

Statica e Scienza delle Costruzioni

> 8. Il carico di punta per le travi snelle***

Emanuele Reccia

emanuele.reccia@unica.it



Il materiale della lezione è tratto dalla lezione 29 del corso SdC IC del prof. Cazzani

INSTABILITA' DELL'EQUILIBRIO ELASTICO: IL PROBLEMA DEL CARICO DI PUNTA. 1

NELL'AMBITO DEGLI ARGOMENTI TRATTATI NEL CORSO SI È FINORA TACITAMENTE ASSUNTO CHE VALGANO QUESTI POSTULATI:

1. CHE IL MATERIALE COSTITUENTE LA STRUTTURA SIA ELASTICO LINEARE (CIO' IMPLICA CHE LA RISPOSTA SIA REVERSIBILE E PROPORZIONALE AI CARICHI APPLICATI);
2. CHE GLI SPOSTAMENTI CHE LA STRUTTURA SUBISCE PER EFFETTO DEI CARICHI SIANO SUFFICIENTEMENTE PICCOLI DA RENDERE LECTO IL CONFRONTO LA STRUTTURA DEFORMATA CON QUELLA INDEFORMATA NELLA VALUTAZIONE DELLE AZIONI INTERNE.

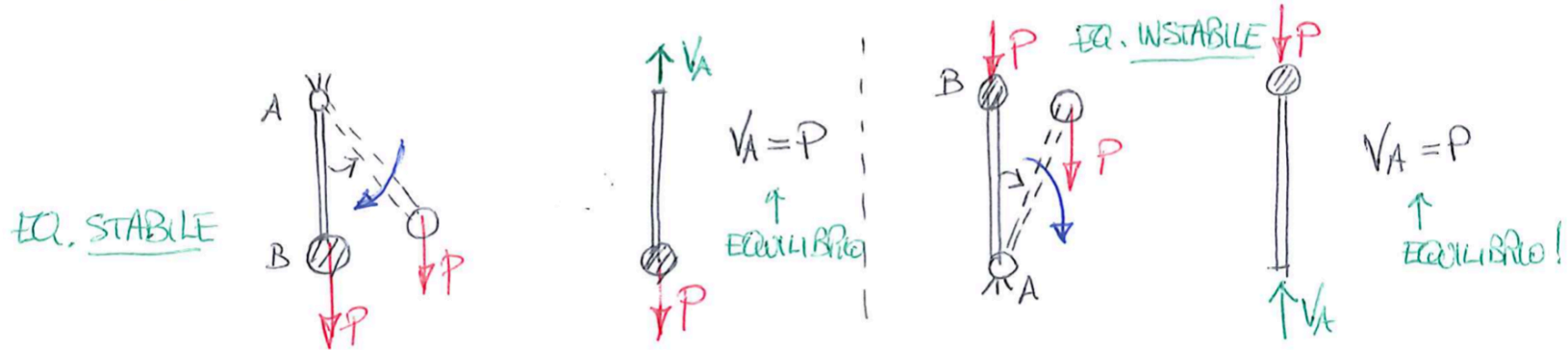
IN QUESTE IPOTESI LA STRUTTURA, UNA VOLTA ASSEGNATI I CARICHI, ASSUME UNA CONFIGURAZIONE ESTREMAMENTE PROSSIMA A QUELLA INIZIALE, CONFIGURAZIONE CHE RISULTA ESSERE EQUILIBRATA, CONGRUENTE E INDIPENDENTE DALL'ORDINE E DALLE MODALITA' CON CUI VENGONO APPLICATI I CARICHI, DIPENDENDO SOLO DEI VALORI (FINALI) ASSUNTI DAI CARICHI STESSI.

FINORA SI È ACCERTATA L'ESISTENZA DELLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO, MA NON SI È SVOLTA ALCUNA INDAGINE PER STABILIRNE LA NATURA: È NOTO INFATTI (CFR. CORSO DI MECCANICA RAZIONALE) CHE UNA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO DI QUALUNQUE SISTEMA MECCANICO PUÒ ESSERE STABILE O INSTABILE.

PER CARATTERIZZARE QUESTO ASPETTO, SI IMMAGINA DI "PERTURBARE" LIEVEMENTE LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO: SE IL SISTEMA TENDE NATURALMENTE A RITORNARE NELLA MEDESIMA CONFIGURAZIONE, SI DICE CHE L'EQUILIBRIO È STABILE; SE INVECE SE NE ALLONTANA, L'EQUILIBRIO È INSTABILE.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

COME ESEMPIO CLASSICO SI PUÒ CONSIDERARE IL PENDOLO, PER IL QUALE SONO POSSIBILI 2 CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO; TUTTAVIA SE LE SI "SAGGIA" CON UNA PICCOLA PERTURBAZIONE SI VEDE CHE LA PRIMA CONFIGURAZIONE (PENDOLO "DIRITTO")



È DI EQUILIBRIO STABILE, PERCHÉ IL SISTEMA TENDE NATURALMENTE A TORNARE VERSO LA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO, COMPIENDO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI (SE PICCOLA È LA PERTURBAZIONE) ATTORNO AD ESSA; LA SECONDA CONFIGURAZIONE (PENDOLO "INVERTITO") È INVECE DI EQUILIBRIO INSTABILE PERCHÉ LA PERTURBAZIONE, PER QUANTO PICCOLA INNESCA UN MOTO CHE FA ALLONTANARE IL SISTEMA DALLA CONFIGURAZIONE D'EQUILIBRIO CONSIDERATA.

L'ESEMPIO ILLUSTRATO EVIDENZIA CHE PER GIUDICARE LA NATURA DELL'EQUILIBRIO DI UN SISTEMA MECCANICO È NECESSARIO CONSIDERARE CHE NELLA POSIZIONE PERTURBATA LE FORZE AGENTI SEGUONO IL MOTO DEL SISTEMA E ASSUMONO, RISPETTO A QUESTO UNA DIVERSA POSIZIONE GENERANDO DELLE AZIONI CHE POSSONO AVERE CARATTERE STABILIZZANTE (COME NEL CASO DEL PENDOLO DIRITTO) O INSTABILIZZANTE, (COME NEL CASO DEL PENDOLO INVERTITO).

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

CI SI PUÒ ATTENDERE CHE SITUAZIONI ANALOGHE SI PRESENTINO NELL'AMBITO DI PROBLEMI STRUTTURALI, POICHÉ PER EFFETTO DELLA PERTURBAZIONE LE FORZE MUTANO LA PROPRIA POSIZIONE RISPETTO ALLA STRUTTURA E POSSONO GENERARE EFFETTI INSTABILIZZANTI CHE TENDONO AD ALLONTANARE VIEPIÙ LA STRUTTURA DALLA CONFIGURAZIONE INIZIALE.

TUTTAVIA, A DIFFERENZA DEI SISTEMI RIGIDI, NEI SISTEMI ELASTICI DEFORMABILI, SI HA CHE QUESTI, QUALUNQUE SIA LA PERTURBAZIONE IMPRESSA, REAGISCONO ALLA PERTURBAZIONE OPPONENDOSI, PUNQUE IN SENSO STABILIZZANTE: SI SVILUPPANO INFATTI DELLE REAZIONI INTERNE INNESCATE DALLE DEFORMAZIONI PRODOTTE DALLA PERTURBAZIONE CHE, A MO' DI MOLLE, TENDONO A RIPORTARE IL SISTEMA NELLA CONFIGURAZIONE PRIMITIVA.

SI HA COSÌ CHE NEI SOLIDI ELASTICI L'INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO SI VERIFICA QUANDO L'EFFETTO INSTABILIZZANTE CHE LE FORZE ESTERNE GENERANO (A SEGUITO DI UNA PERTURBAZIONE) PREVALE SULLE REAZIONI ELASTICHE STABILIZZANTI ASSOCIATE ALLA PERTURBAZIONE STESSA.

L'INSTABILITÀ NON È QUINDI PURAMENTE POSIZIONALE COME NEI SISTEMI RIGIDI, MA DIPENDE DALL'ENTITÀ DEI CARICHI ESTERNI. QUANDO QUESTI SONO NULLI (E IN ASSENZA DI STATI DI COAZIONE INTERNA, CIOÈ DI AUTOTENSIONI) IL SISTEMA È SEMPRE STABILE: A SEGUITO DI QUALUNQUE PERTURBAZIONE SI SVILUPPANO SOLO LE REAZIONI STABILIZZANTI DOVUTE ALLA DEFORMAZIONE ELASTICA DEL MATERIALE. AL CRESCERE DEI CARICHI ESTERNI SI HA SEMPRE UNA FASE DI EQUILIBRIO STABILE PER IL PREVALERE DELLE REAZIONI ELASTICHE STABILIZZANTI SULLE EVENTUALI AZIONI INSTABILIZZANTI DELLE FORZE ESTERNE.

IL FENOMENO DELL'INSTABILITÀ SI INNESCA QUANDO GLI EFFETTI STABILIZZANTI E INSTABILIZZANTI SI BILANCIANO (CONDIZIONE DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE CHE CORRISPONDE A UNA TRANSIZIONE FRA LA STABILITÀ E L'INSTABILITÀ).

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

IN QUESTA SITUAZIONE LA STRUTTURA RAGGIUNGE UNA CONDIZIONE CRITICA E IL CARICO CORRISPONDENTE VIENE DEFINITO CARICO CRITICO E LA SUA DETERMINAZIONE RIVESTE UN CHIARO INTERESSE PRATICO, POICHÉ SUPERAMENTI ANCHE LIEVI DEL CARICO CRITICO PROVOCANO L'INSTAURARSI RAPIDO DI DEFORMAZIONI MOLTO AMPIE CHE PREGIUDICANO LA SICUREZZA DELLA STRUTTURA.

SI PUÒ RITENERE CHE IL COMPORTAMENTO DI UNA STRUTTURA NEI CONFRONTI DEL FENOMENO ORA DESCRITTO POSSA ESSERE RAPPRESENTATO DA UN PUNTO MATERIALE COLLOCATO SU UNA GUIDA CHE CAMBIA PROGRESSIVAMENTE LA PROPRIA FORMA, DA CONCAVA A CONVESSA IN FUNZIONE DELLA ENTITÀ DEI CARICHI APPLICATI.



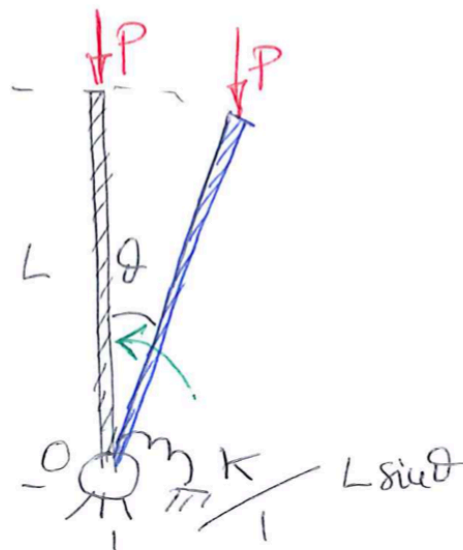
FIN TANTO CHE LA GUIDA È "CONCAVA" (CURVATURA POSITIVA) L'EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIALE È STABILE; QUANDO DIVENTA "CONVESSA" (CURVATURA NEGATIVA) L'EQUILIBRIO È INSTABILE; NELLA TRANSIZIONE CONTINUA DA "CONCAVA" A "CONVESSA" SI PASSA ATTRAVERSO UNA CONDIZIONE IN CUI, ALMENO LOCALMENTE, LA CURVATURA SI ANNULLA: IN QUESTA SITUAZIONE L'EQUILIBRIO È INDIFFERENTE, NEL SENSO CHE "PERTURBANDO" IL PUNTO MATERIALE QUESTO SI VIENE A TROVARE IN UNA NUOVA CONFIGURAZIONE (ANCORA EQUILIBRATA) DALLA QUALE NON TENDE SPONTANEAMENTE NÉ A RITORNARE NELLA CONFIGURAZIONE ORIGINALE, NÉ AD ALLONTANARSIENE.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

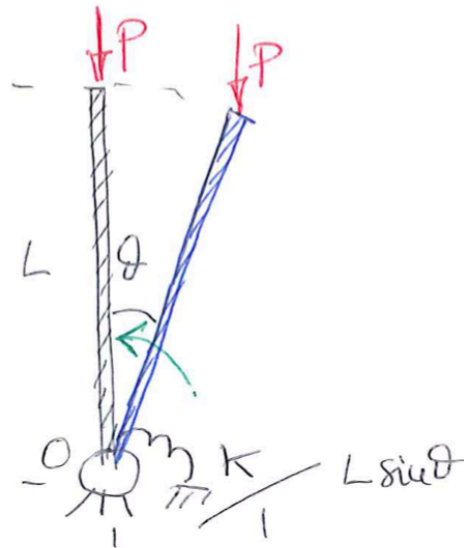
LA CONDIZIONE DI CARICO CRITICO È QUINDI RIVELATA DALL'ESISTENZA DI "NUOVE" CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO, PROSSIME ALLA CONFIGURAZIONE ORIGINALE, MA DISTINTE DA QUESTA.

DI LUNGHEZZA

PER ESEMPIO SI CONSIDERI UN'ASTA RIGIDA INCERNIERATA ALLA BASE E SOGGETTA A UN CARICO VERTICALE P IN SOMMITÀ, CHE MANTIENE INVARIATA LA PROPRIA DIREZIONE QUAND'ANCHE L'ASTA RUOTA ATTORNO A \odot . IN \odot È PERO' DISPOSTA UNA MOLLA ROTAZIONALE ^{ELASTICA LINEARE} DI RIGIDEZZA K , CHE PRODUCE UN'AZIONE DI RICHIAMO QUANDO L'ASTA NON È PERFETTAMENTE VERTICALE, AZIONE DI RICHIAMO PROPORZIONALE ALL'ANGOLO DI SBANDAMENTO, θ .



SE $\theta = 0$ LA FORZA P È BILANCIATA DALLA REAZIONE DEL VINCOLO IN \odot E IL SISTEMA È IN EQUILIBRIO.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE


SE $\theta = 0$ LA FORZA P È BILANCIATA DALLA REAZIONE DEL VINCOLO IN \odot E IL SISTEMA È IN EQUILIBRIO.

SE LA TRAVE SBANDA DI UN ANGOLO θ , LA FORZA P DA' LUOGO A UN EFFETTO INSTABILIZZANTE, PRODUCENDO RISPETTO A \odot UN MOMENTO (ORARIO) DI VALORE $PL \sin \theta$. L'AZIONE DI RICHIAMO ELASTICO DELLA MOLLA DA' LUOGO RISPETTO A \odot A UN MOMENTO (ANTIORARIO) DI VALORE $k\theta$.

SI NOTI CHE L'AZIONE DI RICHIAMO DIPENDE SOLO DALLA PERTURBAZIONE (CIOÈ DALLO "SBANDAMENTO" θ) E NON DAL CARICO.

PER VALORI "PICCOLI" DEL CARICO P , SI ATTENDE CHE L'EFFETTO STABILIZZANTE DELLA REAZIONE ELASTICA PREVALGA, SICCHÉ L'EQUILIBRIO NELLA CONFIGURAZIONE CON ASTA PERFETTAMENTE VERTICALE È STABILE.

TUTTAVIA AL CRESCERE DI P È DA ATTENDERSI CHE L'EFFETTO INSTABILIZZANTE POSSA PREVALERE. PER VALUTARE QUANDO CIÒ ACCADE, SI VALUTA

PER QUALE VALORE DI P ACCANTO ALLA CONFIGURAZIONE CON ASTA PERFETTAMENTE VERTICALE SI POSSONO AVERE CONFIGURAZIONI D'EQUILIBRIO CON ASTA "SBANDATA".

IN QUESTO CASO IL MOMENTO RISPETTO A \odot DEL CARICO ESTERNO, $M_e = PL \sin \vartheta$ DEVE ESATTAMENTE BILANCIARE IL MOMENTO RISPETTO A \odot DELL'AZIONE INTERNA DI RICHIAMO, $M_i = k\vartheta$.

$$\text{SI HA PERCÌ } M_e = M_i \Rightarrow PL \sin \vartheta = k\vartheta \quad [I]$$

LA [I] È UN'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO FORTEMENTE NON LINEARE NELL'INCOGNITA CONFIGURAZIONE D'EQUILIBRIO INDIVIDUATA DALL'ANGOLO ϑ .

SE CI SI LIMITA A CONSIDERARE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO "PROSSIME" A QUELLA ORIGINALE, INDIVIDUATA DA $\vartheta = 0$ (ASTA PERFETTAMENTE VERTICALE) SI HA CHE LA FUNZIONE $\sin \vartheta$ PÙ ESSERE SVILUPPATA IN SERIE DI TAYLOR!

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots$$

E CI SI PÙ ARRESTARE AL PRIMO TERMINE, OTTENENDO $\sin \vartheta \approx \vartheta$; L'ASSUNZIONE È GIUSTIFICATA PERCHÉ, PER $\vartheta < 1$ È $\frac{\vartheta^3}{3!} \ll 1$.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

LA [1] DIVIENE QUINDI:

$$PL\vartheta = k\vartheta \Rightarrow (PL - k)\vartheta = 0. \quad [2]$$

CIÒ RIVELA CHE: $\vartheta = 0$ È CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO PER OGNI VALORE DI P.

SE $PL - k = 0 \Rightarrow P = \frac{k}{L}$ SI POSSONO AVERE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO CON $\vartheta \neq 0$

NOTA 1. LA [2] RIVELA CHE PER $P = \frac{k}{L}$ IL VALORE DELLO SBANDAMENTO ϑ DIVIENE INDETERMINATO: CIÒ È CONSEGUENZA DEL FATTO CHE IL PRIMO MEMBRO DELLA [1] È STATO LINEARIZZATO: SE SI ADOTTA L'EQUAZIONE COMPLETA IL VALORE DI ϑ È SEMPRE INDIVIDUABILE. FERMO RESTANDO CHE LA SOSTITUZIONE DI $\sin\vartheta$ CON ϑ È VALIDA SOLO IN UN INTORNO CONVENIENTEMENTE PICCOLO DI $\vartheta = 0$, LA [2] RIVELA CHE ESISTONO, PER $P = \frac{k}{L}$ CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO SBANDATE. \square

SI CONCLUDE CHE $P = \frac{k}{L}$ È PERTANTO IL VALORE DI TRANSIZIONE FRA STABILITÀ E INSTABILITÀ: $P_{cr} = \frac{k}{L}$. $PL < k$

SI HA QUINDI CHE PER $P < P_{cr}$ L'AZIONE DI RICHIAMO ELASTICO PREVALE SULL'AZIONE INSTABILIZZANTE, E $\vartheta = 0$ È DI EQUILIBRIO STABILE.

INVECE PER $P > P_{cr}$ ($PL > k$), L'AZIONE DI RICHIAMO ELASTICO NON È SUFFICIENTE A CONTRASTARE GLI EFFETTI INSTABILIZZANTI E $\vartheta = 0$ È DI EQUILIBRIO INSTABILE.

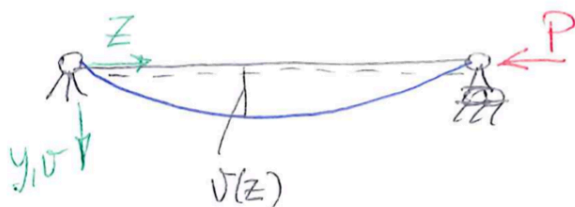
IL CRITERIO ORA VISTO PUÒ ESSERE ESTESO AL CASO DI TRAVI DEFORMABILI
SOGGETTE AD AZIONE ASSIALE CENTRATA DI COMPRESSIONE. 5

FISSANDO L'ATTENZIONE SU UNA TRAVE APPOGGIATA, SI OSSERVA CHE LA
CONFIGURAZIONE RETTILINEA È DI EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE ASSIALE $N = -P$.



SI VUOLE ALLORA VEDERE SE, PER QUALCHE VALORE DI P POSSONO ESISTERE
CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO "SBANDATE" (NON RETTILINEE), IL CHE RIVELEREBBE
CHE LA CONFIGURAZIONE ORIGINALE È DIVENUTA DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE.

SI CONSIDERA QUINDI LA TRAVE DISPOSTA COME UNA CURVA $v = v(z)$.




MA SE LA TRAVE S'INCURVA, L'INFLESSIONE GENERA IN OGNI SEZIONE UN
MOMENTO "INTERNO" $M_i = -EI v''(z)$ [3]

CHE TENDE A "RADDRIZZARLA" (LA TRAVE, COME UNA MOLLA, SI "OPpone" ALLA
DEFORMAZIONE.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

D'ALTRA PARTE L'EFFETTO DEL CARICO DI PUNTA P E' QUELLO DI PRODURRE UN MOMENTO "ESTERNO"

$$M_e = P \cdot z \quad [4]$$

CHE TENDE A FARE PROGREDIRE L'INFLESSIONE DELLA TRAVE 
IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO IN OGNI SEZIONE (CIOE' PER OGNI VALORE DELL'ASCISSA z) DEVE RISULTARE

$$M_e = M_i \quad \Rightarrow \quad -EJ \cdot v''(z) = P \cdot z \quad [5]$$

LA [5] E' EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE NELLA INCOGNITA FUNZIONE $v(z)$ CHE CARATTERIZZA UNA CONFIGURAZIONE SBANNATA

PONENDO $\frac{P}{EJ} = \alpha^2 > 0$ LA [5] DIVIENE

$$v''(z) + \alpha^2 v(z) = 0 \quad [5']$$

SI PUO' VEDERE CHE ESSA AMMETTE QUESTO INTEGRALE GENERALE:

$$v(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z \quad [6]$$

6

INFATTI DALLA [6] SEGUE:

$$v'(z) = -C_1 \alpha \sin \alpha z + C_2 \alpha \cos \alpha z \quad [6']$$

$$v''(z) = -C_1 \alpha^2 \cos \alpha z - C_2 \alpha^2 \sin \alpha z = -\alpha^2 (C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z)$$

DUNQUE $v''(z) = -\alpha^2 v(z) \Rightarrow v''(z) + \alpha^2 v(z) = 0.$ $v(z)$

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

LA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA [6] SI OTTIENE INTRODUCENDO LE C.C.:

$$\begin{cases} N(z=0) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin \alpha L = 0 \end{cases} \quad [7]$$

L'ULTIMA CONDIZIONE È SODDISFATTA DA $\begin{cases} c_2 = 0 \\ \sin \alpha L = 0 \end{cases} \quad [8]$

LA CONDIZIONE $c_2 = 0$ PERO', TENUTO CONTO DELLA PRIMA DELLE [7] FORNISCE, SOSTITUENDO NELLA [6]

$$N(z) = 0$$

CIOÈ LA CONFIGURAZIONE RETTILINEA (BANALE)

PICHE' INTERESSANO CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO NON BANALI SI SOSTERMA SULLA SECONDA DELLE [8]:

$$\sin \alpha L = 0 \Leftrightarrow \alpha L = k\pi, \quad k=0, 1, 2, \dots, N, \dots$$

$$\text{OVVERO } \alpha = \frac{k\pi}{L} \quad (k=0, 1, 2, \dots, N, \dots) \quad [9]$$

TENUTO CONTO CHE $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ E SI È INTERESSATI A SOLUZIONI CON $P \neq 0$ SI VEDE CHE LA SOLUZIONE $k=0$ VA SCARTATA.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

TENUTO CONTO CHE $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ E SI È INTERESSATI A SOLUZIONI CON $P \neq 0$ SI VEDE CHE LA SOLUZIONE $R=0$ VA SCARTATA.

D'ALTRA PARTE LA [9] FORNISCE UNA SUCCESSIONE DI VALORI PER I QUALI $\sin \alpha L = 0$; DALLA [9] SEGUE POI:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI} = \left(\frac{R\pi}{L} \right)^2 \quad [R=1, 2, \dots, N, \dots] \quad [9']$$

PERTANTO I VALORI DI P CHE CORRISPONDONO A CONFIGURAZIONI "SPANDATE" DELLA TRAVE SONO COSÌ INDIVIDUATI:

$$P = EI \left(\frac{R\pi}{L} \right)^2 \quad [9''] \quad [R=1, 2, \dots, N, \dots] \quad 7$$

SI È INTERESSATI A TROVARE IL PIÙ PICCOLO VALORE DI P PER IL QUALE DIVIENE POSSIBILE L'EQUILIBRIO IN UNA CONFIGURAZIONE NON RETTILINEA: SI DEVE QUINDI ASSUMERE $R=1$, E $J = J_{\min}$, IN QUANTO LA TRAVE SI INFLETTERÀ NEL PIANO DI MINORE RIGIDEZZA.

SI CONCLUDE COSÌ CHE

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{L^2} \quad [10]$$

SI CONCLUDE COSÌ CHE

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L^2} \quad [10]$$

È IL CARICO CRITICO PER LA TRAVE APPOGGIATA SOGGETTA A COMPRESSIONE CENTRATA; P_{cr} È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA RIGIDEZZA FLESSIONALE (MINIMA) E INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO DELLA LUCE L . SE QUESTA RADDOPPIA, IL CARICO CRITICO SI RIDUCE A $\frac{1}{4}$.

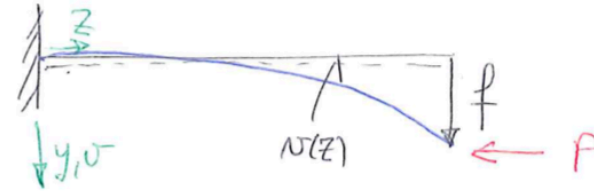
È POSSIBILE OSSERVARE CHE DALLA [6], TENUTO CONTO DELLE [7] - [10] SEGUE CHE LA DEFORMATA CRITICA È DATA DA:

$$v_{cr}(z) = C_2 \sin \frac{\pi z}{L} \quad [11]$$

CIOÈ UNA SECONDA DI SINUSOIDE, LA CUI AMPIEZZA RISULTA INDETERMINATA (IN QUANTO SI È USATA LA FORMA LINEARIZZATA DELL'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA).

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

PER DIVERSE CONDIZIONI DI VINCOLO CI SI ATTENDE CHE DIVERSO SIA IL CARICO CRITICO: PER UNA TRAVE A MENSOLOA DI LUCE L SI TROVA:



$$M_e = -P(f - v(z)) \quad [12]$$

$$M_i = -EI v''(z)$$

DA CUI SEGUE, PER LA CONDIZIONE $M_e = M_i$:

$$-EI v''(z) = -P(f - v(z)) \quad [13]$$

E POSTO ANCORA $\alpha^2 = \frac{P}{EI} > 0$ SI OTTIENE

$$v''(z) + \alpha^2 v(z) = \alpha^2 f \quad [13']$$

LA CUI SOLUZIONE È:

$$v(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + f. \quad [14]$$

$$v'(z) = -\alpha C_1 \sin \alpha z + \alpha C_2 \cos \alpha z \quad [14']$$

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

LE C.C. SONO IN QUESTO CASO!

$$\begin{cases}
 v(z=0) = 0 \\
 v'(z=0) = 0 \\
 v(z=L) = f
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 C_1 + f = 0 \\
 \alpha C_2 = 0 \\
 C_1 \cos \alpha L + \cancel{f} = \cancel{f}
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 C_1 = -f \\
 C_2 = 0 \\
 f \cos \alpha L = 0
 \end{cases}
 \quad [15]$$

$\alpha = 0 \Leftrightarrow P = 0!$

SI HA BUNQUE LA CONDIZIONE

$$f \cos \alpha L = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ \cos \alpha L = 0 \end{array} \right.$$

LA PRIMA RESTITUISCE, ESSENDO PER LE [15]

$$v(z) = f(1 - \cos \alpha z)$$

$$v(z) = 0 \quad (\text{SOLUZIONE BANALE, DA SCARTARE})$$

LA SECONDA FORNISCE $\alpha L = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots$

E DA QUI, $\alpha = \frac{\pi}{2L}, \frac{3\pi}{2L}, \frac{5\pi}{2L}, \dots$

MA $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ PER CUI $P = EI \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2, EI \left(\frac{3\pi}{2L}\right)^2, \dots$

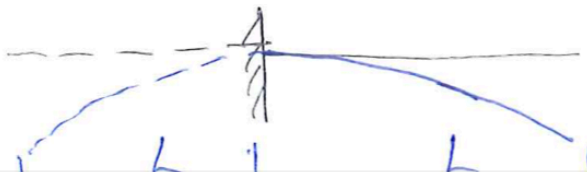
TUTTAVIA INTERESSA CONOSCERE IL PIÙ PICCOLO VALORE DI P , SICCHÉ:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4L^2} \quad [16]$$

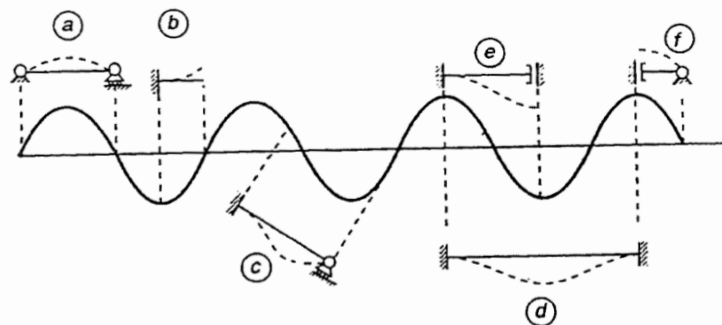
$$\Rightarrow v_{cr}(z) = f\left(1 - \cos \frac{\pi z}{2L}\right) \quad [17]$$

SIMILE ALLA [10], ECCETTO PER IL COEFFICIENTE NUMERICO A DENOMINATO RE.

TUTTAVIA SE SI DEFINISCE CON L_0 LA "LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE", CIOÈ LA LUNGHEZZA DELLA SEMIONDA DI SINUSOIDE NELLA DEFORMATA CRITICA, SI TROVA $L_0 = L$ PER LA TRAVE APPOGGIATA, E $L_0 = 2L$ PER LA MENSOLA: SE LA SI PROLUNGA OLTRE IL VINCOLO SIMMETRICAMENTE SI OTTIENE INFATTI UNA SEMIONDA DI LUNGHEZZA $2L$:



ANALOGO DISCORSO PUÒ ESSERE FATTO PER ALTRE CONDIZIONI DI VINCOLO, VEDI PAGINA SEGUENTE.


Figura 15.23

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{\ell_0^2} \quad (15.98b)$$

Il confronto tra le (15.98) stabilisce la relazione

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{x}} \quad (15.99)$$

I valori di ℓ_0 e x per i vari casi di vincoli perfetti sono riportati in Tabella 15.1, unitamente alle condizioni al contorno relative a ognuno di essi e alle espressioni delle deformate critiche che ne conseguono.

È spesso conveniente riferire il carico critico all'unità di sezione trasversale, ponendo $\sigma_E = P_E/A$. Per le (15.98) si può allora scrivere

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \pi^2 E \frac{x}{\ell^2} \frac{I}{A} = \pi^2 E \frac{q^2}{\ell_0^2} \quad \text{con} \quad q = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (z1, 2)$$

dove q è il raggio d'inerzia della sezione. La posizione


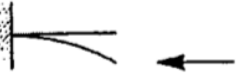

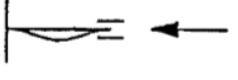
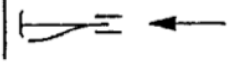

$$\lambda = \frac{\ell_0}{q} = \frac{\ell}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (15.100)$$

permette di scrivere la (z1) come segue

$$\sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad (15.101)$$

La grandezza (15.100), detta *snellezza*, riassume in forma adimensionale le caratteristiche geometriche (proprietà della sezione, lunghezza, condizioni di vincolo) che governano il comportamento dell'asta nei confronti dell'instabilità. Il carico critico risulta inversamente proporzionale a λ^2 , quindi tanto più piccolo quanto più l'asta è snella.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE
Tabella 15.1

Caso	Condizioni al contorno		$v_E(x)$	x	l_0/l
	$x = 0$	$x = l$			
(a) 	$v = 0$ $v'' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	$\sin \frac{\pi x}{l}$	1.0	1.0
(b) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v'' = 0$ $v''' + \alpha^2 v' = 0$	$1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$	0.25	2.0
(c) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	$-1 + \frac{x}{l} + \cos \frac{4.493x}{l}$ $-\frac{1}{4.493} \sin \frac{4.493x}{l}$	2.046	0.699
(d) 	$v = 0$ $v' = 0$	$v = 0$ $v' = 0$	$1 - \cos \frac{2\pi x}{l}$	4.0	0.5
(e) 	$v' = 0$ $v''' = 0$	$v = 0$ $v' = 0$	$1 + \cos \frac{\pi x}{l}$	1.0	1.0
(f) 	$v' = 0$ $v''' = 0$	$v = 0$ $v'' = 0$	$\cos \frac{\pi x}{2l}$	0.25	2.0

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

PER COMPRENDERE L'EFFETTO DI RIDUZIONE DELLA CAPACITA' PORTANTE DOVUTA AL CARICO CRITICO, SI CONSIDERA L'ESPRESSIONE DI VALIDITA' GENERALE (PER DI VALUTARE L_0 SULLA BASE DELLE CONDIZIONI DI VINCOLAMENTO): 10

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_0^2}$$

E SI CALCOLA LO SFORZO NORMALE ASSOCIATO ALLA AZIONE ASSIALE PRODOTTA DA P_{cr} :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_0^2 A} = \frac{\pi^2 E A I_{min}^2}{L_0^2 A} = \pi^2 E \left(\frac{I_{min}}{L_0} \right)^2 \quad [18]$$

DOVE I_{min}^2 E' IL MINIMO RAGGIO D'INERZIA; SE SI DEFINISCE SNELLEZZA IL PARAMETRO ADIMENSIONALE OTTENUTO DIVIDENDO LA LUNGHEZZA LIBERA D'IMPRESSIONE PER IL RAGGIO D'INERZIA MINIMO,

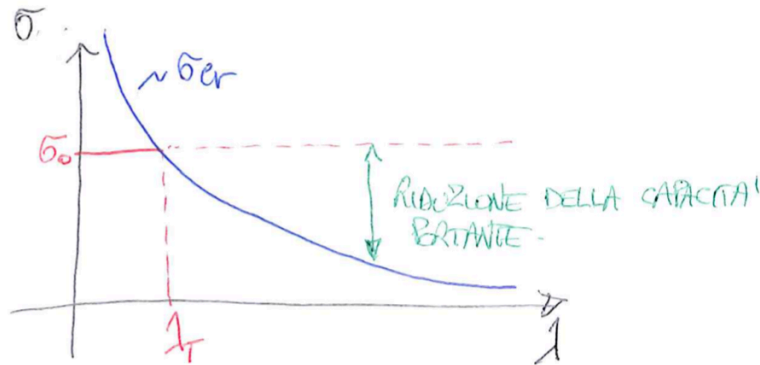
$$\lambda = \frac{L_0}{I_{min}}$$

LA [18] FORNISCE

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad [18']$$

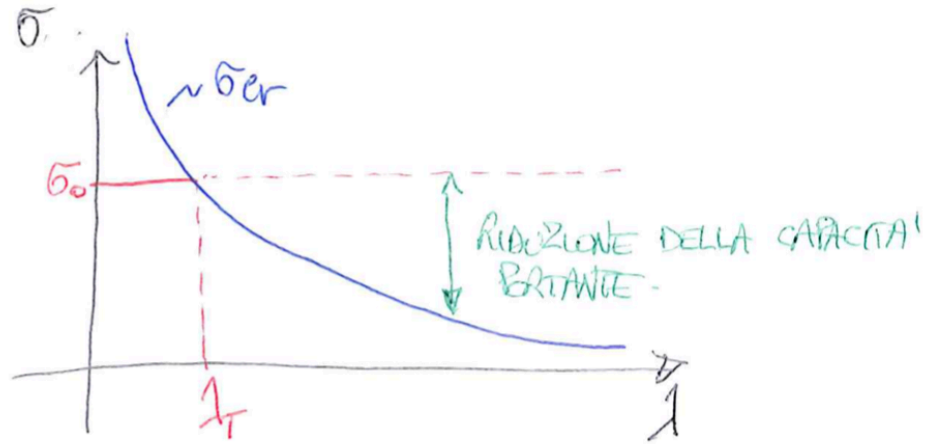
NEL PIANO $\lambda - \sigma_{cr}$ LA [18'] RAPPRESENTA UNA IPERBOLE AVANTI GLI ASSI COME ASINTOTI:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_{cr} = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sigma_{cr} = +\infty$$



IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad [18']$$



σ_{cr} È UNA MISURA DELLA SOLLECITAZIONE DELLA SEZIONE DELLA TRAVE, CHE NON PUÒ ESSERE SUPERATA PER NON DARE LUOGO A FENOMENI DI INSTABILITÀ.
 PER VALORI DI SNELLEZZA BASSI LA [18'] PERDE SIGNIFICATO PERCHÉ IL MATERIALE NON PUÒ SOPPORTARE LIVELLI DI SFORZO $\sigma_z > \sigma_0$; SI TRATTA QUINDI DI "SFETTARE" LA CURVA [18'] CON LA RETTA $\sigma = \sigma_0$; QUESTA INTERCETTA LA [18'] PER UN VALORE DI SNELLEZZA λ_T (SNELLEZZA DI TRANSIZIONE) COSÌ DEFINITA.

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_T^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_T = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}$$

↑ DIFENDE SOLO DALLE CARATTERISTICHE DEL MATERIALE

PER $\lambda < \lambda_T$ NON SI HA RIDUZIONE DELLA CAPACITÀ PORTANTE DOVUTA AL CARICO CRITICO, POICHÉ $\sigma_{cr} > \sigma_0$.

PER $\lambda > \lambda_T$ SI HA RIDUZIONE DELLA CAPACITÀ PORTANTE DOVUTA AL CARICO CRITICO, TANTO PIÙ PRONUNCIATA QUANTO MAGGIORE È LA SNELLEZZA.

IL CARICO DI PUNTA PER TRAVI SNELLE

A LIVELLO DI VERIFICA DELLA SEZIONE COMPRESSA, LA VERIFICA VA EFFETTUATA PER $\lambda < \lambda_T$ NEI CONFRONTI DELLA TENSIONE AMMISSIBILE, PER CAUTELARSI NEI CONFRONTI DELLO SCHIACCIAMENTO:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} \leq R'' \quad (R'' = \text{TENSIONE AMMISSIBILE A COMPRESSIONE})$$

PER $\lambda > \lambda_T$ CI SI DEVE INVECE CAUTELARE NEI CONFRONTI DEL RAGGIUNGHIMENTO DELLA TENSIONE CRITICA σ_{cr} , INTRODUCENDO UN OPPORTUNO COEFFICIENTE DI SICUREZZA γ :

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{\gamma}$$

DOVE $\frac{\sigma_{cr}}{\gamma} < R''$.

$$\text{DI NORMA SI PONE } \frac{\sigma_{cr}}{\gamma} = \frac{R''}{w}$$

DOVE w È UN COEFFICIENTE, $w \geq 1$ CHE DIPENDE, ATTRAVERSO σ_{cr} DALLA SNELLEZZA λ E SI TROVA TABELLATO NELLE NORMATIVE VIGENTI.

NOTO λ SI DETERMINA w E SI VERIFICA LA SEZIONE MEDIANTE LA RELAZIONE:

$$\frac{wP}{A} \leq R''$$

IN QUESTO MODO, MEDIANTE L'USO DEL COEFFICIENTE CORRETTIVO w SI PUÒ RIGONDIRRE LA VERIFICA DI UNA TRAVE COMPRESSA A UNA FORMA ANALOGA A QUELLA CHE SI ^{DELLA SEZIONE} UTILIZZA PER UNA TRAVE SOGGETTA A TRAZIONE.