Problema 1.

Siano $A, B \subseteq X$ due sotto insiemi di un insieme X. Si provi che

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

dove con $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ indichiamo la differenza simmetrica.

Problema 2.

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = n^2$$

Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Usando il principio di induzione mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, il numero intero $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6.

Problema 4.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{1 - iz}{iz + i}$.

- Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ per cui $f(z) = i$
- Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z|^2 = 1$ e $|f(z)|^2 = 1$.
  Utilizzare che $z\bar{z} = |z|^2$ e le proprietà del coniugato rispetto alla somma e al prodotto.

Problema 5.

Sia

$$\alpha = 0_{\mathbb{R}} \cup \{q \in \mathbb{Q} \colon q \geq 0 \text{ e } q^2 < 2\} \in \mathbb{R}$$

Mostrare che

$$\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \alpha \subseteq 2 = \{q \in \mathbb{Q} \colon q < 2\}$$

Dove, se se $x, y > 0$, il prodotto di numeri reali è definito come

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = 0_{\mathbb{R}} \cup \{p\, q \colon 0 \leq p \in x \text{ e } 0 \leq q \in y\}$$

Problema 6.

Siano a, b, c numeri interi non nulli. Si dimostri che

$$(a, (b, c)) = ((a, b), c),$$

dove (a, b) indica il MCD tra a e b.