Prova scritta di Analisi Matematica 2 27.02.2014 Soluzioni

1: Troviamo i punti stazionari:

$$f_x = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+1\right),$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}+1\right).$$

Essendo $1/x^2$, $1/y^2$ diversi da 0, $\nabla f = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+1\right) = 0 \\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}+1\right) = 0 \end{cases}$$

Se $1+\frac{1}{y} = 0$ abbiamo $y=-1$ e la seconda equazione diventa

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-1+\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{x^2}-1=0 \iff x^2=1,$$

da cui ricaviamo le soluzioni $(1,-1)$ e $(-1,-1)$.

Se $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+1=0$ abbiamo $\frac{1}{y} = -\frac{2}{x}-1$ e la seconda equazione diventa

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{3}{x}-1\right)=0, \quad \text{cioè} \quad x=-1 \text{ e } x=-3$$

da cui si trovano le soluzioni $(-1,1)$ e $(-3,-3)$.

Le derivate seconde valgono

$$f_{xx}=\frac{2}{x^3}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+1\right);$$

$$f_{xy}=\frac{2}{x^2y^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\right);$$

$$f_{yy}=\frac{2}{y^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{y}+\frac{1}{x}+1\right).$$

Con le quali calcoliamo la matrice Hessiana nei punti stazionari.

$H_f(1,-1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, essendo $\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}<0$ $(1,-1)$ è un punto di sella;

$H_f(-1,-1)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, essendo $\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}<0$ $(-1,1)$ è un punto di sella;

$H_f(-1,1)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, essendo $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}<0$ $(-1,1)$ è un punto di sella;

$H_f(-3,-3)=\frac{2}{3^5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, essendo $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}>0$ e $2>0$ $(-3,-3)$ è un punto di minimo relativo (o locale).

Prova scritta di AnMat2 27. 02. 2014 Soluzioni 3

2: La curva è un' iperbole.

È quindi evidente (per esempio applicando il teorema di Weierstrass al compatto ottenuto intersecando l'iperbole con un disco chiuso centrato nell'origine e abbastanza grande) che esistono punti dell'iperbole con minima distanza dall'origine.

Questi ultimi sono esattamente i punti di minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$ ristretta all'iperbole (o equivalentemente all'intersezione di cui sopra).

Facendo uso del metodo dei moltiplicatori di Lagrange si tratta di studiare i punti stazionari vincolati di $f = x^2+y^2$ ristretta al vincolo $g = \sqrt{5}\, x^2 + 2xy - 1 = 0$. Essendo

$$\nabla g = (2\sqrt{5}\, x + 2y,\ 2x) = 0 \iff x = y = 0,$$

il metodo è applicabile in tutti i punti del vincolo.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\sqrt{5}\, x^2 + 2xy - 1\right),$$

Prova scritta di AnMat 2 27.02.2014 Soluzioni 4

$L_x = 2x - \lambda(2\sqrt{5}\,x + 2y)$;

$L_y = 2y - \lambda(2x)$;

$L_\lambda = -(\sqrt{5}\,x^2 + 2xy - 1)$;

da cui

$$\begin{cases} x(1 - \lambda\sqrt{5}) - \lambda y = 0 \\ y = \lambda x \\ \sqrt{5}\,x^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

eliminando la y,

$$\begin{cases} x(1 - \lambda\sqrt{5} - \lambda^2) = 0 \\ x^2(\sqrt{5} + 2\lambda) = 1 \end{cases}$$

e osservando che $x \neq 0$, si trova la seguente equazione per λ.

$$\lambda^2 + \lambda\sqrt{5} - 1 = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda = \dfrac{-\sqrt{5} \pm 3}{2}$. Dalla seconda equazione segue che l'unica accettabile è $\lambda = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e che $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tornando al sistema iniziale si trovano quindi i due punti stazionari vincolati

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{3}}\right).$$

La loro distanza dall'origine è la stessa, quindi si tratta dei punti di minima distanza. Quest'ultima vale

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

3: L'integrale si può calcolare mediante tre integrazioni successive rispetto ad un'unica variabile. Si noti che D è semplice rispetto all'asse z.

$$\iiint_D \cos x \cos z \, e^{y+\sin x} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy \int_{1-e^y}^{e^y-1} \cos x \cos z \, e^{y+\sin x} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} dx \int_0^{\sin x} e^y dy \int_{1-e^y}^{e^y-1} \cos z \, dz$$

Prova scritta di AnMat2 27.02.2014 Soluzioni (6)

$$= \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} \, dx \int_0^{\sin x} 2 e^y \sin(e^y - 1) \, dy$$

$$= -2 \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} \cos(e^y - 1) \Big|_0^{\sin x} dx$$

$$= -2 \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} \left(\cos(e^{\sin x} - 1) - 1 \right) dx$$

$$= -2 \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} \cos(e^{\sin x} - 1) \, dx$$

$$+ 2 \int_0^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} dx$$

$$= -2 \sin(e^{\sin x} - 1) \Big|_0^{\pi} + 2 e^{\sin x} \Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 .$$

Nota. Si trova lo stesso risultato osservando che D è invariante rispetto alla trasformazione affine:
$$\begin{cases} u = \pi - x \\ v = y \\ w = z . \end{cases}$$

4: a) $\bar{r}'(\theta) = 4(-\sin\theta + \sin 4\theta,\ \cos\theta - \cos 4\theta)$

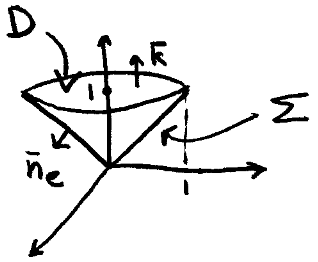
$$\|\bar{r}'(\theta)\| = 4\sqrt{2(1-\cos 4\theta\cos\theta - \sin 4\theta \sin\theta)}$$
$$= 4\sqrt{2}\,(1-\cos 3\theta)^{1/2},$$

dunque la parametrizzazione è regolare per $\theta \neq 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$.

$$\bar{T}(\theta) = \frac{(-\sin\theta + \sin 4\theta,\ \cos\theta - \cos 4\theta)}{\sqrt{2}\,(1-\cos 3\theta)^{1/2}}$$

b) $$\int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \|\bar{r}'(\theta)\|\, d\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 3\theta)^{1/2}\, d\theta.$$

5: Sia $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1, \ z=1\}$ la base del cono orientata dal versore $\overline{k}$.



Essendo $\partial C^+ = \Sigma \cup D$, mediante il teorema della divergenza applicato a C abbiamo

$$\iint_{\Sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}_e \, d\sigma = \oiint_{\partial C^+} \overline{F}\cdot\overline{n}_e \, d\sigma - \iint_D \overline{F}\cdot\overline{k}\, d\sigma$$

$$= \iiint_C \operatorname{div}\overline{F}\, dx\,dy\,dz - \iint_D z \, d\sigma$$

$$= 2\iiint_C dx\,dy\,dz - \iint_D d\sigma .$$

I due integrali si calcolano facilmente (in realtà sono immediati in quanto rappresentano il volume del cono e l'area del disco).

$$\iiint_C dx\,dy\,dz = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} (1-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\rho)\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

$\iint_D d\sigma = \pi$, per cui il flusso richiesto

vale $\frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{\pi}{3}$.