ANALISI MATEMATICA I - CORSO DI LAUREA IN FISICA

LE FUNZIONI E I LORO LIMITI

10 NOVEMBRE -

20 NOVEMBRE 2020

8 LEZIONI (17%)

10 NOV. 2020

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE (VEDERE 9 OTTOBRE)

HANNO PER DOMINIO UN SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}$.

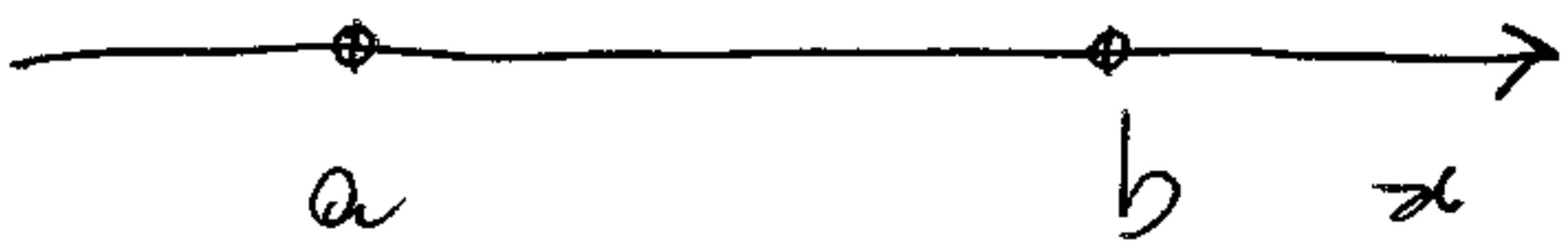
QUELLE USATE PIÙ SPESSO HANNO PER DOMINIO UN INTERVALLO, O L'UNIONE DI DUE O PIÙ INTERVALLI.

INTERVALLI LIMITATI

DATI $a, b \in \mathbb{R}$, CON $a < b$, DETTI ESTREMI DELL'INTERVALLO, SI DEFINISCONO GLI INTERVALLI APERTI

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

CHE GEOMETRICAMENTE RAPPRESENTANO SEGMENTI:



GLI INTERVALLI CHIUSI:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =$$

$$= (a,b) \cup \{a, b\}$$

E GLI INTERVALLI SEMIAPERTI

$$[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$$

$$(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$$

INTERVALLI ILLIMITATI

APERTI:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

CHIUSI:

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

$= (-\infty, b) \cup \{b\}$

$[a, +\infty) = (a, +\infty) \cup \{a\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

L'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$

$= \mathbb{R}$ È APERTO E CHIUSO.

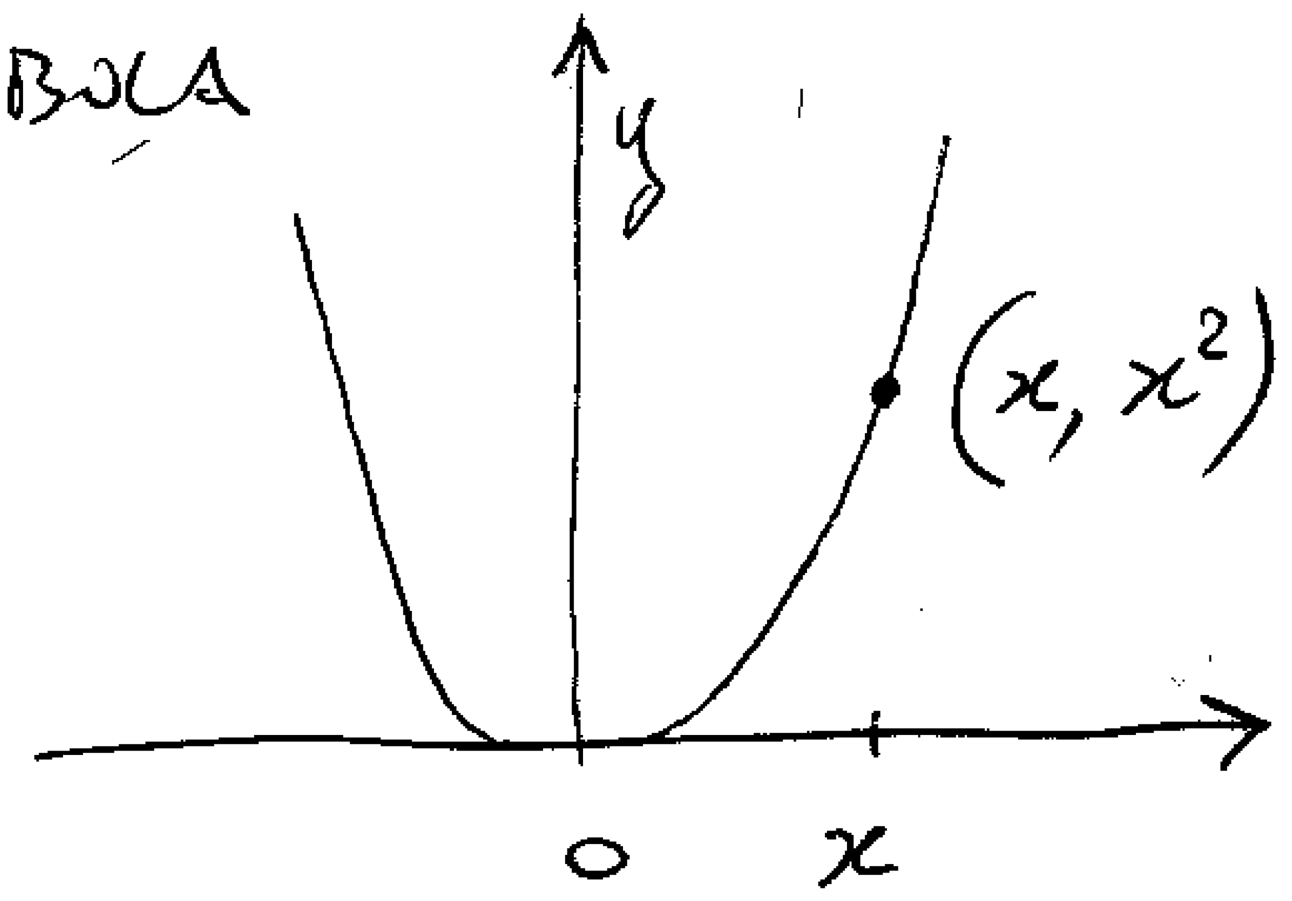
10 NOV. 2020

ESEMPI

LA FUNZIONE $f(x) = x^2$

HA PER DOMINIO L'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$

E PER GRAFICO UNA PARABOLA

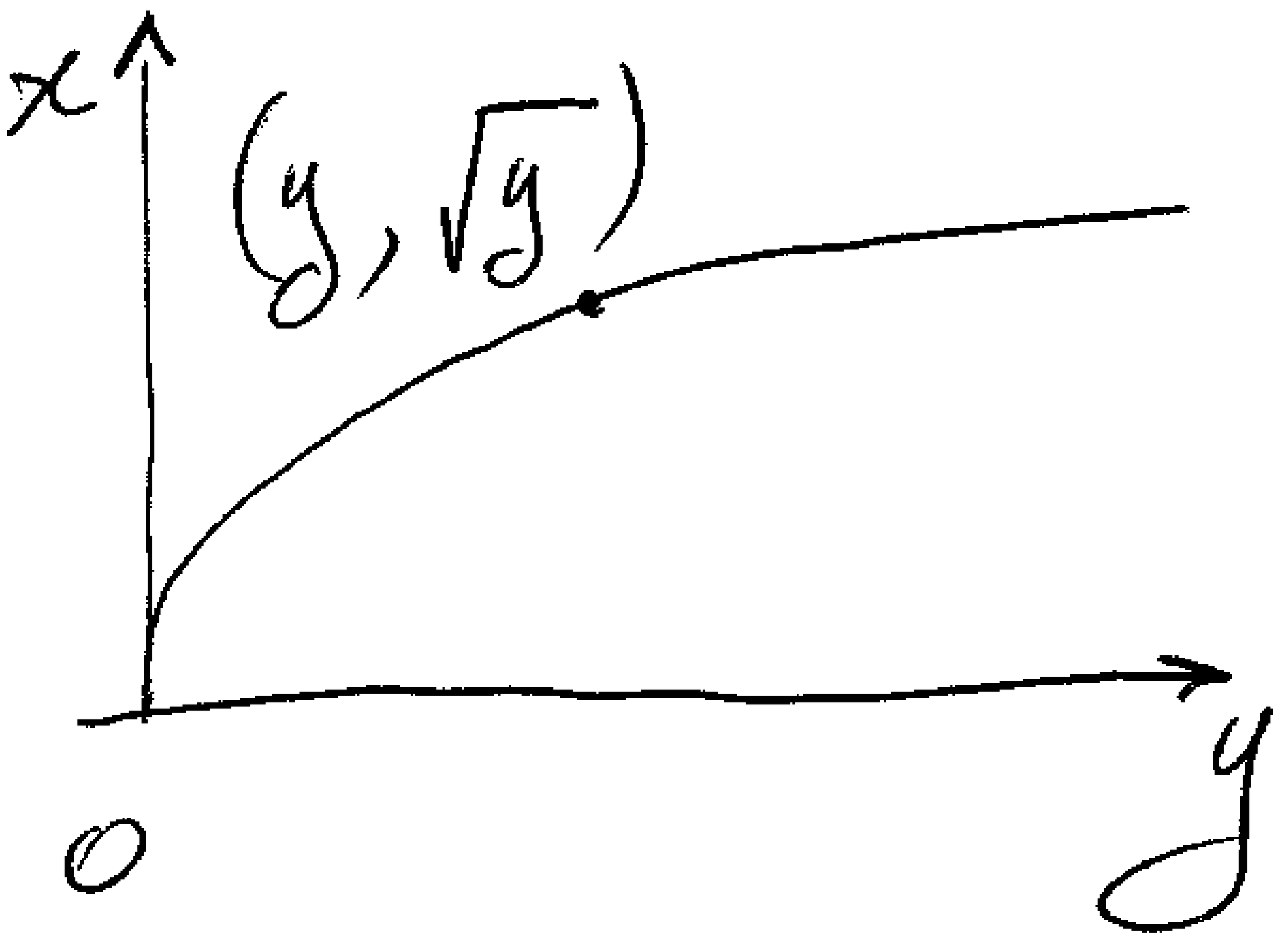


SE $S \subset \mathbb{R}$ E $f: S \to \mathbb{R}$,

IL GRAFICO DI f È L'INSIEME Γ (GAMMA) DATO

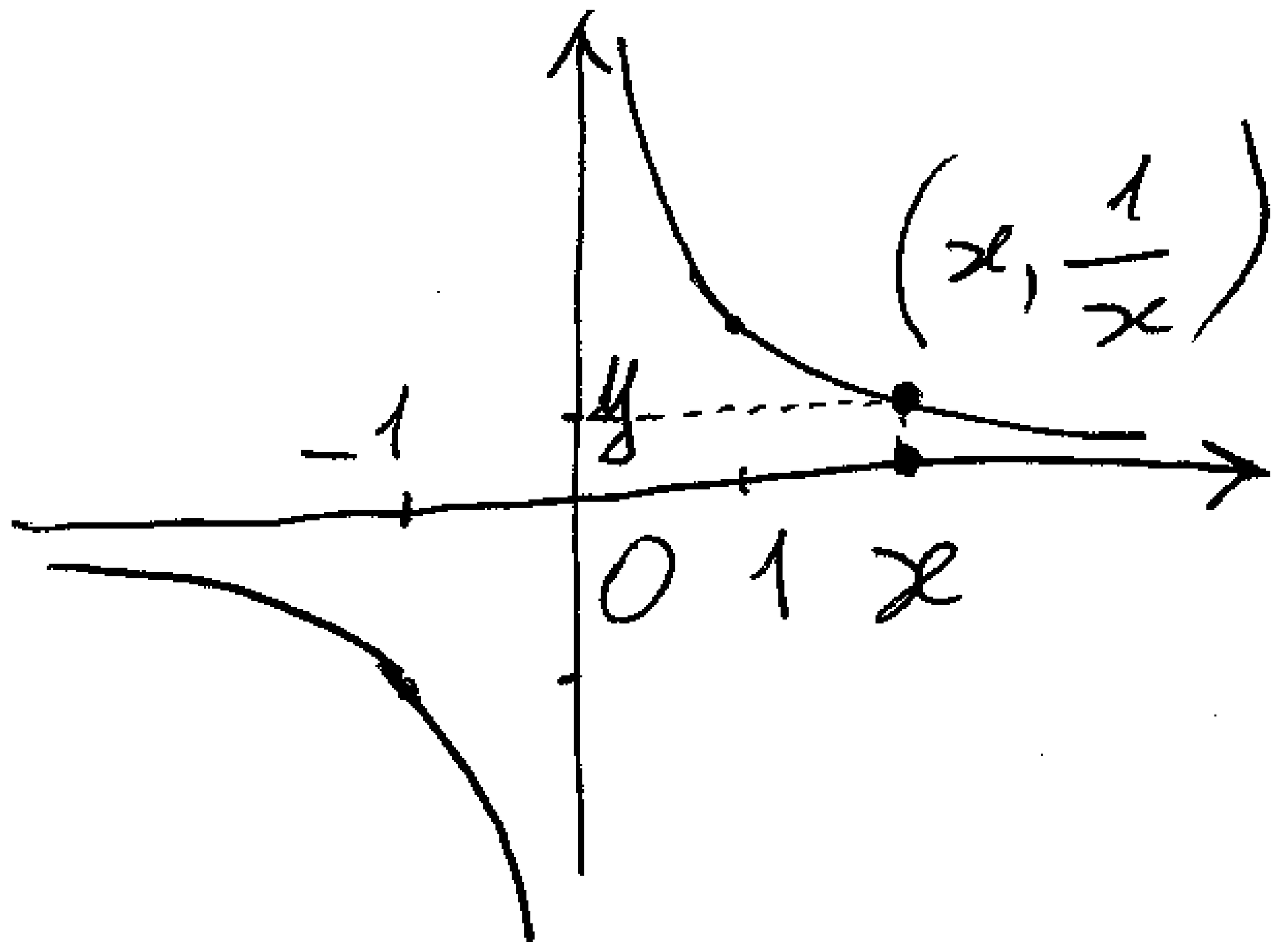
DA $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in S, \ y = f(x)\}$

ESEMPIO: LA FUNZIONE $g(y) = \sqrt{y}$ HA PER DOMINIO L'INTERVALLO $[0, +\infty)$. IL SUO GRAFICO SI RICAVA DA QUELLO DI $f(x) = x^2$:



ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ HA PER DOMINIO L'INSIEME $S = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

IL SUO GRAFICO È UN'IPERBOLE AVENTE PER ASINTOTI GLI ASSI COORDINATI:



SI NOTI CHE RISULTA

$$x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

PER OGNI $x \neq 0$

10 NOV. 2020

PROBLEMA: DATA $y \neq 0$, TROVARE x TALE CHE

$$f(x) = \frac{1}{x} = y$$

RISPOSTA: PRENDO $x = \frac{1}{y}$

OTTENGO DUNQUE LA STESSA FUNZIONE!

10 NOV. 2020

PARITÀ E DISPARITÀ DI UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$

IL DOMINIO S DEVE INNANZITUTTO AVERE LA PROPRIETÀ CHE SE $x \in S$ ALLORA ANCHE $-x \in S$ (SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE)

10 NOV. 2020

LA FUNZIONE $f : S \to \mathbb{R}$

SI DICE <u>PARI</u> SE RISULTA

$$f(x) = f(-x)$$

PER OGNI $x \in S$

<u>ESEMPIO</u>: $f(x) = x^2$

LA FUNZIONE f SI DICE

<u>DISPARI</u> SE RISULTA

$$f(x) = -f(-x)$$

OVVERO SE

$$f(-x) = -f(x)$$

PER OGNI $x \in S$.

<u>ESEMPIO</u>: $f(x) = \frac{1}{x}$

11 NOV. 2020

IN GENERALE, LA FUNZIONE

$f(x) = x^z$, CON $z \in \mathbb{Z}$

È PARI SE z È UN NUMERO PARI, ED È UNA FUNZIONE DISPARI SE z È UN NUMERO DISPARI:

SE $z = 2k$, CON $k \in \mathbb{Z}$,

SI HA CHE $f(x) = x^{2k} =$

$= (x^2)^k = ((-x)^2)^k =$

$= f(-x)$. SE, INVECE,

$z = 2k+1$, CON $k \in \mathbb{Z}$,

ALLORA $f(x) = x \cdot x^{2k}$

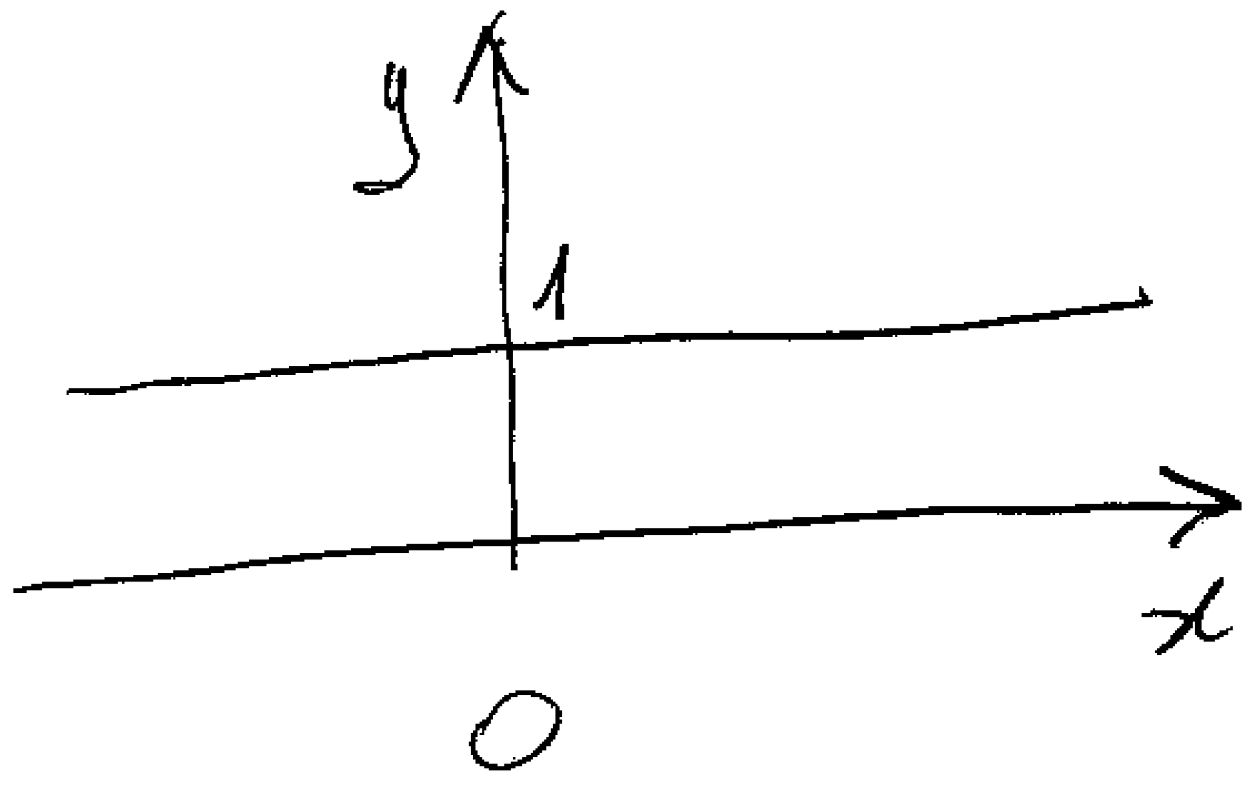
MENTRE $f(-x) =$

$= (-x) \cdot (-x)^{2k} =$

$= -x \cdot x^{2k} = -f(x)$

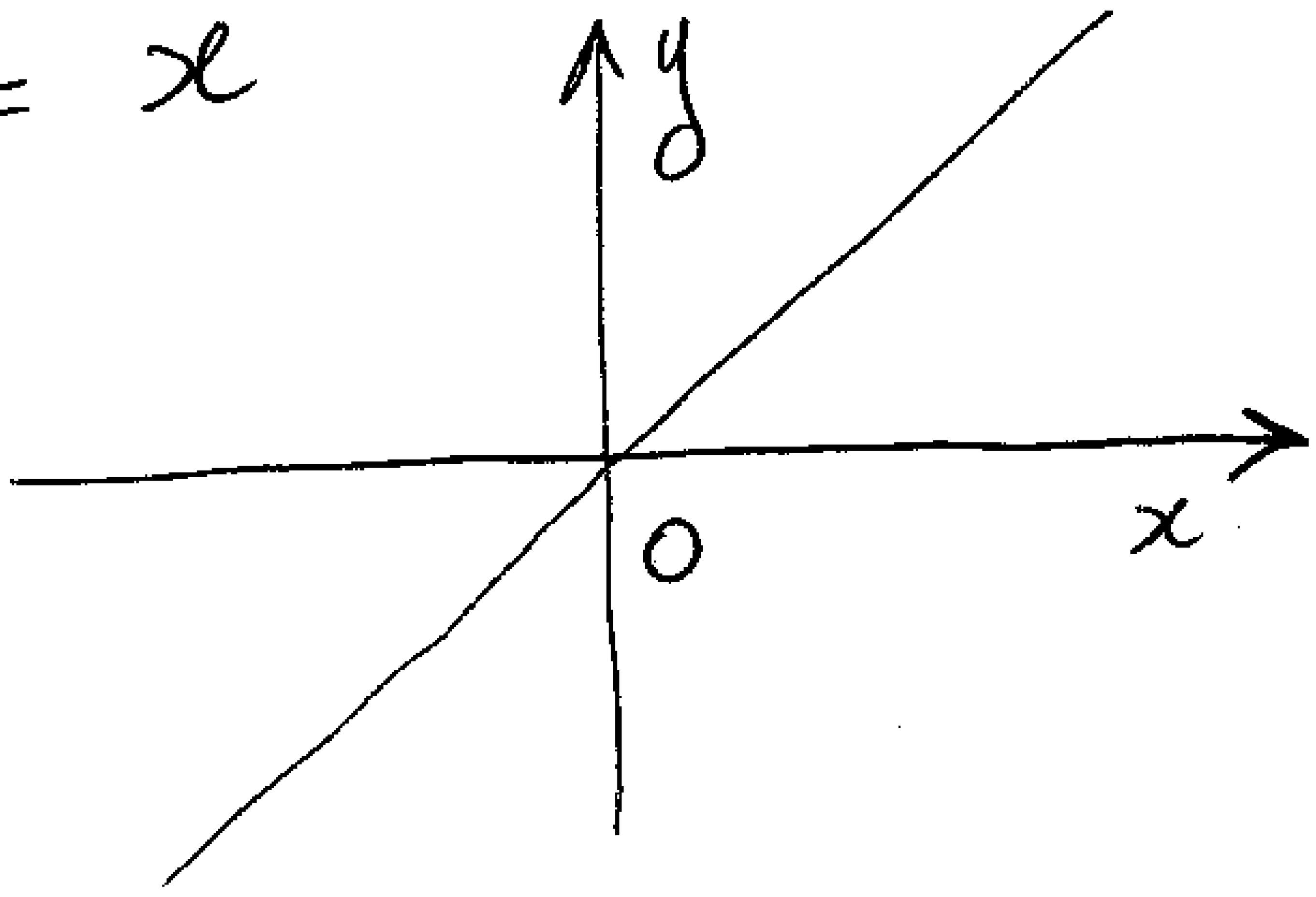
PER TRACCIARE I GRAFICI, OSSERVIAMO CHE CON $z = 0$ SI TROVA

$$f(x) = x^0 = 1$$

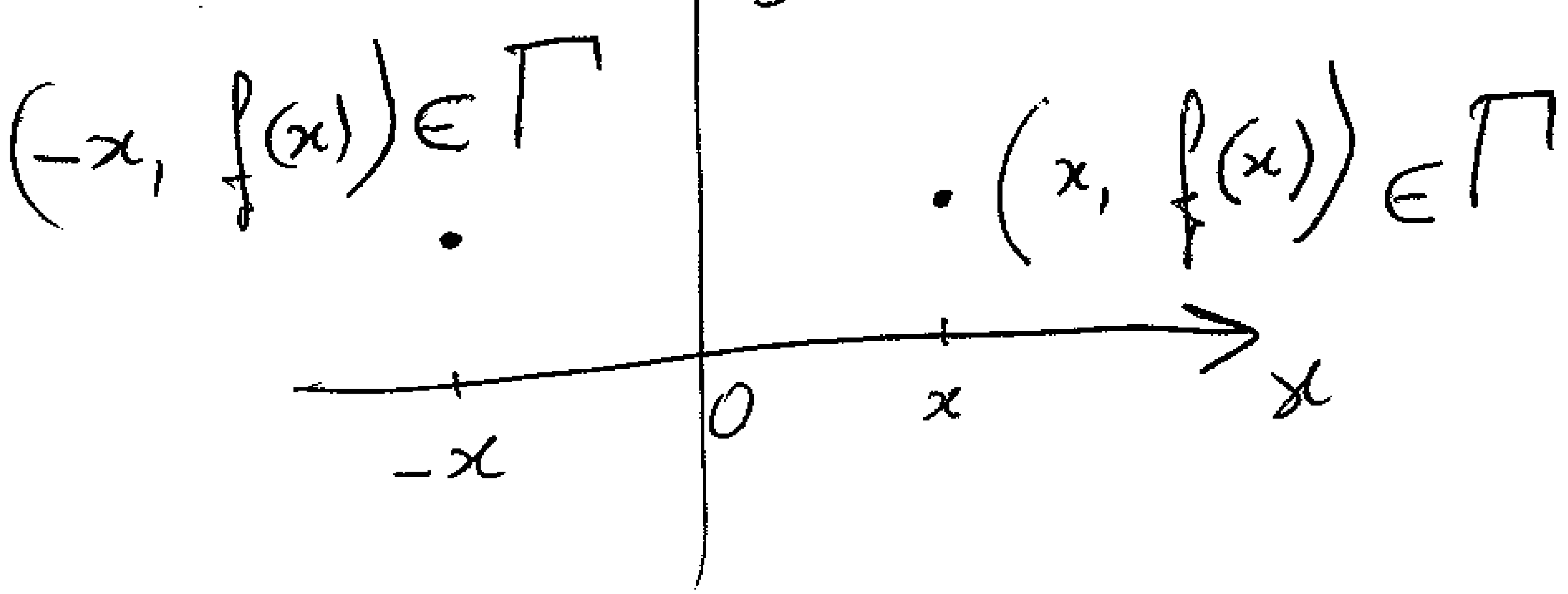


INVECE, CON $z = 1$ SI HA

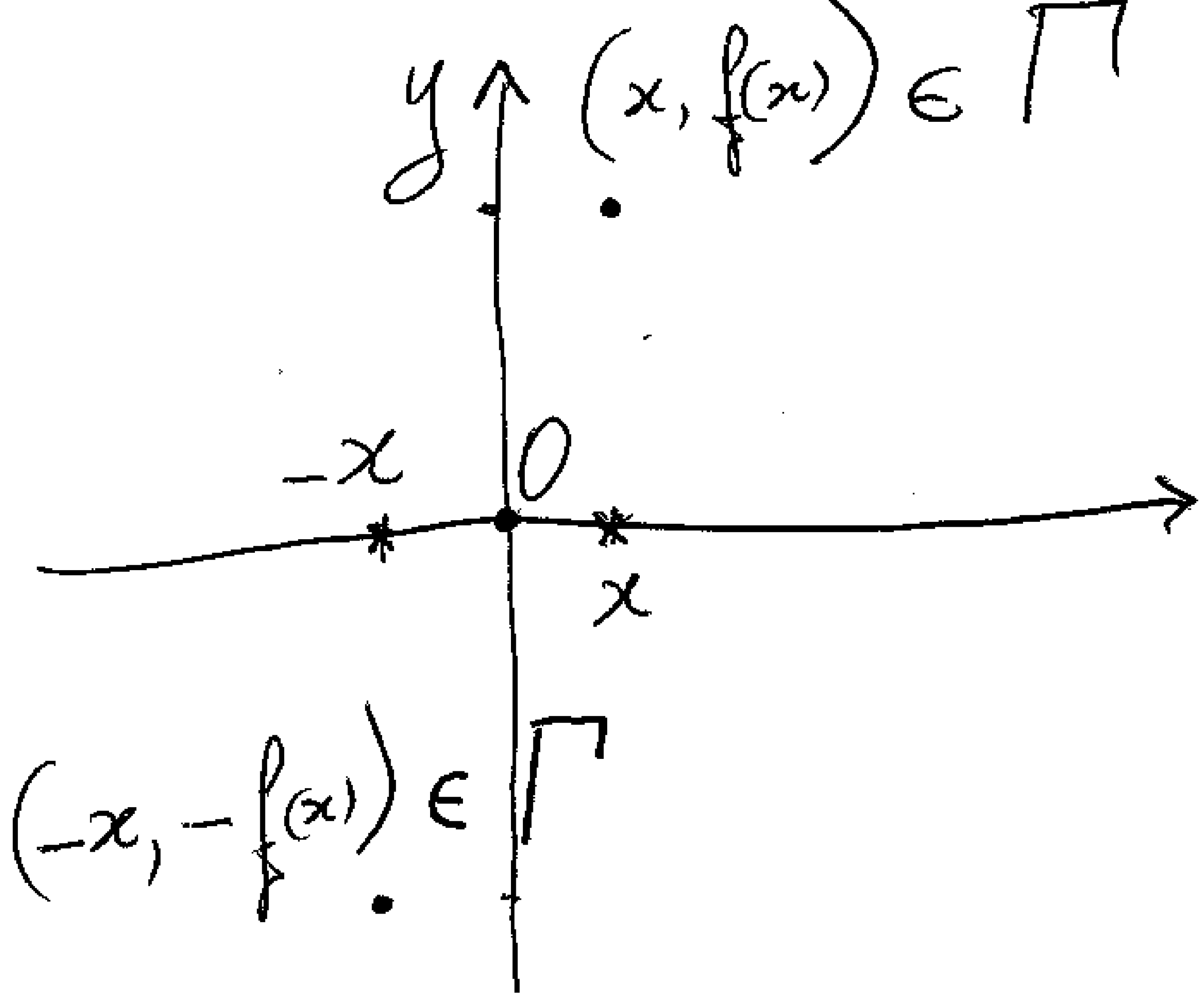
$f(x) = x$



INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLA PARITÀ DI UNA FUNZIONE:



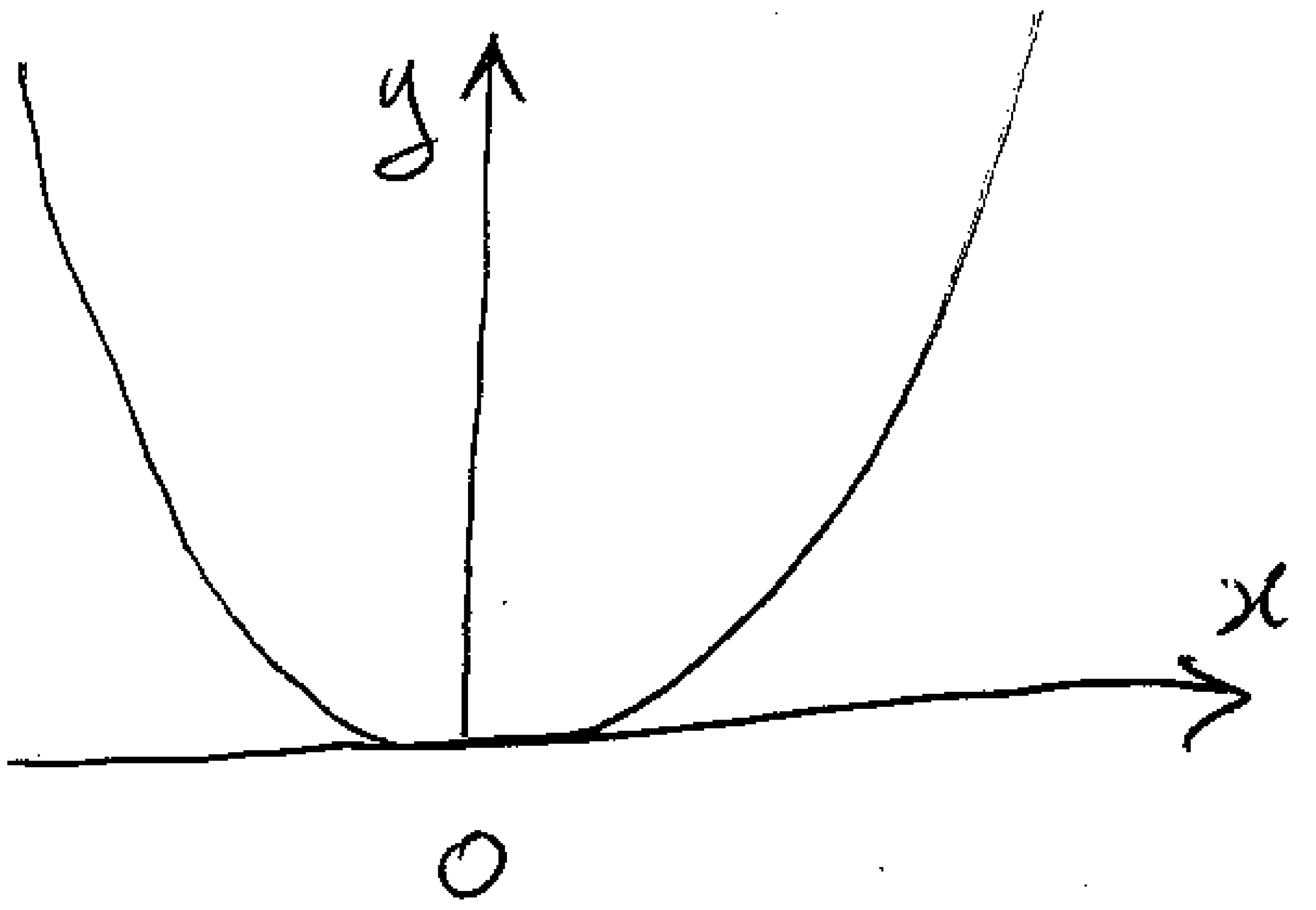
DISPARITÀ:



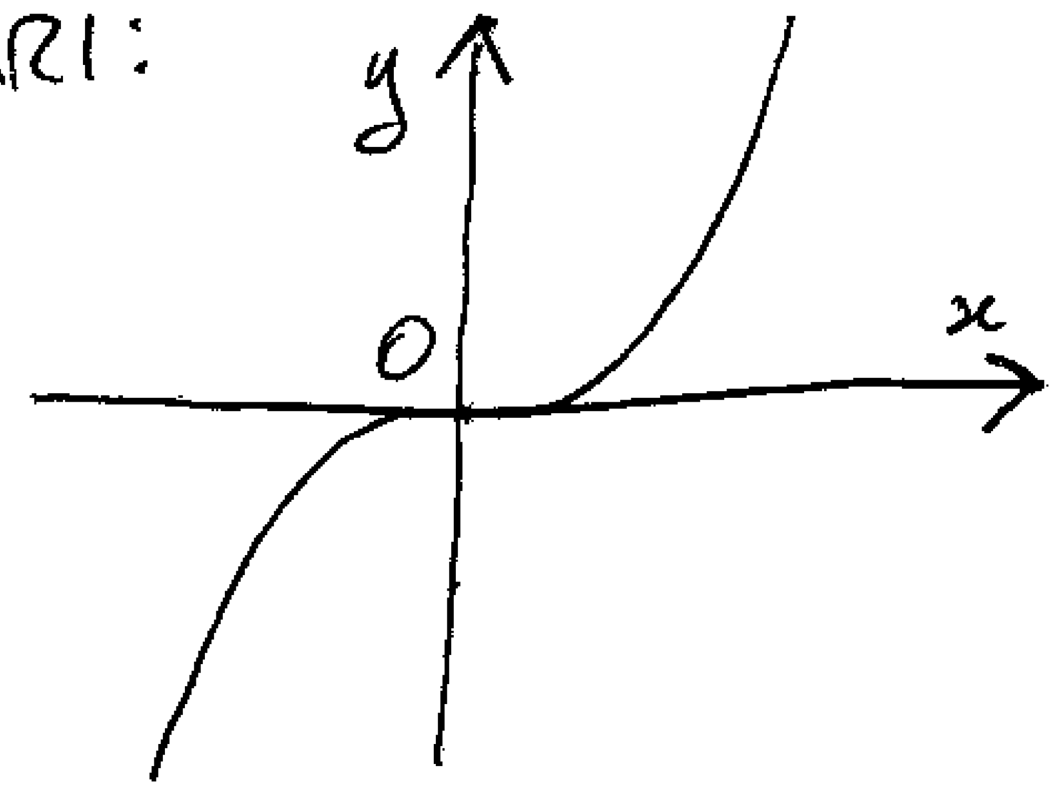
CONSIDERIAMO ADESSO

$f(x) = x^z$ CON $z > 1$.

SE z È PARI, IL GRAFICO DI f È



INVECE, SE z È DISPARI:



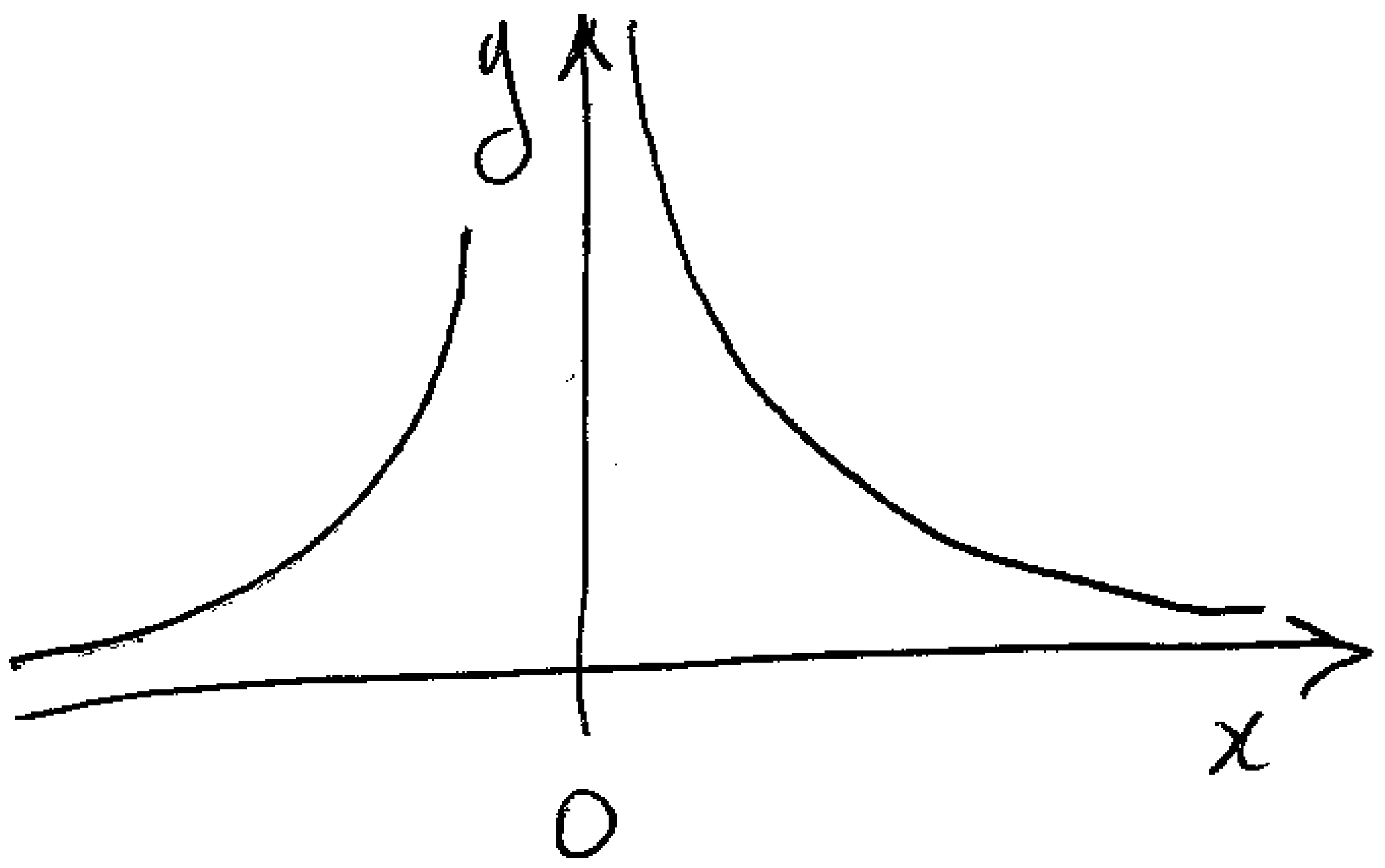
CONSIDERIAMO, INFINE,

$$f(x) = x^z \text{ CON } z < 0.$$

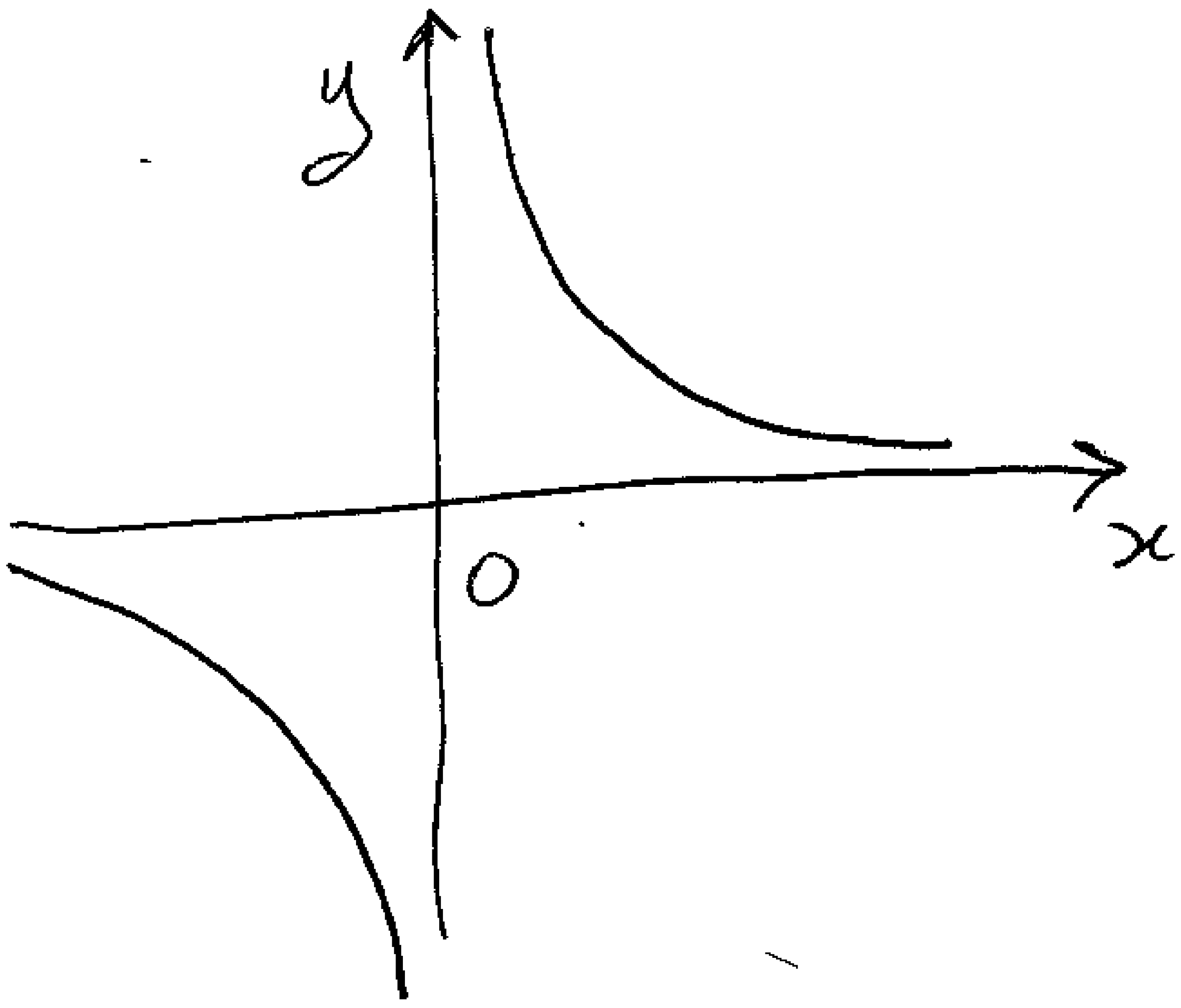
POSSIAMO SCRIVERE

$$x^z = \frac{1}{x^{|z|}}.$$

QUINDI, SE z È PARI:



INVECE, SE z È DISPARI:



11 NOV. 2020

GLI APERTI DI $\mathbb{R}$

UN SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SI DICE APERTO SE OGNI PUNTO $x \in S$ È INTERNO, CIOÈ ESISTE UN INTERVALLO APERTO (a,b) TALE CHE

$$x \in (a,b) \subset S$$

POSSIAMO ESPRIMERE LA DEFINIZIONE USANDO IL SIMBOLO $\Rightarrow$ (IMPLICAZIONE LOGICA):

UN SOTTOINSIEME S DELL'INSIEME $\mathbb{R}$ SI DICE APERTO SE LA SEGUENTE IMPLICAZIONE È VERA: $x \in S$ $\Rightarrow$ ESISTE (a,b) TALE CHE $x \in (a,b) \subset S$

L'IMPLICAZIONE LOGICA ($\Rightarrow$) CORRISPONDE AL COSTRUTTO « SE ... ALLORA ... »

L'IMPLICAZIONE LOGICA

$$A \Rightarrow B,$$

DOVE A E B SONO DEGLI ENUNCIATI, SI PUÒ ANCHE INTERPRETARE DICENDO CHE L'ENUNCIATO A ESPRIME UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ VALGA L'ENUNCIATO B, IL QUALE È UNA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ VALGA A.

L'INSIEME VUOTO $S = \emptyset$ SODDISFA LA DEFINIZIONE DI INSIEME APERTO.

11 NOV. 2020

DEFINIZIONE: UN SOTTOINSIEME $T \subset \mathbb{R}$ SI DICE CHIUSO SE IL COMPLEMENTARE $\mathbb{R} \setminus T$ È APERTO.

IN PARTICOLARE, L'INSIEME $T = \mathbb{R}$ È CHIUSO PERCHÉ IL SUO COMPLEMENTARE $S = \mathbb{R} \setminus T = \emptyset$ È APERTO.

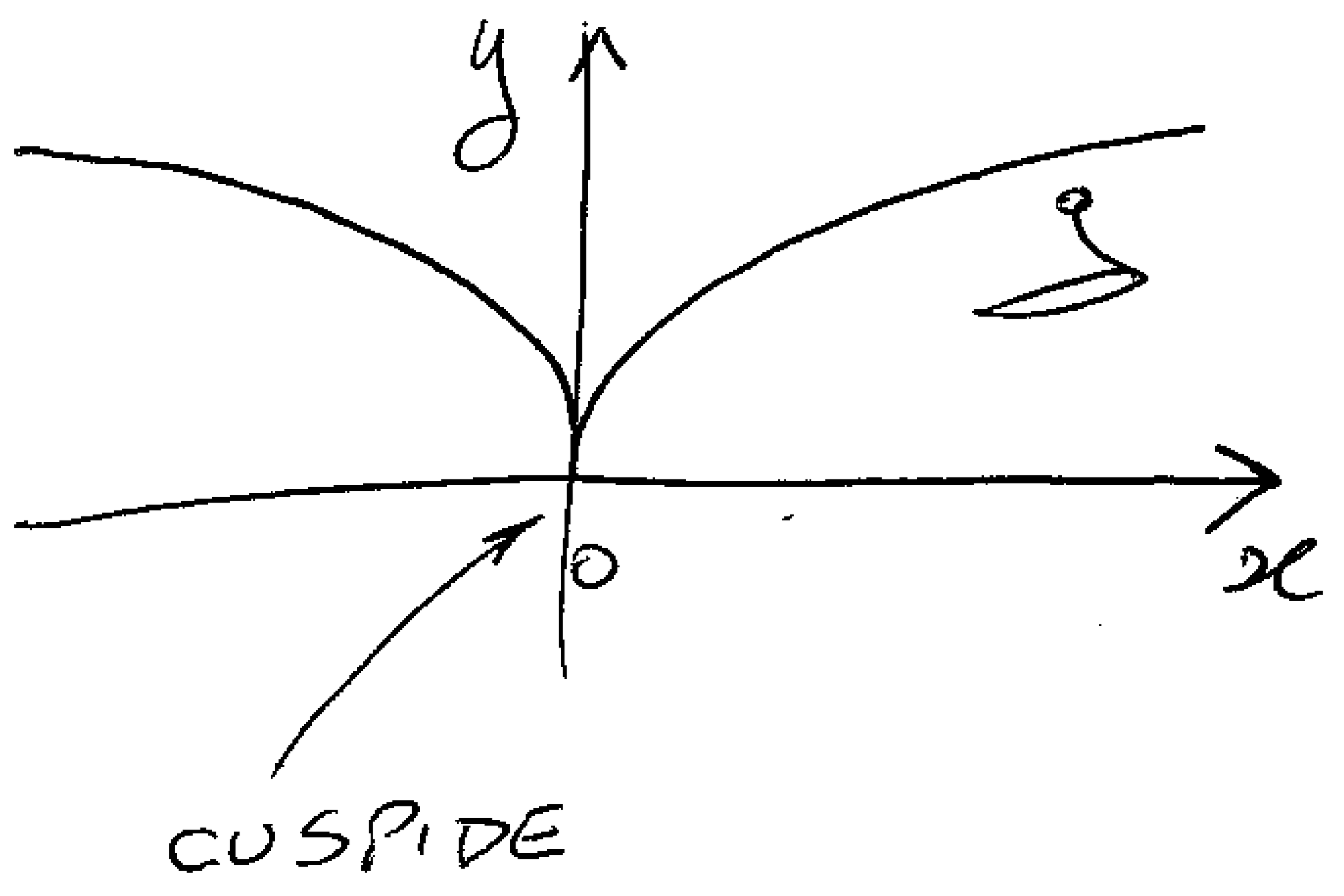
ANCHE L'INSIEME VUOTO È CHIUSO PERCHÉ IL SUO COMPLEMENTARE $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ È APERTO.

QUESTI CONCETTI FANNO PARTE DELLA TOPOLOGIA DELLA RETTA.

FUNZIONI CHE NON SONO NÉ PARI, NÉ DISPARI

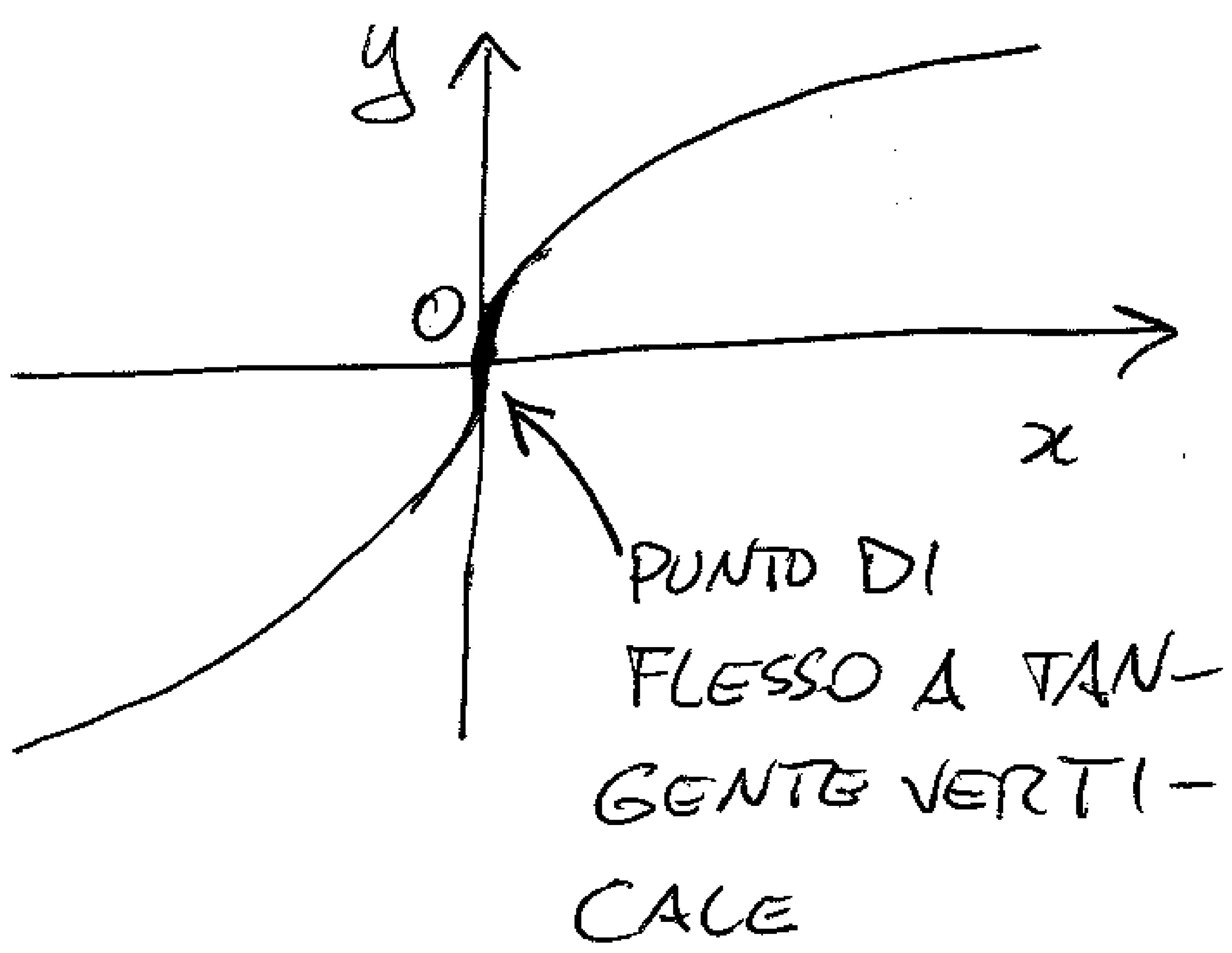
LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ NON È NÉ PARI, NÉ DISPARI PERCHÉ IL SUO DOMINIO $S = [0, +\infty)$ NON È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE.

SI PUÒ DEFINIRE IL PROLUNGAMENTO PER PARITÀ $g(x) = \sqrt{|x|}$, CHE È UNA FUNZIONE PARI IN QUANTO $g(x) = g(-x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E INOLTRE $g(x) = f(x)$ PER OGNI $x \in S$.



SI PUÒ ANCHE DEFINIRE IL PROLUNGAMENTO PER DISPARITÀ $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$

CHE È UNA FUNZIONE DISPARI PERCHÉ $h(x) = -h(-x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E INOLTRE $h(x) = f(x)$ PER OGNI $x \in S$.



ALTRO ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = e^x$, COME ANCHE $g(x) = 2^x$ E $h(x) = 10^x$, HA PER DOMINIO L'INTERVALLO $S = (-\infty, +\infty)$, CHE È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, MA NON È DISPARI PERCHÉ È POSITIVA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. AFFINCHÉ $f(x) = e^x$ SIA PARI, OCCORRE CHE $f(x) = f(-x)$ PER OGNI x, CIOÉ CHE

$$e^x = e^{-x}.$$

MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER e^x LA CONDIZIONE SI RISCRIVE

$$e^{2x} = 1,$$

IL CHE È VERO SE $x = 0$, MA NON È VERO SE $x = \frac{1}{2}$ IN QUANTO

$$e^{2\frac{1}{2}} = e.$$

LE FUNZIONI ESPONENZIALI SONO MONOTONE

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE $f : S \to \mathbb{R}$, CON $S \subset \mathbb{R}$, SI DICE STRETTAMENTE CRESCENTE SE PER OGNI $x_1, x_2 \in S$, CON $x_1 < x_2$, RISULTA

$$f(x_1) < f(x_2)$$

VERIFICHIAMO CHE LA FUNZIONE $f(x) = e^x$ È STRETTAMENTE CRESCENTE.

PRENDIAMO $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ CON $x_1 < x_2$ E VERIFICHIAMO CHE

$$e^{x_1} < e^{x_2}$$

DIVIDENDO AMBO I MEMBRI PER e^{x_1} LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA

$$e^{x_2 - x_1} > 1$$

RESTA DA VERIFICARE CHE

$$e^x > 1 \text{ PER } x > 0$$

ANZI, È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE

$$e^q > 1 \text{ PER OGNI RAZIONALE } q > 0$$

(LEZIONE DEL 13 OTTOBRE)

ALLORA PRENDO $q = \frac{n}{k}$, CON n, k INTERI POSITIVI, E STUDIO

$$e^{\frac{n}{k}} = \left(\sqrt[k]{e}\right)^n$$

RISULTA CHE $e^{\frac{n}{k}} > 1$ PERCHÉ $\sqrt[k]{e} > 1$

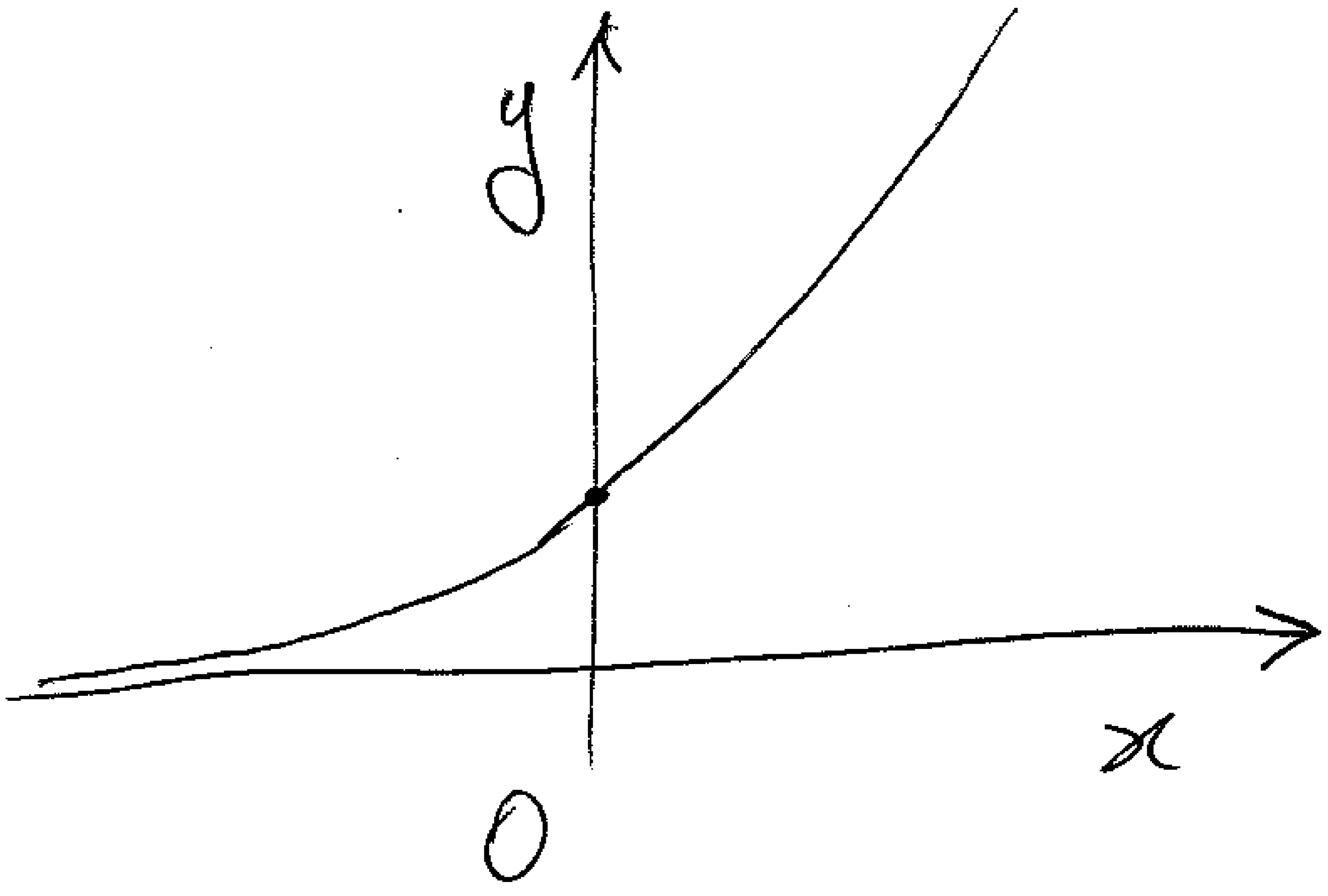
E QUESTO È VERO PERCHÉ

$$e > 1$$

(SE FOSSE $\sqrt[k]{e} \leq 1$, ALLORA SI AVREBBE

$$\underbrace{\sqrt[k]{e} \cdot \ldots \cdot \sqrt[k]{e}}_{k \text{ VOLTE}} \leq 1 \Big)$$

GRAFICO DI $f(x) = e^x$:



DATA UNA $f: S \to \mathbb{R}$, CON $S \subset \mathbb{R}$ SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, LA FUNZIONE $g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ HA PER DOMINIO S E RISULTA PARI PERCHÉ

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} =$$

$$= g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$$

INOLTRE LA FUNZIONE $h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$ È DISPARI PERCHÉ $h(-x)$

$$= \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) =$$

$$= -h(x).$$

SI VERIFICA CHE $g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$

SI DICE CHE $g(x)$ E $h(x)$ SONO LA PARTE PARI E LA PARTE DISPARI DI f

APPLICAZIONE! POSTO

$$f(x) = e^x \quad \text{SI TROVA}$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

FUNZIONI MOLTO IMPORTANTI, DETTE COSENO IPERBOLICO $\cosh x =$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

E

SENO IPERBOLICO

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

<u>DEFINIZIONE:</u> DATA UNA $f: S \to \mathbb{R}$, E FISSATO UN SOTTOINSIEME $T \subset S$, LA RESTRIZIONE $f|_T$ È LA FUNZIONE

$$f|_T : T \to \mathbb{R}$$

DEFINITA DA $f|_T(x) = f(x)$ PER OGNI $x \in T$.

<u>ESEMPIO:</u> POSTO $f(x) = [x]$ E $T = \mathbb{Z}$, SI HA

$$f|_{\mathbb{Z}}(z) = z$$

E QUESTA È DISPARI PERCHÉ $f|_{\mathbb{Z}}(-z) =$

$$= -z = -f|_{\mathbb{Z}}(z)$$

11 NOV. 2020

LIMITI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f:(a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$

SI SCRIVE

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

SE PER OGNI $\varepsilon>0$ ESISTE $N\in\mathbb{R}$ TALE CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

SIA SODDISFATTA OGNIQUALVOLTA $x>N$.

CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE L'INSIEME ECCEZIONALE $\{x\in(a,+\infty): |f(x)-l|\geq\varepsilon\}$ È SUPERIORMENTE LIMITATO.

12 NOV. 2020

LA DISUGUAGLIANZA

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

EQUIVALE A

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$$

LE QUALI MOSTRANO CHE f È LIMITATA SULL'INTERVALLO $(N,+\infty)$, E CIOÈ LA RESTRIZIONE $f|_{(N,+\infty)}$ È UNA FUNZIONE LIMITATA.

ANCHE PER I LIMITI DI FUNZIONE SI PUÒ SCRIVERE

$$f\longrightarrow l$$

E VALGONO I TEOREMI SUI LIMITI

TEST [201]

PER CAPIRE LA PARITÀ O DISPARITÀ DI $f(x) = [x]$ PER $x \in \mathbb{R}$ POTREMMO ESAMINARE IL CASO $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$ E CONFRONTARE $[x]$ CON $[-x]$.

SI HA: $[0{,}5] = 0$

E $[-0{,}5] = -1$

TEOREMI SUI LIMITI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

SE $f \to l_1 \in \mathbb{R}$, $g \to l_2 \in \mathbb{R}$,

ALLORA $f(x) \pm g(x) \to l_1 \pm l_2$ E

$f(x) \cdot g(x) \to l_1 l_2$.

SE, INOLTRE, $l_2 \neq 0$,

ALLORA $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{l_1}{l_2}$.

SE, INOLTRE, $l_2 > 0$,

ALLORA $\left(g(x)\right)^{f(x)} \to l_2^{\,l_1}$

12 NOV. 2020

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO:

SE $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ SODDISFA $f(x)\geq 0$ PER OGNI $x>a$, E SE $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, ALLORA $\ell\geq 0$.

COROLLARIO: SE $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell>0$ ALLORA ESISTE UN INTERVALLO $(N,+\infty)$ NEL QUALE RISULTA $f(x)>0$ PER OGNI $x\in(N,+\infty)$

12 NOV. 2020

TEOREMA DEL CONFRONTO

DATE f,g SODDISFACENTI $f(x)\leq g(x)$ PER OGNI x,

(2) SE $f\to+\infty$ ALLORA ANCHE $g\to+\infty$.

(1) SE $f\to L_1$ E $g\to L_2$ ALLORA $L_1\leq L_2$

(3) DATE f,g,h SODDISFACENTI $f(x)\leq$ $\leq g(x)\leq h(x)$ PER OGNI x, SE $f\to L$ E $h\to L$, ALLORA ANCHE $g\to L$.

LIMITE INFINITO PER $x \longrightarrow +\infty$

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

SI SCRIVE

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

O ANCHE $f \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

SE PER OGNI $M > 0$ ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$f(x) > M$$

SIA SODDISFATTA OGNIQUALVOLTA $x > N$.

12 NOV. 2020

SIMILMENTE, SI SCRIVE

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

O ANCHE $f \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

SE PER OGNI $M < 0$ ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE LA DISUGUAGLIANZA $f(x) < M$ SIA SODDISFATTA OGNIQUALVOLTA $x > N$.

ESEMPIO: TROVIAMO IL

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

PREMETTIAMO L'OSSERVAZIONE CHE $c_n =$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \longrightarrow e$$

DOVE $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

COME NELLA LEZIONE DEL 20 OTTOBRE.

12 NOV. 2020

IL FATTO CHE $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $\to e$ SIGNIFICA CHE, PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE n_1 TALE CHE RISULTI

$$b_n < e + \varepsilon$$

PER $n \geq n_1$. IL FATTO CHE $c_n \longrightarrow e$ SIGNIFICA CHE ESISTE n_2 TALE CHE $e - \varepsilon < c_n$

PER OGNI $n \geq n_2$.

DEFINISCO $N = \max\{n_1, n_2\}$

COSICCHÉ, SE $x > N$, ALLORA $n = [x] \geq N$.

SICCOME $n \le x < n+1$,

SI HA CHE

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le$$

$$\le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

E QUINDI

$$e-\varepsilon \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e+\varepsilon$$

PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE, SI PUÒ SCRIVERE $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

12 NOV. 2020

ESEMPIO: FISSATO $b>1$, TROVIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x}.$$

POSTO $n = [x]$ SI HA CHE $n \le x < n+1$

QUINDI, A CONDIZIONE CHE $n > 0$ (IL CHE SIGNIFICA $x \ge 1$)

RISULTA

$$\frac{b^n}{n+1} \le \frac{b^x}{x}.$$

SICCOME $\frac{b^n}{n+1} = \frac{b^n}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$, IL PRIMO MEMBRO DIVERGE E QUINDI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty.$$

13 NOV. 2020

LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

DATE DUE FUNZIONI, $f(x)$ E $g(t)$, SI PUÒ DEFINIRE LA FUNZIONE COMPOSTA $f(g(t))$ A CONDIZIONE CHE I VALORI DI $g(t)$ APPARTENGANO AL DOMINIO DI f. CIOÈ, SE

$$f: S \longrightarrow \mathbb{R},$$

LA CONDIZIONE PER DEFINIRE LA FUNZIONE COMPOSTA È CHE

$$\mathrm{Im}\, g \subset S$$

DOVE $\mathrm{Im}\, g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = g(t)$ PER ALMENO UN $t \}$

ESEMPIO: POSTO $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ E $g(t) = t-1$, LA FUNZIONE COMPOSTA È

$$f(g(t)) = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}$$

PRECISIAMO IL DOMINIO DI $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

IL PUNTO $x=0$ NON APPARTIENE AL DOMINIO DI f. DOBBIAMO ASSICURARCI CHE RISULTI $1+\frac{1}{x} > 0$.

QUESTO AVVIENE SE $x > 0$.

DOBBIAMO CERCARE EVENTUALI $x < 0$ TALI CHE

$$\frac{1}{x} > -1$$

MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $x < 0$,

LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA

$$1 < -x$$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE $x < -1$.

QUINDI IL DOMINIO DI f È L'INSIEME $S = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

INTERPRETAZIONE GRAFICA

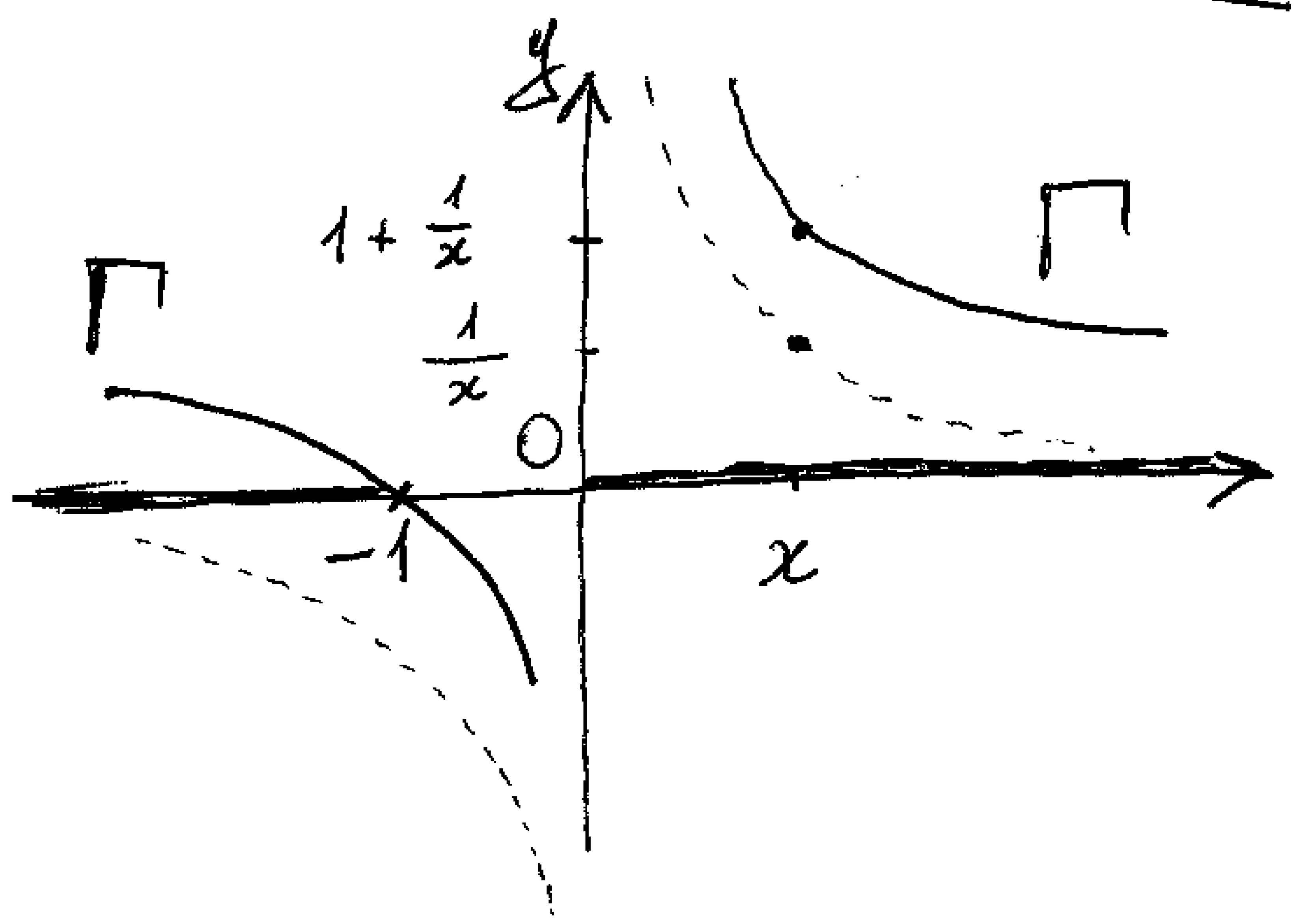


GRAFICO Γ DELLA FUNZIONE $1+\frac{1}{x}$

RICAVIAMO SUBITO IL DOMINIO DI $f(t-1)$: SONO AMMESSI DUE CASI:

1) $t-1 < -1$, CIOÈ $t<0$;

2) $t-1 > 0$, CIOÈ $t > 1$

DUNQUE IL DOMINIO DELLA FUNZIONE $f(t-1)$ È L'INSIEME $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

TROVIAMO ORA IL LIMITE

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1}$$

PRESO $\varepsilon > 0$, SAPPIAMO DAL 12 NOVEMBRE CHE ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$e-\varepsilon \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le e+\varepsilon$$

PER OGNI $x > N$.

MA ALLORA, SE PRENDO

$$t > N+1,$$

RISULTA

$$e-\varepsilon \le \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \le e+\varepsilon$$

QUINDI È SODDISFATTA LA DEFINIZIONE DI

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = e.$$

ENUNCIATO GENERALE:

SE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

E SE

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$$

ALLORA $\lim_{t\to+\infty} f(g(t)) = L$

LIMITI PER $x \to -\infty$

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $f:(-\infty, b) \to \mathbb{R}$.

SI SCRIVE $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE RISULTI

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

OGNIQUALVOLTA $x < N$.

SI SCRIVE $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

SE PER OGNI $M > 0$ ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$f(x) > M$ PER OGNI $x < N$.

INFINE, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

SE PER OGNI $M < 0$ ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) < M$

PER OGNI $x < N$

ESEMPIO: CERCHIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

POSTO $x = -t$, SI HA CHE $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$

$$= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

POICHÉ

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = e$$

E $\lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t-1}\right) = 1$,

PER IL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO SI HA CHE LA FUNZIONE $g(t) =$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

SODDISFA

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = e.$$

VUOL DIRE CHE, PRESO $\varepsilon > 0$, ESISTE $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$|g(t) - e| < \varepsilon$$

PER OGNI $t > N$. POICHÉ $t = -x$, DEDUCO CHE

$$|f(x) - e| < \varepsilon$$

PER OGNI $x < -N$,

TENDO CONTO DEL FATTO CHE $f(x) = g(t)$. QUINDI

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

13 NOV. 2020

ENUNCIATO GENERALE:

SE $\lim_{t \to +\infty} g(t) = L$

ALLORA

$$\lim_{x \to -\infty} g(-x) = L.$$

ESEMPIO (BIS) POSTO

$$g(t) = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t, \quad E$$

SAPENDO CHE

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = e,$$

TROVIAMO CHE

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = e$$

SEMPLIFICHIAMO IL RISULTATO:

$$\left(1 + \frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-x}$$

$$= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \quad \text{QUINDI}$$

POSSIAMO RISCRIVERE IL RISULTATO NELLA FORMA

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

COME ABBIAMO VERIFICATO DIRETTAMENTE.

LIMITI AL FINITO

LIMITE DESTRO

CONSIDERIAMO $f:(x_0, b) \to \mathbb{R}$.

SI SCRIVE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ RISULTA

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{PER}$$

OGNI $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

CON UN OPPORTUNO VALORE DI δ (DELTA).

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

SE PER OGNI $M > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SI ABBIA $f(x) > M$ PER OGNI $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

SE PER OGNI $M < 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE $f(x) < M$ OGNIQUALVOLTA $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

LIMITE SINISTRO:

CONSIDERIAMO ADESSO UNA $f:(a, x_0) \to \mathbb{R}$.

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$= l \in \mathbb{R}$ SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE RISULTI

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

PER OGNI $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

13 NOV. 2020

E SIMILMENTE SI DEFINISCONO

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

INFINE, SE $x_0 \in (a,b)$ E

$$f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},$$

SI SCRIVE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

SE RISULTA $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$= \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. IN TAL

CASO SI INDICA CON L

IL COMUNE VALORE DEI LIMITI DESTRO E SINISTRO.

19 NOV. 2020

SI NOTI CHE IN NESSUN CASO IL VALORE $f(x_0)$

INTERVIENE NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE, ANZI,

IL PUNTO x_0 PUÒ PERFINO NON APPARTENERE AL DOMINIO DELLA FUNZIONE f.

17 NOV. 2020

PROBLEMI [202]

1a) LA RELAZIONE

$$\frac{1}{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

EQUIVALE A

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

E ANCHE A

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

CERCHIAMO $N \in \mathbb{R}$ TALE CHE QUESTE DISUGUAGLIANZE VALGANO PER OGNI $x > N$.

PER SODDISFARE

$$-\varepsilon < \frac{1}{x}$$

BASTA PRENDERE $x > 0$.

PER SODDISFARE

$$\frac{1}{x} < \varepsilon$$

CON $x > 0$, BASTA CHE

$$x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

DUNQUE, SE PRENDO

$$x > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

RISULTA SODDISFATTA LA RELAZIONE

$$\frac{1}{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

E PERCIÒ ESISTE IL NUMERO N RICHIESTO DAL PROBLEMA: BASTA PRENDERE $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

1b) PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE (11 OTTOBRE) LE CONSIDERAZIONI PRECEDENTI CONSENTONO DI SCRIVERE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

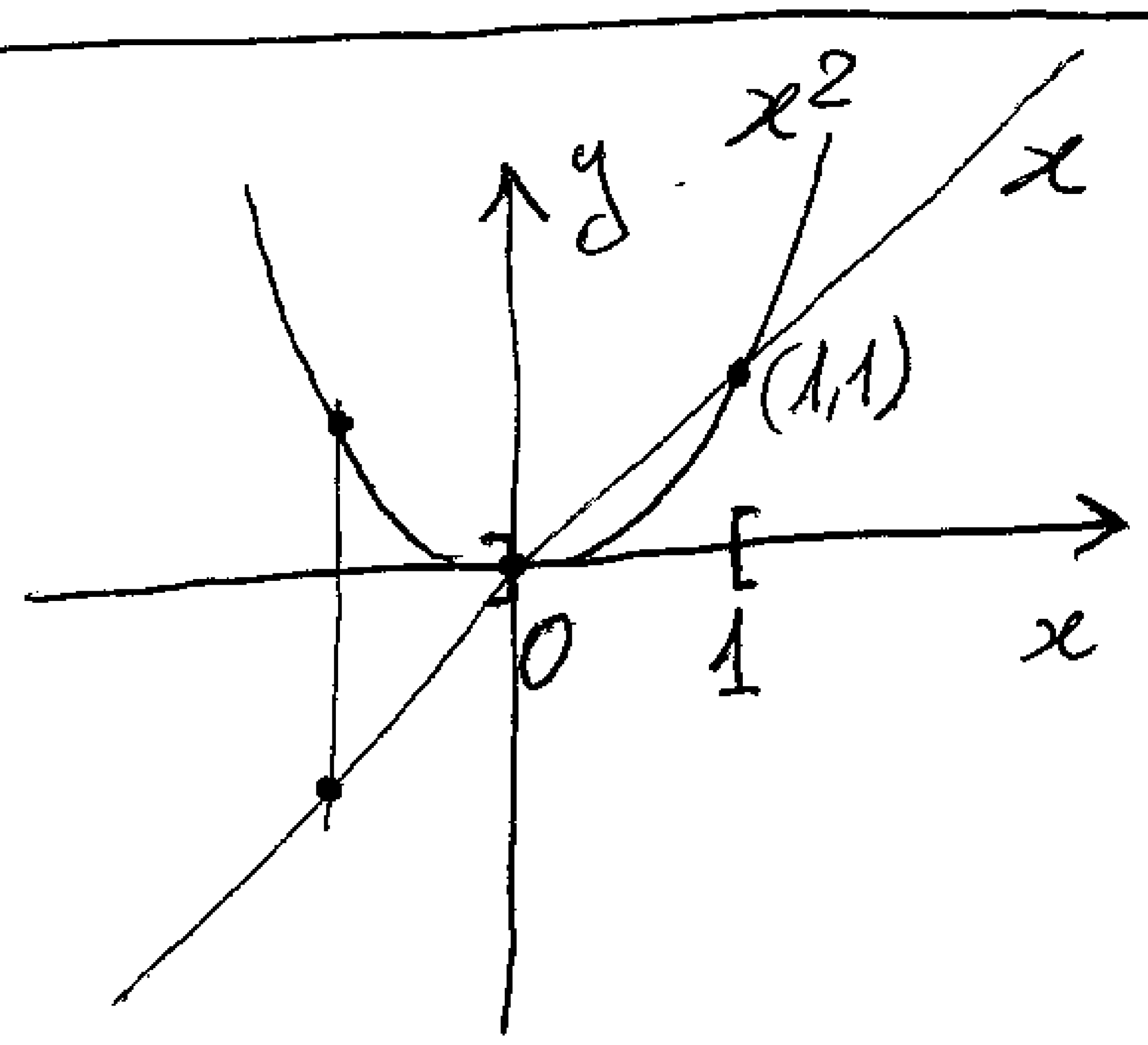
2a) OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE IL NUMERO $x = 0$ SODDISFA LA DISUGUAGLIANZA $x^2 \geq x$.

CERCHIAMO SOLUZIONI $x > 0$. IN TAL CASO, LA DISUGUAGLIANZA $x^2 \geq x$ EQUIVALE A $x \geq 1$, DUNQUE I NUMERI $x \geq 1$ SONO SOLUZIONI.

CERCHIAMO, INFINE, SOLUZIONI $x < 0$. IN QUESTO CASO, LA DISUGUAGLIANZA $x^2 \geq x$ EQUIVALE A $x \leq 1$, DUNQUE TUTTI I NUMERI NEGATIVI SONO SOLUZIONI.

17 NOV. 2020

INTERPRETAZIONE GRAFICA:



IN DEFINITIVA, L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE $x^2 \geq x$ È L'INSIEME

$$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

ALLA STESSA CONCLUSIONE SI PERVIENE ANCHE RISCRIVENDO $x^2 \geq x$ NELLA FORMA $x^2 - x \geq 0$ E POI $x \cdot (x-1) \geq 0$, QUINDI APPLICANDO LA REGOLA DEI SEGNI.

17 NOV. 2020

PROBLEMI [202]

2b) SI HA CHE

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

IN QUANTO, PER OGNI $M > 0$ SI HA IN VIRTÙ DELLE CONSIDERAZIONI PRECEDENTI:

$$x^2 \geq x > M$$

PER OGNI $x > N = \max\{1, M\}$.

<u>OSSERVAZIONE:</u> NELLA DEFINIZIONE DI

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

NON È NECESSARIO CONSIDERARE TUTTI GLI $M > 0$ MA SONO SUFFICIENTI GLI $M > M_0 \in \mathbb{R}$.

IN GENERALE, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

QUALUNQUE SIA IL PARAMETRO $\alpha > 0$.

LO STESSO RAGIONAMENTO DEL PROBLEMA 2 VALE PER OGNI $\alpha \geq 1$ IN QUANTO RISULTA

$$x^\alpha \geq x$$

PER OGNI $x \geq 1$, E LA CONCLUSIONE SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

PER $\alpha \in (0,1)$ APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE: PRESO $M > 0$ VEDIAMO CHE SI HA $x^\alpha > M$ PER OGNI $x > N = M^{1/\alpha}$

CIÒ CHE FA PASSARE DA

$$x > M^{1/\alpha}$$

A $x^\alpha > M$ È LA

STRETTA MONOTONIA

DELLA FUNZIONE $f(x) = x^\alpha$, CON $x, \alpha > 0$

CIOÈ IL FATTO CHE SE

$$0 < x_1 < x_2$$

ALLORA $x_1^\alpha < x_2^\alpha$.

QUEST'ULTIMA DISUGUAGLIANZA EQUIVALE

A $$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\alpha > 1$$

E QUESTA È VERA PERCHÉ $\frac{x_2}{x_1} > 1$

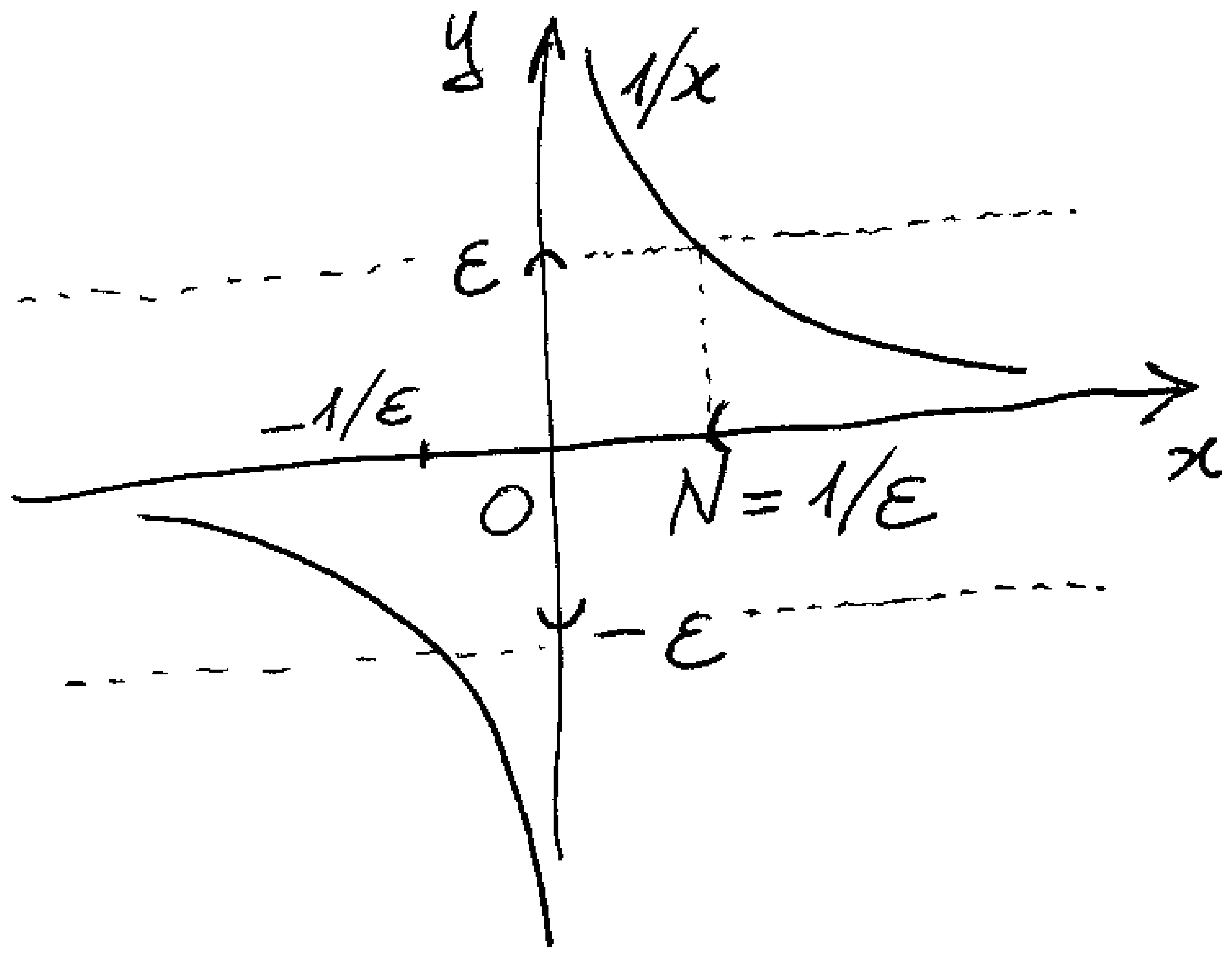
E $\alpha > 0$: VEDERE

LA LEZIONE DEL 11/11.

17 NOV. 2020

INTERPRETAZIONE GRAFICA DEL PROBLEMA 1

(VEDI 10 NOVEMBRE)



OSSERVIAMO CHE IL RAGIONAMENTO SI PUÒ ADATTARE

PER DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

17 NOV. 2020

TEOREMA: SE $f:(a, +\infty) \to \mathbb{R}$ SODDISFA

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ALLORA $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$

DIMOSTRAZIONE: PRESO $\varepsilon > 0$ DEVO TROVARE N TALE CHE RISULTI

$$-\varepsilon < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$$

PER OGNI $x > N$.

PRENDIAMO ISPIRAZIONE DAL PROBLEMA 1.

SAPENDO CHE $f \to +\infty$, PRENDO $M = 0$ NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE, E QUESTA MI ASSICURA CHE $f(x) > 0$ PER OGNI $x > N_1$.

QUINDI PER $x > N_1$ RISULTA

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{f(x)}$$

RESTA DA VERIFICARE CHE $\frac{1}{f(x)} < \varepsilon$.

ESSENDO $f(x) > 0$ PER $x \in (N_1, +\infty)$, CIÒ EQUIVALE A VERIFICARE CHE $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

SAPENDO CHE $f \to +\infty$, PRENDO $M = \frac{1}{\varepsilon}$ NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE,

E QUESTA MI ASSICURA CHE $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ PER OGNI $x > N$. MA ALLORA SI HA

$$-\varepsilon < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$$

PER OGNI $x > N$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

IL RISULTATO CONTINUA A VALERE SOTTO L'IPOTESI CHE

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

CIOÈ SI DIMOSTRA CHE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

SIMILMENTE, SE

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = +\infty$$

SI DIMOSTRA CHE

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

NON SOLO: LA TESI

$$\frac{1}{f(x)} \longrightarrow 0$$

SI RAGGIUNGE ANCHE A PARTIRE DALL'IPOTESI CHE $f(x) \longrightarrow -\infty$, O ANCHE DALL'IPOTESI PIÙ GENERALE CHE

$$|f(x)| \longrightarrow +\infty.$$

ESEMPIO: LA FUNZIONE

$$f(x) = (-1)^{[x]} x$$ NON

AMMETTE LIMITE PER

$x \to +\infty$, PERÒ SI

HA CHE $$|f(x)| = |x|$$

E QUINDI

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$$

MA ALLORA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(-1)^{[x]} x} = 0$$

17 NOV. 2020

TUTTE QUESTE CONSIDERAZIONI SI ESPRIMONO, TALVOLTA, CON LA FORMULA

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

COSTRUITA CON UNA FRAZIONE ED UN'UGUAGLIANZA, CHE SEMBRA ESPRIMERE LA DIVISIONE DELL'UNITÀ (1) PER L'INFINITO (∞).

PROBLEMI [202]

3a) POSTO $n = [x]$, SI HA CHE $n \leq x < n+1$ COME GIÀ OSSERVATO IL 12 NOVEMBRE. VERIFICHIAMO INOLTRE, SEGUENDO IL RAGIONAMENTO FATTO IL GIORNO 11/11 PER LA FUNZIONE e^x, CHE ANCHE LA FUNZIONE 2^x È STRETTAMENTE CRESCENTE: PRESI $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, CON $x_1 < x_2$, VERIFICHIAMO CHE $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

QUESTA DISUGUAGLIANZA EQUIVALE A $2^{x_2 - x_1} > 1$.

LA TESI SEGUE RICORDANDO CHE $b^{\alpha} > 1$ SE $b > 1$ E $\alpha > 0$: VEDERE LA DEFINIZIONE DELLE POTENZE CON ESPONENTE REALE TRATTATA IL 13 OTTOBRE, E IL RAGIONAMENTO DEL GIORNO 11/11. IN PARTICOLARE SI HA CHE

$$b^{\frac{n}{k}} = \left(\sqrt[k]{b}\right)^n$$

E $\sqrt[k]{b} > 1$ PERCHÉ

$$\underbrace{\sqrt[k]{b} \cdot \ldots \cdot \sqrt[k]{b}}_{k \text{ VOLTE}} = b > 1$$

IN CONCLUSIONE, SI HA $2^{[x]} \leq 2^x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

18 NOV. 2020

3b) SI HA CHE

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty.$$

PERCHÉ SAPPIAMO DAL PUNTO 3a CHE, POSTO $n = [x]$,

$$2^n \leq 2^x$$

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E SAPPIAMO DAL 14 OTTOBRE CHE $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

INVOCANDO QUINDI IL TEOREMA DEL CONFRONTO (12 NOVEMBRE) LA TESI SEGUE.

18 NOV. 2020

ESEMPIO DI LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

LO VERIFICHIAMO APPLICANDO LA DEFINIZIONE (13 NOVEMBRE). PER OGNI $M > 0$ RISULTA SODDISFATTA LA DISUGUAGLIANZA $\frac{1}{x} > M$ NELL'INTERVALLO $\left(0, \frac{1}{M}\right)$: INFATTI, SE $x \in \left(0, \frac{1}{M}\right)$ ALLORA $0 < x < \frac{1}{M}$ E QUINDI $\frac{1}{x} > M$. DUNQUE LA DEFINIZIONE È SODDISFATTA CON $x_0 = 0$ E

$$\delta = \frac{1}{M}$$

18 NOV. 2020

ESEMPIO DI LIMITE SINISTRO

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

LO VERIFICHIAMO APPLICANDO LA DEFINIZIONE: PRESO $M < 0$, RISULTA

$$\frac{1}{x} < M$$

PER OGNI $x \in \left(\frac{1}{M}, 0\right)$.

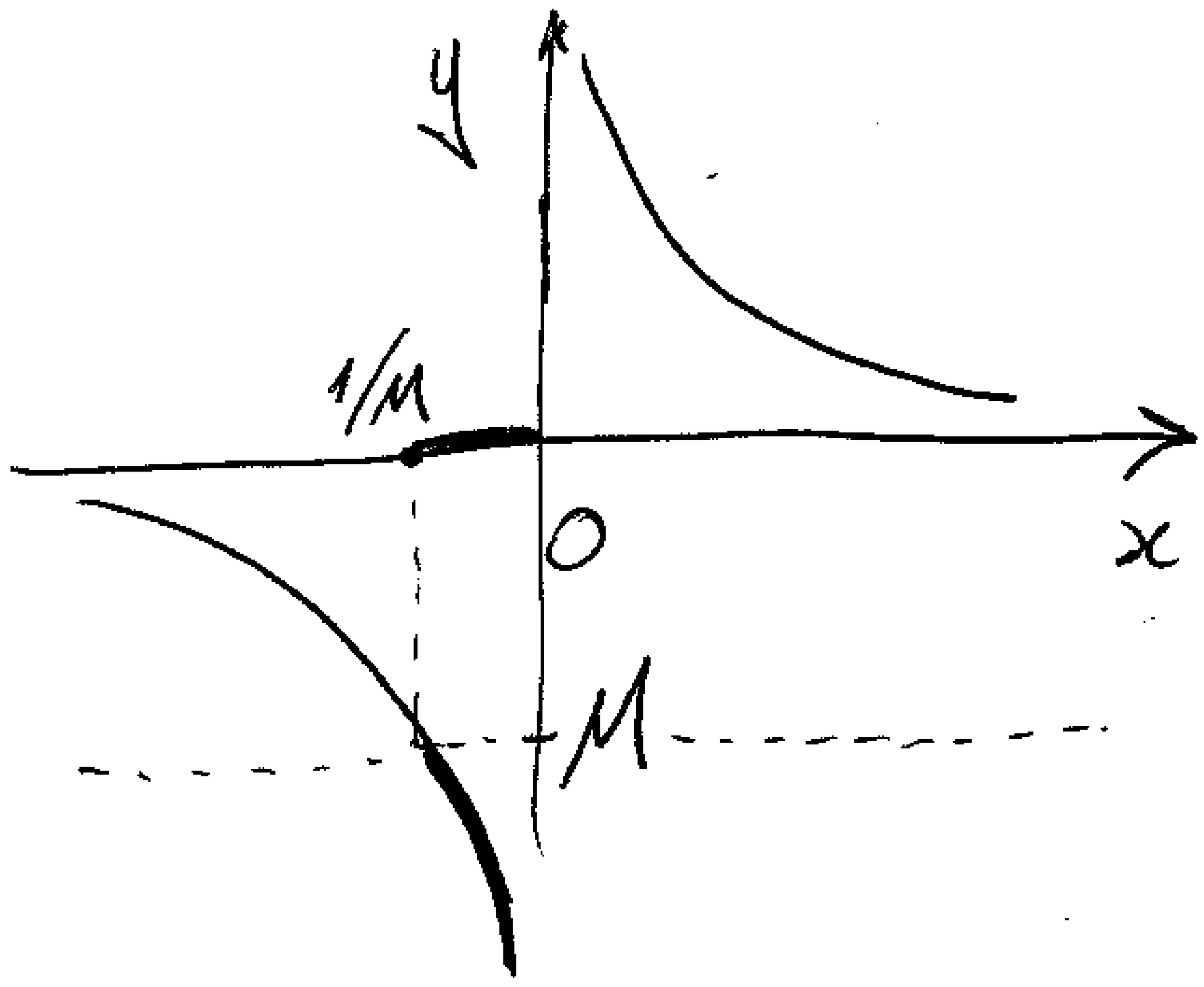
INFATTI SE $\frac{1}{M} < x < 0$, MOLTIPLICANDO PER $M < 0$ E DIVIDENDO PER $x < 0$ SI TROVA $\frac{1}{x} < M$.

QUINDI PER OGNI $M < 0$ ESISTE δ TALE CHE $\frac{1}{x} < M$ NELL'INTERVALLO

$$(0-\delta, \ 0): \quad \delta = -\frac{1}{M} > 0.$$

18 NOV. 2020

INTERPRETAZIONE GRAFICA (10 NOVEMBRE)



SICCOME $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$, SI PUÒ DIRE CHE LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{x}$ NON AMMETTE LIMITE PER $x \to 0$.

ESEMPIO DI LIMITE AL FINITO

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

LO VERIFICHIAMO APPLICANDO LA DEFINIZIONE: PRESO $M > 0$, LA DISUGUAGLIANZA $\left| \frac{1}{x} \right| > M$

È SODDISFATTA PER OGNI

$$x \in \left(-\frac{1}{M}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{M}\right)$$

INFATTI TALE RELAZIONE DI APPARTENENZA EQUIVALE ALLE DISUGUAGLIANZE

$$0 < |x| < \frac{1}{M}$$

DA CUI SEGUE

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} > M.$$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

SIA $\lim_{x \to 0^+} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$

CHE $\lim_{x \to 0^-} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$

E LA TESI SEGUE.

ALTRO ESEMPIO DI LIMITE AL FINITO

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

PER CALCOLARE QUESTO LIMITE, RICORDIAMO CHE

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(LEZIONI DEL 12 E 13 NOVEMBRE).

18 NOV. 2020

INCOMINCIAMO CERCANDO IL LIMITE

$$\lim_{h \to 0^+} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

SAPPIAMO CHE PER OGNI $\varepsilon > 0$ RISULTA

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$$

PER OGNI $x \in (N, +\infty)$ CON N OPPORTUNO, CHE POSSIAMO PRENDERE POSITIVO. MA ALLORA, SE PRENDO $h \in \left(0, \frac{1}{N}\right)$ HO CHE

$$e - \varepsilon < (1+h)^{\frac{1}{h}} < e + \varepsilon$$

BASTA INFATTI SCRIVERE LE DISUGUAGLIANZE DI PRIMA PONENDO $x = \frac{1}{h} > N$

SEGUE QUINDI CHE

$$\lim_{h \to 0^+} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

18 NOV. 2020

ENUNCIATO GENERALE:

SE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

ALLORA, POSTO $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, RISULTA

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) = L.$$

SIMILMENTE, SE

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

ALLORA, POSTO $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, RISULTA

$$\lim_{h \to 0^-} g(h) = L.$$

18 NOV. 2020

APPLICAZIONE: SAPENDO CHE $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (13 NOVEMBRE), DALL'ENUNCIATO PRECEDENTE SEGUE CHE $\lim_{h \to 0^-} g(h) = e$

DOVE $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right) = (1+h)^{\frac{1}{h}}$, QUINDI

$$\lim_{h \to 0^-} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

METTENDO INSIEME QUESTO RISULTATO CON IL PRECEDENTE, POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

18 NOV. 2020

PROBLEMA: STABILIRE SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{x \to 0} [x]$$

DOVE $[x]$ DENOTA LA PARTE INTERA DI x.

18 NOV. 2020

LA COSIDDETTA FORMA INDETERMINATA 1^∞

QUANDO $f(x) \to 1$ E $g(x) \to +\infty$, IL LIMITE DELLA POTENZA

$$(f(x))^{g(x)}$$

PUÒ: 1) NON ESISTERE; 2) ESSERE $+\infty$; 3) ESSERE UN QUALUNQUE $l \in [0, +\infty)$

AD ESEMPIO, CON $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ E CON

$g(x) = x \longrightarrow +\infty$ SI

HA $\left(f(x) \right)^{g(x)} =$

$= \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} \longrightarrow e$

MENTRE INVECE, CON

$f(x) = 1$ (COSTANTE)

E CON $g(x) = x$ SI HA

$\left(f(x) \right)^{g(x)} = 1^{x} = 1$

E QUINDI $\left(f(x) \right)^{g(x)} \to 1$

CERCHIAMO IL LIMITE:

$$\lim_{x \to 0^+} [x] = 0$$

PER OGNI $\varepsilon > 0$ PRENDO $\delta = 1$ E CONSTATO CHE NELL'INTERVALLO $(x_0, x_0 + \delta) = (0, 1)$ SI HA $[x] = 0$

E QUINDI RISULTA

$|f(x) - \ell| = |[x] - 0| = 0 < \varepsilon.$

SIMILMENTE SI TROVA

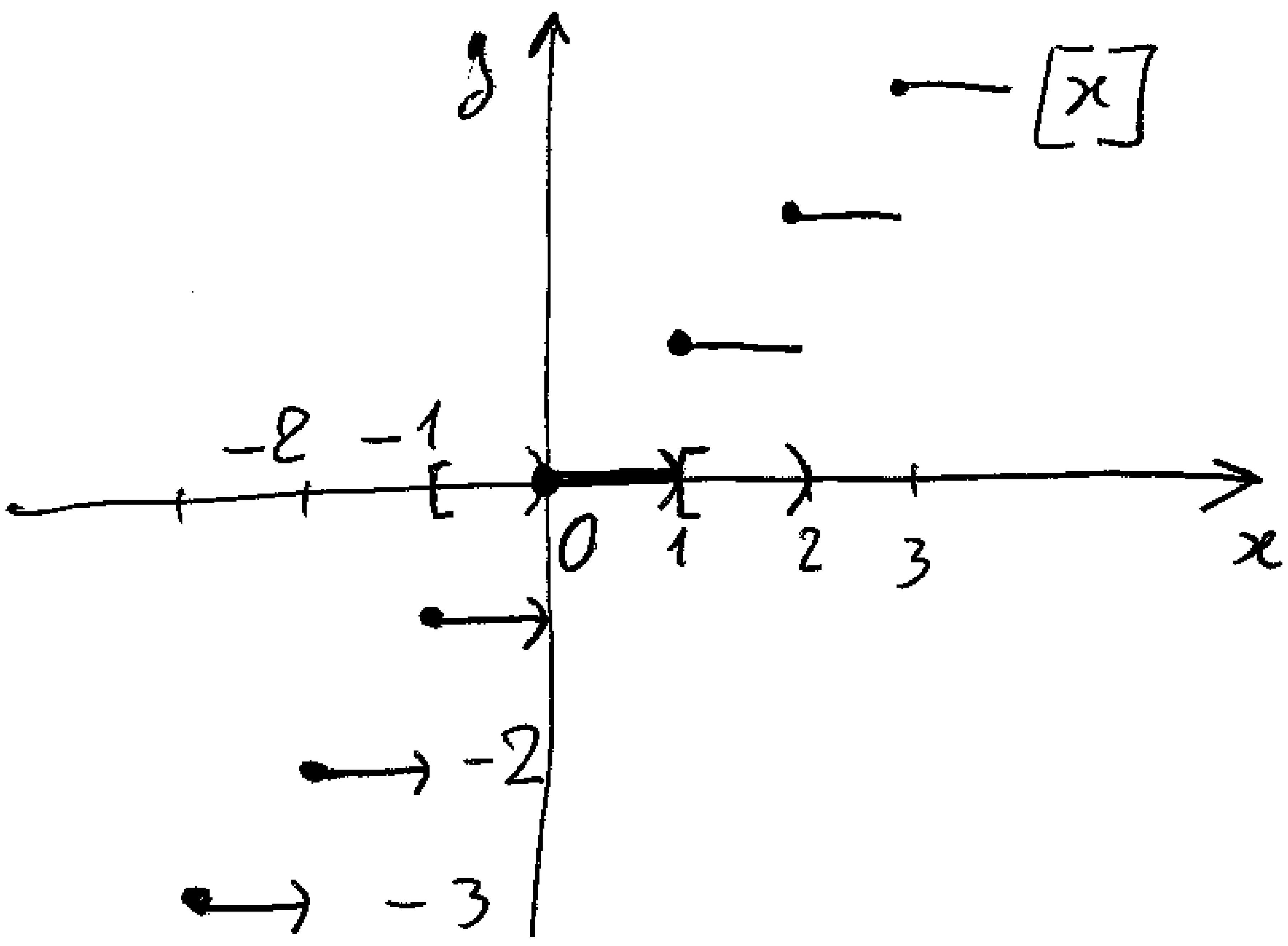
$$\lim_{x \to 0^-} [x] = -1$$

PERCHÉ PRENDO $\delta = 1$ E CONSTATO CHE NELL'INTERVALLO $(x_0 - \delta, x_0) = (-1, 0)$ RISULTA

$|[x] - (-1)| = 0 < \varepsilon$

1 9 NOV. 2020

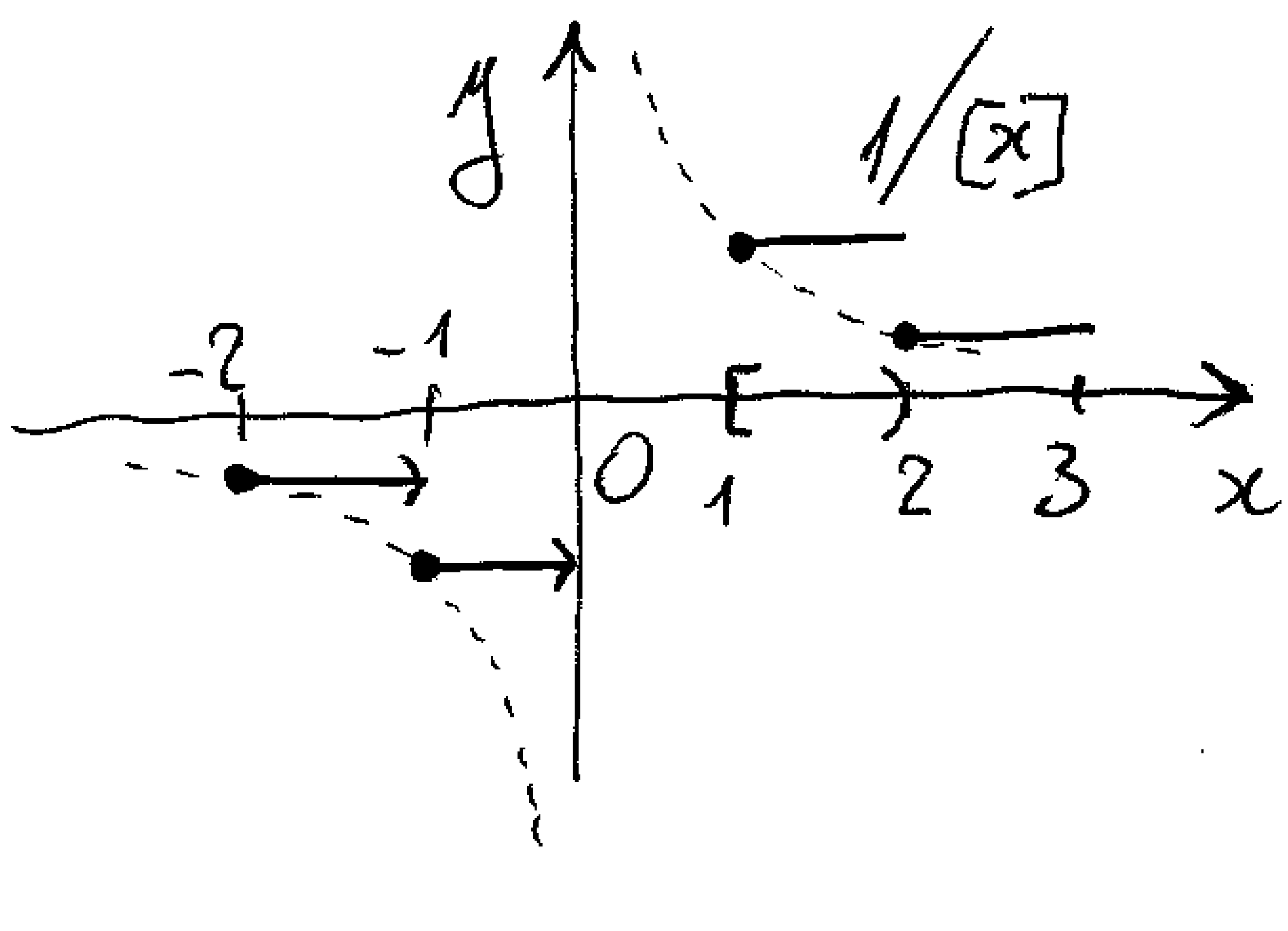
INTERPRETAZIONE GRAFICA



SE $x \in [z, z+1)$, CIOÈ SE $z \leq x < z+1$ SI HA $[x] = z \in \mathbb{Z}$ PERCHÉ z RISULTA IL PIÙ GRANDE INTERO NON SUPERIORE A x.

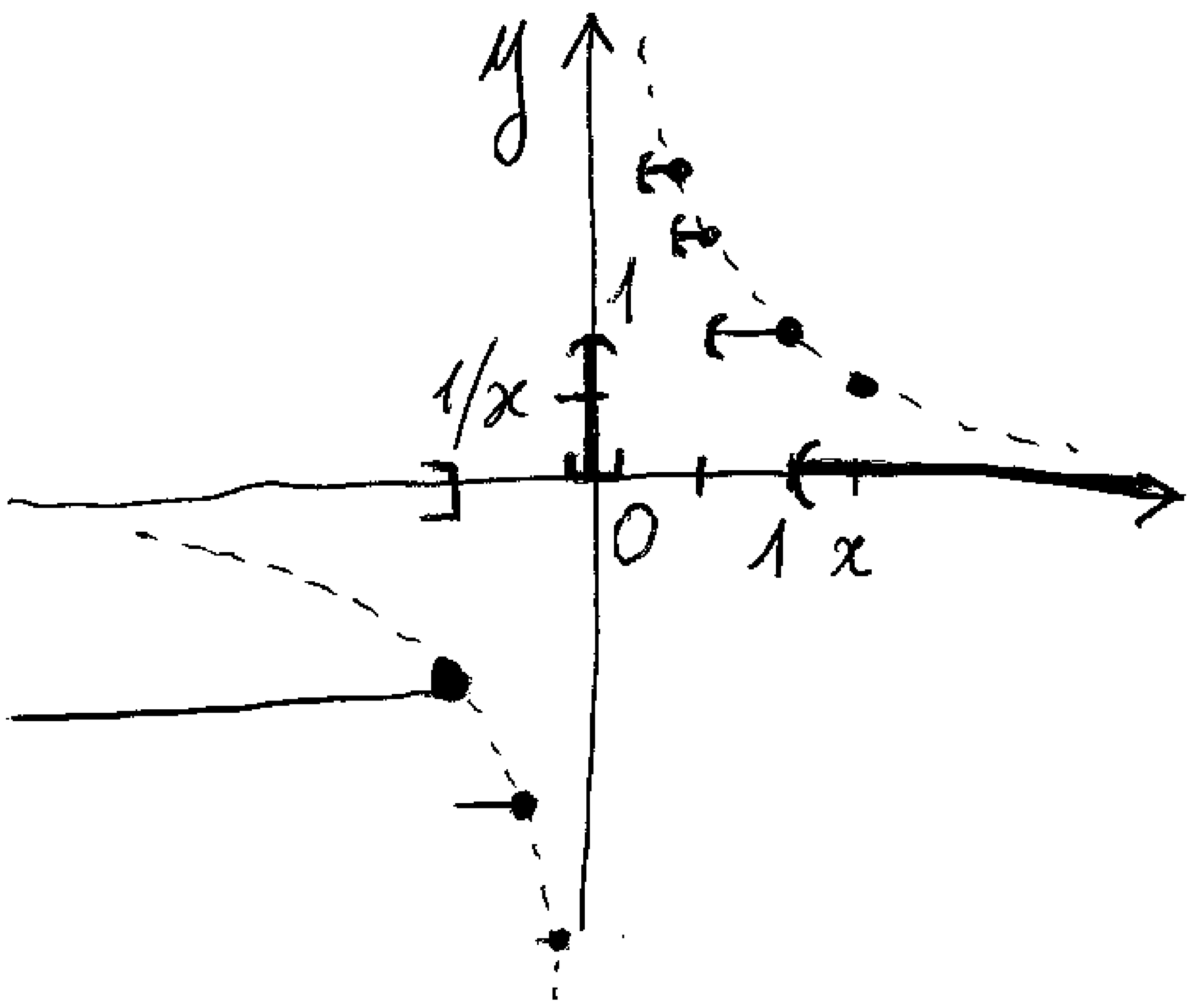
SICCOME $\lim_{x \to 0^-} [x] \neq \lim_{x \to 0^+} [x]$, SI PUÒ DIRE CHE LA FUNZIONE $f(x) = [x]$ NON AMMETTE LIMITE PER $x \to 0$.

STUDIAMO LA FUNZIONE $f(x) = \dfrac{1}{[x]}$. IL DOMINIO È COSTITUITO DA TUTTI I NUMERI REALI, TRANNE QUELLI PER I QUALI $[x] = 0$, PERCHÉ LA DIVISIONE PER ZERO NON È DEFINITA. QUINDI IL DOMINIO È L'INSIEME $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [0, 1)$. SE POI $z \leq x < z+1$, CON $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ALLORA $f(x) = \dfrac{1}{z}$



19 NOV. 2020

STUDIAMO ORA LA FUNZIONE $\left[\frac{1}{x}\right]$ DEFINITA PER $x \neq 0$.



PER OGNI $x > 1$ RISULTA $0 < \frac{1}{x} < 1$ QUNDI $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

PER OGNI $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ SI HA $1 \leq \frac{1}{x} < 2$ QUINDI $\left[\frac{1}{x}\right] = 1$, ECCETERA.

PER OGNI $x \leq -1$ SI HA $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ QUINDI $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$

19 NOV. 2020

SAPPIAMO DAL 17 NOVEMBRE CHE

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$$

QUALUNQUE SIA $\alpha > 0$.

SE $\alpha = 0$ SI HA $x^{0} = 1$ E IL LIMITE VALE 1.

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE $\lim_{x \to +\infty} x^{\beta}$, $\beta < 0$.

OSSERVIAMO CHE $x^{\beta} = \frac{1}{x^{-\beta}} = \frac{1}{x^{\alpha}}$, DOVE $\alpha = -\beta > 0$, QUINDI SI HA $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{x^{\alpha}} < \varepsilon$ NON APPENA $x^{\alpha} > M = \frac{1}{\varepsilon}$,

DUNQUE $\lim_{x \to +\infty} x^{\beta} = 0$

19 NOV. 2020

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha}$, CON $\alpha > 0$. POSTO $h = \frac{1}{x}$, SI HA $x^{\alpha} = \frac{1}{h^{\alpha}} = h^{-\alpha}$, E NOI ABBIAMO APPENA VERIFICATO CHE

$$\lim_{h \to +\infty} h^{-\alpha} = 0$$

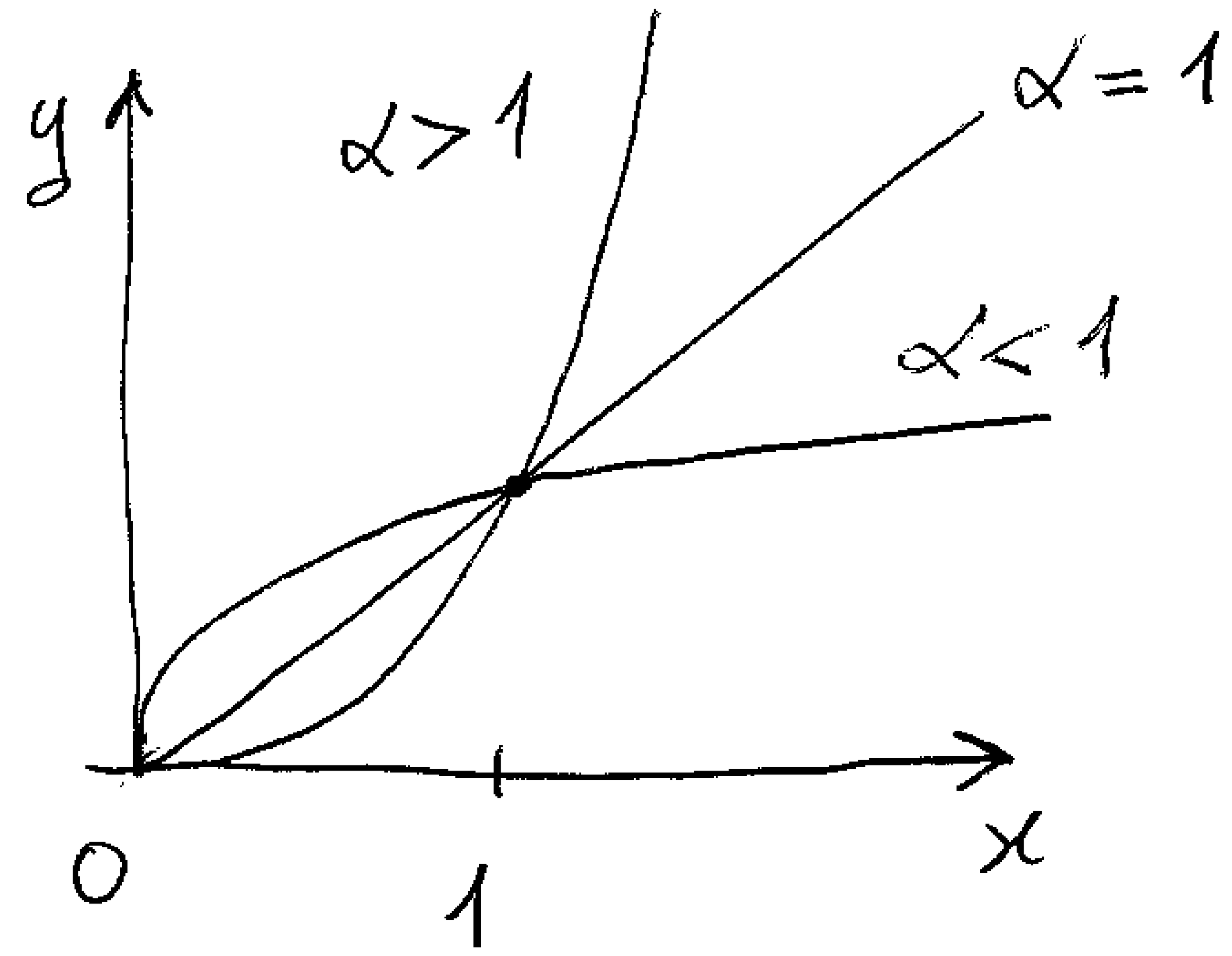
MA ALLORA CONCLUDIAMO CHE

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = \lim_{h \to +\infty} h^{-\alpha} = 0$$

COME VISTO IL 18/11

19 NOV. 2020

SI PUÒ VERIFICARE CHE IL GRAFICO DI x^{α}, $\alpha > 0$, SULL'INTERVALLO $[0, +\infty)$ HA QUESTO ASPETTO:



19 NOV. 2020

LIMITI DI FUNZIONI POLINOMIALI

CONSIDERIAMO $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ CON $n \geq 1$ E $a_n \neq 0$. SI TRATTA DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE DI GRADO n.

19 NOV. 2020

ESEMPI: $n=1$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{1} a_k x^k =$$

$$= a_0 + a_1 x;$$

$n=2$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2} a_k x^k =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

IN GENERALE, POSSIAMO SCRIVERE $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$= x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n} =$$

$$= x^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \right)$$

ED ABBIAMO APPENA VISTO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} x^{k-n} = 0$$

PER OGNI $k \in \{0, \dots, n-1\}$

QUINDI, PER I TEOREMI SUI LIMITI, SI HA CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k} \right)$$

$= a_n$ MENTRE

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

QUINDI IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ESISTE, ED È INFINITO CON IL SEGNO DI a_n

PROBLEMA: TROVARE IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} x^n, \quad n \geq 1$$

APPLICANDO L'ENUNCIATO DEL 13 NOVEMBRE.

COME PRENDERE LA FUNZIONE $g(t)$? PONENDO $x = -t$ SI PUÒ SCRIVERE $x^n = (-t)^n$, QUINDI $g(t)$ DEVE ESSERE TALE CHE

$$g(-x) = x^n$$

DUNQUE PRENDIAMO

$$g(t) = (-t)^n$$

E STUDIAMO IL $\lim_{t \to +\infty} (-t)^n$.

DISTINGUIAMO DUE CASI.

CASO 1: n PARI, CIOÈ $n = 2k$, CON $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

IN QUESTO CASO, SI HA

$$(-t)^n = (-1)^n t^n$$

$$= t^n$$

QUINDI $\lim_{t \to +\infty} (-t)^n =$

$$= \lim_{t \to +\infty} t^n = +\infty$$

(VEDERE LA LEZIONE DEL 17 NOVEMBRE).

CASO 2: n DISPARI,

CIOÉ $n = 2k+1$ CON

$k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

IN QUESTO CASO, SI HA

CHE $(-t)^n = (-1)^n t^n$

$= -t^n$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$$\lim_{t \to +\infty} (-t^n) = -\infty.$$

ENUNCIATO GENERALE:

SE $f(t) \longrightarrow +\infty$

E $h(t) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

SI DIMOSTRA CHE IL PRODOTTO $f(t)\, h(t)$ TENDE ALL'INFINITO CON IL SEGNO DI ℓ

IN DEFINITIVA, IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} x^n$$

È INFINITO CON IL SEGNO DI $(-1)^n$. VEDERE I GRAFICI DEL 11 NOVEMBRE.

STUDIAMO ALLORA IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} x^{-n}$$

CON $n \geq 1$. SI HA

CHE $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$,

ED ABBIAMO APPENA VERIFICATO CHE IL LIMITE DI x^n È INFINITO.

QUINDI $x^{-n} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

PER QUANTO VISTO IL 17 NOVEMBRE.

- STUDIAMO ADESSO IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

CON $n \geq 1$ E $a_n \neq 0$.

SI HA CHE $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$= a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k =$$

$$= x^n \cdot \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \right)$$

SAPPIAMO CHE

$$\lim_{x \to -\infty} x^{k-n} = 0$$

PER OGNI $k \in \{0, \dots, n-1\}$

QUINDI

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} \right) =$$

$$= a_n \neq 0$$

QUINDI IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

È INFINITO CON IL SEGNO DI $(-1)^n \cdot a_n$, DUNQUE $+\infty$ SE n È PARI E $a_n > 0$, OPPURE n È DISPARI E $a_n < 0$, ALTRIMENTI È $-\infty$.

UN'ALTRA SEMPLICE APPLICAZIONE È AL LIMITE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE: POSTO $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ CON $a_n \neq 0$ E $n \geq 1$ E $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ CON $b_m \neq 0$ E $m \geq 1$,

STUDIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

SI HA CHE $\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$

$$\frac{a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k}{b_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k} =$$

$$= x^{n-m} \cdot \frac{a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}}{b_m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k-m}}$$

SE $n = m$ ALLORA $x^{n-m} = 1$ E QUINDI

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{a_n}{b_m}$$

SE $n < m$ ALLORA $x^{n-m} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ QUINDI

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0.$$

SUPPONIAMO ORA $n > m$.

SICCOME $x^{n-m} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,

IL RAPPORTO $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ TENDE ALL'INFINITO CON IL SEGNO DI $\dfrac{a_n}{b_m}$.

INFINE, IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} x^{n-m}, \quad n > m,$$

DIPENDE DALLA PARITÀ DELLA DIFFERENZA $n-m$, CIOÈ È INFINITO CON IL SEGNO DI $(-1)^{n-m} =$

$$= \frac{(-1)^n}{(-1)^m}$$

E CIOÈ È POSITIVO SE n ED m HANNO LA STESSA PARITÀ (ENTRAMBI PARI O ENTRAMBI DISPARI) ED È NEGATIVO SE $n-m$ È DISPARI, CIOÈ n ED m HANNO DIVERSA PARITÀ.

QUINDI IL LIMITE DI

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{PER } x \to -\infty$$

È INFINITO CON IL SEGNO DI $(-1)^{n-m} \dfrac{a_n}{b_m}$.