Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor

Il teorema del valor medio di Lagrange, valido per funzioni reali di una variabile reale, si estende alle funzioni reali di più variabili. Come si vedrà, questo teorema non è più valido quando si passa invece alle funzioni vettoriali (cioè a valori in $\mathbb{R}^m$).

Teorema 1 (del valor medio di Lagrange). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e siano i punti $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in A$ tali che il segmento chiuso che gli unisce $[\mathbf{x}^0, \mathbf{x}]$ sia contenuto in A.*

Allora esiste un punto $\boldsymbol{\xi}$ appartenente al segmento aperto $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ tale che

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Osservazione 1. La tesi del teorema si può esprimere in modo equivalente affermando che esiste un numero $\theta \in (0,1)$ tale che

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione ausiliaria $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$ con $t \in [0,1]$. Questa funzione è di classe C^1 in $[0,1]$. Infatti, grazie alla regola della catena, abbiamo

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_{x_1}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(x_1 - x_1^0) + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(x_n - x_n^0) \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle. \end{aligned}$$

Applicando ora il teorema del valor medio per funzioni di una variabile a $g(t)$ in $[0,1]$ deduciamo l'esistenza di un numero $\theta \in (0,1)$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(\theta).$$

In termini della funzione f questa uguaglianza diventa

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle,$$

cioè la tesi con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$. □

Osservazione 2. Naturalmente, è possibile enunciare la tesi del teorema di Lagrange sostituendo il simbolo di gradiente con quello di differenziale, si ottiene

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = df(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

Osservazione 3. La tesi del teorema di Lagrange rimane valida anche con ipotesi più deboli rispetto a quelle che abbiamo assunto (vedi PS1, pag. 368 I ed., pag. 329 II ed.); tuttavia la versione del teorema qui data è sufficiente per la maggior parte delle sue applicazioni.

Osservazione 4. Come mostra il seguente esempio, il teorema del valor medio *non* vale per le funzioni a valori vettoriali. Sia $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Se il teorema fosse valido allora dovrebbe esistere un numero $\xi \in (0, 2\pi)$ tale che

$$\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) = d\mathbf{r}(\xi)(2\pi - 0) = \mathbf{r}'(\xi)(2\pi - 0).$$

Calcolando e sostituendo i vari termini in questa relazione troviamo

$$(0, 0) = 2\pi(-\sin\xi, \cos\xi)$$

per qualche $\xi \in (0, 2\pi)$; uguaglianza impossibile in quanto il seno e il coseno non si annullano contemporaneamente per alcun ξ.

È comunque importante notare che è sempre possibile applicare il teorema appena dimostrato alle singole componenti di una funzione vettoriale. Nell'esempio precedente ciò conduce all'esistenza di *due* numeri $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2\pi)$ tali che

$$(0, 0) = 2\pi(-\sin\xi_1, \cos\xi_2).$$

Considerando le derivate successive, il teorema di Lagrange si generalizza nella formula di Taylor con il resto di Lagrange. Ci limitiamo qui alle derivate seconde.

Teorema 2 (Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Lagrange). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$ e siano i punti $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in A$ tali che il segmento chiuso che gli unisce $[\mathbf{x}^0, \mathbf{x}]$ sia contenuto in A.*

Allora esiste un punto $\boldsymbol{\xi}$ appartenente al segmento aperto $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x^0} \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}), \mathbf{x} - \mathbf{x^0} \rangle.$$

Dimostrazione. La strategia è esattamente la stessa della dimostrazione del teorema di Lagrange. Si definisce la funzione di una variabile reale

$$g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) \quad \text{con} \quad t \in [0, 1],$$

si calcolano le derivate prima e seconda grazie alla regola della catena ed infine si utilizza la formula di Taylor per funzioni reali di una variabile reale.

Poichè f è di classe C^2, troviamo

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(x_i - x_i^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$$

e

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \\ &= \langle H_f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle, \end{aligned}$$

da cui segue che $g \in C^2([0,1])$. Sviluppando ora g attorno all'origine e valutandola in $t = 1$ troviamo

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta) \quad \text{per un opportuno } \theta \in (0,1).$$

Tornando alla funzione iniziale f si ottiene la tesi con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$. □

In termini di differenziali, la formula di Taylor si scrive come

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2} d^2 f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

Osservazione 5. Anche la formula di Taylor rimane ancora valida indebolendo opportunamente le ipotesi su f (vedi PS1, pag. 367 I ed., pag. 328 II ed.).

Osservazione 6. Analogamente al teorema di Lagrange, la formula di Taylor con il resto di Lagrange *non* è valida per le funzioni a valori vettoriali.

Come corollario del precedente teorema è semplice provare la formula di Taylor con il resto di Peano.

Corollario 1 (Formula di Taylor di ordine 2 con resto di Peano). *Sia* $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $f(\mathbf{x})$ *una funzione di classe* C^2 *in una palla aperta centrata in* $\mathbf{x}^0$. *Allora vale lo sviluppo*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2)$$

per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$.

Dimostrazione. Utilizziamo la formula di Taylor di ordine uno e con il resto di Lagrange prendendo A uguale alla palla aperta in cui è definita f. Trasformiamo opportunamente l'ultimo termine della formula:

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{\xi})(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0). \tag{1}$$

Dal fatto che $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ e dalla continuità delle derivate seconde segue che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{\xi}) = f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) \quad \forall\, i, j = 1, \dots, n.$$

Possiamo esprimere quest'ultima relazione nella forma

$$f_{x_i x_j}(\boldsymbol{\xi}) = f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) + o_{ij}(1) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0,$$

dove $o_{ij}(1)$ indica un o piccolo di 1 (un diverso o piccolo per ogni derivata seconda). Sostituendo in (1) si trova

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} o_{ij}(1)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)\\ = \frac{1}{2}\langle H_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} o_{ij}(1)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0).\end{aligned}$$

La dimostrazione sarà allora conclusa se proviamo che

$$\sum_{i,j=1}^{n} o_{ij}(1)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0.$$

Ma questo segue dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{i,j=1}^{n} o_{ij}(1)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2}\right| &\le \sum_{i,j=1}^{n} |o_{ij}(1)| \frac{|x_i - x_i^0|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|}\frac{|x_j - x_j^0|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|}\\ &\le \sum_{i,j=1}^{n} |o_{ij}(1)| = o(1) \quad \text{per } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0.\end{aligned}$$

□

Osservazione 7. Si osservi che, ogni volta che si ha una funzione di classe C^2 in un aperto, lo sviluppo enunciato nel teorema è valido attorno ad ogni punto dell'aperto.

Osservazione 8. Una volta definito il differenziale secondo per le funzioni a valori vettoriali, si deduce facilmente che la formula di Taylor con il resto di Peano è valida anche per queste funzioni.

Esempio 1. La funzione $\sin x \sin y$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il suo sviluppo di Taylor (di ordine 2 con il resto di Peano) attorno all'origine è uguale a

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= 0 + \langle (0,0), (x,y)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle + o(x^2 + y^2)\\ &= xy + o(x^2 + y^2) \quad \text{per } (x,y) \to (0,0).\end{aligned}$$

Esercizio 1. Scrivere lo sviluppo di Taylor attorno all'origine sino al differenziale secondo e con il resto di Peano delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y^2$,
2. $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

Consideriamo ora un' importante applicazione del teorema della media di Lagrange.

Nel caso di funzioni reali di una variabile reale questo teorema implica che se una funzione è definita in un intervallo e ha la derivata identicamente nulla allora deve necessariamente essere una funzione costante. Notare che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è essenziale. Ad esempio, una funzione definita nell'unione di due intervalli aperti disgiunti e costante in ciascuno di essi con costanti diverse ha la derivata identicamente nulla ma non è costante nell'unione dei due intervalli.

Tornando alle funzioni reali di più variabili reali è plausibile che, affinchè un risultato simile sia valido, si debba fare qualche ipotesi sul dominio della funzione.

Intuitivamente ciò che sembra verosimile richiedere è che il dominio sia formato da un unico "pezzo", il concetto matematico che formalizza questa idea è quello di insieme *connesso*. Tuttavia non ci occuperemo della definizione generale di insieme connesso (per questo, vedere il corso di Geometria 3), per i nostri scopi sarà sufficiente la definizione di connessione nel caso degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1. Un sottoinsieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso se *non* esistono due aperti B e C tali che

1. $B, C \neq \emptyset$;
2. $B \cap C = \emptyset$;
3. $B \cup C = A$.

Esempio 2. Si dimostra che ogni palla aperta è un insieme connesso, viceversa l'unione di due o più palle aperte disgiunte non è connesso.

Osservazione 9. La definizione data si applica *solamente* agli insiemi aperti.

Proposizione 1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto connesso e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$. Allora f è costante in A se e solo se $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.*

Dimostrazione. Occupiamoci soltanto dell'implicazione non banale, cioè che se il gradiente è identicamente nullo allora la funzione è costante.

Sia quindi $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Scegliamo un elemento $\ell \in f(A)$ e definiamo i due sottoinsiemi di A:

$$B = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = \ell\} \quad \text{e} \quad C = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \neq \ell\}.$$

La tesi sarà provata se dimostriamo che $B = A$.

Iniziamo col provare che B e C sono entrambi insiemi aperti. Sia $\mathbf{x}^0 \in B$, di conseguenza esisterà una palla aperta $B(\mathbf{x}^0, r)$ interamente contenuta in A. Grazie al teorema di Lagrange, per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r)$ esiste un opportuno $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{x}^0, \mathbf{x})$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \langle \nabla f(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x} - \mathbf{x^0} \rangle = \ell + 0 = \ell.$$

Ciò significa che $B(\mathbf{x}^0, r) \subseteq B$ e dunque, per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}^0$, B è un insieme aperto. Sia $\mathbf{x}^0 \in C$, cioè $f(\mathbf{x}^0) \neq \ell$. Allora, in virtù del teorema della permanenza del segno, esiste una palla aperta $B(\mathbf{x}^0, r) \subseteq A$ in cui $f(\mathbf{x}) \neq \ell$. In altre parole $B(\mathbf{x}^0, r) \subseteq C$ e di nuovo, per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}^0$, C è aperto.

È inoltre immediato osservare che $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C = A$. Ora, se B e C fossero entrambi non vuoti concluderemmo che A *non* è un insieme connesso, contraddicendo così una delle ipotesi del teorema. Perciò uno tra B e C deve essere vuoto. Dato che B per costruzione non può esserlo (in quanto $B = f^{-1}(\ell)$ con $\ell \in f(A)$), sarà $C = \emptyset$ ed infine $B = A$. □

Risultato dell'esercizio 1

1. $xy^2 - x^2 - y^2 = -x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2) \quad \text{per} \ (x, y) \to (0, 0),$
2. $e^{x+y+z} = 1 + x + y + z + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + o(x^2 + y^2 + z^2)$
   per $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

Bibliografia

[PS1] C.D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica.* Volume 1, Zanichelli, prima o seconda edizione.