

Forme differenziali lineari in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3

In questa nota introdurremo le nozioni di base sulle forme differenziali lineari. Tranne alcune parti iniziali la trattazione si svolgerà in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 , tuttavia è importante notare che i risultati che vedremo sono suscettibili di generalizzazioni in \mathbb{R}^n .

1 Richiami sullo spazio duale di \mathbb{R}^n

Richiamiamo brevemente la definizione di spazio vettoriale duale di \mathbb{R}^n (per i dettagli vedere il corso di Geometria 1). Lo spazio duale di \mathbb{R}^n , indicato con $(\mathbb{R}^n)^*$, è l'insieme di tutte le forme lineari ℓ definite in \mathbb{R}^n , cioè

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\ell \mid \ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ è una forma lineare}\}.$$

Ricordiamo che nell'insieme $(\mathbb{R}^n)^*$ si definiscono le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare che rendono $(\mathbb{R}^n)^*$ uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n .

Indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare in \mathbb{R}^n :

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i h_i \quad \forall \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n), \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n).$$

Mediante il prodotto scalare si definisce un'applicazione φ da \mathbb{R}^n a $(\mathbb{R}^n)^*$ secondo la seguente regola: ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si associa la forma lineare ottenuta tenendo fisso e uguale \mathbf{v} il primo argomento e considerando il secondo come l'argomento della forma. Il fatto che si tratti effettivamente di una forma lineare segue dalle proprietà del prodotto scalare. In simboli si può riassumere come:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ \mathbf{v} &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{h} &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle. \end{aligned}$$

Sempre dalle proprietà del prodotto scalare si dimostra che l'applicazione φ è lineare e biunivoca, di conseguenza si tratta di un *isomorfismo* di spazi vettoriali tra \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$. Grazie a questo isomorfismo possiamo introdurre una base nello spazio duale definendola come l'immagine dell'usuale base canonica di \mathbb{R}^n . Essendo principalmente interessati alle dimensioni 2 e

3, introduciamo le notazioni solo in questi due casi, il caso generale non presenta differenze qualitative. Associamo alla base canonica \mathbf{i}, \mathbf{j} di \mathbb{R}^2 la base $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$ in $(\mathbb{R}^2)^*$. Esplicitamente, le forme lineari $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$ agiscono sui vettori di \mathbb{R}^2 come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}^*(\mathbf{h}) &= \langle \mathbf{i}, \mathbf{h} \rangle = h_1 \\ \mathbf{j}^*(\mathbf{h}) &= \langle \mathbf{j}, \mathbf{h} \rangle = h_2\end{aligned}\quad \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2).$$

In modo analogo introduciamo la base $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$ in $(\mathbb{R}^3)^*$. Nel seguito quando si parlerà di base nello spazio duale si intenderà sempre la base appena definita.

2 Le forme differenziali lineari

2.1 Definizione di forma differenziale lineare

Definizione 1 (Forma differenziale lineare). Sia dato un insieme aperto A in \mathbb{R}^n , si dice *forma differenziale lineare* in A un'applicazione ω che associa ad ogni elemento \mathbf{x} dell'insieme A un elemento $\omega(\mathbf{x})$ dello spazio $(\mathbb{R}^n)^*$, in simboli:

$$\begin{aligned}\omega : A &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ \mathbf{x} &\longmapsto \omega(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\mathbf{h} \longmapsto \omega(\mathbf{x})(\mathbf{h}).\end{aligned}$$

Spesso, per brevità e quando non sono possibili interpretazioni ambigue, una forma differenziale lineare è chiamata più semplicemente "forma differenziale" o anche solamente "forma".

Si può pensare ad una forma differenziale lineare come una sorta di campo vettoriale che associa ad ogni punto \mathbf{x} dell'insieme A un vettore che non è geometrico ma che invece appartiene allo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n)^*$.

2.2 I coefficienti della forma differenziale

L'analogia con un campo vettoriale diventa più evidente fissando una base in $(\mathbb{R}^n)^*$ ed esprimendo i suoi elementi in componenti. Vediamo i dettagli in due variabili, sia fissata in $(\mathbb{R}^2)^*$ la base $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$. Data una forma differenziale ω definita in un aperto A di \mathbb{R}^2 , sia $(x, y) \in A$ fissato. Per definizione $\omega(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^*$. Indichiamo con $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ le componenti di $\omega(x, y)$ rispetto alla base $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$, in altre parole $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono gli unici due numeri tali che

$$\omega(x, y) = P(x, y)\mathbf{i}^* + Q(x, y)\mathbf{j}^*.$$

Facendo ora variare (x, y) in A anche $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ in generale varieranno. In questo modo rimangono univocamente definite due funzioni reali $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ nell'insieme A , queste funzioni sono chiamate *coefficienti o componenti della forma differenziale* ω . In termini dei suoi coefficienti, l'azione di ω si esprime come segue: per ogni $(x, y) \in A$ e ogni $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\omega(x, y)(h_1, h_2) = P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2. \quad (1)$$

Analogamente, una forma differenziale ω definita in un aperto A di \mathbb{R}^3 si può scrivere in modo unico come

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i}^* + Q(x, y, z)\mathbf{j}^* + R(x, y, z)\mathbf{k}^*$$

e i suoi coefficienti sono le funzioni $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ aventi come dominio l'insieme A .

Si procede esattamente nello stesso modo nelle dimensioni superiori ma, non essendo qui interessati, non introdurremo le relative notazioni.

Definizione 2. Una forma differenziale lineare si dice continua, di classe C^1 , di classe C^2 , ecc. nell'insieme aperto A se le sue funzioni coefficienti sono rispettivamente continue, di classe C^1 , di classe C^2 , ecc. in A .

Esempio 1. Le forme differenziali lineari $\omega(x, y) = (2x + y)\mathbf{i}^* + y^2\mathbf{j}^*$ e $\omega(x, y, z) = e^z\mathbf{i}^* + \cos(x - z + y)\mathbf{j}^* + \mathbf{k}^*$ sono di classe C^∞ rispettivamente in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 .

2.3 Il legame con il differenziale di una funzione

L'esempio più importante di forma differenziale lineare è il differenziale di una funzione. Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile definita in un aperto A di \mathbb{R}^2 , determiniamo coefficienti $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ della forma differenziale $\omega = df$. Dalla definizione di differenziale e dalla (1) ricaviamo

$$P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2 = f_x(x, y)h_1 + f_y(x, y)h_2 \quad \forall (x, y) \in A, \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,$$

quindi, per l'arbitrarietà di h_1 e h_2 , segue che

$$P(x, y) = f_x(x, y) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = f_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in A,$$

cioè

$$df(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i}^* + f_y(x, y)\mathbf{j}^*. \quad (2)$$

Ora, la (2) è valida per ogni funzione differenziabile, prendendo $f(x, y) = x$ si ricava

$$dx(x, y) = \mathbf{i}^*,$$

cioè il differenziale della funzione proiezione sulla prima componente valutato in qualunque punto (x, y) di \mathbb{R}^2 coincide con \mathbf{i}^* . Per comodità di notazione si lascia cadere l'indicazione del punto (x, y) e si scrive semplicemente dx al posto di $dx(x, y)$. Allo stesso modo, scegliendo $f(x, y) = y$, si trova che $dy(x, y) = \mathbf{j}^*$. In definitiva, la coppia di differenziali dx, dy coincide, valutata in ogni punto di \mathbb{R}^2 , con la base di forme lineari $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$. Di conseguenza, una qualunque forma differenziale ω con coefficienti $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ può essere scritta (e viene universalmente scritta) come

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

o, in forma più compatta,

$$\omega = Pdx + Qdy,$$

mentre il differenziale di una funzione $f(x, y)$ è comunemente denotato come

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

In più variabili tutto procede esattamente allo stesso modo. In particolare in 3 variabili una generica forma ω si scrive come

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

e il differenziale di $f(x, y, z)$ ha la forma

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz.$$

Consideriamo infine il caso unidimensionale. Una forma differenziale lineare $\omega(x)$ in una variabile possiede una sola funzione coefficiente $P(x)$ e si scrive come

$$\omega = Pdx,$$

il differenziale di $f(x)$ ha l'aspetto già noto

$$df = f' dx.$$

Esempio 2. Esempi di forme differenziali in 2 e in 3 variabili:

$$\omega = 2x dx + 4 dy, \quad \omega = \sin(zx) dx + x^2 dy - (x + y) dz.$$

Esempi di differenziali:

$$f(x, y) = 2e^{y^2}, \quad df = 4ye^{y^2} dy,$$

$$g(x, y, z) = \ln(x - y + z), \quad dg = \frac{dx}{x - y + z} - \frac{dy}{x - y + z} + \frac{dz}{x - y + z}.$$

2.4 Corrispondenza tra campi vettoriali e forme differenziali lineari

Grazie all'isomorfismo di spazi vettoriali tra \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$ indotto dal prodotto scalare in \mathbb{R}^n (e descritto nel primo paragrafo) è immediato costruire una corrispondenza biunivoca tra tutti i campi vettoriali definiti in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n e tutte le forme differenziali lineari definite nel medesimo sottoinsieme. L'idea è sostanzialmente la stessa vista nel paragrafo 1: ad ogni campo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ associamo la forma differenziale $\omega = \omega(\mathbf{x})$ definita da

$$\omega(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

In termini di componenti del campo e di coefficienti della forma differenziale questa corrispondenza è molto semplice: le componenti del campo diventano i coefficienti della forma differenziale. Ad esempio, in due variabili, al campo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ corrisponde la forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$.

Esempio 3.

$$\begin{aligned} (2x - y)\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} &\longmapsto (2x - y) dx + \cos(xy) dy, \\ (x^2 - yz)\mathbf{k} &\longmapsto (x^2 - yz) dz. \end{aligned}$$

Osservazione 1. In particolare, questa corrispondenza associa al campo vettoriale determinato dal gradiente ∇f di una funzione differenziabile il differenziale df della funzione stessa.

Nel seguito, se non diversamente specificato, assumeremo che i campi vettoriali e le forme differenziali lineari considerati siano definiti in un sottoinsieme *aperto connesso* A di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 e almeno di classe C^1 in A .

3 Il lavoro di un campo vettoriale

In questo paragrafo indicheremo il prodotto scalare tra due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 mediante la notazione $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ usata in Fisica.

Definizione 3. Sia A un sottoinsieme aperto e connesso di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 . Dato un campo vettoriale \mathbf{F} di classe C^1 in A e una curva γ regolare a tratti, orientata, contenuta in A e parametrizzata da $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, si dice *lavoro del campo \mathbf{F} lungo la curva γ* la quantità L definita da:

$$L = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (3)$$

Osservazione 2. La parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ deve essere tale da indurre su γ l'orientazione assegnata.

Osservazione 3. Si noti che, in base alle ipotesi fatte, la funzione integranda nell'integrale (3) è limitata e continua tranne al più un numero finito di punti, di conseguenza è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Osservazione 4. L'integrale (3) è chiamato anche *integrale di linea del campo \mathbf{F} lungo la curva γ* e più generalmente *integrale curvilineo di seconda specie*.

Osservazione 5. Si dimostra (vedere la proposizione 1 più avanti) che il valore dell'integrale (3) non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata γ (cioè il suo valore non cambia se si sostituisce la parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ con un'altra che però orienti γ con lo stesso verso di percorrenza).

L'integrale (3) si può scrivere in modo più significativo in termini di un integrale curvilineo di prima specie. Infatti, ricordando il versore \mathbf{T} tangente a γ e le relazioni $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ e $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ abbiamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

e di conseguenza

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds. \quad (4)$$

Osservazione 6. Si noti come, naturalmente, nella (4) non compare esplicitamente alcuna parametrizzazione di γ , mentre rimane l'informazione sulla sua orientazione rappresentata dalla presenza del versore tangente \mathbf{T} .

Proposizione 1. *L'integrale definito in (3) non cambia al variare della parametrizzazione della curva orientata γ tra le parametrizzazioni che inducono sulla curva l'orientazione assegnata.*

Dimostrazione. Dato che l'integrale (3) si può scrivere nella forma (4) possiamo ragionare su quest'ultimo. L'integrale (4) è un integrale curvilineo di prima specie con funzione integranda $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, di conseguenza la parametrizzazione di γ può influenzare l'integrale (4) solo modificando, eventualmente, la funzione integranda. Poichè qualunque parametrizzazione che orienta γ correttamente produce lo stesso versore tangente \mathbf{T} e dunque la stessa funzione integranda il valore dell'integrale non dipende dalla scelta della parametrizzazione. \square

Sempre dalla (4) è pressochè immediato dimostrare la seguente fondamentale proprietà

Proposizione 2. *Invertendo l'orientazione della curva γ il lavoro del campo cambia segno, cioè:*

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Esempio 4. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x - \cos z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ lungo il tratto di elica γ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t. \end{cases}, t \in [-2\pi, 2\pi]$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} (\sin t \mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}) dt \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 2\pi. \end{aligned}$$

4 L'integrale di una forma differenziale lineare

Definizione 4. Sia A un sottoinsieme aperto e connesso di \mathbb{R}^2 . Data una forma differenziale lineare $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ di classe C^1 in A e una curva γ regolare a tratti, orientata, contenuta in A e parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$, si dice *integrale della forma ω lungo la curva γ* la quantità definita dall'integrale

$$\int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \quad (5)$$

e indicata con

$$\int_{\gamma} \omega. \quad (6)$$

Osservazione 7. Se \mathbf{F} è il campo associato ad ω , cioè $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, allora è semplice verificare che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Per questo motivo anche l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ viene chiamato integrale curvilineo di seconda specie ed inoltre seguono immediatamente le proprietà analoghe a quelle viste per l'integrale di linea di un campo:

1. $\int_{\gamma} \omega$ non cambia al variare della parametrizzazione purchè questa rispetti l'orientazione fissata sulla curva γ ;
2. Al cambiare dell'orientazione di γ l'integrale di una forma cambia segno, in simboli:

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega. \quad (7)$$

Osservazione 8. L'espressione (5) che definisce $\int_{\gamma} \omega$ si può ricordare facilmente usando le relazioni formali $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$.

Osservazione 9. In modo del tutto analogo si definisce l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \omega$ per una forma differenziale in 3 variabili e una curva nello spazio \mathbb{R}^3 (e, più in generale, in \mathbb{R}^n). Inoltre continua a valere l'osservazione 7.

Osservazione 10. Per gli integrali di linea si usano a volte alcuni simboli speciali. Quando γ è una curva chiusa l'integrale (6) si può indicare con $\oint_{\gamma} \omega$ (l'integrale lungo una curva chiusa è detto anche *circuitazione* di ω), quando γ è chiusa e contenuta in \mathbb{R}^2 si possono usare i simboli $\oint_{\gamma} \omega$ nel caso in cui γ sia orientata in senso antiorario e $\oint_{\gamma} \omega$ nel caso orario. Convenzioni analoghe si possono utilizzare per l'integrale di linea di un campo $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.

Proposizione 3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\int_{\gamma} \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2$
dove γ è regolare a tratti, ω_1 e ω_2 sono forme di classe C^1 e α e β sono numeri reali;
2. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$
dove γ_1 e γ_2 sono regolari a tratti e consecutive (cioè il secondo estremo di γ_1 coincide con il primo di γ_2) e ω è di classe C^1 .

Dimostrazione. Seguono dalla definizione di integrale di una forma differenziale e dalle proprietà analoghe dell'integrale di Riemann in una variabile. \square

Esempio 5. Integrare la forma differenziale in due variabili $\omega = -y dx + x dy$ lungo le curve elencate:

- a) la semicirconferenza γ_1 centrata nell'origine e di raggio 1 contenuta nel semipiano chiuso superiore e orientata in senso antiorario;
- b) $-\gamma_1$, dove con $-\gamma_1$ si intende ancora la curva γ_1 ma con l'orientazione opposta;
- c) la circonferenza γ_2 centrata nell'origine e di raggio 1 orientata in senso antiorario;
- d) il segmento γ_3 che unisce nell'ordine il punto $(1, 0)$ al punto $(-1, 0)$.

Soluzione.

- a) La semicirconferenza γ_1 si può parametrizzare tramite le equazioni

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi],$$

da cui si ricava $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ e quindi

$$\int_{\gamma_1} -y dx + x dy = \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \pi;$$

- b) dalla (7) segue che

$$\int_{-\gamma_1} -y dx + x dy = - \int_{\gamma_1} -y dx + x dy = -\pi;$$

- c) la circonferenza γ_2 si può parametrizzare con le stesse equazioni usate per γ_1 ma questa volta $t \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_{\gamma_2} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi;$$

- d) il segmento γ_3 si può parametrizzare come segue

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [-1, 1],$$

da cui $dx = -dt$, $dy = 0$ e

$$\int_{\gamma_3} -y dx + x dy = \int_{-1}^1 (0 \cdot (-1) + (-t) \cdot 0) dt = 0.$$

Osservazione 11. In generale, se $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$ parametrizza γ allora $\mathbf{r}_1(t) := \mathbf{r}(-t)$ con $t \in [-b, -a]$ parametrizza $-\gamma$, cioè γ ma con l'orientazione opposta.

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a)

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} (2xy + z^3) dx + (x^2 + 2yz) dy + (y^2 + 3xz^2 - 1) dz,$$

dove γ_1 è il segmento che unisce nell'ordine $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, γ_2 è il segmento che unisce (nell'ordine) $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ e γ_3 è quello che unisce (sempre nell'ordine) $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$;

b)

$$\oint_{\gamma} -y dx + x dy,$$

con γ uguale all'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b > 0$;

c)

$$\int_{\gamma} \frac{z dx}{x+1} + \frac{x dy}{y+1} - x dz$$

dove γ è il segmento che parte dall'origine e arriva al punto $(1, 1, 1)$;

d)

$$\int_{\gamma} y^2 dx - xe^y dy$$

con γ uguale al grafico della funzione $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ orientato da sinistra verso destra.

5 Forme differenziali lineari esatte

Definizione 5 (Forma differenziale lineare esatta). Sia A un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 e ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A . La forma ω si dice *esatta* in A se esiste una funzione U a valori reali di classe C^2 in A tale che

$$\omega = dU. \quad (8)$$

La funzione U è detta *primitiva* di ω .

Osservazione 12. Una primitiva U (quando esiste) non è unica, tuttavia è definita a meno di una costante additiva (questa è una semplice conseguenza della connessione di A).

Osservazione 13. La nozione di esattezza si può immediatamente estendere anche al caso in cui la forma è definita in un aperto non connesso, tuttavia non è più vero che le primitive differiscono soltanto per una costante additiva. In questa nota non ci occuperemo di questo caso.

Osservazione 14. Se \mathbf{F} è il campo vettoriale associato a ω , cioè il campo le cui componenti nella base canonica coincidono con i coefficienti di ω , la condizione (8) equivale a richiedere

$$\mathbf{F} = \nabla U.$$

In tal caso si dice che il campo \mathbf{F} è *conservativo* e la funzione U è chiamata *funzione potenziale* (è opportuno notare che in Fisica il termine “potenziale” indica $-U$).

Osservazione 15. Per definizione, il differenziale di qualunque funzione f di classe C^2 è una forma differenziale esatta e f è una sua primitiva.

Teorema 1. *Sia data $\omega \in C^1(A)$ con A aperto connesso in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 , allora la seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. ω è esatta in A ;
2. per ogni coppia γ_1, γ_2 di curve regolari a tratti, contenute in A e aventi i medesimi punti iniziali e finali si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad (\text{indipendenza dal percorso});$$

3. per ogni curva γ regolare a tratti, contenuta in A e chiusa risulta

$$\oint_{\gamma} \omega = 0 \quad (\text{circuitazione nulla}).$$

Dimostrazione. Per semplicità dimostriamo il teorema nel caso di una forma $\omega = P dx + Q dy$ in \mathbb{R}^2 , nel caso tridimensionale il ragionamento è identico.

1. \Rightarrow 2. Per ipotesi esiste una primitiva $U(x, y)$ di classe C^2 in A , cioè una funzione per la quale si ha $P dx + Q dy = U_x dx + U_y dy$ o equivalentemente $P = U_x$ e $Q = U_y$. Sia ora γ una qualunque curva regolare a tratti contenuta in A e sia parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$;

$\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$ sono, rispettivamente, il punto iniziale e il punto finale di γ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_a^b (U_x(x(t), y(t))x'(t) + U_y(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) \right) dt = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)),\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della regola della catena e del teorema fondamentale del calcolo integrale. In conclusione l'integrale di ω lungo γ dipende soltanto dal punto iniziale e da quello finale della curva e non dal percorso compiuto da quest'ultima, ciò equivale all'affermazione 2.

2. \Rightarrow 1. Costruiamo una primitiva di ω . Fissiamo a piacere un punto (x_0, y_0) di A . Poichè A è un aperto connesso, per ogni suo punto (x, y) esiste almeno una curva regolare a tratti che unisce (x_0, y_0) a (x, y) (tralasciamo la dimostrazione di questa proprietà). Definiamo

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è una qualunque curva regolare a tratti contenuta in A che parte da (x_0, y_0) e arriva a (x, y) , grazie all'ipotesi 2 questa definizione è ben posta.

Iniziamo col provare che la funzione U così definita possiede le derivate parziali prime in ogni punto $(x_1, y_1) \in A$, mostriamo i dettagli solo per $U_x(x_1, y_1)$ in quanto con $U_y(x_1, y_1)$ si ragiona in maniera identica. Si tratta dunque dimostrare che esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1 + h, y_1) - U(x_1, y_1)}{h}. \quad (9)$$

Sia γ_1 una curva che parte da (x_0, y_0) e arriva a (x_1, y_1) e sia γ_2 il segmento orizzontale che unisce, nell'ordine, (x_1, y_1) a $(x_1 + h, y_1)$ (per $|h|$ sufficientemente piccolo siamo certi che $(x_1 + h, y_1)$ appartiene ad A). Allora abbiamo

$$U(x_1, y_1) = \int_{\gamma_1} \omega, \quad U(x_1 + h, y_1) = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = U(x_1, y_1) + \int_{\gamma_2} \omega$$

(nell'ultimo passaggio è stata usata la proprietà di additività degli integrali curvilinei rispetto all'insieme di integrazione). Così il rapporto

incrementale in (9) diventa

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_2} \omega. \quad (10)$$

Sviluppiamo l'integrale $\int_{\gamma_2} \omega$ parametrizzando il segmento γ_2 come segue

$$\begin{cases} x = x_1 + th \\ y = y_1 \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$

Troviamo

$$\int_{\gamma_2} \omega = h \int_0^1 P(x_1 + th, y_1) dt$$

e la (10) diventa

$$\int_0^1 P(x_1 + th, y_1) dt.$$

Sfruttando ora il teorema della media integrale possiamo affermare l'esistenza di un numero $t_h \in [0, 1]$ tale che

$$\int_0^1 P(x_1 + th, y_1) dt = P(x_1 + t_h h, y_1).$$

Infine, in virtù della continuità di $P(x, y)$, concludiamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x_1 + h, y_1) - U(x_1, y_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} P(x_1 + t_h h, y_1) = P(x_1, y_1),$$

cioè

$$U_x(x_1, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Essendo (x_1, y_1) un punto arbitrario di A ciò implica che $U_x = P$ in A . In modo totalmente analogo si può dimostrare che $U_y = Q$ in A . Allora U è differenziabile in A e $dU = \omega$, cioè abbiamo provato l'affermazione 1.

2. \Rightarrow 3. Sia γ una curva regolare a tratti contenuta in A e chiusa. La curva γ può essere pensata come ottenuta unendo due curve consecutive $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (queste due curve si possono costruire a partire da una parametrizzazione di γ semplicemente pensando il dominio della parametrizzazione come unione di due intervalli consecutivi e restringendo a questi intervalli la parametrizzazione di γ .) Poichè γ è chiusa, le curve γ_1 e γ_2 hanno i punti iniziali e finali scambiati, ma questo è come dire che γ_1 e $-\gamma_2$ hanno gli stessi punti iniziali e finali. Allora per ipotesi abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-\gamma_2} \omega$$

e dunque

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{-\gamma_2} \omega = 0,$$

che dimostra il punto 3.

3. \Rightarrow 2. Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari a tratti contenute in A e aventi i medesimi punti iniziali e finali. Consideriamo la curva $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, cioè l'unione della curva γ_1 e della curva $-\gamma_2$ (per vedere come costruire una parametrizzazione di γ a partire da quelle di γ_1 e γ_2 si rimanda al PS2, pag. 49 / 42). La curva γ è chiusa e quindi, per ipotesi

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Ma allora

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma_2} \omega = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega = \oint_{\gamma} \omega = 0,$$

il che prova il punto 2.

Ovviamente, queste quattro implicazioni dimostrano il teorema. \square

Esempio 6. La forma differenziale $\omega = -y dx + x dy$, vista nell'esempio 5, non è esatta poichè abbiamo trovato che

$$\oint_{\gamma_2} -y dx + x dy = 2\pi,$$

dove γ_2 è la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Osservazione 16. La dimostrazione del teorema precedente contiene un metodo che, in certi casi, è effettivamente utilizzabile per il calcolo di una primitiva di una forma differenziale esatta. Secondo la dimostrazione, se è noto che la forma ω è esatta in un aperto connesso A , si può costruire una sua primitiva scegliendo un punto (x_0, y_0) in A e definendo $U(x, y)$ come

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \omega \tag{11}$$

dove γ è una qualunque curva regolare a tratti contenuta in A che unisce (x_0, y_0) a (x, y) . La concreta applicabilità di questo metodo dipende ovviamente dalla possibilità di calcolare esplicitamente l'integrale (11). A questo scopo, si tratta di fare una scelta oculata della curva γ . Nell'ultimo paragrafo di questa nota vedremo due esempi tipici di applicazione di questo metodo.

Definizione 6 (Forma differenziale lineare chiusa). Sia A un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 e ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A . La forma differenziale ω si dice *chiusa* in A se

$$P_y = Q_x \quad (12)$$

nel caso in cui $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\omega = P dx + Q dy$, oppure se

$$P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y \quad (13)$$

quando invece $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\omega = P dx + Q dy + R dz$.

Osservazione 17. Nel caso dei campi vettoriali la nozione corrispondente è quella di campo vettoriale *irrotazionale*. Il campo vettoriale $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ nel piano oppure $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ nello spazio si dice *irrotazionale* se valgono rispettivamente la (12) o le (13).

Definizione 7. Dato un campo vettoriale $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ derivabile in un aperto, si definisce *rotore* di \mathbf{F} e lo si indica con $\text{rot } \mathbf{F}$ o con $\text{curl } \mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

Osservazione 18. Si osservi che un campo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ è irrotazionale se e solo se $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

Proposizione 4. Sia A un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 e ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A . Se ω è esatta allora è anche chiusa.

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del Teorema di Schwarz. \square

Esempio 7. La forma $\omega = -y dx + x dy$ non è chiusa dato che $\partial/\partial y(-y) \neq \partial/\partial x(x)$ e di conseguenza (come già visto in modo diverso nell'esempio 6) non è neanche esatta.

Osservazione 19. L'implicazione enunciata dal teorema non è invertibile, cioè una forma differenziale lineare può essere chiusa e non esatta. L'esempio più noto a questo proposito è

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

La forma ω è chiusa ma non è esatta in quanto il suo integrale lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine non è uguale a zero (come esercizio, verificare questi due fatti).

La condizione di chiusura, in generale solo necessaria affinché una forma sia esatta, diventa sufficiente se si aggiunge un'ipotesi sulla topologia del dominio di definizione della forma.

Definizione 8 (Aperto semplicemente connesso). Un sottoinsieme aperto A in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 si dice *semplicemente connesso* se è connesso e se ogni curva continua, chiusa e contenuta in A si può contrarre in maniera continua sino a ridursi ad un punto, senza mai uscire da A .

Osservazione 20. Evidentemente, questa definizione fa appello all'intuizione geometrica; tuttavia è possibile formalizzare opportunamente la nozione di contrazione di una curva (vedere, ad esempio, PS2 a pag. 57, 58 / 49, 50).

Illustriamo la definizione con alcuni esempi.

Esempio 8. Esempi di aperti di \mathbb{R}^2 semplicemente connessi: \mathbb{R}^2 , qualunque palla aperta e, più in generale, qualunque aperto omeomorfo ad una palla aperta.

Esempio 9. Esempi di aperti in \mathbb{R}^2 non semplicemente connessi: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, qualunque corona circolare aperta e, più in generale, qualunque aperto omeomorfo ad una palla aperta da cui siano stati sottratti un numero finito di suoi sottoinsiemi omeomorfi ad una palla chiusa.

Intuitivamente, gli aperti semplicemente connessi del piano sono gli aperti connessi "senza buchi". Come mostrano gli esempi che seguono, questa interpretazione non è più valida nello spazio tridimensionale.

Esempio 10. Esempi di aperti di \mathbb{R}^3 semplicemente connessi: \mathbb{R}^3 , qualunque palla aperta, qualunque aperto omeomorfo ad una palla aperta, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, qualunque corona sferica aperta.

Esempio 11. Esempi di aperti di \mathbb{R}^3 non semplicemente connessi: $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y = 0\}$, l'insieme aperto racchiuso dalla superficie di un toro, il complementare dell'insieme chiuso racchiuso da un toro e, più in generale, le analoghe regioni che si possono definire ricorrendo ad un toro con più buchi.

Esempio 12. Un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 (in generale, di \mathbb{R}^n) si dice *convesso* se ogni volta che contiene due punti allora contiene anche il segmento che li congiunge. Si può dimostrare che ogni aperto convesso è semplicemente connesso.

Per dimostrare il prossimo teorema abbiamo bisogno di introdurre un'ulteriore caratterizzazione degli aperti semplicemente connessi del piano. Si può dimostrare che ogni curva γ piana, semplice e chiusa¹ suddivide il piano in due aperti connessi che hanno γ come frontiera comune, uno dei due è limitato (detto *interno di γ* in quanto è racchiuso dalla curva), l'altro è illimitato (chiamato *esterno di γ*). Questi fatti sono molto intuitivi (si pensi ad esempio ad un cerchio) e sono noti sotto il nome di Teorema di Jordan, tuttavia la loro dimostrazione è altrettanto complicata.

Lemma 2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso. Allora A è semplicemente connesso se e solo se per ogni curva semplice e chiusa contenuta in A anche l'interno della curva è contenuto in A .*

Teorema 3. *Sia A un sottoinsieme aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 o di \mathbb{R}^3 e ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A . Allora ω è esatta se e solo se è chiusa.*

Dimostrazione. Illustriamo la dimostrazione nel caso di una forma $\omega = P dx + Q dy$ in due variabili tralasciando alcuni dettagli tecnici.

Se ω è esatta allora è chiusa grazie alla proposizione 4.

Supponiamo ora che ω sia chiusa, cioè $P_y = Q_x$. Sia γ una curva regolare a tratti, chiusa e semplice contenuta in A . Poichè A è semplicemente connesso l'interno di γ , che indichiamo con D , è contenuto in A . Inoltre si può dimostrare che D è semplicemente decomponibile per cui, grazie al Teorema di Gauss-Green, abbiamo

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

Sia ora γ un'arbitraria curva regolare a tratti, chiusa e contenuta in A . Si dimostra che è possibile ridurre il calcolo di $\oint_{\gamma} \omega$ al caso (qui dimostrato) in cui la curva è semplice e si trova

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Allora, grazie al teorema 1, ω è esatta in A . □

6 Il calcolo delle primitive

In questo paragrafo mostriamo attraverso alcuni esempi come si possono determinare le primitive di una forma differenziale lineare esatta (le quali, in un aperto connesso, differiscono solo per una costante additiva).

¹Una curva con queste caratteristiche è chiamata *curva di Jordan*.

Esempio 13. Stabilire se la forma $\omega = 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ è esatta nel suo dominio di definizione e, in tal caso, calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma è definita in tutti i punti del piano \mathbb{R}^2 , inoltre è chiusa in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2).$$

Essendo \mathbb{R}^2 semplicemente connesso, grazie al teorema 3 concludiamo che ω è esatta. Per trovare una primitiva sfruttiamo l'osservazione 16 scegliendo come punto (x_0, y_0) l'origine e come curva γ il segmento orientato che parte dall'origine e arriva ad un generico $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (si noti che la curva γ , come è richiesto da questo metodo, è interamente contenuta nel dominio della forma ω). Tuttavia, per compiere i calcoli che seguono indichiamo questo generico punto con (x_1, y_1) in quanto le lettere x e y ci occorreranno per scrivere la parametrizzazione del segmento, alla fine del calcolo sostituiremo (x_1, y_1) con (x, y) . Il segmento orientato γ è parametrizzato dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_1 t \\ y = y_1 t \end{cases}, \quad t \in [0, 1],$$

da cui segue $dx = x_1 \, dt$, $dy = y_1 \, dt$ e dunque

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (2x_1^2 y_1 t^2 + (x_1^2 + y_1^2) y_1 t^2) \, dt \\ &= (3x_1^2 y_1 + y_1^3) \int_0^1 t^2 \, dt = x_1^2 y_1 + \frac{y_1^3}{3}. \end{aligned}$$

Tornando ora alle lettere x e y e aggiungendo la costante additiva, ricaviamo tutte le primitive di ω :

$$U(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 14. Studiare l'esattezza della forma $\omega = 2xy \sin z \, dx + x^2 \sin z \, dy + x^2 y \cos z \, dz$ nel suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma è definita in tutti i punti dello spazio \mathbb{R}^3 , inoltre è chiusa in quanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(2xy \sin z) &= 2x \sin z = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(2xy \sin z) &= 2xy \cos z = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \cos z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2 \sin z) &= x^2 \cos z = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y \cos z).\end{aligned}$$

Come nell'esempio 13, poichè \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso possiamo concludere che ω è una forma esatta. Calcoliamo le primitive seguendo la tecnica usata nell'esempio 13 ma, invece di scegliere come curva γ il segmento che unisce $(0, 0, 0)$ a (x_1, y_1, z_1) (scelta possibile che però rende più insidioso il calcolo dell'integrale di ω , farlo come ulteriore esercizio), prendiamo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ dove γ_1, γ_2 e γ_3 sono i tre segmenti che uniscono rispettivamente e nell'ordine $(0, 0, 0)$ a $(x_1, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$ a $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_1, y_1, 0)$ a (x_1, y_1, z_1) . I segmenti orientati γ_1, γ_2 e γ_3 sono parametrizzati da

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_1 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 t \\ z = 0 \end{cases} \quad \gamma_3 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 t \end{cases}, \quad t \in [0, 1],$$

da cui segue $dx = x_1 dt, dy = dz = 0$ per γ_1 , $dy = y_1 dt, dx = dz = 0$ per γ_2 e $dz = z_1 dt, dx = dy = 0$ per γ_3 . Passando al calcolo di U si trova

$$\begin{aligned}U(x_1, y_1, z_1) &= \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 x_1^2 y_1 z_1 \cos z_1 t \, dt \\ &= x_1^2 y_1 (\sin z_1 t) \Big|_0^1 = x_1^2 y_1 \sin z_1.\end{aligned}$$

Per cui le primitive di ω sono date dalla formula

$$U(x, y, z) = x^2 y \sin z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 15. Stabilire se la forma $\omega = (2x + y^3) dx + 3xy^2 dy$ è esatta nel suo dominio di definizione e, in tal caso, calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma ω è definita in \mathbb{R}^2 (aperto semplicemente connesso) ed è chiusa poichè

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y^3) = 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2),$$

di conseguenza è anche esatta. Illustriamo ora un metodo diverso da quello visto negli esempi precedenti. Sia $U(x, y)$ una primitiva di ω , per definizione le sue derivate parziali prime devono coincidere con i coefficienti di ω , cioè

$$\begin{cases} U_x = 2x + y^3 \\ U_y = 3xy^2. \end{cases}$$

Integriamo ora (nel senso dell'integrale indefinito) la prima equazione rispetto alla variabile x avendo l'accortezza di inserire un termine additivo costante rispetto a x (la variabile di integrazione) ma che può tuttavia dipendere da y . Questo termine additivo è quindi rappresentato da una funzione dipendente da y che indichiamo con $\varphi(y)$

$$\begin{cases} U = x^2 + xy^3 + \varphi(y) \\ U_y = 3xy^2. \end{cases}$$

Deriviamo ora la prima equazione rispetto a y e sostituiamola nella seconda

$$\begin{cases} U = x^2 + xy^3 + \varphi(y) \\ 3xy^2 + \varphi'(y) = 3xy^2, \end{cases} \quad \begin{cases} U = x^2 + xy^3 + \varphi(y) \\ \varphi'(y) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\varphi(y) = c$ dove c è una costante arbitraria e concludiamo che le primitive di ω sono date da

$$U(x, y) = x^2 + xy^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Naturalmente, è possibile fare questi calcoli anche scambiando il ruolo delle variabili x e y .

Esempio 16. Studiare l'esattezza della forma $\omega = (xy - \sin z) dx + (x^2/2 - e^y/z) dy + (e^y/z^2 - x \cos z) dz$ nel suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne le primitive (se il dominio non è connesso scegliere una componente connessa in cui studiare ω).

Soluzione. In questo caso la forma ω è definita in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ il quale è in insieme aperto ma non è connesso, infatti è formato da due componenti

connesse. Queste componenti sono i semispazi aperti $\{z > 0\}$ e $\{z < 0\}$, scegliamone uno, ad esempio il primo, e qui studiamo la forma ω . Dato che

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(xy - \sin z) &= x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2/2 - e^y/z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(xy - \sin z) &= -\cos z = \frac{\partial}{\partial x}(e^y/z^2 - x \cos z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2/2 - e^y/z) &= e^y/z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(e^y/z^2 - x \cos z),\end{aligned}$$

la forma è chiusa e, poichè $\{z > 0\}$ è semplicemente connesso (in quanto è omeomorfo ad \mathbb{R}^3), è anche esatta. Calcoliamo le sue primitive usando il metodo visto nell'esempio precedente. Sia dunque $U(x, y, z)$ una primitiva di ω , si deve avere

$$\begin{cases} U_x = xy - \sin z \\ U_y = x^2/2 - e^y/z \\ U_z = e^y/z^2 - x \cos z. \end{cases}$$

Iniziamo integrando la prima equazione rispetto alla variabile x , ricordiamo che è necessario aggiungere un termine costante rispetto a x che però può dipendere da y e da z . Questo termine è rappresentato da una funzione dipendente da y e da z che indichiamo con $\varphi(y, z)$, abbiamo

$$\begin{cases} U = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ U_y = x^2/2 - e^y/z \\ U_z = e^y/z^2 - x \cos z, \end{cases}$$

deriviamo la prima equazione rispetto a y e a z e sostituiamo i risultati nella seconda e nella terza

$$\begin{cases} U = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ x^2/2 + \varphi_y = x^2/2 - e^y/z \\ -x \cos z + \varphi_z = e^y/z^2 - x \cos z, \end{cases} \quad \begin{cases} U = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi_y = -e^y/z \\ \varphi_z = e^y/z^2. \end{cases}$$

Ricaviamo ora φ usando soltanto le ultime due equazioni e seguendo un procedimento analogo a quello visto nell'esempio precedente. Integriamo la seconda equazione rispetto a y e aggiungiamo un termine costante rispetto a y ma, in generale, dipendente da z

$$\begin{cases} U = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi = -e^y/z + \psi(z) \\ \varphi_z = e^y/z^2, \end{cases}$$

deriviamo la seconda equazione rispetto a z , sostituiamola nella terza e semplifichiamo, troviamo

$$\begin{cases} U = x^2 y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi = -e^y/z + \psi(z) \\ \psi' = 0. \end{cases}$$

Andando ora a ritroso troviamo $\psi(z) = c$ dove c è una costante arbitraria, $\varphi(y, z) = -e^y/z + c$ e

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z - \frac{e^y}{z} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Anche in questo esempio è ovviamente possibile scambiare i ruoli delle variabili x, y e z . Osserviamo inoltre che anche scegliendo il semispazio $\{z < 0\}$ si troverebbe la formula (14).

Risultati degli esercizi

- a) 2, b) $2\pi ab$, c) $3/2 - 2 \ln 2$, d) $5/2 - e$.

Bibliografia

[PS2] C.D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica*. Volume 2, Zanichelli, prima o seconda edizione.