

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (15 punti). *Un genitore vuol dare alle sue figlie Aurora, Beatrice, e Camilla una paghetta. Decide di distribuire il denaro secondo un sistema aleatorio*

- *Aurora lancia cinque monete equilibrate e riceve un euro per ogni volta che esce testa;*
- *Beatrice lancia cinque monete equilibrate, indipendentemente da Aurora, e riceve un euro per ogni volta che esce croce;*
- *Camilla lancia un dado equilibrato a sei facce: se esce un numero pari riceve tanti euro quanti ne ha ricevuti Aurora, se esce un numero dispari riceve tanti euro quanti ne ha ricevuti Beatrice.*

Indichiamo con A , B , e C gli euro ricevuti da Aurora, Beatrice, e Camilla, rispettivamente. Sia inoltre M la variabile aleatoria tale che

$$M = \begin{cases} 1 & \text{il dado lanciato da Camilla dà un numero pari,} \\ 0 & \text{il dado lanciato da Camilla dà un numero dispari.} \end{cases}$$

- (a) *Quali sono le densità (marginali) di A e B ?*
 (b) *Si spieghi perché vale l'uguaglianza*

$$C = MA + (1 - M)B;$$

- (c) *Si determini la densità discreta di C ;*
 (d) *Si calcolino $Cov(A, B)$ e $Cov(A, C)$.¹ Le variabili aleatorie $\{A, B, C, M\}$ sono indipendenti?*
 (e) *Si descriva un algoritmo numerico per la stima di $\mathbb{P}(B > 2)$.*

Soluzione. (a) *Per costruzione è ovvio che $A \sim B(5, 1/2)$ e $B \sim B(5, 1/2)$ in quanto si contano i numeri di successi ottenuti in 5 esperimenti indipendenti con probabilità di successo $1/2$.*

- (b) *Questo è ovvio. Se $M = 1$ allora Camilla riceve lo stesso quantitativo di denaro di Aurora, infatti*

$$C = 1 \cdot A + (1 - 1) \cdot B = A.$$

Se invece $M = 0$ allora Camilla riceve lo stesso quantitativo di denaro di Beatrice, infatti

$$C = 0 \cdot A + (1 - 0) \cdot B = B.$$

Infine M non può assumere altri valori.

¹Suggerimento: Per il calcolo di $Cov(A, C)$ si sfrutti l'espressione di C mostrata nel punto (b).

(c) Vogliamo calcolare $\mathbb{P}(C = k)$. Se $k \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$, allora, ovviamente, $\mathbb{P}(C = k) = 0$. Se $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C = k) &= \mathbb{P}(C = k|M = 1)\mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(C = k|M = 0)\mathbb{P}(M = 0) \\ &= \mathbb{P}(A = k)\mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(B = k)\mathbb{P}(M = 0) \\ &= \frac{1}{2} \left[\binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k} \right] + \frac{1}{2} \left[\binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k} \right] \\ &= \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k}.\end{aligned}$$

Allora anche $C \sim B(5, 1/2)$.

(d) Poiché A e B sono indipendenti si ha che $\text{Cov}(A, B) = 0$. Calcoliamo $\text{Cov}(A, C) = \mathbb{E}(AC) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(C)$. L'unico valore non noto è $\mathbb{E}(AC)$, utilizzando l'espressione per C determinata sopra, osservando che A , B , e M sono indipendenti, e che $M \sim B(1, 1/2)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(AC) &= \mathbb{E}(A(MA + (1 - M)B)) \\ &= \mathbb{E}(AMA) + \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(AMB) \\ &= \mathbb{E}(A^2)\mathbb{E}(M) + \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(M)\mathbb{E}(B).\end{aligned}$$

Ricordando che $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(C) = \frac{5}{2}$, $\mathbb{E}(M) = \frac{1}{2}$, e che $\mathbb{E}(A^2) = \text{Var}(A) + \mathbb{E}(A)^2 = \frac{15}{2}$ abbiamo che

$$\text{Cov}(A, C) = \frac{15}{4} + \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = \frac{5}{8}.$$

In particolare, A e C non sono indipendenti, per cui le variabili aleatorie $\{A, B, C, M\}$ a maggior ragione non lo sono.

(e) Possiamo utilizzare il seguente codice R

```
1 n=10000;
2 res=rbinom(n, size=5, prob=0.5);
3 test=res>2;
4 p_ empirica=sum(test)/n;
```

Esercizio 2 (15 punti). Siano $\{X_n\}_n$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\text{Esp}(1)$, cioè

$$f_{X_n}(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x \geq 0}(x).$$

Sia $Y_n = 1/X_n$ e poniamo

$$M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di M_n ;

(b) Per $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo $Z_n = M_n/n^\alpha$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z_n ;

(c) Per quali valori di α la successione di variabili aleatorie Z_n converge in legge per $n \rightarrow \infty$?²

Soluzione. (a) Iniziamo calcolando la funzione di ripartizione di Y_n . Sia $t > 0$, allora, poiché $X_n > 0$ quasi certamente, si ha

$$F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(1/X_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n \geq 1/t) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq 1/t) = e^{-1/t}.$$

Se invece $t \leq 0$, allora $F_{Y_n}(t) = 0$.

Calcoliamo ora la funzione di ripartizione di M_n . Se $t > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= \mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(\max\{Y_1, \dots, Y_n\} \leq t) = \mathbb{P}(Y_1 \leq t, \dots, Y_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leq t)^n = e^{-n/t}. \end{aligned}$$

Per $t \leq 0$ si ha $F_{M_n}(t) = 0$.

(b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di Z_n . Se $t > 0$, abbiamo

$$F_{Z_n}(t) = \mathbb{P}(M_n/n^\alpha \leq t) = \mathbb{P}(M_n \leq n^\alpha t) = e^{-n/(n^\alpha t)} = e^{-n^{1-\alpha}/t}.$$

Per $t \leq 0$ si ha $F_{Z_n}(t) = 0$.

(c) Definiamo $F_Z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(t)$. Ovviamente, se $t \leq 0$, si ha

$$F_Z(t) = 0$$

per ogni α . Sia $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \alpha < 1, \\ e^{-t} & \alpha = 1, \\ 1 & \alpha > 1. \end{cases}$$

Per $\alpha < 1$, si ha $F_Z(t) \equiv 0$, per cui non può essere una funzione di ripartizione. Per $\alpha = 1$ si ha

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ e^{-1/t} & t \geq 0. \end{cases}$$

che è una funzione di ripartizione. Per cui $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ dove Z è una variabile aleatoria con funzione di ripartizione F_Z .

Per $\alpha > 1$ invece F_Z non è una funzione di ripartizione in quanto non è continua da destra. In particolare, F_Z è discontinua in 0, ma, poiché la definizione di convergenza in legge "ignora" i punti di discontinuità abbiamo che, per $\alpha > 1$, le Z_n convergono verso una variabile aleatoria Z costante uguale a 0, cioè con funzione di ripartizione

$$\tilde{F}_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

²Suggerimento: Si consideri la funzione di ripartizione di Z_n calcolata al punto precedente e si faccia tendere $n \rightarrow \infty$. Per quali valori di α la funzione ottenuta è in effetti una funzione di ripartizione (a meno dei punti di discontinuità...)?

Esercizio 3 (10 punti). Sia $X \sim \text{Esp}(1)$ e definiamo $Y = e^X$.

- (a) Si determini la funzione di ripartizione di Y e se ne derivi la densità;
 (b) Si calcoli $\mathbb{E}(Y)^3$. Cosa si può dire della $\text{Cov}(X, Y)$?
 (c) Si mostri che le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.⁴

Soluzione. (a)

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \mathbb{P}(X \leq \log(t)) & t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0 & 0 < t < 1 \\ \mathbb{P}(X \leq \log(t)) & t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - e^{-\log t} & t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t} & t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Da cui, poiché F_Y è continua e differenziabile a tratti otteniamo

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & t \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} dx = +\infty.$$

Allora $Y \notin L^1$. Poiché $Y \notin L^1$ la $\text{Cov}(X, Y)$ non è definita.

- (c) Consideriamo $\mathbb{P}(X > 1, Y < e)$, ovviamente, poiché $Y = e^X$ se $X > 1$ allora $Y > e^1 = e$, per cui $\mathbb{P}(X > 1, Y < e) = 0$, ma $\mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(Y < e) \neq 0$, da cui

$$\mathbb{P}(X > 1, Y < e) \neq \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(Y < e)$$

e quindi X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 4 (10 punti). Sia $Z = (X, Y)$ un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \text{ e } y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Si mostri che la densità di X è⁵

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

³Suggerimento: Si calcoli $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(e^X) = \dots$

⁴Suggerimento: Si trovino $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \neq \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

⁵Suggerimento: si usi il cambio di variabili $t = y\sqrt{x}$.

(b) Si mostri che la densità di Y è⁶

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}(1 - (1+y)e^{-y}) & y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

(c) X e Y sono indipendenti?

Soluzione. (a) Sia $0 < x < 1$, allora

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y\sqrt{x}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-t} dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Se invece $x \notin (0, 1)$, si ha $f_X(x) = 0$.

(b) Sia $y > 0$, allora, ponendo $t = y^2x$ e $dt = y^2dx$, abbiamo

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\sqrt{y^2x}} dx \\ &= \frac{1}{2y^2} \int_0^{y^2} e^{-\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{y^2} e^{-\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t}) \Big|_0^{y^2} \\ &= \frac{1}{y^2} (1 - (1+y)e^{-y}). \end{aligned}$$

Se invece $y < 0$, ovviamente, $f_Y(y) = 0$.

(c) Le variabili X e Y non sono indipendenti in quanto la densità congiunta non è il prodotto delle densità marginali (quasi) ovunque.

⁶Suggerimento: si osservi che per $t > 0$ una primitiva di $e^{\sqrt{t}}$ è $-2e^{-\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t})$.

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.
F. di rip.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$