNITE, SE LA STRUTTURA È ISOSTATICA NON LABILE) SI DETERMINANO TUTTE LE REAZIONI DEI VINCOLI, SIA A TERRA CHE INTERNI.
   È UNA TECNICA FACILMENTE AUTOMATIZZABILE (E QUINDI UTILIZZABILE SE SI DOVESSE SCRIVERE UN PROGRAMMA DI CALCOLO PER RISOLVERE LE STRUTTURE) MA POCO VANTAGGIOSA PERCHÉ PORTA A RISOLVERE SISTEMI DI EQUAZIONI DI DIMENSIONI MAGGIORI DI QUELLI STRETTAMENTE INDISPENSABILI A DETERMINARE LE REAZIONI DEI VINCOLI A TERRA, LE UNICHE NECESSARIE PER CALCOLARE LE AZIONI INTERNE IN STRUTTURE APERTE.

2) <u>METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE</u>: SI CONSIDERA LA STRUTTURA COME UN UNICO CORPO RIGIDO, PER CUI SI POSSONO SCRIVERE LE 3 EQUAZIONI CARDINALI. SI TRATTA POI DI AGGIUNGERE A QUESTE LE CONDIZIONI - ESPRESSE DA EQUAZIONI DI EQUILIBRIO RIFERITE A UNA SOLA PARTE DELLA STRUTTURA - CHE GARANTISCONO CHE LE ARTICOLAZIONI INTERNE NON VENGANO SFRUTTATE E QUINDI CHE LA STRUTTURA SI COMPORTI EFFETTIVAMENTE COME UN CORPO RIGIDO. CI SI BASA INFATTI SUL "POSTULATO DELL'IRRIGIDIMENTO":

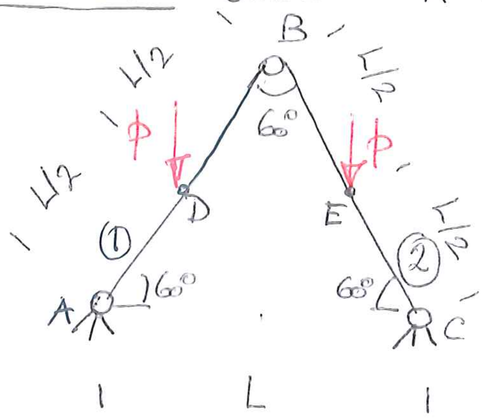
SE UN SISTEMA MATERIALE È IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DI CERTE FORZE ESTERNE, RESTA IN EQUILIBRIO, SOTTO L'AZIONE DELLE STESSE FORZE, QUALORA SI AGGIUNGA IL VINCOLO DELL'IRRIGIDIMENTO.

LE EQUAZIONI AUSILIARIE POSSONO ESSERE INTESE COME ALTRETTANTE "CONDIZIONI DI IRRIGIDIMENTO" PER LA STRUTTURA DATA.

QUESTO METODO È PIÙ CONVENIENTE DEL PRECEDENTE PERCHÉ PORTA A DETERMINARE LE SOLE INCOGNITE CHE INTERESSANO, MA RICHIEDE ATTENZIONE NELL'INDIVIDUARE LE CORRETTE EQUAZIONI AUSILIARIE. SI PASSANO IN RASSEGNA LE PRINCIPALI TIPOLOGIE DI STRUTTURE ARTICOLATE

A) ARTICOLAZIONE SEMPLICE A CERNIERA.

SI CONSIDERA COME ESEMPIO SIGNIFICATIVO QUELLO DI UN ARCO A 3 CERNIERE SOGGETTO A SOLI CARICHI VERTICALI SIMMETRICI:



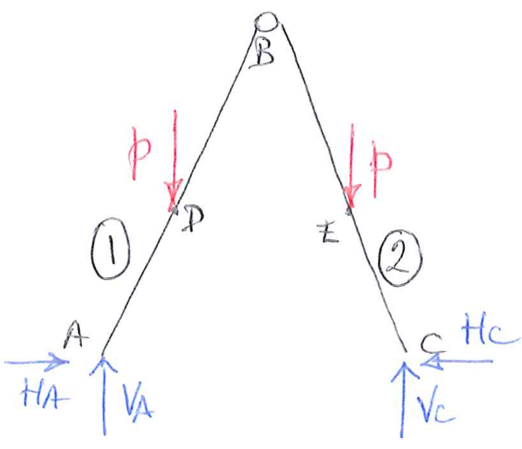
$$GDL = 3(①) + 3(②) = 6$$

$$GDV = 2(A) + 2(C) + 2(B) = 6$$

$GDL = GDV \Rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE (LO SI DIMOSTRA PIÙ AVANTI)

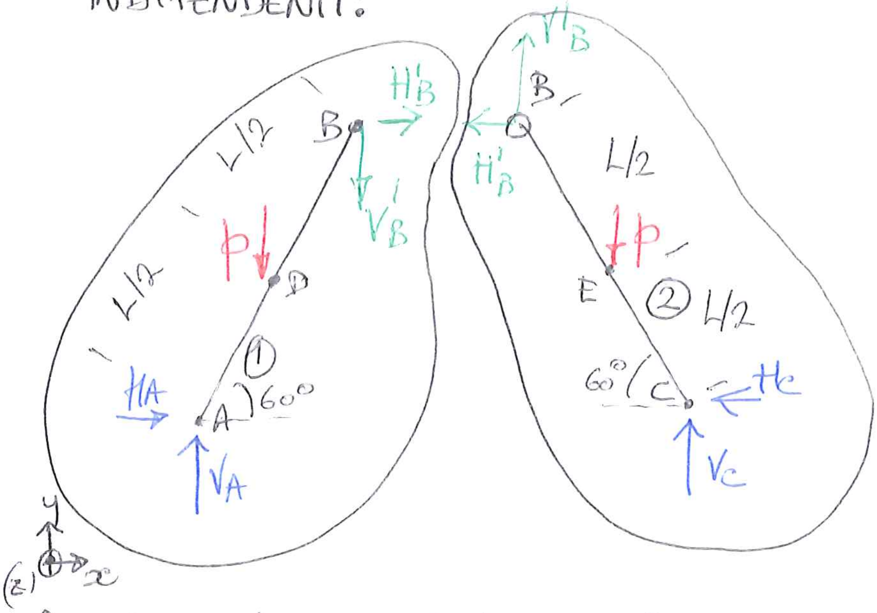
QUESTA STRUTTURA RAPPRESENTA IN MODO SCHEMATICO UN SEMPLICE MODELLO DI COPERTURA. COME SI VEDRÀ QUESTO SCHEMA STATICO NON È OTTIMALE PERCHÉ RICHIEDE CHE I VINCOLI ALLA BASE (IN Ⓐ E Ⓒ) SIANO IN GRADO DI FORNIRE UNA SPINTA ORIZZONTALE; PER QUESTO LA COPERTURA SI DICE "SPINGENTE" E RISULTA INADATTA NEL CASO DI COSTRUZIONI IN MURATURA. COME SI VEDRÀ NELLE APPLICAZIONI SI PREFERISCE UN MODELLO DI COPERTURA A CAPRIATA, NEL QUALE LA SPINTA ORIZZONTALE È ELIMINATA DALLA PRESENZA DI UN TIRANTE CHE COLLEGA I PUNTI Ⓐ E Ⓒ.

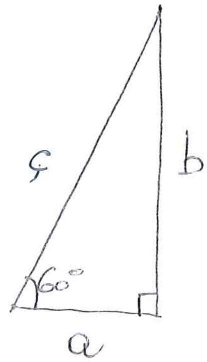
IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, SE SI ELIMINANO I SOLI VINCOLI A TERRA DIVIENE:



E PRESENTA 4 COMPONENTI DI REAZIONE INCOGNITI (H_A, V_A, H_C, V_C) A FRONTE DI 3 SOLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO INDIPENDENTI.
LA SCRITTURA DI UN'ALTRA EQUAZIONE DI EQUILIBRIO PER L'INTERA STRUTTURA CAMBIANDO IL POLO DEL MOMENTO, NON RISOLVE IL PROBLEMA PERCHÉ SI È GIÀ VISTO CHE QUESTA EQUAZIONE È LINEARMENTE DIPENDENTE.

NELLO SPIRITO DEL METODO DELLA COMPLETA SCONNESSIONE SI PROCEDE A SOPPRIMERE IL VINCOLO INTERNO IN (B), SOSTITUENDOLO CON IL SISTEMA DI REAZIONI INTERNE RISPETTOSE DEL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE. CI SI RICONDUCE COSÌ AI DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO DI 2 TRAVI INDIPENDENTI:





$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad a = c \cos 60° = \frac{1}{2} c$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $b = c \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

PER CIASCUNO DEI QUALI SI POSSONO SCRIVERE LE 3 EQ. CARDINALI.
SI OTTIENE UN SISTEMA DI 6 EQUAZIONI, LINEARMENTE INDIPENDENTI, CON LE QUALI SI POSSONO DETERMINARE LE 6 INCOGNITE, 4 (H_A, V_A, H_C, V_C) RELATIVE AI VINCOLI A TERRA E 2 (H'_B, V'_B) RELATIVE AL VINCOLO INTERNO.
NEL DETTAGLIO SI PUÒ SCRIVERE

$$(1)\begin{cases} \rightarrow R_x^{(1)} = 0 & H_A + H'_B = 0 \\ \uparrow R_y^{(1)} = 0 & V_A - p_{(D)} - V'_B = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(B)}^{(1)} = 0 & H_A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L - V_A \cdot \frac{1}{2} L + p_{(D)} \frac{1}{4} L = 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \begin{cases} H_A + H'_B = 0 & [1] \\ V_A - V'_B = p & [2] \\ \frac{\sqrt{3}}{2} H_A - \frac{1}{2} V_A = -\frac{1}{4} p & [3] \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \rightarrow R_x^{(2)} = 0 & -H'_B - H_C = 0 \\ \uparrow R_y^{(2)} = 0 & V'_B - p_{(E)} + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(B)}^{(2)} = 0 & -p_{(E)} \cdot \frac{1}{4} L + V_C \cdot \frac{1}{2} L - H_C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L = 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \begin{cases} -H'_B - H_C = 0 & [4] \\ V'_B + V_C = p & [5] \\ \frac{1}{2} V_C - \frac{\sqrt{3}}{2} H_C = \frac{1}{4} p & [6] \end{cases}$$

SI NOTI CHE LA SCELTA DEL POLO (B) PER LE 2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DEI MOMENTI CONSENTE DI NON INTRODURRE LE REAZIONI H'_B E V'_B NELLE EQUAZIONI STESSE; (LE EQUAZIONI DI QUESTO TIPO SONO DETTE PURE)
PER IL CALCOLO DEI BRACCI, SI PUÒ FARE RIFERIMENTO AL TRIANGOLO RETTANGOLO DI CATETI a E b E IPOTENUSA c; PER IL BRACCIO DI H_A E V_A (E, ANALOGAMENTE DI H_C E V_C) È $c = L$; PER IL BRACCIO DI $p_{(D)}$ (E DI $p_{(E)}$) SI HA $c = \frac{L}{2}$.

INOLTRE LE EQ. [3] E [6] SONO OTTENUTE SEMPLIFICANDO IL FATTORE COMUNE L.
IL SISTEMA, COME SI VEDE, È ACCOPPIATO PER LA PRESENZA DI H'_B E V'_B NEI 2

SOTTOSISTEMI [1]-[3] E [4]-[6], E CIÒ DÀ LUOGO A EQUAZIONI CONCATENATE.
UNA POSSIBILE STRATEGIA DI RISOLUZIONE È QUESTA:

- SI SOMMANO MEMBRO A MEMBRO LA [1] E LA [4]:

$$H_A + \cancel{H'_B} - \cancel{H'_B} - H_C = 0 \quad \Rightarrow \quad H_C = H_A \qquad [7]$$

- SI SOMMANO MEMBRO A MEMBRO LA [2] E LA [5]:

$$V_A - \cancel{V'_B} + \cancel{V'_B} + V_C = 2p \quad \Rightarrow \quad V_A + V_C = 2p \qquad [8]$$

- SI RISOLVE LA [3] RISPETTO A V_A, E LA [6] RISPETTO A V_C

$$V_A = \sqrt{3} H_A + \frac{1}{2} p \qquad [9]$$

$$V_C = \sqrt{3} H_C + \frac{1}{2} p \qquad [10]$$

- SI SOMMANO MEMBRO A MEMBRO LA [9] E LA [10]:

$$\underbrace{V_A + V_C}_{2p} = \sqrt{3} \underbrace{(H_A + H_C)}_{2H_A} + p \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{3} H_A = p$$

SICCHÉ $H_A = \frac{p}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{H_A = \frac{\sqrt{3}}{6} p} \qquad [11]$

- NE SEGUE, PER LA [7] $\qquad \underline{H_C = \frac{\sqrt{3}}{6} p} \qquad [12]$

- SOSTITUENDO LA [11] NELLA [9] SI TROVA

$$V_A = \underbrace{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{6} p\right)}_{\frac{3}{6}p = \frac{p}{2}} + \frac{1}{2} p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \quad \Rightarrow \quad \underline{V_A = p} \qquad [13]$$

- SOSTITUENDO LA [12] NELLA [10] SI OTTIENE

$$V_C = \underbrace{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{6} p\right)}_{\frac{3}{6}p = \frac{p}{2}} + \frac{1}{2} p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \quad \Rightarrow \quad \underline{V_C = p} \qquad [14]$$

- SI RITORNA ALLA [1] E SOSTITUENDO LA [11] SI TROVA:

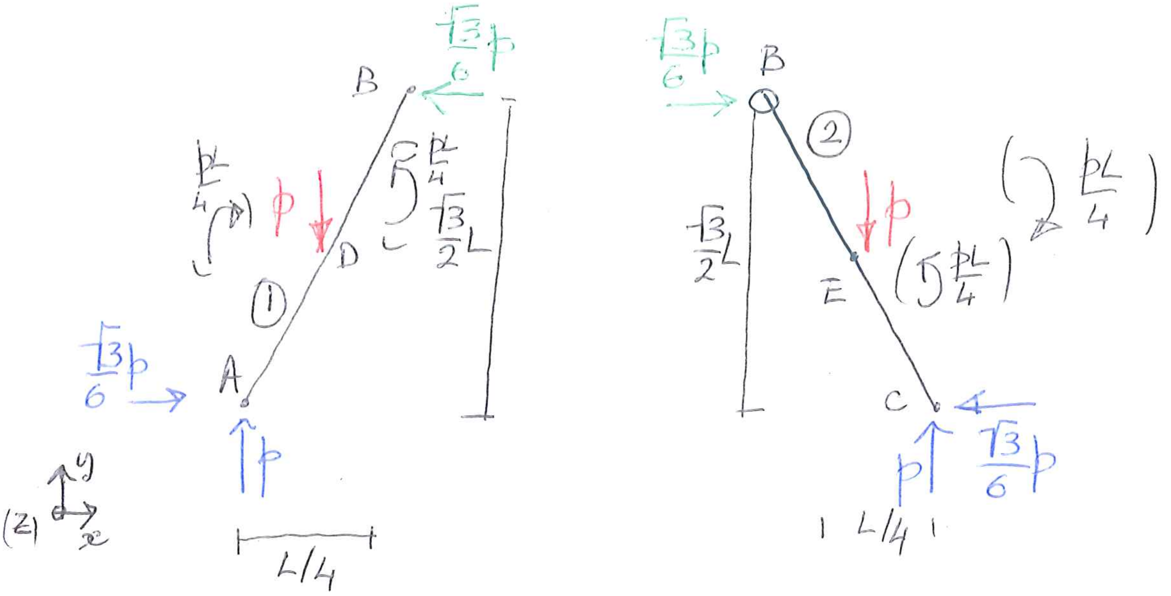
$$H'_B + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} p\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H'_B = -\frac{\sqrt{3}}{6} p}$$

- INFINE SI RITORNA ALLA [2] E SOSTITUENDO LA [13] SI OTTIENE

$$(p) - V'_B = p \quad \Rightarrow \quad \underline{V'_B = 0}$$

IN QUESTO MODO SI PERVIENE ALLA SOLUZIONE DEL SISTEMA DI 6 EQ. IN 6 INCOGNITE.

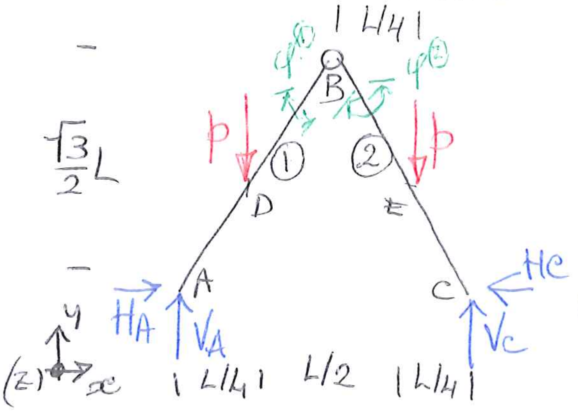
SOSTITUENDO I VALORI DI QUESTE SI TROVANO I DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:



L'EQUILIBRIO E' VERIFICATO FACILMENTE PER QUANTO RIGUARDA LA RISULTANTE DELLE FORZE APPLICATE IN DIREZIONE x E y; PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI SI OSSERVA SULLA ① (ANALOGHE CONSIDERAZIONI, A SEGNI SCAMBIATI, VALGONO PER LA ②) CHE LE 2 FORZE VERTICALI DANNO LUOGO A UNA COPPIA (ORARIA) DI MOMENTO $-p \cdot \frac{L}{4}$; LE FORZE ORIZZONTALI DANNO INVECE LUOGO A UNA COPPIA (ANTIORARIA) DI MOMENTO $\frac{\sqrt{3}}{6}p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{\cancel{3}}{\cancel{12}_{4}}pL = \frac{pL}{4}$.

UNA VOLTA DETERMINATE LE REAZIONI VINCOLARI SI PUÒ PROCEDERE AL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE; SI OSSERVA PERÒ CHE PER IL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE NON SERVE CONOSCERE I VALORI DELLE "FORZE DI CONNESSIONE" (QUELLE CHE MANTENGONO UNITA LA STRUTTURA) H'_B E V'_B, IN QUANTO N, T, M SI POSSONO DETERMINARE SULLA ① PARTENDO DA Ⓐ VERSO Ⓑ, E SULLA ② PARTENDO DA Ⓒ VERSO Ⓑ.

SI PASSA A CONSIDERARE IL SECONDO METODO, QUELLO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE. SI INIZIA A CONSIDERARE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO OTTENUTO ELIMINANDO I SOLI VINCOLI A TERRA:



SI PASSA A SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI PER LA STRUTTURA (COME SE ① ∪ ② FOSSE UN <u>UNICO</u> CORPO RIGIDO):

$$
① \cup ② \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A - H_C = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - p_{(D)} - p_{(E)} + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -p_{(D)}\frac{L}{4} - p_{(E)}\frac{3}{4}L + V_C \cdot L = 0 \end{cases}
$$

DA CUI SEGUE:

$$
① \cup ② \begin{cases} H_A - H_C = 0 & [15] \\ V_A + V_C = 2p & [16] \\ V_C \cdot L = pL & [17] \end{cases}
$$

SISTEMA DI 3 EQ. IN 4 INCOGNITE; SI OSSERVI CHE [15] E [16] CORRISPONDONO ALLA [7] E ALLA [8], OTTENUTE SOMMANDO LE EQUAZIONI $R_x^{①} + R_x^{②}$ E $R_y^{①} + R_y^{②}$ RISPETTIVAMENTE.

LE [15]-[17] PRESUPPONGONO CHE LA STRUTTURA SIA RIGIDA; IN REALTÀ, IN VIRTÙ DELL'ARTICOLAZIONE IN Ⓑ ESSA SI COMPORTA COME UNO SCHIACCIANOCI, POICHÉ LA ② PUÒ RUOTARE RISPETTO ALLA ① ATTORNO AL PERNO DELLA CERNIERA Ⓑ, O VICEVERSA, LA ① PUÒ RUOTARE RISPETTO ALLA ② ATTORNO AL PERNO DELLA CERNIERA Ⓑ.

LA ROTAZIONE NON AVRÀ PERÒ LUOGO SE LE AZIONI APPLICATE ALLA ② NON PRODUCONO ALCUN "INCENTIVO ALLA ROTAZIONE" ATTORNO A Ⓑ, OVVERO SE IL MOMENTO DOVUTO ALLE SOLE AZIONI APPLICATE ALLA TRAVE ② SI ANNULLA IN Ⓑ: PERTANTO

$$
\circlearrowleft M_{z(B)}^{②} = 0 \qquad [18]
$$

È L'EQUAZIONE AUSILIARIA CERCATA; È INDIPENDENTE DALLE [15]-[17], CHE RIGUARDANO L'INTERA STRUTTURA, POICHÉ CONVOGLIA L'INFORMAZIONE AGGIUNTIVA CHE LA TRAVE ② NON PUÒ SUBIRE ROTAZIONI RELATIVE RISPETTO ALLA ① E, PERTANTO, CHE LA STRUTTURA SI COMPORTA COME UN UNICO CORPO RIGIDO, NON SFRUTTANDO LA ARTICOLAZIONE PRESENTE IN Ⓑ.

NATURALMENTE LO STESSO DISCORSO SI SAREBBE POTUTO FARE CON RIFERIMENTO ALLA TRAVE ① (ANZICHÉ ALLA ②), E QUESTO AVREBBE CONDOTTO A QUESTA EQUAZIONE AUSILIARIA, ALTERNATIVA ALLA [18]:

$$
\circlearrowleft M_{z(B)}^{①} = 0 \qquad [18\,bis]
$$

SE È VERIFICATA LA [18] E IL CORPO RIGIDO ① ∪ ② VERIFICA L'EQUILIBRIO DEI MOMENTI RISPETTO A QUALSIASI POLO (E QUINDI ANCHE RISPETTO AL POLO Ⓑ), ALLORA LA [18 bis] È AUTOMATICAMENTE SODDISFATTA.

SI NOTI CHE [18] O [18 bis] SONO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO CHE RIGUARDANO SOLO <u>UNA PARTE</u> DELLA STRUTTURA: QUESTO È UN CARATTERE DISTINTIVO DELLE EQ. AUSILIARIE.

UTILIZZANDO LA [18] SI HA:

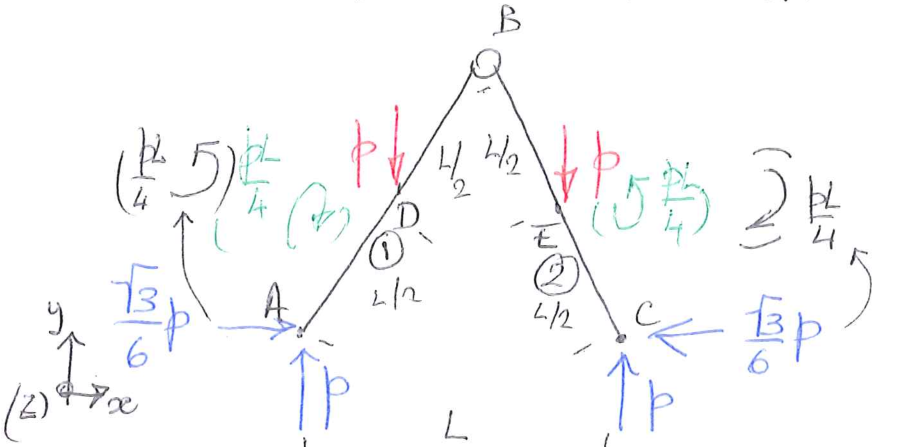
$$
\circlearrowleft M_{z(B)}^{②} = 0 - p_{(E)}\frac{L}{4} - H_C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L + V_C\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_C - H_C\sqrt{3} = \frac{p}{2} \quad [18']
$$

IL SISTEMA RISOLVENTE È QUINDI QUESTO:

$$\begin{cases} H_A - H_C = 0 & [15'] \\ V_A + V_C = 2p & [16'] \\ V_C = p & [17'] \\ V_C - \sqrt{3}H_C = \frac{p}{2} & [18'] \end{cases}$$

DALLA [17'] SEGUE $\underline{V_C = p}$; LA [16'] FORNISCE POI $\underline{V_A = p}$; E LA [18'] $\sqrt{3}H_C = \frac{p}{2}$ CIOÈ $\underline{H_C = \frac{\sqrt{3}}{6}p}$; INFINE PER LA [15'] È $\underline{H_A = \frac{\sqrt{3}}{6}p}$

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DELLA STRUTTURA "CONNESSA" È QUINDI:



SI VEDE CHE L'EQUILIBRIO DELLE FORZE IN DIREZIONE X E Y È VERIFICATO E LE 2 COPPIE DOVUTE ALLE FORZE VERTICALI SI BILANCIANO.
TUTTAVIA, <u>SE MANCASSE LA REAZIONE H_C</u> LA TRAVE (2), PER EFFETTO DELLA COPPIA ANTIORARIA $\frac{pL}{4}$ TENDEREBBE A RUOTARE ATTORNO A B, DIVARICANDOSI.

L'EFFETTO DELLA REAZIONE H_C È QUELLO DI CONTRASTARE QUESTA DIVARICAZIONE PRODUCENDO RISPETTO A (B) UN MOMENTO ORARIO PARI A $\frac{pL}{4}$.

QUESTO MODO DI PROCEDERE È VISIBILMENTE VANTAGGIOSO, MA SI PRESENTA MENO SEMPLICE DA IMPLEMENTARE.

A QUESTO PROPOSITO, PUÒ ESSERE UTILE ESAMINARE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DELLA STRUTTURA COMPLETAMENTE SCONNESSA.

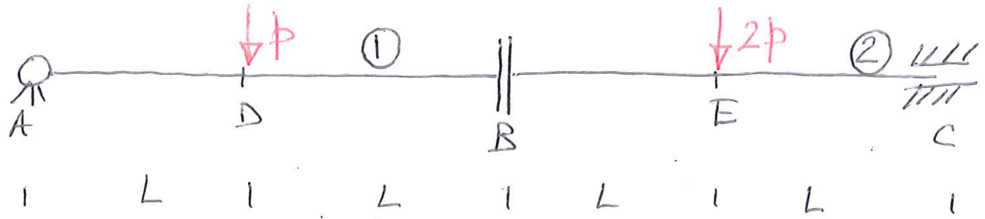
L'EQUAZIONE AUSILIARIA CHE SI CERCA DEVE SODDISFARE QUESTI 2 REQUISITI

1) DEVE RIGUARDARE SOLO <u>UNA PARTE</u> DELLA STRUTTURA: NEL CASO IN ESAME, O LA TRAVE (1) O LA TRAVE (2)

2) NON DEVE CONTENERE CONTRIBUTI DELLE FORZE DI CONNESSIONE, H_B^1, V_B^1. PERTANTO LE EQUAZIONI [1] E [2] (OVVERO [4] E [5]) VANNO SCARTATE, MENTRE CON OPPORTUNA SCELTA DEL POLO SI PUÒ OTTENERE EQUAZIONI "PURE" CHE NON CONTENGONO H_B^1 E V_B^1. È IL CASO DELLA [3] (O DELLA [6].) QUESTE OSSERVAZIONI VALGONO <u>SOLO</u> SE ARTICOLAZIONE È UNA CERNIERA

B) ARTICOLAZIONE SEMPLICE A PÀTTINO.

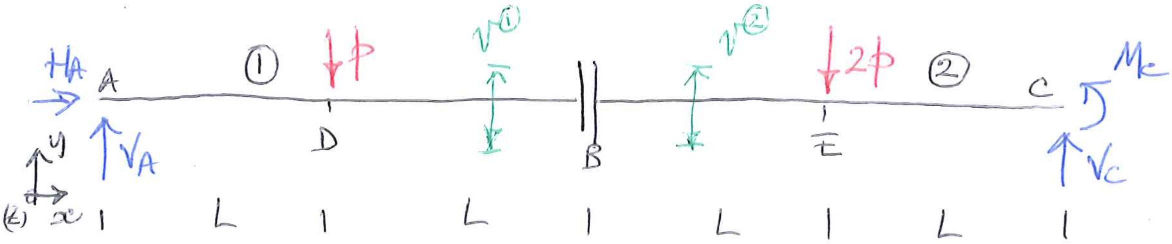
SI CONSIDERA IN QUESTO CASO UNA VERSIONE SPECIALE DELL'ARCO A 3 CERNIERE, IN CUI 2 CERNIERE SONO RIMPIAZZATE DA UN PATTINO (CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE) E DA UN MANICOTTO (CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE)



$$GDL = 3(①) + 3(②) = 6$$
$$GDV = 2(A) + 2(B) + 2(C) = 6$$

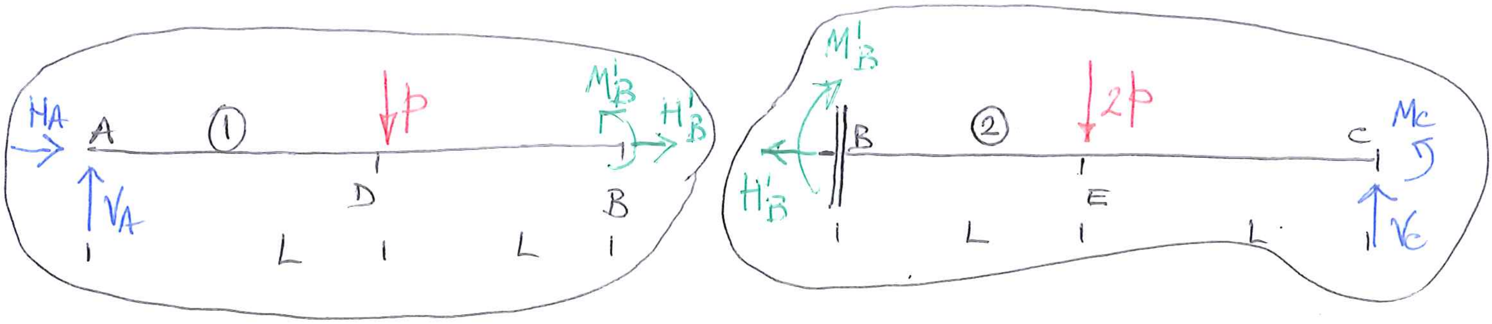
$\Big\}$ $GDL = GDV \Rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE (SI DIMOSTRA PIÙ AVANTI)

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO EVIDENZA CHE LE REAZIONI VINCOLARI A TERRA (4: H_A, V_A, V_C, M_C) SONO IN NUMERO MAGGIORE DELLE EQUAZIONI CARDINALI (3) PER LA STRUTTURA CONSIDERATA RIGIDA.



D'ALTRA PARTE È EVIDENTE CHE ① E ② POSSONO SPOSTARSI IN DIREZIONE VERTICALE (Y) INDIPENDENTEMENTE L'UNA DALL'ALTRA E DUNQUE NON COSTITUISCONO UN SISTEMA RIGIDO.

NELLA LOGICA DEL METODO DELLA COMPLETA SCONNESSIONE I DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO PER LE TRAVI ① E ② SONO:



E SEGUENDO LA STRADA GIÀ PERCORSA NEL CASO PRECEDENTE, SI ARRIVEREBBE A SCRIVERE LE EQUAZIONI CARDINALI PER CIASCUNO DEI CORPI RIGIDI:

$$① \begin{cases} \rightarrow R_x^{①} = 0 & H_A + H'_B = 0 & [19] \\ \uparrow R_y^{①} = 0 & V_A - p = 0 & [20] \\ \circlearrowleft M_{Z(A)}^{①} = 0 & -pL + M'_B = 0 & [21] \end{cases} \qquad ② \begin{cases} \rightarrow R_x^{②} = 0 & -H'_B = 0 & [22] \\ \uparrow R_y^{②} = 0 & -2p + V_c = 0 & [23] \\ \circlearrowleft M_{Z(C)}^{②} = 0 & -M'_B + 2pL + M_c = 0 & [24] \end{cases}$$

E SI OSSERVA CHE [20] O [23] SONO EQUAZIONI PURE (NON CONTENGONO LE REAZIONI

DEL VINCOLO INTERNO, A DIFFERENZA DELLE [19], [21], [22] E [24]).

INOLTRE ESPRIMONO IL FATTO CHE LA TRAVE ① (O LA ②) SODDISFI IN PROPRIO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO IN DIREZIONE VERTICALE, NON SFRUTTANDO IN QUESTO MODO LA MOBILITÀ LASCIATA LIBERA DAL VINCOLO INTERNO.

SE ORA SI TORNA AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER LA STRUTTURA NON SCONNESSA, SI OSSERVA CHE LE EQUAZIONI SOPRA INDIVIDUATE ([20] O [23]) RIGUARDANO L'EQUILIBRIO DI UNA SOLA PARTE DI STRUTTURA E NON CONTENGONO LE REAZIONI DEL VINCOLO INTERNO, H'_B E M'_B. SONO QUINDI POSSIBILI EQUAZIONI AUSILIARIE DA UTILIZZARE, NELLA LOGICA DEL METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE, PER COMPLETARE IL SISTEMA DI EQUAZIONI FORNITO DALLE EQUAZIONI CARDINALI SCRITTE PER LA STRUTTURA ASSEMBLATA (① ∪ ②), CONSENTENDO DI DETERMINARE LE REAZIONI DEI VINCOLI A TERRA:

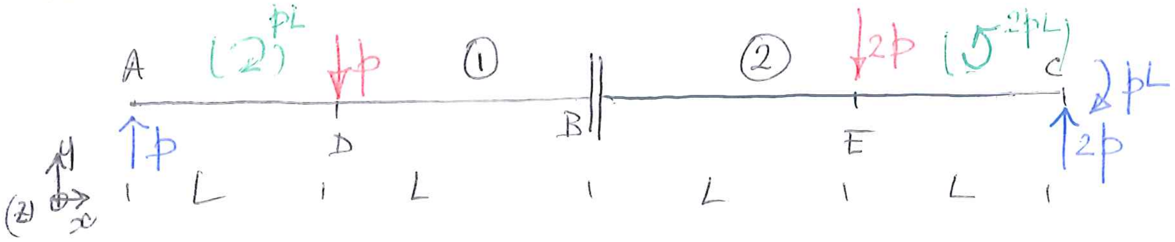
$$
① \cup ② \begin{cases} \to R_x = 0 & H_A = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - p - 2p + V_C = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -pL - 2p[3L] + V_C \cdot 4L + M_C = 0 \end{cases} \qquad ① \cup ② \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 & [25] \\ V_A + V_C = 3p & [26] \\ 4V_C L + M_C = 7pL & [27] \end{cases}
$$

\+ EQUAZIONE AUSILIARIA $\quad R_y^{①} = 0 \quad V_A - p = 0 \Rightarrow V_A = p$ [28] (OPPURE $R_y^{②} = 0$) [28 bis]

IL SISTEMA COSÌ OTTENUTO, FORMATO DALLE EQUAZIONI [25] - [28] FORNISCE QUESTA SOLUZIONE:

$$H_A = 0; \quad V_A = p; \quad V_C = 2p; \quad M_C = -pL$$

DUNQUE SI OTTIENE QUESTO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



SI VERIFICA CHE LE FORZE VERTICALI SODDISFANO L'EQUILIBRIO NON SOLO PER L'INTERA STRUTTURA ($R_y^{①\cup②} = 0$), MA ANCHE SEPARATAMENTE PER LE 2 PARTI, ① ($R_y^{①} = 0$) E ② ($R_y^{②} = 0$); IN TERMINI DI MOMENTI, QUELLO GENERATO DALLA COPPIA DI FORZE p (APPLICATE IN Ⓐ E IN Ⓓ), $-pL$ SI SOMMA ALLA COPPIA DEL MANICOTTO ($-pL$) ED È BILANCIATO DAL MOMENTO PRODOTTO DALLE 2 FORZE $2p$ (APPLICATE IN Ⓔ E IN Ⓒ), DI VALORE $+2pL$.

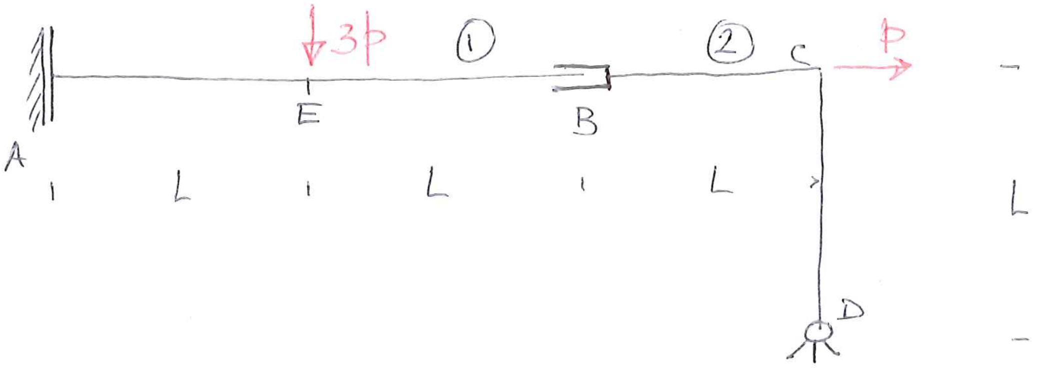
SI OSSERVI CHE LA CONDIZIONE CHE CIASCUNA DELLE 2 TRAVI SIA IN EQUILIBRIO NEI CONFRONTI DEI CARICHI VERTICALI (CIOÈ AGENTI IN DIREZIONE Y)

È CONDIZIONE SUFFICIENTE A GARANTIRE CHE LA ARTICOLAZIONE OFFERTA DAL VINCOLO (B) NON SIA SFRUTTATA. IN QUESTO SENSO LA EQ. [28] (O LA [28bis]) PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME UNA "CONDIZIONE DI IRRIGIDIMENTO", ESATTAMENTE COME LA [18] (O LA [18bis]) NEL CASO PRECEDENTE DI ARTICOLAZIONE A CERNIERA.

A QUESTO PROPOSITO SI NOTI CHE L'EQUAZIONE AUSILIARIA DIPENDE DAL TIPO DI VINCOLO INTERNO: NEL CASO DI CERNIERA POSTA NEL PUNTO (B) QUESTA È $M_{z(B)}^{(1)} = 0$ (O $M_{z(B)}^{(2)} = 0$); NEL CASO DI PATTINO CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE QUESTA DIVIENE $R_y^{(1)} = 0$ (O $R_y^{(2)} = 0$).

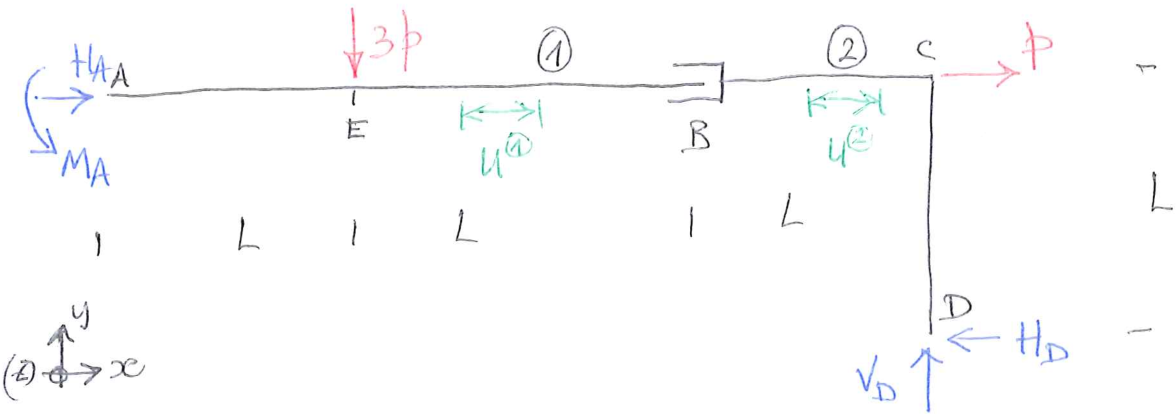
C) ARTICOLAZIONE SEMPLICE A MANICOTTO.

QUESTA VOLTA SI CONSIDERA ANCORA UN CASO DI ARCO A 3 CERNIERE "DEGENERE", DOVE L'ARTICOLAZIONE È COSTITUITA DA UN MANICOTTO CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE:



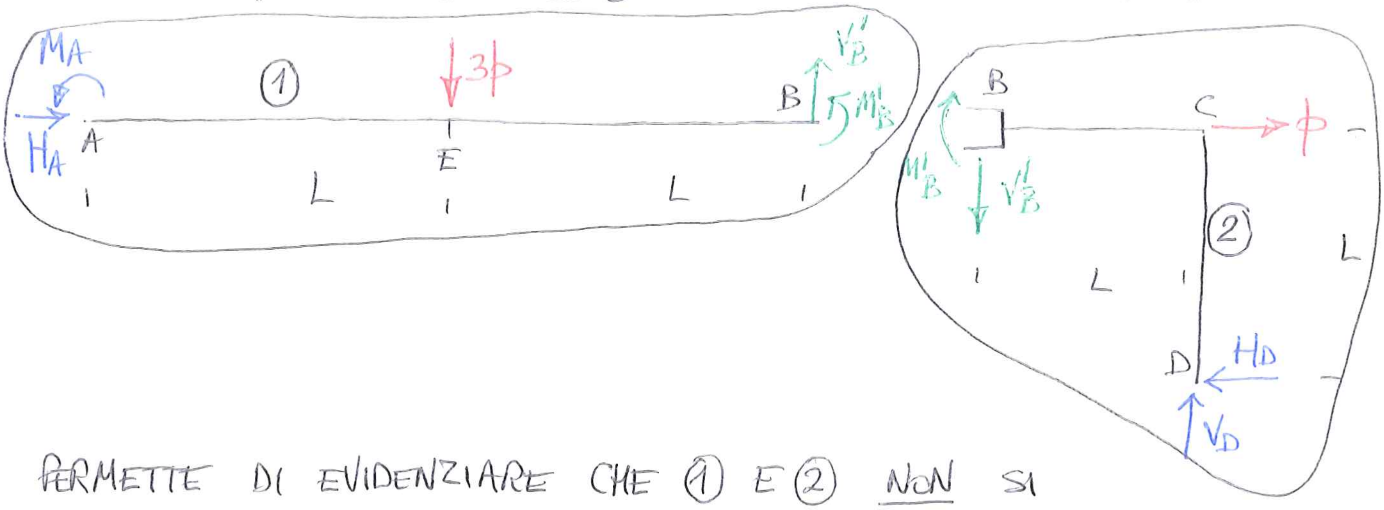
RISULTA
$$GDL = 3\,(1) + 3\,(2) = 6$$
$$GDV = 2\,(A) + 2\,(B) + 2\,(D) = 6$$
} STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, SENZA EFFETTUARE LA COMPLETA SCONNESSIONE RISULTA:



ED EVIDENZIA CHE CI SONO 4 COMPONENTI DI REAZIONE A TERRA (H_A, M_A, H_D, V_D) E CHE PER LE 2 TRAVI SONO POSSIBILI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI u INDIPENDENTI.

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO CON COMPLETA SCONNESSIONE:



PERMETTE DI EVIDENZIARE CHE ① E ② NON SI SCAMBIANO ALCUNA FORZA ORIZZONTALE: NE SEGUE CHE L'EQUAZIONE $R_x^{(1)}=0$ (O, IN ALTERNATIVA, $R_x^{(2)}=0$) È UN'EQUAZIONE PURA E PUÒ QUINDI ESSERE UTILIZZATA COME EQUAZIONE AUSILIARIA.

CIÒ PERMETTE DI UTILIZZARE IL METODO DI RISOLUZIONE BASATO SULLE EQUAZIONI AUSILIARIE:

$$
① \cup ② \quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A + p - H_D = 0 & [29] \\ \uparrow R_y = 0 & -3p + V_D = 0 & [30] \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A - 3pL - H_D L + V_D \cdot 3L = 0 & [31] \end{cases}
$$

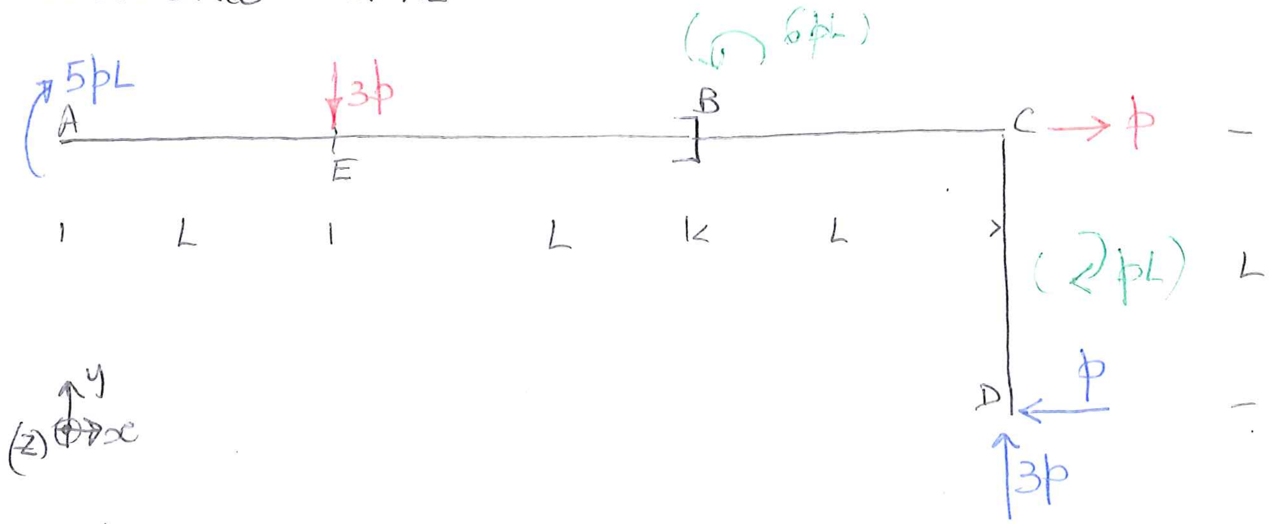
+ EQ. AUSILIARIA $\quad R_x^{(1)} = 0 \quad H_A = 0 \quad [32] \qquad (\text{o } R_x^{(2)} = 0) \; [32bis]$

SOSTITUENDO LA [32] NELLA [29] E TENENDO CONTO DELLA [30] LA [31] DIVIENE $M_A = 3pL + pL - 9pL$

CIÒ PERMETTE DI RISOLVERE IL SISTEMA DETERMINANDO LE REAZIONI VINCOLARI INCOGNITE:

$$H_A = 0 \;; \quad H_D = p \;; \quad V_D = 3p \;; \quad M_A = -5pL .$$

SICCHÉ IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO (NON SCONNESSO) IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DIVIENE



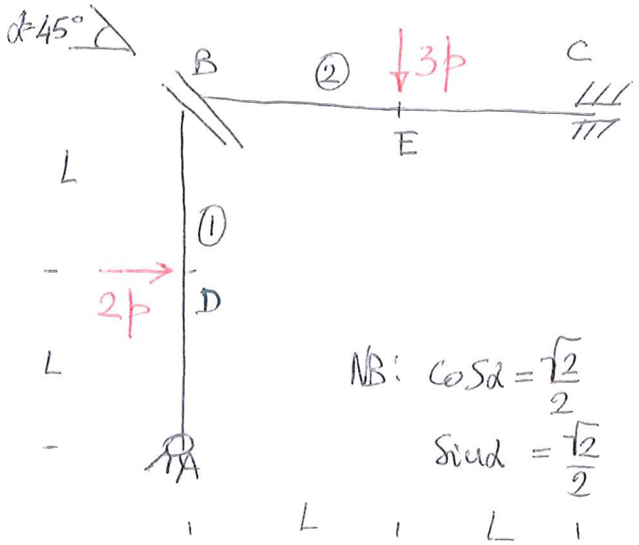
LA VERIFICA GRAFICA EVIDENZIA CHE SUSSISTE EQUILIBRIO DELLE FORZE ORIZZONTALI (ANCHE SEPARATAMENTE PER LA TRAVE ① E LA TRAVE ②) E DELLE FORZE VERTICALI. PER I MOMENTI, LA REAZIONE M_A BILANCIA I CONTRIBUTI DELLE DUE

COPPIE COSTITUITE DALLE FORZE ORIZZONTALI, CHE PRODUCONO UN MOMENTO ORARIO (DI VALORE $-pL$) E DELLE FORZE VERTICALI, CHE DANNO LUOGO A UN MOMENTO (ANTIORARIO) DI VALORE $6pL$.

IL FATTO CHE $R_x^{(1)}=0$ (E $R_x^{(2)}=0$) GARANTISCE CHE LA MOBILITÀ CONSENTITA DALL'ARTICOLAZIONE NON VENGA SFRUTTATA; DI NUOVO LA EQUAZIONE AUSILIARIA PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME UNA CONDIZIONE DI IRRIGIDIMENTO.

D) ARTICOLAZIONE SEMPLICE A PÀTTINO CON PIANO DI SCORRIMENTO OBLIQUO.

SI CONSIDERI LA STRUTTURA SEGUENTE (ANCORA UN ARCO A 3 CERNIERE DI TIPO GENERALIZZATO):



NB: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

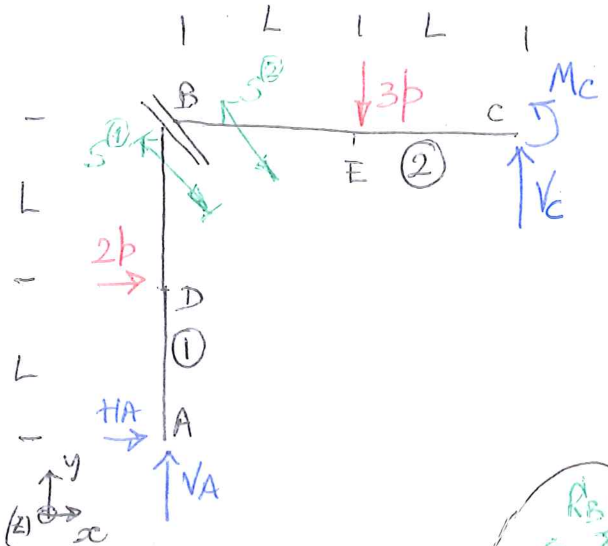
$GDL = 3(1) + 3(2) = 6$

$GDV = 2(A) + 2(B) + 2(C) = 6$

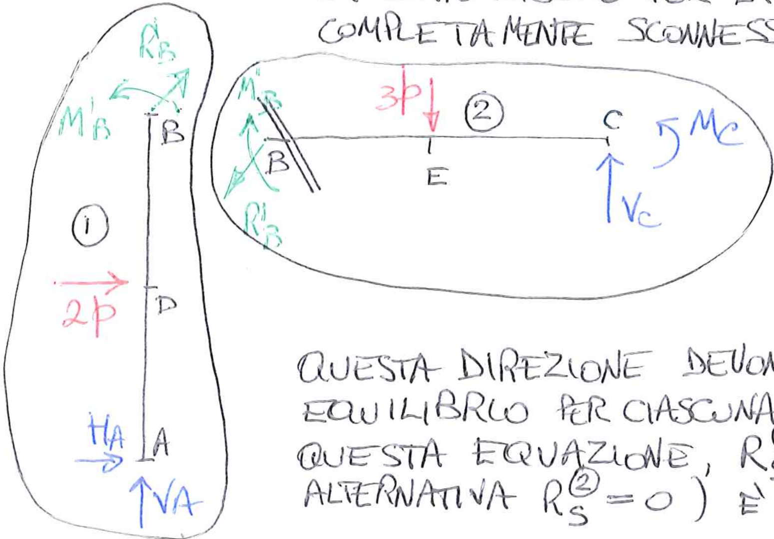
GDL = GDV, STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE

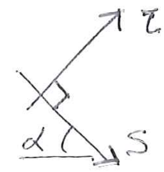
IL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PÀTTINO FORMA UN ANGOLO $\alpha = 45°$ CON LA DIREZIONE ORIZZONTALE

IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO (SENZA EFFETTUARE SCONNESSIONI) RISULTA:



IL DIAGRAMMA EVIDENZIA CHE VI SONO 4 COMPONENTI DI REAZIONE VINCOLARE (H_A, V_A, V_C, M_C), E CHE LA TRAVE 1 E LA 2 POSSONO SUBIRE SPOSTAMENTI RELATIVI (INDIPENDENTI) SECONDO LA DIREZIONE S DEL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PATTINO. IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER LA STRUTTURA COMPLETAMENTE SCONNESSA





τ E S SONO ⊥ !

EVIDENZIA CHE LE 2 TRAVI 1 E 2 NON SI SCAMBIANO ALCUNA AZIONE SECONDO LA DIREZIONE OBLIQUA S; PERTANTO LE FORZE PROIETTATE SECONDO QUESTA DIREZIONE DEVONO ESSERE IN EQUILIBRIO PER CIASCUNA DELLE 2 PARTI: QUESTA EQUAZIONE, $R_S^{(1)}=0$ (O LA ALTERNATIVA $R_S^{(2)}=0$) È LA EQ. AUSILIARIA

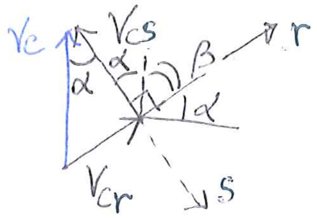
NECESSARIA A COMPLETARE IL SISTEMA DI EQUAZIONI CARDINALI.
SI HA QUINDI:

$$① \cup ② \quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A + 2p = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - 3p + V_c = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & -2pL - 3pL + M_c + V_c\, 2L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -2p & [33] \\ V_A + V_c = 3p & [34] \\ M_c + 2V_c L = 5pL & [35] \end{cases}$$

$$\text{o} \quad \nwarrow R_s^{①} = 0 \quad [36 \text{ bis}]$$

EQ. AUSILIARIA $\nwarrow R_s^{②} = 0$ [36]

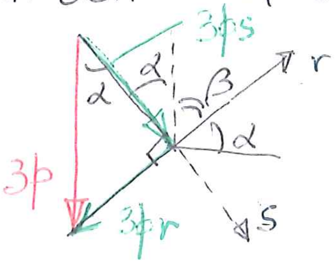
PER SCRIVERE L'EQ. [36] E' NECESSARIO PRELIMINARMENTE PROIETTARE LE FORZE APPLICATE ALLA TRAVE ② SECONDO LE DIREZIONI r E S:



$$V_{cs} = V_c \cos\alpha = V_c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{cr} = V_c \sin\alpha = V_c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

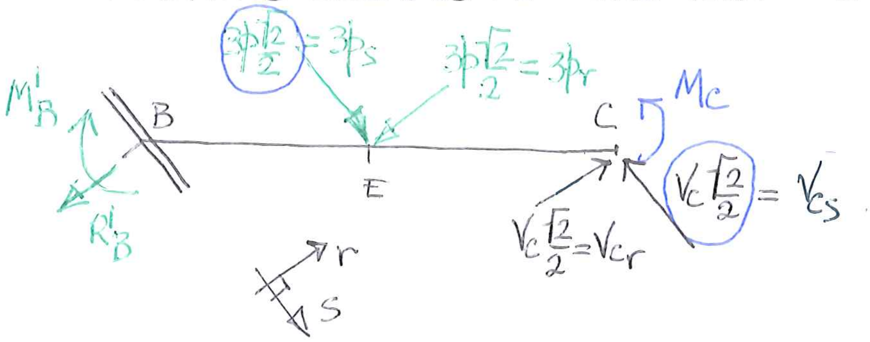
ANALOGAMENTE, PER LA FORZA VERTICALE $3p$:



$$3p_s = 3p\cos\alpha = 3p\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3p_r = 3p\sin\alpha = 3p\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

LE AZIONI APPLICATE ALLA TRAVE ② SONO DUNQUE LE SEGUENTI, QUANDO SONO PROIETTATE SECONDO LE DIREZIONI r E S:



A QUESTO PUNTO SI POSSONO ESPLICITARE I TERMINI DELLA EQ. [36]:

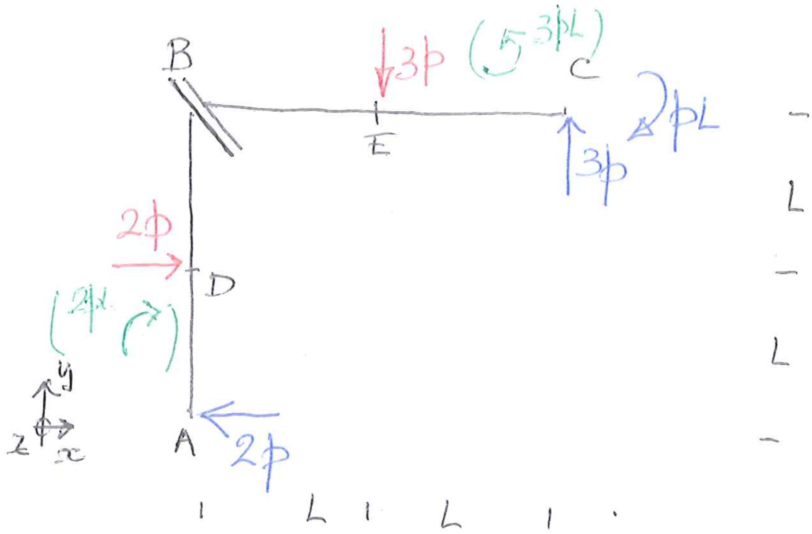
$$\nwarrow R_s^{②} = 0 \quad -3p\frac{\sqrt{2}}{2} + V_c\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad [36'] \quad \Rightarrow \quad V_c \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3p\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

TENENDO QUINDI CONTO DELLE [33], [34], [35], [36] SI ARRIVA A DETERMINARE LE COMPONENTI INCOGNITE DELLE REAZIONI VINCOLARI.
SI TROVA:

$$H_A = -2p \qquad V_A = 0; \qquad V_c = 3p; \qquad M_c = -pL$$

CON ANALOGHE PROIEZIONI DELLE FORZE H_A, V_A, $2p$ SI SAREBBE POTUTO VALUTARE L'EQ. AUSILIARIA ALTERNATIVA $R_s^{①} = 0$.

MEDIANTE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO (CON STRUTTURA CONNESSA) SI VERIFICANO GRAFICAMENTE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO.

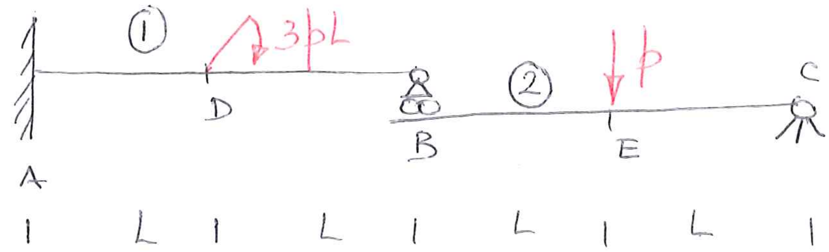


SI VEDE CHE LE FORZE ORIZZONTALI (APPLICATE ALLA SOLA TRAVE ①) SI BILANCIANO, COME PURE LE FORZE VERTICALI (APPLICATE ALLA SOLA TRAVE ②); LE 2 COPPIE PRODUCONO 2 MOMENTI, UNO (ORARIO) DI VALORE $-2pL$; L'ALTRO (ANTIORARIO), DI VALORE $3pL$; QUESTI SONO BILANCIATI DALLA COPPIA ORARIA $-pL$ DOVUTA AL PATTINO.

SI OSSERVA ANCHE CHE LE FORZE PRESENTI SULLE DUE TRAVI SI BILANCIANO SU CIASCUNA DI ESSE E SODDISFANO QUINDI IL REQUISITO DETERMINATO DALL'EQUAZIONE AUSILIARIA [36] O [36 bis]: PERTANTO ANCHE IN QUESTO CASO L'ARTICOLAZIONE NON È SFRUTTATA E LE 2 TRAVI SI COMPORTANO COME UN UNICO CORPO RIGIDO.

E) ARTICOLAZIONE DOPPIA COSTITUITA DA UN CARRELLO

SI CONSIDERI LA STRUTTURA SEGUENTE:

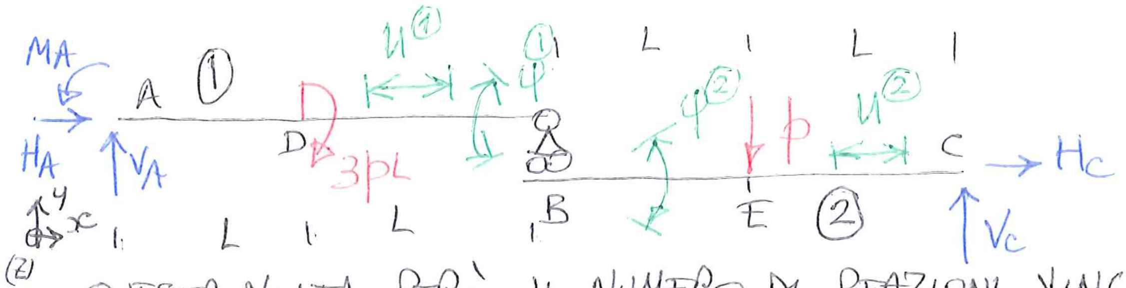


$GDL = 3(①) + 3(②) = 6$

$GDV = 3(A) + 1(B) + 2(C) = 6$

SI TRATTA ANCORA DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA, NON LABILE.

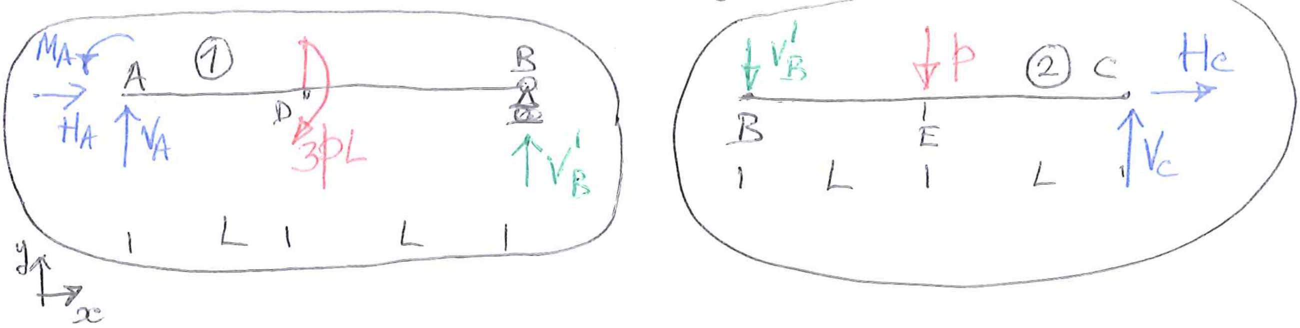
IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, RIMUOVENDO I SOLI VINCOLI A TERRA E SOSTITUENDOLI CON LE REAZIONI RISULTA:



QUESTA VOLTA, PERÒ, IL NUMERO DI REAZIONI VINCOLARI A TERRA (5) È AUMENTATO, PERCHÉ L'ARTICOLAZIONE IN B È COSTITUITA DA UN VINCOLO

SEMPLICE, CHE CONSENTE A CIASCUNA TRAVE 2 SPOSTAMENTI (GENERALIZZATI) RELATIVI, u (IN DIREZIONE x) E LA ROTAZIONE φ.

SE SI PROCEDE ALLA COMPLETA SCONNESSIONE DELLE 2 TRAVI, SI TROVA QUESTO DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



SI OSSERVA CHE LE 2 TRAVI SI TRASMETTONO SOLTANTO UNA FORZA IN DIREZIONE VERTICALE; PERTANTO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO $R_x^{(1)}=0$ E $M_{z(B)}^{(1)}=0$ (OVVERO, IN ALTERNATIVA, $R_x^{(2)}=0$ E $M_{z(B)}^{(2)}=0$) SONO EQUAZIONI PURE, E POSSONO ESSERE UTILIZZATE COME EQUAZIONI AUSILIARIE.

PER DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI SI POSSONO QUINDI USARE QUESTE EQUAZIONI

$$1 \cup 2 \quad \begin{cases} \rightarrow R_x=0 & H_A+H_C=0 \\ \uparrow R_y=0 & V_A-p+V_C=0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)}=0 & M_A-3pL-p\cdot 3L+V_C\cdot 4L=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A+H_C=0 & [37] \\ V_A+V_C=p & [38] \\ M_A+4V_C L=6pL & [39] \end{cases}$$

$$\text{2 EQUAZIONI AUSILIARIE:} \quad \begin{cases} R_x^{(1)}=0 & H_A=0 \\ M_{z(B)}^{(1)}=0 & M_A-V_A 2L-3pL=0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A=0 & [40] \\ M_A-2V_A L=3pL & [41] \end{cases}$$

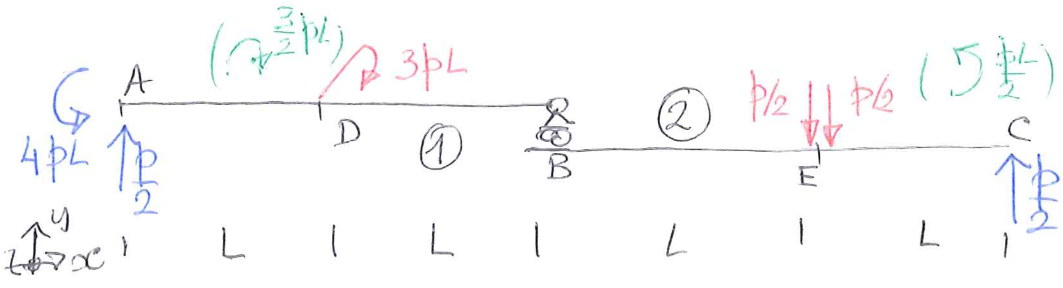
PER RISOLVERE IL SISTEMA, SI PUÒ USARE LA [39] PER DETERMINARE $M_A=6pL-4V_C L$ E SOSTITUIRE NELLA [41], OTTENENDO:

$6p\cancel{L}-4V_C\cancel{L}=3p\cancel{L}+2V_A\cancel{L}$ OVVERO $2V_A+4V_C=3p$; D'ALTRA PARTE PER LA [38] $V_A=p-V_C$ SICCHÉ: $\underbrace{2[p-V_C]}_{2p-2V_C}+4V_C=3p$ DA CUI SI OTTIENE: $2V_C=p \Rightarrow V_C=\frac{p}{2}$

CON QUALCHE SOSTITUZIONE SI OTTIENE ALLA FINE:

$$H_A=0;\quad H_C=0;\quad V_A=\frac{p}{2};\quad V_C=\frac{p}{2};\quad M_A=4pL$$

E QUINDI IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN EQUILIBRIO RISULTA:



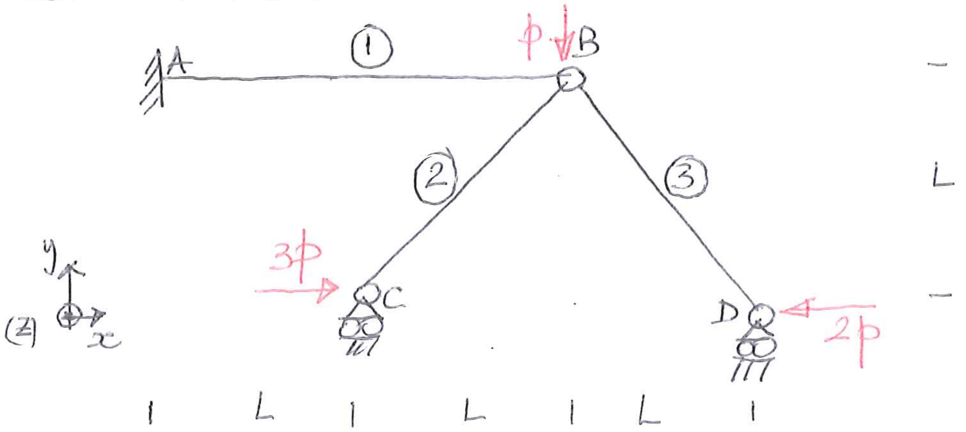
È IMMEDIATO VERIFICARE IL BILANCIO DELLE FORZE IN DIREZIONE y E QUELLO DEI MOMENTI; IN PARTICOLARE SI OSSERVA CHE OGNUNA DELLE 2 TRAVI RISPETTA ANCHE IL BILANCIO DEI MOMENTI RISPETTO A (B) $(-\frac{p}{2}\cdot 2L - 3pL + 4pL = 0)$ PER LA (1); $(-p \cdot L + \frac{p}{2} \cdot 2L = 0)$ PER LA (2).

IN CASO DIVERSO, SI AVREBBE UN "INCENTIVO ALLA ROTAZIONE" ATTORNO A (B) E IL SISTEMA NON SI COMPORTEREBBE COME UN CORPO RIGIDO.

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO AUSILIARIA VA NECESSARIAMENTE SCRITTA PRENDENDO COME POLO IL PUNTO (B): SOLO IN QUESTO CASO LA REAZIONE DEL VINCOLO INTERNO, V'_B NON DÀ CONTRIBUTO. SE PER ESEMPIO SI ASSUMESSE $M^{1}_{z(A)} = 0$ O $M^{2}_{z(C)} = 0$ SI DOVREBBE CONSIDERARE IL CONTRIBUTO DI V'_B E QUESTO COMPORTEREBBE L'AGGIUNTA DI UNA ULTERIORE INCOGNITA.

F) ARTICOLAZIONE DOPPIA COSTITUITA DA UNA CERNIERA IN CUI CONVERGONO 3 TRAVI.

COME ESEMPIO SI CONSIDERI IL SEGUENTE:



SONO PRESENTI 3 CORPI RIGIDI, QUINDI GDL = 3(1) + 3(2) + 3(3) = 9 GDL

PER QUANTO RIGUARDA I GRADI DI VINCOLO, SI OSSERVA PRELIMINARMENTE CHE NELLA CERNIERA (B) CONVERGONO 3 TRAVI: LE EQUAZIONI DI VINCOLO INDIPENDENTI SONO ALLORA:

$$u_B^{①} = u_B^{②} = u_B^{③} \Rightarrow \begin{cases} u_B^{①} - u_B^{②} = 0 \\ u_B^{①} - u_B^{③} = 0 \end{cases}$$

2 EQUAZIONI INDIPENDENTI (LA EQUAZIONE $u_B^{②} - u_B^{③} = 0$ NON È INDIPENDENTE!)

$$v_B^{①} = v_B^{②} = v_B^{③} \Rightarrow \begin{cases} v_B^{①} - v_B^{②} = 0 \\ v_B^{①} - v_B^{③} = 0 \end{cases}$$

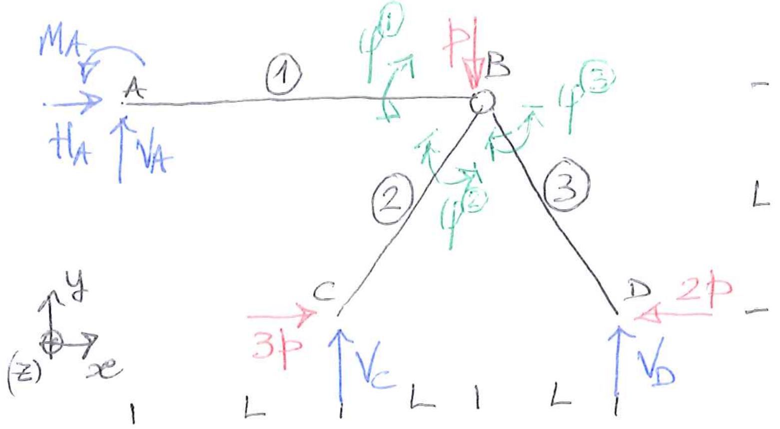
2 EQUAZIONI INDIPENDENTI (LA TERZA $v_B^{②} - v_B^{③} = 0$ SEGUE NECESSARIAMENTE: NON È INDIPENDENTE!)

PERTANTO AL VINCOLO CORRISPONDONO 4 EQUAZIONI DI VINCOLO E DUNQUE PRESENTA 4 GDV.

SEGUE QUINDI: GDV = 3(A) + 4(B) + 1(C) + 1(D) = 9 GDV

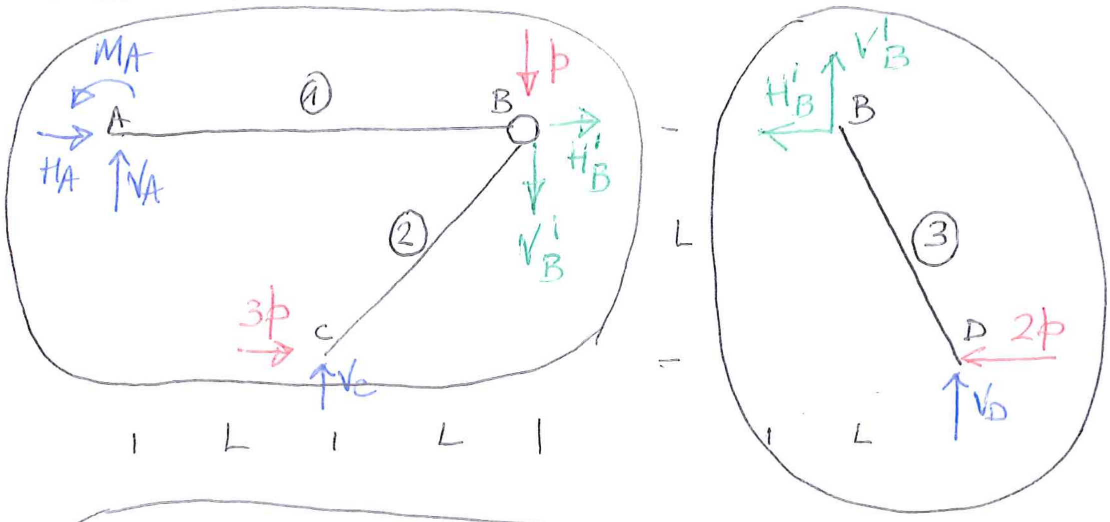
POICHÉ GDL = GDV LA STRUTTURA È ISOSTATICA, NON LABILE (QUESTO SI POTRÀ VERIFICARE CON UN'ANALISI CINEMATICA).

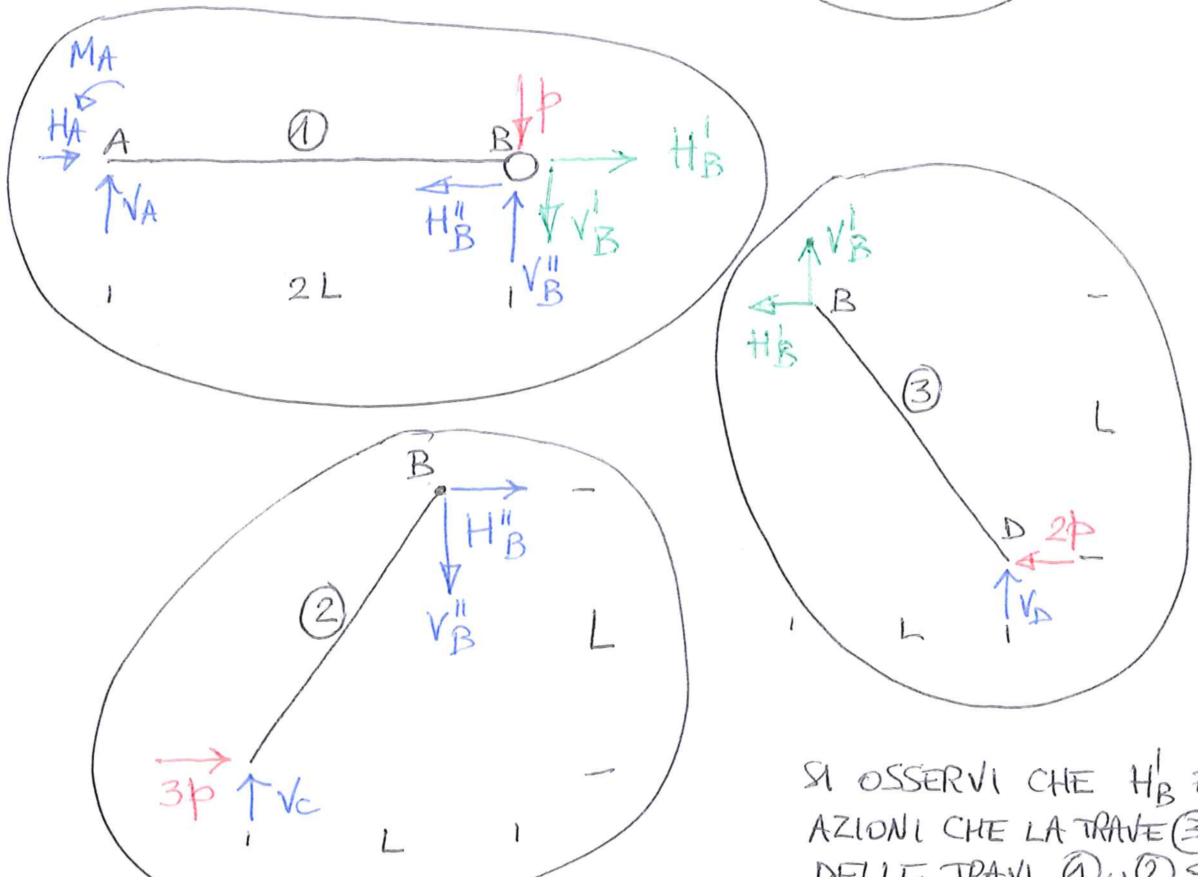
IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO OTTENUTO SENZA SCONNESSIONI RISULTA:



- SONO POSSIBILI ROTAZIONI RELATIVE FRA LA TRAVE ① E LA ② E FRA LA ① E LA ③ (O FRA LA ② E LA ③)
SE LA STRUTTURA È RIGIDA, QUESTE ROTAZIONI NON DEBBONO AVERE LUOGO (CONDIZIONE DI IRRIGIDIMENTO).

E RIVELA CHE CI SONO 5 REAZIONI VINCOLARI DA DETERMINARE. CON IL METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE OCCORRE TROVARE 2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO RELATIVE A PARTI DELLA STRUTTURA.
PER TROVARLE È OPPORTUNO PROCEDERE, MEDIANTE 2 SEZIONAMENTI, A SCONNETTERE COMPLETAMENTE LA STRUTTURA; LO SI FA IN 2 PASSAGGI.





SI OSSERVI CHE H'_B E V'_B SONO LE AZIONI CHE LA TRAVE ③ E IL COMPLESSO DELLE TRAVI ① ∪ ② SI SCAMBIANO; H''_B E V''_B LE AZIONI CHE LE TRAVI ① E ② SI SCAMBIANO.

SI OSSERVA CHE TUTTE LE REAZIONI INTERNE (H'_B, V'_B) E (H''_B, V''_B) PASSANO PER IL PUNTO B E DUNQUE LE EQUAZIONI AUSILIARIE DA CONSIDERARE SONO EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DI PARTI DELLA STRUTTURA RISPETTO AL POLO (B); SI TRATTA DI SCRIVERE 2 EQUAZIONI INDIPENDENTI. 18

SEGUENDO IL MODO IN CUI SI È ARRIVATI ALLA COMPLETA SCONNESSIONE SI PUÒ GIUNGERE A SCRIVERE QUESTE EQUAZIONI:

1. $M^{(3)}_{z(B)} = 0$ [37] OPPURE $M^{(1)\cup(2)}_{z(B)} = 0$ [37 bis]

2. $M^{(1)}_{z(B)} = 0$ [38] OPPURE $M^{(2)}_{z(B)} = 0$. [38 bis]

A QUESTE OCCORRE AGGIUNGERE LE EQUAZIONI CARDINALI PER LA INTERA STRUTTURA:

$$(1)\cup(2)\cup(3)\quad \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A + 3p - 2p = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - p + V_C + V_D = 0 \\ \circlearrowleft M_{z(A)} = 0 & M_A - p\cdot 2L + V_C\cdot L + 3pL + V_D\cdot 3L + \\ & -2pL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -p & [39] \\ V_A + V_C + V_D = p & [40] \\ M_A + V_C L + 3V_D L = +pL & [41] \end{cases}$$

EQUAZIONI AUSILIARIE:

$$\circlearrowleft M^{(3)}_{z(B)} = 0 \qquad V_D \cancel{L} - 2p\cancel{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 2p \qquad [37]$$

$$\circlearrowleft M^{(1)}_{z(B)} = 0 \qquad M_A - V_A\cdot 2L = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - 2V_A L = 0 \qquad [38]$$

SOSTITUENDO LA [37] NELLA [40] SI OTTIENE: $V_A + V_C = -p$ [40'];

SOSTITUENDO LA [37] NELLA [41] SI OTTIENE: $M_A + V_C L = -5pL$ [41']

MA LA [38] FORNISCE $M_A = 2V_A L$, PER CUI LA [41'] DIVIENE:

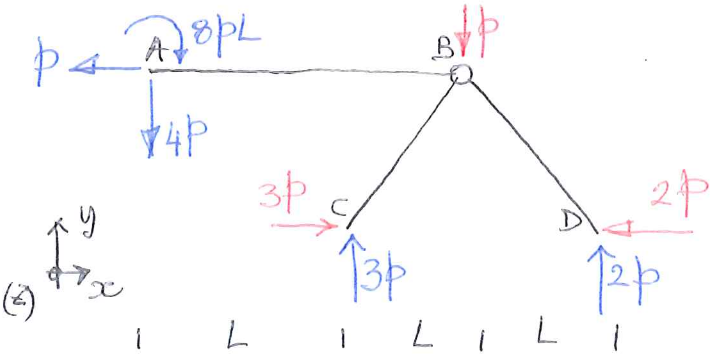
$$2V_A\cancel{L} + V_C\cancel{L} = -5p\cancel{L} \quad \Rightarrow \quad 2V_A + V_C = -5p \quad [41''] \quad \Rightarrow \quad V_A + [V_A + V_C] = -5p$$

SE ORA SI TIENE CONTO DELLA [40'] SI HA $V_A + [-p] = -5p \Rightarrow V_A = -4p$

QUINDI SI OTTIENE:

$H_A = -p$; $V_A = -4p$; $M_A = -8pL$; $V_C = 3p$; $V_D = 2p$

PERTANTO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO È:



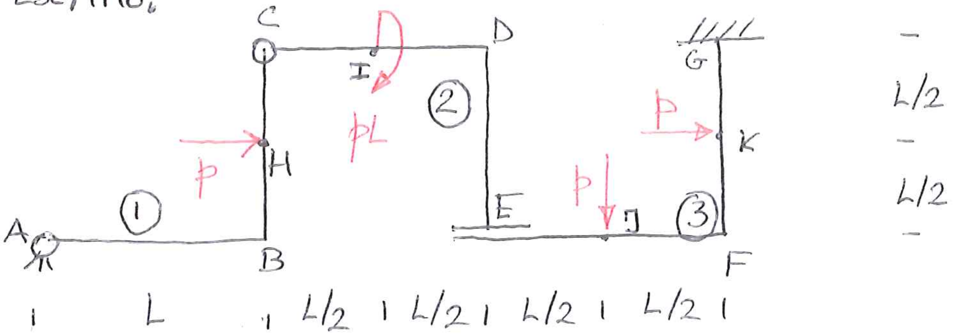
SI OSSERVI CHE GRAFICAMENTE È GARANTITO IL BILANCIO DELLE FORZE ORIZZONTALI E VERTICALI; IL BILANCIO DEI MOMENTI È SODDISFATTO NON SOLO GLOBALMENTE MA ANCHE PER OGNI TRAVE RISPETTO AL POLO (B).

G) MOLTEPLICI ARTICOLAZIONI SEMPLICI

IN QUESTA CONDIZIONE, SI PUÒ PROCEDERE COME GIÀ VISTO CON IL METODO DELLA COMPLETA SCONNESSIONE. PER UTILIZZARE IL METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE, SI TENGA CONTO CHE LE ARTICOLAZIONI VANNO CONSIDERATE UNA PER VOLTA.

E QUANDO SI CONSIDERA L'ARTICOLAZIONE n, SI FA CONTO CHE TUTTE LE ALTRE NON SIANO ATTIVE (RISULTINO CONGELATE).

ESEMPIO:



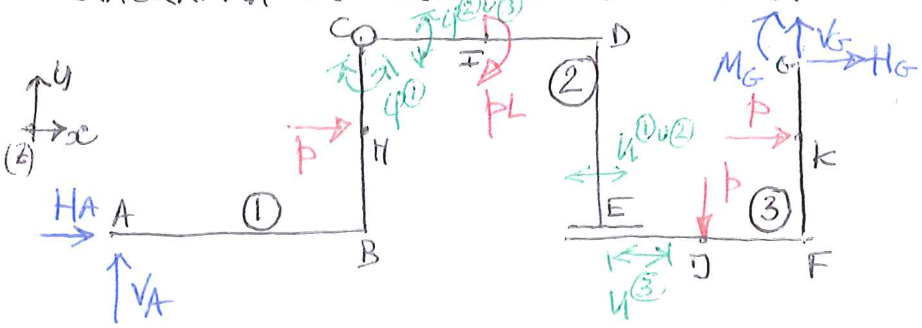
$GDL = 3(①) + 3(②) + 3(③) = 9$

$GDV = 2(A) + 2(C) + 2(E) + 3(G) = 9$

$GDL = GDV \Rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE)

VI SONO 2 ARTICOLAZIONI SEMPLICI IN © (CERNIERA) E IN Ⓔ (PATTINO CON PIANO DI SCORRIMENTO ORIZZONTALE).

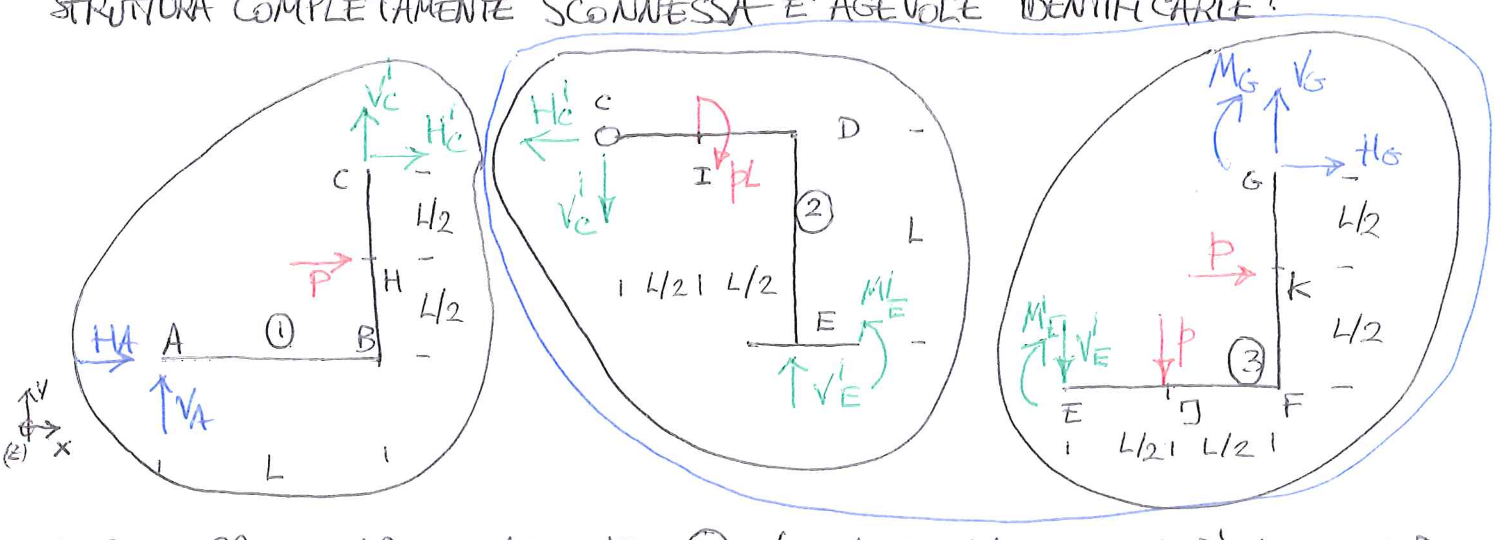
DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER LA STRUTTURA INTERA (NON SCONNESSA):



SI HANNO 5 COMPONENTI DI REAZIONE VINCOLARE A TERRA; LE 2 ARTICOLAZIONI CONSENTONO:

- ROTAZIONE RELATIVA FRA ① E ②∪③
- SPOSTAMENTO ORIZZONTALE RELATIVO FRA ①∪② E ③.

SERVONO 2 EQUAZIONI AUSILIARIE: CON IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO DELLA STRUTTURA COMPLETAMENTE SCONNESSA È AGEVOLE IDENTIFICARLE:



PER LA PRIMA ARTICOLAZIONE, © (QUANDO LA SECONDA È ASSUNTA BLOCCATA) PER NON AVERE "INCENTIVI ALLA ROTAZIONE" ATTORNO A © DEVE ESSERE

$$M^{①}_{z(C)} = 0 \quad [42] \qquad \text{OPPURE} \qquad M^{②\cup③}_{z(C)} = 0 \quad [42\ bis]$$

PER LA SECONDA ARTICOLAZIONE, Ⓔ (QUANDO LA PRIMA È ASSUNTA BLOCCATA)

PER NON AVERE SPOSTAMENTI ORIZZONTALI DEVE ESSERE

$R_x^{③} = 0$ [43] OPPURE $R_x^{① \cup ②} = 0$ [43 bis]

NOTA: LE EQUAZIONI [42] E [43] SONO ABBASTANZA OVVIE, DATO CHE NON CONTENGONO LE REAZIONI DEI VINCOLI INTERNI.
LE EQUAZIONI ALTERNATIVE RICHIEDONO ATTENZIONE: SE INFATTI SI USASSE IN LUOGO DELLA [42 bis] LA SEGUENTE:

$M_{Z(C)}^{②} = 0$ CI SI TROVEREBBE ALLE PRESE CON LE REAZIONI DEL VINCOLO INTERNO IN E, CHE INTRODURREBBERO DUE NUOVE INCOGNITE. L'UNICO MODO CORRETTO PER EVITARE QUESTA AGGIUNTA È QUELLO DI CONSIDERARE INSIEME ② ∪ ③: IN TAL MODO LE REAZIONI DEL VINCOLO INTERNO VENGONO MESSE IN CONTO DUE VOLTE E SI ELIDONO A DUE A DUE.

STESSE CONSIDERAZIONI VALGONO PER LA SECONDA ARTICOLAZIONE: SE IN LUOGO DELLA [43 bis] SI SCRIVESSE

$R_x^{②} = 0$ CI SI TROVEREBBE A DOVERE METTERE IN CONTO LA REAZIONE $H_C^!$ DEL VINCOLO INTERNO ⓒ, CHE DAREBBE UN CONTRIBUTO E FAREBBE AUMENTARE IL NUMERO DI INCOGNITE.
SE SI CONSIDERA INVECE L'INSIEME ① ∪ ② LA REAZIONE VIENE MESSA IN CONTO 2 VOLTE CON SEGNI DIVERSI, CON LA CONSEGUENZA CHE SI ELIDE.

IN GENERALE, LE EQUAZIONI AUSILIARIE IN ALTERNATIVA DEVONO CONSIDERARE PARTI COMPLEMENTARI DELLA STRUTTURA, SENZA CHE NESSUNA PORZIONE SIA TRALASCIATA. L'INSIEME DELLE 2 EQUAZIONI ALTERNATIVE DEVE COMPRENDERE L'INTERA STRUTTURA.
NEL CASO IN ESAME: [42] E [42 bis] : ① ∪ [② ∪ ③] = STRUTTURA COMPLETA
[43] E [43 bis]: [① ∪ ②] ∪ ③ = STRUTTURA COMPLETA

□

PER DETERMINARE LE EQUAZIONI DEI VINCOLI ESTERNI SI HA DUNQUE:

$$① \cup ② \cup ③ \begin{cases} \rightarrow R_x = 0 & H_A + p_{(H)} + p_{(K)} + H_G = 0 \\ \uparrow R_y = 0 & V_A - p_{(I)} + V_G = 0 \\ \circlearrowleft M_{Z(A)} = 0 & -p_{(H)}\frac{L}{2} - pL - p_{(I)}\frac{5}{2}L - p_{(K)}\frac{L}{2} - M_G - H_G L + V_G \cdot 3L = 0 \end{cases}$$

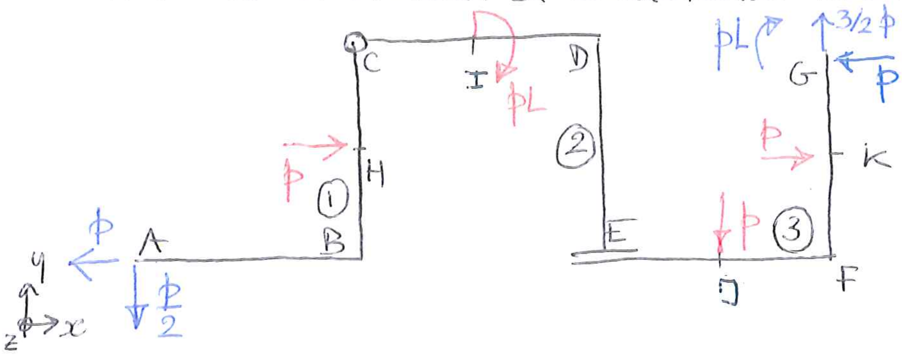
$$\Rightarrow \begin{cases} H_A + H_G = -2p & [44] \\ V_A + V_G = +p & [45] \\ M_G + H_G L - 3V_G L = -\frac{9}{2}pL & [46] \end{cases}$$

$$+ \text{ 2 EQ. AUSILIARIE } \begin{cases} \circlearrowleft M_{Z(C)}^{①} = 0 & H_A \cancel{L} - V_A \cancel{L} + p\frac{\cancel{L}}{2} = 0 \\ \rightarrow R_x^{③} = 0 & p_{(K)} + H_G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - V_A = -\frac{1}{2}p & [42] \\ H_G = -p & [43] \end{cases}$$

SOSTITUENDO LA [43'] NELLA [44] SI HA $H_A = -p$; DA QUI USANDO LA [42'] SI TROVA $-p - V_A = -\frac{1}{2}p \Rightarrow V_A = -p + \frac{1}{2}p \Rightarrow V_A = -\frac{1}{2}p$; QUINDI PER LA [45] SI OTTIENE $-\frac{1}{2}p + V_G = p \Rightarrow V_G = \frac{3}{2}p$; INFINE DALLA [46] CON LE OPPORTUNE SOSTITUZIONI SI RICAVA: $M_G + [-p]L - 3[\frac{3}{2}p]L = -\frac{9}{2}pL \Rightarrow$

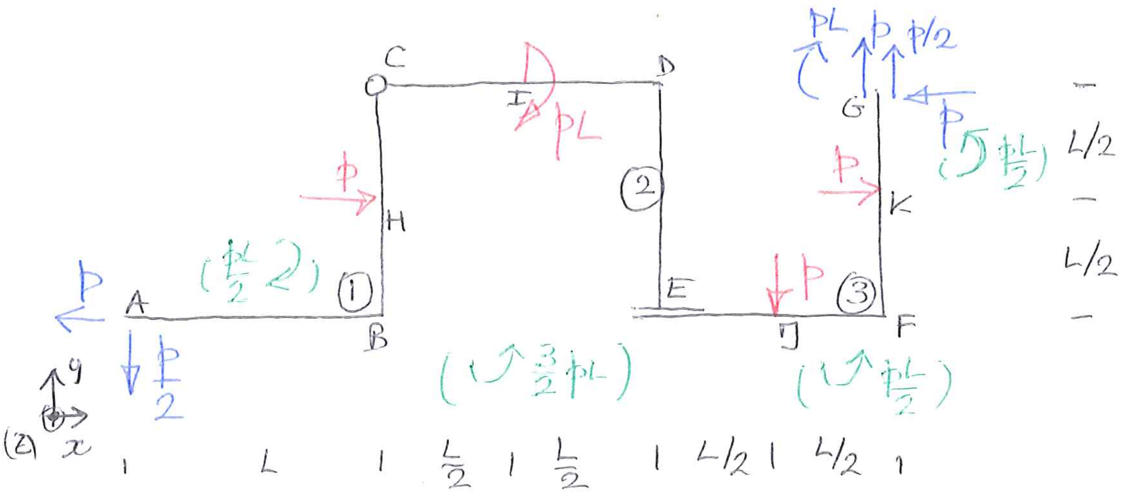
$$M_G - pL - \cancel{\frac{9}{2}pL} = -\cancel{\frac{9}{2}pL} \Rightarrow M_G = +pL$$

PERTANTO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO RISULTA:



SI VERIFICA AGEVOLMENTE IL BILANCIO GLOBALE DELLE FORZE AGENTI IN DIREZIONE x E IN DIREZIONE y; SI NOTI ANCHE CHE IL BILANCIO DELLE FORZE ORIZZONTALI (x) È SODDISFATTO ANCHE DALLE PARTI ① ∪ ② E ③.

PER VALUTARE GRAFICAMENTE IL BILANCIO DEI MOMENTI SI PUÒ SCOMPORRE LA REAZIONE V_G IN DUE PARTI (RISPETTIVAMENTE PARI A p E $p/2$) E CONSIDERARE IL MOMENTO DI OGNI COPPIA COSÌ OTTENUTA:



SOMMANDO NELL'ORDINE I MOMENTI: $-\frac{pL}{2} + [-pL] + [-pL] + \frac{pL}{2} + \frac{pL}{2} + \frac{3}{2}pL = 0$ E L'EQUILIBRIO GLOBALE È SODDISFATTO.

SI PUÒ ANCHE VEDERE CHE RISPETTO AL POLO Ⓒ LE AZIONI APPLICATE ALLA TRAVE ① DANNO MOMENTO NULLO; CON QUALCHE COMPLICAZIONE IN PIÙ SI VERIFICA CHE QUESTA CONDIZIONE È SODDISFATTA ANCHE PER IL SISTEMA ② ∪ ③.

NOTA: IL CASO DI STRUTTURE ARTICOLATE CON MOLTEPLICI ARTICOLAZIONI SEMPLICI E/O DOPPIE COSTITUISCE UNA FACILE GENERALIZZAZIONE DEI CASI FIN QUI CONSIDERATI.