SOLUZIONI ESAME SCRITTO 7 SETTEMBRE 2021

ESERCIZIO 1

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ g\ } M_2(\mathbb{R})$$

Troviamo $g \circ f$.

Innanzitutto notiamo che $B = \{\overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(1,0,0)}, \overset{v_3}{(0,2,1)}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché è un insieme di $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vettori linearmente indipendenti dato che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Trovo la matrice $M_{BB'}(f)$ associata ad f rispetto alla base B di $\mathbb{R}^3$ e $B' := \{(-1,0), (1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,1) = 0 \cdot (-1,0) + 1 \cdot (1,1) \\ f(1,0,0) &= (0,0) = 0 \cdot (-1,0) + 0 \cdot (1,1) \\ f(0,2,1) &= (2,0) = -2\,(-1,0) + 0 \cdot (1,1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo $B'' := \left\{ \underset{v''_1}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_2}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v''_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$

Quindi

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Esprimo $v = (1,2,0)$ come combinazione lineare della base B:

$$(1,2,0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$
$$= \lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (1,0,0) + \lambda_3 (0,2,1)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 , \lambda_1 + 2\lambda_3 , \lambda_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 1 - \lambda_1 = -1 \end{aligned}$$

Quindi $v = 2v_1 - v_2 + 0v_3$

Allora $(g \circ f)(v) = \lambda''_1 v''_1 + \lambda''_2 v''_2 + \lambda''_3 v''_3 + \lambda''_4 v''_4$

dove

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'' \\ \lambda_2'' \\ \lambda_3'' \\ \lambda_4'' \end{pmatrix} = M_{BB''}(g\circ f)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(1,2,0) = 0\cdot v_1'' + 2\cdot v_2'' + 0\cdot v_3'' + 2\cdot v_4''$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in \ker(g\circ f) \Leftrightarrow (g\circ f)(v) = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow M_{BB''}(g\circ f)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = 0\cdot v_1 + t\, v_2 + 0\cdot v_3 = t\,(1,0,0).$$

Quindi una base di $\ker(g\circ f)$ è $\{(1,0,0)\}$.

c) $\operatorname{Im}(g\circ f) = L\big((g\circ f)(v_1),\ (g\circ f)(v_2),\ (g\circ f)(v_3)\big)$

Ma

$$(g\circ f)(v_1) = 0\cdot v''_1 + 1\cdot v''_2 + 0\cdot v''_3 + 1\cdot v''_4$$
$$= v''_2 + v''_4$$

$$(g\circ f)(v_2) = 0$$

$$(g\circ f)(v_3) = -2\,v''_1 - 4\,v''_2 + 0\cdot v''_3 + 0\cdot v''_4$$
$$= -2v''_1 - 4v''_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(g\circ f) = L(v''_2 + v''_4,\ -2v''_1 - 4v''_2)$$
$$= L\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

lin. indip.

Una base è dunque data da $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 6x_1 + (k+2)x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + (k+1)x_3 + 6x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & k+1 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & k+1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & k+1 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & k \end{pmatrix} \underset{\text{I COL} \to \text{I} - \text{II}}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4-k & k+2 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & k+1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4-k & 1 & 2 \\ 6 & k+1 & 6 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \underset{\text{I RIGA} \to \text{I} - \text{III}}{=} -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 2-k \\ 6 & k+1 & 6 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{I COL} \to \text{I} - \text{III}}{=} -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-k \\ 0 & k+1 & 6 \\ 2-k & 1 & k \end{pmatrix} = -2 \cdot (2-k)^2 (k+1)$$

Quindi per $k \neq 2$ e $k \neq -1$ $\rho(A) = 4 = \rho(A|B)$ ed il sistema ammette un'unica soluzione $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ dove

$$x_1^0 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & k+2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & k+1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2\,(2-k)^2(1+k)} \cdot (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & k+1 & 6 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-k)^2(1+k)} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2-k & k+1 & 6 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(2-k)^2(1+k)} (k-2)(k-2) = \frac{1}{1+k}$$

$$x_2^0 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k+1 & 6 \\ 6 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{-2(2-k)^2(1+k)}\, 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & k+1 & 6 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(2-k)^2(1+k)} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & k-2 & 6 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} = \frac{-1}{(2-k)^2(1+k)} (k-2)(k-2) = \frac{-1}{1+k}$$

$$x_3^0 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & k-4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 1 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2(2-k)^2(1+k)}\, 2 \cdot \det \begin{pmatrix} k-4 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(2-k)^2(1+k)} \det \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ k-2 & 1 & k \end{pmatrix} = \frac{-1}{(2-k)^2(1+k)} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-k \\ 0 & 3 & 6 \\ k-2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{+3(2-k)^2}{(2-k)^2(1+k)} = \frac{1}{1+k}$$

4ª equazione

$$2x_4^0 = 1 - 6x_1^0 - (k+2)x_2^0 - x_3^0$$

$$= 1 - \frac{6}{1+k} + \frac{k+2}{1+k} - \frac{1}{1+k} = \frac{\cancel{1}+k-6+k+2-\cancel{1}}{1+k}$$

$$= \frac{2k-4}{1+k}$$

$$\Rightarrow x_4^0 = \frac{k-2}{1+k}$$

- Per $k=2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) \geq 2$ perché $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Si noti che tutti gli orlati che coinvolgono la 4ª colonna hanno det = 0 perché la 4ª colonna è proporzionale alla 3ª.

Gli unici orlati da considerare dunque sono quelli riguardanti la 1ª colonna:

$$\cdot\ \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\cdot\ \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $\rho(A) = 2$.

Riguardo $\rho(A|B)$, considero gli orlati che coinvolgono entrate della colonna B:

$$\cdot\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\cdot\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \rho(A|B) = 2 = \rho(A) \Rightarrow$ sistema compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_2 = -2t \\ 4x_2 + x_3 = -6t - 2s + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_4 = s \end{matrix}$$

da cui

$$x_2 = -t$$

$$x_3 = -6t - 2s + 1 - 4(-t)$$

$$= -2t - 2s + 1$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(t, -t, 1-2t-2s, s) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Per $k = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 3$$

Quanto a $A|B$ abbiamo che

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot\left(\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\right) = 2(9+0) = 18 \neq 0$$

$\Rightarrow \rho(A|B) = 4 \neq 3 = \rho(A) \Rightarrow$ il sistema è incompatibile

ESERCIZIO 3

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di V.

Trovo $M_{BB}(f) = A$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 - 2v_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = v_1 - v_2 - v_3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= +(1+\lambda)^2(1-\lambda)$$

Vi sono dunque due autovalori: -1 con $m_a = 2$

1 con $m_a = 1$

Trovo gli autospazi.

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(-1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = x_2 \\ -x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 = t \\ x_2 = -t \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow v = t v_1 - t v_2 + 0 \cdot v_3 = t(v_1 - v_2) \Leftrightarrow$$

$$V(1) = L(v_1 - v_2)$$

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(-1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -x_1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -x_2 \\ -x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = -2s \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow v = s v_1 + t v_2 - 2s v_3 = s(v_1 - 2v_3) + t v_2$$

$$\Leftrightarrow V(-1) = L(v_1 - 2v_3, v_2)$$

Quindi $m_a(-1) = m_g(-1)$ e $m_a(1) = m_g(1)$. f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori è

$$B = \{v_1 - v_2, v_1 - 2v_3, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$