Integrali doppi e tripli

Il materiale contenuto in questa nota è soltanto un completamento di quello contenuto nel libro di testo, per i dettagli vedere il programma.

Classi di funzioni integrabili

Proposizione 1. *Le funzioni costanti sono integrabili su ogni insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan e, per ogni costante c, si ha:*

$$\int_\Omega c\, dx_1 \dots dx_n = c|\Omega|,$$

dove $|\Omega|$ è la misura di Peano-Jordan di Ω.

Osservazione 1. In particolare, nelle prime tre dimensioni si ha:

$$\int_a^b c\, dx = c(b-a), \quad \iint_\Omega c\, dx\, dy = c\mathrm{Area}(\Omega), \quad \iiint_\Omega c\, dx\, dy\, dz = c\mathrm{Volume}(\Omega).$$

Proposizione 2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che:*

1. *Ω è limitato, aperto o chiuso, e misurabile secondo Peano-Jordan;*
2. *f è limitata e continua.*

Allora f è integrabile in Ω.

Osservazione 2. In particolare, se f è continua su un compatto misurabile secondo Peano-Jordan allora è integrabile.

Formule di riduzione nello spazio

Proposizione 3 (**Integrazione in un parallelepipedo per segmenti (fili) e per strati (fette)**)**.** *Siano $P = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ e $f : P \to \mathbb{R}$ continua. Allora valgono le due formule di riduzione*

$$\begin{aligned}\iiint_P f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_r^s f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy \\ &= \int_r^s \left(\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz\end{aligned}$$

e le altre quattro che si ottengono scambiando il ruolo delle variabili x, y, z.

Proposizione 4 (**Integrazione per segmenti in una regione semplice dello spazio**). *Sia E la regione semplice rispetto all'asse z definita come*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega \text{ e } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dove Ω è un sottoinsieme del piano compatto e misurabile secondo Peano-Jordan e $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ sono funzioni continue in Ω.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua in E allora è valida la formula di riduzione

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_\Omega \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy.$$

Osservazione 3. Naturalmente valgono anche le altre due formule corrispondenti alle regioni semplici rispetto agli assi x e y.

Proposizione 5 (**Integrazione per strati nello spazio**). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ compatto e misurabile secondo Peano-Jordan e tale che per ogni z l'insieme*

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E\}$$

sia anch'esso misurabile secondo Peano-Jordan. Allora vale la formula di riduzione

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_r^s \left(\iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz,$$

dove $r = \min\{\, z \mid (x, y, z) \in E\}$ e $s = \max\{\, z \mid (x, y, z) \in E\}$.

Osservazione 4. Anche in questo caso si trovano altre due formule scambiando il ruolo delle variabili di integrazione.

Bibliografia

[PS2] C.D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica.* Volume 2, Zanichelli, prima o seconda edizione.