Prova scritta di Analisi Matematica 2 01.07.2021 Sol. 2

1.

a) Le derivate prime di $f(x,y,z)$ valgono

$$f_x = 2xyz^3 - \frac{2xz}{x^2+z}, \quad f_y = x^2z^3$$

$$f_z = 3x^2yz^2 - \ln(x^2+z) - \frac{z}{x^2+z}.$$

Da cui $Df(0,1,1) = (0,0,-1)$, quindi la direzione di massima crescita è $(0,0,-1)$ e la massima crescita vale $|Df(0,1,1)| = 1$.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{3}/3) = (Df(0,1,1), (2/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{3}/3))$$
$$= -\sqrt{3}/3.$$

c) $$(Df(0,0,-1), (x, y-1, z-1)) = 0$$

da cui $z = 1$.

d) Calcoliamo le derivate seconde di $f(x,y,z)$

$$f_{xx} = 2yz^3 - 2z\frac{z-x^2}{(x^2+z)^2}, \quad f_{xy} = 2xz^3$$

$$f_{xz} = 6xyz^2 - \frac{2x^3}{(x^2+z)^2}$$

$$f_{yy}=0, \quad f_{yz}=3x^2z^2,$$

$$f_{zz}=6x^2yz-\frac{1}{x^2+z}-\frac{x^2}{(x^2+z)^2}$$

Allora abbiamo

$$f(x,y,z)=f(0,1,1)+\left(Df(0,1,1),(x,y-1,z-1)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(D^2f(0,1,1)\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix},(x,y-1,z-1)\right)$$
$$+o\left(x^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right) \text{ per } (x,y,z)\to(0,1,1).$$

quindi, avendo $D^2f(0,1,1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,

$$f(x,y,z)=0-(z-1)+\frac{1}{2}\left(-(z-1)^2\right)+o\left(x^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1-z^2)+o\left(x^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right).$$

2. Osservando che $f(x,y)$ è una funzione continua e D (regione chiusa delimitata da un'ellisse) è un insieme compatto, mediante il Teorema di Weierstrass concludiamo che f assume gli estremi assoluti in D. Questi vanno ricercati tra:

i) i punti stazionari di f nell'aperto

$$\mathring{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2<1\}.$$

ii) i punti singolari di $g(x,y) = x^2+2y^2-1$ in ∂D (cioè tali che $Dg=0$) e i punti stazionari vincolati di f sotto il vincolo $g(x,y)=0$.

Una volta determinati tutti questi punti basterà valutare f in questi punti e confrontare i valori ottenuti.

i) Punti stazionari in $\mathring{D}$.

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad f_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$Df=0 \iff (x,y)=(0,0).$$

ii) Punti singolari di g e punti stazionari vincolati.

$$Dg(x,y) = (2x, 4y) = 0 \iff (x,y)=(0,0) \notin \partial D$$

dunque il vincolo $\partial D = \{g=0\}$ non possiede punti singolari. Determiniamo i punti stazionari vincolati di f rispetto a $g=0$. Si ha

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$
$$= \frac{1}{x^2+y^2+1} - \lambda(x^2+2y^2-1)$$

$$L_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} - 2\lambda x$$

$$L_y = -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2} - 4\lambda y$$

$$L_\lambda = -(x^2+2y^2-1)$$

$$DL = 0 \iff \begin{cases} x\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} + \lambda\right) = 0 \\ y\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} + 2\lambda\right) = 0 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases}$$

Spezzando la prima equazione troviamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} + 2\lambda\right) = 0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} + \lambda = 0 \\ y\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} + 2\lambda\right) = 0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$$

Il primo sistema diventa

$$\begin{cases} x=0 \\ y\left(\dfrac{1}{(y^2+1)^2} + 2\lambda\right) = 0 \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui le soluzioni $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si noti che la seconda equazione individua anche un valore per λ.

Il secondo è uguale a

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -y\dfrac{1}{(x^2+y^2+1)^2} = 0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$$

da cui $y=0$, $x^2=1$ e quindi le soluzioni $(\pm 1, 0)$. Anche qui si noti che esiste anche un valore di λ compatibile con le soluzioni.

Valutando f nei punti trovati

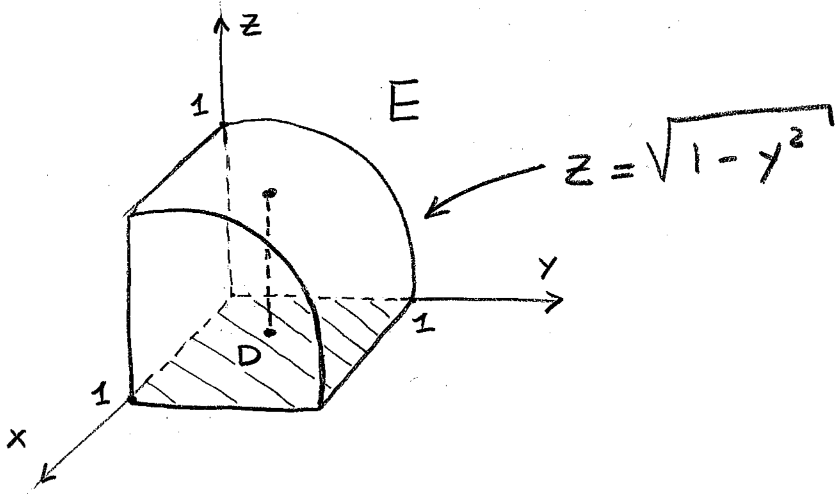
$f(0,0) = 1$

$f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = 2/3$

$f(\pm 1, 0) = 1/2$

concludiamo che $(0,0)$ è l'unico punto di <u>massimo assoluto</u> e $(\pm 1, 0)$ sono i due punti di <u>minimo assoluto</u>.

3. La regione E è raffigurata nel disegno.



Posto $D=[0,1]\times[0,1]$ nel piano xy, E si descrive come dominio normale rispetto al piano xy:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in D,\ 0\leq z\leq\sqrt{1-y^2}\}.$$

Dunque, integrando per segmenti, abbiamo

$$\iiint_E 2z e^{x(y+1)}\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 2z e^{x(y+1)}\,dz$$

$$=\iint_D e^{x(y+1)}\, z^2\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy=\iint_D (1-y^2)e^{x(y+1)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 (1-y^2)e^{x(y+1)}\,dx=\int_0^1 (1-y^2)\,\frac{e^{x(y+1)}}{y+1}\Big|_0^1\,dy$$

$$=\int_0^1 (1-y)(e^{y+1}-1)\,dy=\int_0^1 (y-1)\,dy+\int_0^1 (1-y)e^{y+1}\,dy$$

Prova scritta di Analisi Matematica 2 01.07.2021 fl. 2

$$= \frac{(y-1)^2}{2}\Big|_0^1 + (1-y)e^{y+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{y+1}\,dy$$

integrando per parti il secondo integrale

$$= -\frac{1}{2} - e + e^{y+1}\Big|_0^1 = e^2 - 2e - \frac{1}{2}.$$

4. Si ha

a)
$$\varphi'(t) = 3(-2\sin t + 3\sin 3t,\ 2\cos t - 3\cos 3t)$$

$$|\varphi'(t)|^2 = 9(13 - 12(\cos 3t\cos t + \sin 3t\sin t))$$
$$= 9(13 - 12\cos 2t) = 9(1 + 12(1-\cos 2t))$$

grazie alla formula di sottrazione del coseno

$$= 9(1+24\sin^2 t)$$

grazie alle formule di bisezione

da cui $|\varphi'(t)| = 3\sqrt{1+24\sin^2 t} \geq 3 > 0$

dunque la curva è regolare. Il versore tangente è

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+24\sin^2 t}}(-2\sin t + 3\sin 3t,\ 2\cos t - 3\cos 3t)$$

b) La lunghezza di γ è data dall'integrale

$$\int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{1+24\sin^2 t}\,dt$$

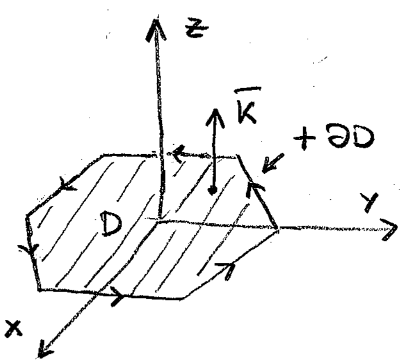
Inoltre

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds = \int_0^{2\pi} 9(1+8\sin^2 t)\cdot 3\sqrt{24\sin^2 t+1}\,dt$$

$$= 27\int_0^{2\pi}(1+8\sin^2 t)\sqrt{24\sin^2 t+1}\,dt$$

dove $x^2+y^2 = 9(1+8\sin^2 t)$ grazie alle formule già utilizzate sopra.

5. Calcoliamo il lavoro richiesto mediante l'utilizzo del Teorema di Stokes dove la superficie considerata è proprio D orientata dal versore $\bar{k}$.



Abbiamo

$$\oint_{+\partial D}(F,T)\,ds = \iint_D (\text{rot}\,F, \bar{k})\,d\sigma$$

$$= \iint_D \underbrace{(\text{rot}\,F)_z}_{\text{componente } z \text{ di rot}\,F}\,d\sigma$$

$$(\text{rot}\,F)_z = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ 3xy^2+z & 3x(xy+1) \end{vmatrix} = 6xy+3-6xy = 3$$

da cui

$$\iint_D (\text{rot}\,F)_z\,d\sigma = \iint_D 3\,d\sigma = 3\,\text{Area}(D) = 3.$$