Problema 1.

Siano $A, B \subseteq X$ due sotto insiemi di un insieme X. Si provi che

$$(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$$

Problema 2.

Dato un numero primo $p \in \mathbb{Z}$ sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} n/p & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta,

(a) per quali valori di p la funzione f è iniettiva;

(b) per quali valori di p si ha $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Problema 3.

Usando il principio di induzione mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 3^n$ è divisibile per 5.

Problema 4.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{1 - iz}{iz + i}$.

- Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ per cui $f(z) = i$
- Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z|^2 = 1$ e $|f(z)|^2 = 1$.
  Utilizzare che $z\bar{z} = |z|^2$ e le proprietà del coniugato rispetto alla somma e al prodotto.

Problema 5.

Dimostrare che per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$ esiste un $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $p < x < q$.

Problema 6.

Determinare tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 28x \equiv_5 32 \\ 20x \equiv_7 25 \end{cases}$$