

Massimi e minimi vincolati

Siano $f, g \in C^1(A)$ dove A è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 , poniamo $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. In questa nota si studia l'ottimizzazione della funzione f ristretta all'insieme E_0 .

Definizione 1. Un punto $x_0 \in E_0$ si dice

1. punto di *massimo globale (o assoluto) vincolato* di f rispetto al vincolo E_0 se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in E_0$;
2. punto di *massimo locale (o relativo) vincolato* di f rispetto al vincolo E_0 se esiste una palla $B((x_0, y_0), r)$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in E_0 \cap B((x_0, y_0), r)$.

Analogamente si definiscono i punti di *minimo globale e locale*, più generalmente si parla di punti di estremo globale e locale vincolati. In questo contesto f è chiamata anche *funzione obiettivo* e g (*funzione*) *vincolo*. Il termine "vincolo" è utilizzato anche per indicare l'insieme E_0 .

Esempio 1. Come esempio introduttivo determiniamo, se esiste, il minimo globale della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sotto il vincolo $xy - 3 = 0$. Sono possibili (almeno) due soluzioni.

Soluzione 1. In questo caso E_0 è un'iperbole che può essere facilmente parametrizzata come segue

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{3}{t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Componendo ora $f(x, y)$ con la parametrizzazione ci riconduciamo alla ricerca del minimo globale della funzione

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + \frac{9}{t^2}.$$

Ora è sufficiente studiare il segno della derivata prima di $\varphi(t)$ per concludere che il minimo globale esiste, è pari a 6 ed è raggiunto in corrispondenza dei punti $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ (come esercizio, verificare queste affermazioni).

Soluzione 2. Seguiamo ora una via geometrica e più intuitiva. Disegniamo l'iperbole $xy - 3 = 0$ e le linee di livello della funzione obiettivo $f = x^2 + y^2$. Notiamo ora che quest'ultime sono tutte le circonferenze centrate nell'origine e che la funzione obiettivo è strettamente crescente rispetto al loro raggio.

Da ciò segue che esistono due punti di minimo e soprattutto che in ciascuno di questi punti la linea di livello corrispondente e il vincolo (inteso come sottoinsieme del piano) sono *tangenti*.

Traduciamo in formule quest'ultima informazione facendo uso dei gradienti della funzione obiettivo $f(x, y) = x^2 + y^2$ e della funzione vincolo $g(x, y) = xy - 3$. Sappiamo che, se non si annullano, questi due gradienti sono ortogonali rispettivamente alle linee di livello di f e al vincolo. Ma è immediato verificare che $\nabla f(x, y)$ si annulla solo nell'origine (che non può essere un punto di minimo in quanto non appartiene all'iperbole) e che $\nabla g(x, y)$ è sempre diverso da zero. In conclusione E_0 e una curva di livello sono tangenti in un punto (x, y) di E_0 se e solo se esiste un numero λ (chiamato *moltiplicatore di Lagrange*) tale che

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Di conseguenza i punti di minimo si trovano tra le coppie (x, y) che verificano il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

per un opportuno numero $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notare che, di fatto, le soluzioni di questo sistema sono terne numeriche (x, y, λ) ; i punti del piano cercati si ottengono poi estraendo le prime due componenti. Si osservi che il sistema, oltre a possedere le due soluzioni che abbiamo individuato geometricamente, potrebbe anche avere ulteriori soluzioni; esamineremo meglio questo aspetto successivamente.

Risolviamo il sistema; osserviamo che, grazie alla terza equazione, x e y non possono annullarsi,

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = \pm x \\ xy = 3; \end{cases}$$

da qui in poi spezziamo il sistema

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ xy = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = -x \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ x^2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = -x \\ -x^2 = 3. \end{cases}$$

Evidentemente l'ultimo sistema non ha soluzioni, per cui rimane soltanto

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ e $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$; da queste ricaviamo $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Ora, per via geometrica, sappiamo che esistono esattamente due punti in cui il minimo assoluto viene raggiunto; perciò questi devono necessariamente essere quelli trovati. Inoltre tale minimo assoluto vale $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6$.

Nel caso in cui avessimo trovato più di due soluzioni oppure non sapessimo preventivamente quante soluzioni esistono lo studio non sarebbe concluso qui; vedremo casi di questo tipo più avanti.

Il metodo visto nella seconda soluzione dell'esempio precedente è detto *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* ed suscettibile di notevoli generalizzazioni, qui ci occuperemo di dimostrarlo nella sua versione più semplice e importante. Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 2. Siano $f, g \in C^1(A)$ dove A è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia (x_0, y_0) un punto dell'insieme $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Il punto (x_0, y_0) si dice *punto stazionario vincolato per f rispetto ad E_0 (o a g)* se

1. $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0^1$;
2. $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$ per un opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Il numero λ_0 è detto *moltiplicatore di Lagrange*.

In analogia con ciò che accade nella ricerca degli estremi liberi vale il seguente risultato.

Teorema 1. Siano $f, g \in C^1(A)$ dove A è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Sia (x_0, y_0) un punto di estremo locale vincolato di f rispetto al vincolo $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Allora (x_0, y_0) è un punto stazionario vincolato, cioè esiste un numero λ_0 tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

¹A meno che non sia possibile un'interpretazione ambigua, il simbolo 0 verrà usato indifferentemente sia per lo zero scalare che per quello vettoriale.

Osservazione 1. Notare che il teorema fornisce una condizione solo necessaria; in altre parole un punto stazionario vincolato potrebbe anche **non** essere un punto di estremo locale vincolato.

Dimostrazione. Poichè $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ possiamo applicare il teorema della funzione implicita a $g(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) . Per fissare le idee supponiamo che sia $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno del punto (x_0, y_0) in cui E_0 è il grafico di un'opportuna funzione $y = h(x)$; perciò, sempre nel medesimo intorno, E_0 è l'immagine della parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = h(x_0 + t) \end{cases}, t \in I$$

dove I è un intervallo contenente lo 0. Nel caso in cui si abbia $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ si ragiona in modo analogo. In ogni caso si può concludere che esiste un intorno del punto (x_0, y_0) in cui E_0 è descritto da una parametrizzazione $(x(t), y(t))$ con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Inoltre, trattandosi del grafico di una funzione, si ha $(x'(0), y'(0)) \neq 0$ e i vettori $(x'(0), y'(0))$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono ortogonali.

Consideriamo ora la composizione della parametrizzazione con la funzione f (esattamente come nella soluzione 1 dell'esempio precedente)

$$t \mapsto f(x(t), y(t)).$$

Il punto di estremo locale vincolato (x_0, y_0) per $f(x, y)$ si traduce così in un punto di estremo locale (libero) per la precedente funzione composta; per di più, poichè $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, questo punto di estremo è $t = 0$. Di conseguenza avremo

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))|_{t=0} = 0,$$

la quale, grazie alla regola della catena, diventa

$$f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0.$$

Per cui, come il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$, anche $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore $(x'(0), y'(0))$. Allora, trattandosi di vettori piani, esisterà $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

□

In altre parole, per ogni punto di estremo locale vincolato (x_0, y_0) in cui $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che (x_0, y_0, λ_0) è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

È possibile dare a quest'ultimo una forma più compatta introducendo la funzione *lagrangiana* del problema

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

In termini della lagrangiana il sistema assume la forma

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0. \end{cases}$$

e cioè, in analogia al caso degli estremi locali non vincolati, $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$. Grazie alla teoria fin qui sviluppata si può ora schematizzare il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:

1. si determinano i punti in cui $\nabla g = 0$ oppure in cui $\nabla g \neq 0$ e $\nabla L = 0$ (questi ultimi sono i punti stazionari vincolati);
2. si cerca di capire la natura dei punti trovati mediante considerazioni geometriche (vedi l'esempio 1), il teorema di Weierstrass, uno studio dettagliato di questi punti, etc.

Ad esempio, siano i punti ricavati nel passo 1 in numero finito e sia noto dal passo 2 che f raggiunge il massimo assoluto. Allora tale massimo sarà necessariamente il valore più grande assunto da f nei punti trovati. Naturalmente alcune delle considerazioni di cui al passo 2 (ad esempio il teorema di Weierstrass) possono essere fatte anche prima di svolgere passo 1. Illustriamo il metodo con un esempio.

Esempio 2. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ sotto il vincolo $g(x, y) = 0$ con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Soluzione. Notiamo che la funzione e^{x+y} è continua in tutto il piano e quindi lo è anche la sua restrizione al vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (una circonferenza). Ma le circonferenze sono insiemi compatti, quindi per il teorema di Weierstrass, esistono punti di massimo e di minimo assoluti vincolati (non siamo invece in grado di affermare nulla sull'esistenza di estremi locali).

Iniziamo esaminando l'eventuale annullamento di ∇g . Abbiamo che $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0)$ soltanto quando $(x, y) = (0, 0)$, ma l'origine non fa parte del vincolo. Di conseguenza non dobbiamo esaminare alcun punto in cui $\nabla g = 0$.

Introduciamo ora la lagrangiana del problema

$$L(x, y, \lambda) = e^{x+y} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Abbiamo

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = e^{x+y} - 2\lambda x \\ L_y(x, y, \lambda) = e^{x+y} - 2\lambda y \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = -(x^2 + y^2 - 1), \end{cases}$$

e quindi la condizione $\nabla L = 0$ diventa

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ e^{x+y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Notare che l'ultima equazione riproduce la condizione di vincolo, questo accade sempre. Studiamo ora il sistema. Osserviamo che λ non può annullarsi, abbiamo

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ e^{x+y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ y = x \\ 2x^2 = 1, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. In funzione di ciascuno di questi valori determiniamo il valore (o, in generale, i valori) di y dalla seconda equazione e quello (o quelli) di λ dalla prima. Non è importante calcolare il valore di λ in quanto si tratta di una variabile ausiliaria utile solo ai fini di determinare x e y , tuttavia è *necessario* assicurarsi che un tale valore effettivamente esista. In conclusione troviamo i due punti stazionari vincolati

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{e} \quad (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Poiché, in questo caso, sappiamo che esistono punti di massimo e di minimo assoluti e dato che abbiamo trovato solo due punti, concludiamo che si tratta dei punti di estremo globale. Per capire quale dei due è il massimo e quale è il minimo non resta che valutare la funzione in questi punti, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{\sqrt{2}}$ e $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-\sqrt{2}}$. Per cui il valore massimo è $e^{\sqrt{2}}$ ed è raggiunto nel punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ mentre il valore minimo è $e^{-\sqrt{2}}$ ed è ottenuto in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Esercizio 1. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = x + 2y$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

Come già osservato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si generalizza notevolmente, in particolare vale per funzioni reali di un numero qualunque

di variabili (vedere PS2 a pag. 92 I ed. e a pag. 81 II ed.). Man mano che la dimensione dello spazio cresce la varietà delle situazioni che si possono presentare aumenta, limitiamoci qui ad enunciare il caso tridimensionale.

Data una funzione $f(x, y, z)$ di classe C^1 in un aperto di \mathbb{R}^3 sono possibili due tipologie di vincolo.

Una “superficie” di equazione $g(x, y, z) = 0$.

In questo caso f è vincolata (cioè ristretta) all’insieme definito dall’equazione

$$g(x, y, z) = 0$$

dove g è una funzione di classe C^1 nell’aperto in cui è definita f . La lagrangiana del problema è

$$L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

I punti stazionari vincolati sono i punti tali che $\nabla g \neq 0$ e verificano il sistema $\nabla L = 0$, cioè

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) - \lambda g_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) - \lambda g_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) - \lambda g_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Una “curva” di equazioni $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$.

In questo caso f è vincolata all’insieme definito dal sistema

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove g e h sono funzioni di classe C^1 nell’aperto in cui è definita f . La lagrangiana del problema questa volta è

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z).$$

Compaiono due moltiplicatori di Lagrange: λ e μ .

I punti stazionari vincolati sono i punti che rendono i vettori ∇g e ∇h *linearmente indipendenti* e verificano il sistema $\nabla L = 0$, cioè

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) - \lambda g_x(x, y, z) - \mu h_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) - \lambda g_y(x, y, z) - \mu h_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) - \lambda g_z(x, y, z) - \mu h_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

La condizione di indipendenza lineare dei vettori ∇g e ∇h si può anche esprimere richiedendo che la matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla g(x, y, z) \\ \nabla h(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x(x, y, z) & g_y(x, y, z) & g_z(x, y, z) \\ h_x(x, y, z) & h_y(x, y, z) & h_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Un'altra condizione equivalente è che il prodotto vettoriale $\nabla g \wedge \nabla h$ sia diverso da zero (o meglio, dal vettore nullo).

Vediamo un esempio in cui si presenta questa seconda possibilità.

Esempio 3. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x, y, z) = z$ sotto i vincoli $g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0$ con $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ e $h(x, y, z) = z - 2x - 4y$.

Soluzione. Notiamo che la funzione f è continua ovunque e quindi lo è anche la sua restrizione alla curva definita dai vincoli. Questa curva è ottenuta intersecando il paraboloido ellittico $z = x^2 + y^2$ con il piano $z = 2x + 4y$. Poichè si tratta di un piano non verticale (la componente z della normale è diversa da 0) questa intersezione è un insieme limitato, è chiuso essendo intersezione di due chiusi ed infine è non vuoto in quanto contiene almeno l'origine. Non è difficile convincersi che si tratta di un'ellisse, in ogni caso per i nostri scopi è sufficiente sapere che si tratta di un insieme compatto e che quindi la funzione f vincolata assume gli estremi assoluti.

Prima di impostare il sistema $\nabla L = 0$ dobbiamo isolare gli eventuali punti del vincolo in cui i vettori ∇g e ∇h sono paralleli (cioè linearmente dipendenti). Illustriamo due metodi per individuare questi punti.

Metodo 1: Come osservato poc'anzi questi sono tutti e soli i punti che annullano il prodotto vettoriale $\nabla g \wedge \nabla h$, abbiamo

$$\nabla g = (-2x, -2y, 1), \quad \nabla h = (-2, -4, 1)$$

e

$$\nabla g \wedge \nabla h = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2x & -2y & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-y)\mathbf{i} + 2(x-1)\mathbf{j} + 4(2x-y)\mathbf{k}.$$

Da cui segue subito che $\nabla g \wedge \nabla h = 0$ se e solo se $(x, y, z) = (1, 2, z)$ con $z \in \mathbb{R}$.

Metodo 2: L'unica possibilità affinché i vettori $(-2x, -2y, 1)$ e $(-2, -4, 1)$ siano paralleli è che esista un numero reale α tale che

$$(-2x, -2y, 1) = \alpha(-2, -4, 1).$$

Ma da ciò segue subito che $\alpha = 1$, $x = 1$, $y = 2$ e che z può assumere qualunque valore reale.

In conclusione i punti in cui i vettori ∇g e ∇h sono linearmente dipendenti sono esattamente i punti della retta verticale passante per il $(1, 2, 0)$. Resta ora da capire se il vincolo contenga o meno punti di questa retta, si tratta semplicemente sostituire le coordinate del punto $(1, 2, z)$ nelle equazioni del vincolo

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Troviamo $z = 5$ dalla prima e $z = 10$ dalla seconda, per cui il vincolo non contiene alcun punto di questa retta; di conseguenza il sistema $\nabla L = 0$ deve essere studiato in tutti i punti del vincolo.

La lagrangiana del problema è

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = z - \lambda(z - x^2 - y^2) - \mu(z - 2x - 4y).$$

Si trova

$$\begin{aligned} L_x &= 2\lambda x + 2\mu, \\ L_y &= 2\lambda y + 4\mu, \\ L_z &= 1 - \lambda - \mu, \\ L_\lambda &= -(z - x^2 - y^2), \\ L_\mu &= -(z - 2x - 4y), \end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + \mu = 0 \\ \lambda y + 2\mu = 0 \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mu = -\lambda x \\ \lambda y + 2\mu = 0 \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda(y - 2x) = 0 \\ \mu = -\lambda x \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che o $\lambda = 0$ oppure $y = 2x$. Ma, dalla seconda equazione, $\lambda = 0$ implica $\mu = 0$ che assieme contraddicono la terza. Dunque $y = 2x$ e quindi

$$\begin{cases} y = 2x \\ \mu = -\lambda x \\ \lambda + \mu = 1 \\ z = 5x^2 \\ z = 10x. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni determinano i valori di x ; $x = 0$ e $x = 2$. Si trovano poi immediatamente i corrispondenti valori di y , z , λ e μ . Per queste ultime due variabili è sufficiente (e anche necessario) accertarsi dell'esistenza di soluzioni in quanto qui non siamo interessati al loro valore.

Concludendo troviamo i punti $(0, 0, 0)$ in cui f vale 0 e $(2, 4, 20)$ in cui vale 20. Questi sono, rispettivamente, il punto di minimo assoluto e il punto di massimo assoluto.

Esercizio 2. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xy$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Risultati degli esercizi

1. Minimo assoluto uguale a $-\sqrt{5}$ in $(-\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5)$ e massimo assoluto pari a $\sqrt{5}$ in $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.
2. Minimo assoluto uguale a $-1/2$ raggiunto nei punti $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e massimo assoluto pari a $1/2$ in $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ (i punti stazionari vincolati $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ sono punti di "sella").

Bibliografia

- [PS2] C.D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica*. Volume 2, Zanichelli, prima o seconda edizione.