

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (6 punti). *Un circolo di freccette ha 200 iscritti così suddivisi*

- 8 campioni;
- 72 buoni giocatori;
- 120 principianti.

Al lancio di una freccetta i campioni fanno centro con probabilità $p_C = 0.4$, i buoni giocatori con probabilità $p_B = 0.15$, e i principianti con probabilità $p_P = 0.05$. Si suppongano i tiri successivi di un giocatore indipendenti.

Un giorno al circolo si osserva un iscritto fare n lanci (con $n \in \mathbb{N}$ fissato).

- (a) *Detto X il numero di volte in cui l'iscritto fa centro, si determini la distribuzione di X .*
- (b) *Supponiamo $n = 2$. Se l'iscritto fa centro in entrambi i lanci, qual è la probabilità che sia un principiante?*

Soluzione. (a) *chiamiamo C , B , e P gli eventi “il giocatore è un campione”, “il giocatore è un buon giocatore”, e “il giocatore è un principiante”, rispettivamente. Ovviamente per $k \notin \{1, 2, \dots, n\}$ si ha $\mathbb{P}(X = k) = 0$, mentre per $k = 0, 1, \dots, n$ abbiamo*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\{X = k\} \cap C) + \mathbb{P}(\{X = k\} \cap B) + \mathbb{P}(\{X = k\} \cap P) \\ &= \mathbb{P}(X = k|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(X = k|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(X = k|P)\mathbb{P}(P).\end{aligned}$$

Inoltre si vede banalmente che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k|C) &= \binom{n}{k} p_C^k (1 - p_C)^{n-k}, \\ \mathbb{P}(X = k|B) &= \binom{n}{k} p_B^k (1 - p_B)^{n-k}, \\ \mathbb{P}(X = k|P) &= \binom{n}{k} p_P^k (1 - p_P)^{n-k}, \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{8}{200} = \frac{1}{25}, \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{72}{200} = \frac{9}{25}, \\ \mathbb{P}(P) &= \frac{120}{200} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Da cui otteniamo

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{25} \binom{n}{k} p_C^k (1 - p_C)^{n-k} + \frac{9}{25} \binom{n}{k} p_B^k (1 - p_B)^{n-k} + \frac{3}{5} \binom{n}{k} p_P^k (1 - p_P)^{n-k}.$$

(b) Vogliamo conoscere $\mathbb{P}(P|X = 2)$ con $n = 2$. Dalla formula di Bayes otteniamo

$$\mathbb{P}(P|X = 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2|P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(X = 2)}.$$

Sostituendo $n = 2$ e $k = 2$ nella formula sopra si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2|P) &= p_P^2 = 0.0025 \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{1}{25} p_C^2 + \frac{9}{25} p_B^2 + \frac{3}{5} p_P^2 = 0.016. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{P}(P|X = 2) = \frac{0.0025 \cdot 0.6}{0.016} \approx 0.094.$$

Esercizio 2 (8 punti). Anna ha davanti a sé due mazzi di carte: il primo è composto da 10 carte numerate da 1 a 10, il secondo contiene 30 carte numerate da 11 a 40. Anna lancia una moneta **non equilibrata** che dà testa con probabilità $q \in [0, 1]$. Se esce testa, pesca una carta dal primo mazzo, se esce croce, estrae una carta dal secondo mazzo. Sia Z il numero della carta pescata da Anna.

(a) Siano $B \sim B(1, q)$, $X \sim U(\{1, 2, \dots, 10\})$, e $Y \sim U(\{11, 12, \dots, 40\})$ tre variabili aleatorie indipendenti. Quale delle seguenti è vera?

$$Z = BX + (1 - B)Y \quad Z = (1 - B)X + BY \quad Z = B(X + Y).$$

(b) Si determini la densità di Z . Per quale valore di q la variabile Z è distribuita come un'uniforme su $\{1, \dots, 40\}$?

(c) Si calcoli $\mathbb{E}(Z)$ in funzione di q e si esprima $\text{Cov}(X, Z)$ in termini di $\text{Var}(X)$.

Soluzione. (a) L'uguaglianza corretta è

$$Z = BX + (1 - B)Y.$$

In quanto quando $B = 1$, cioè quando esce testa, Z prende il valore di X , mentre quando $B = 0$, cioè quando esce croce, Z prende il valore di Y .

(b) Ovviamente $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ se $k \notin \{1, 2, \dots, 40\}$. Sia $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$, allora

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, B = 1) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(B = 1) = \frac{q}{10},$$

dove abbiamo sfruttato l'indipendenza di X e B . Sia ora $k \in \{11, 12, \dots, 40\}$, allora

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k, B = 0) = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(B = 0) = \frac{1-q}{30},$$

dove abbiamo sfruttato l'indipendenza di Y e B . Riassumendo

$$\mathbb{P}(Z = k) \begin{cases} \frac{q}{10} & k = 1, 2, \dots, 10, \\ \frac{1-q}{30} & k = 11, 12, \dots, 40, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

per $q = \frac{1}{4}$ si ha $\frac{q}{10} = \frac{1-q}{30} = \frac{1}{40}$ e quindi Z è distribuita come un'uniforme su $\{1, \dots, 40\}$.

(c) Poiché Z è discreta abbiamo

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{10} k \frac{q}{10} + \sum_{k=11}^{40} k \frac{1-q}{30}.$$

Per definizione di covarianza abbiamo

$$\text{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z).$$

Dalla definizione di Z mostrata nel punto (a) abbiamo (sfruttando l'indipendenza delle variabili $X, Y, e B$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XZ) &= \mathbb{E}(X(BX + (1-B)Y)) \\ &= \mathbb{E}(BX^2) + \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XBY) \\ &= \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \\ \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(BX + (1-B)Y) \\ &= \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} \text{Cov}(XZ) &= \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &\quad - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(B)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(B)(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) \\ &= q \cdot \text{Var}(X). \end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti). Siano $\{Y'_n\}$, $\{Y''_n\}$, e $\{Y'''_n\}$ tre successioni indipendenti di variabili aleatorie i.i.d., tutte con distribuzione uniforme su $(-1, 1)$. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$X_n = Y'_n + Y''_n + Y'''_n.$$

(a) Si mostri che le variabili aleatorie X_n sono i.i.d. con $\mathbb{E}(X_n) = 0$ e $\text{Var}(X_n) = 1$.

Definiamo per ogni n

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_n = \frac{S_n^4}{n^2}.$$

[I prossimi punti si possono risolvere applicando opportunamente il teorema del limite centrale.]

(c) Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq b)$$

e se ne deduca che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \in [a, b]) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

(d) Si mostri che per $n \rightarrow \infty$ la successione T_n converge in legge verso una variabile aleatoria T .

(e) Si determini la distribuzione di T [5 punti extra].

Soluzione. (a) Le X_n sono i.i.d. perché lo sono $Y_n', Y_n'', e Y_n'''$. Dalla linearità del valore atteso e dall'indipendenza delle variabili $Y_n', Y_n'', e Y_n'''$ si ha

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y_n' + Y_n'' + Y_n''') = \mathbb{E}(Y_n') + \mathbb{E}(Y_n'') + \mathbb{E}(Y_n''') = 0,$$

$$\text{Var}(X_n) = \text{Var}(Y_n' + Y_n'' + Y_n''') = \text{Var}(Y_n') + \text{Var}(Y_n'') + \text{Var}(Y_n''') = 3 \left(\frac{2^2}{12} \right) = 1.$$

(b) Innanzi tutto osserviamo che, per ogni $b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathbb{P}(S_n \leq b) = \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=1}^n X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\text{Var}(X_1)}} \leq \frac{b}{\sqrt{n}} \right).$$

Sia $Z \sim N(0, 1)$, usando il teorema del limite centrale otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{j=1}^n X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\text{Var}(X_1)}} \leq \frac{b}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(Z \leq \frac{b}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq 0) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Siano ora $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo, poiché S_n è assolutamente continua, che

$$\mathbb{P}(S_n \in [a, b]) = \mathbb{P}(S_n \leq b) - \mathbb{P}(S_n \leq a),$$

da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \in [a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq b) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

(c) Consideriamo la funzione di ripartizione di T_n . Ovviamente $T_n \geq 0$ quasi certamente, allora $F_{T_n}(t) = 0$ per $t < 0$. Sia $t > 0$, allora

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= \mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n^4}{n^2} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \leq \sqrt[4]{t}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\sqrt[4]{t} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt[4]{t}\right). \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema del limite centrale come sopra si ha che per $t \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{T_n}(t) = \mathbb{P}(-\sqrt[4]{t} \leq Z \leq \sqrt[4]{t}) = \mathbb{P}(Z^4 \leq t) = F_{Z^4}(t).$$

Inoltre, poiché $Z^4 \geq 0$ quasi certamente si ha che $\mathbb{P}(Z^4 < 0) = 0$. Quindi si ha che, per ogni t vale $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{T_n}(t) = F_{Z^4}(t)$, da cui segue

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^4 =: T.$$

(d) Determiniamo la legge di Z^4 . Calcoliamone la funzione di ripartizione. Per $t < 0$ ovviamente $F_{Z^4}(t) = 0$, sia $t \geq 0$, allora

$$F_{Z^4}(t) = \mathbb{P}(Z^4 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt[4]{t} \leq Z \leq \sqrt[4]{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt[4]{t}}^{\sqrt[4]{t}} e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt[4]{t}} e^{-x^2/2} dx.$$

Differenziando per $t > 0$ otteniamo

$$f_{Z^4}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d(\sqrt[4]{t})}{dt} e^{-(\sqrt[4]{t})^2/2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\sqrt{t}/2}}{t^{3/4}}.$$

Ovviamente $f_{Z^4}(t) = 0$ per $t \leq 0$.

Esercizio 4 (8 punti). Siano X e Y variabili aleatorie con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-x} & 0 < x < y < x+1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è un'opportuna costante.

(a) Si mostri che $X \sim \text{Esp}(1)$ e si determini c .

(b) Si determini la densità di Y .

(c) Si calcoli $\mathbb{E}(e^{X-Y})$.

(d) Si determini la densità $Z = \log(X)$.

Soluzione. (a) Calcoliamo la densità di X . Per $x < 0$ abbiamo $f_X(x) = 0$, mentre per $x \geq 0$ abbiamo

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^{x+1} ce^{-x}dy = ce^{-x}.$$

Poiché f_X deve essere una densità si deve avere $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, quindi

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c \int_0^{\infty} e^{-x}dx = c.$$

Osserviamo quindi che $c = 1$ e che $X \sim \text{Esp}(1)$.

(b) Passiamo a Y . Similmente a prima $f_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$. Sia dunque $y > 0$, abbiamo

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^y e^{-x}dx = -e^{-x}|_{y-1}^y = -e^{-y} + e^{1-y} = e^{-y}(e - 1).$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{X-Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-y} f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_x^{x+1} e^{-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} (-e^{-y}|_x^{x+1}) dx \\ &= \int_0^{\infty} (-e^{-x-1} + e^{-x}) dx \\ &= (1 - e^{-1}) \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

(d) Calcoliamo prima la funzione di ripartizione di Z .

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\log(X) \leq t) + \mathbb{P}(X \leq e^t) = F_X(e^t) = 1 - e^{-e^t}.$$

Differenziando otteniamo

$$f_Z(z) = e^z e^{-e^z} = e^{z-e^z}.$$

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.
F. di rip.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$