

Esame di Calcolo delle Probabilità

(2 ore e 30 minuti)

Si prega di scrivere in maniera chiara, risposte non leggibili non saranno corrette. In tutti gli esercizi si richiede di illustrare il proprio lavoro.

Esercizio 1 (10 punti). *Ho un mazzo da 40 carte, numerate da 1 a 40. Lancio una moneta equilibrata: se esce testa giro due carte dal mazzo, se esce croce ne giro tre.*

- (a) *Qual è la probabilità che tutte le carte girate siano dispari? Qual è la probabilità che tutte le carte girate siano pari?*
- (b) *Se le carte girate sono tutte di numero dispari, è più probabile che sia uscita testa o croce?*

Soluzione. (a) *Chiamiamo T l'evento "esce testa" e C l'evento "esce croce". Inoltre chiamiamo P l'evento "tutte le carte sono pari" e D l'evento "tutte le carte sono dispari". Si ha*

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C).$$

Poiché le carte sono pescate senza reimmissione, per calcolare $\mathbb{P}(D|T)$ e $\mathbb{P}(D|C)$ possiamo utilizzare l'ipergeometrica con $r = b = 20$ e $n = k = 2$ nel caso la moneta dia testa o $n = k = 3$ nel caso la moneta dia croce. Quindi

$$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\binom{20}{2}\binom{20}{0}}{\binom{40}{2}} = \frac{20 \cdot 19}{40 \cdot 39} \quad e \quad \mathbb{P}(D|C) = \frac{\binom{20}{3}\binom{20}{0}}{\binom{40}{3}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{40 \cdot 39 \cdot 38}.$$

Si ha

$$\mathbb{P}(D) = \frac{20 \cdot 19}{40 \cdot 39} \cdot \frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{40 \cdot 39 \cdot 38} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{39}.$$

Per simmetria si ha che

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(P) = \frac{7}{39}.$$

- (b) *Vogliamo calcolare*

$$\mathbb{P}(T|D) \quad e \quad \mathbb{P}(C|D).$$

Calcoliamo la prima, si ha per il teorema di Bayes

$$\mathbb{P}(T|D) = \frac{\mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(D)}.$$

Da cui

$$\mathbb{P}(T|D) = \frac{\frac{20 \cdot 19}{40 \cdot 39} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{39}} = \frac{19}{28}.$$

Ovviamente si ha che $\mathbb{P}(C|D) = 1 - \mathbb{P}(T|D)$, da cui

$$\mathbb{P}(C|D) = \frac{9}{28}.$$

Quindi è più probabile che sia uscita testa.

Esercizio 2 (15 punti). In un determinato ospedale, il numero X di bambini che nascono in una settimana ha distribuzione $P(\lambda)$ con $\lambda = 13$. Le nascite in settimane distinte sono indipendenti.

- (a) Qual è la probabilità che in una settimana nascano 2 o più bambini?
- (b) Sia A il numero di bambini nati nella prima settimana dell'anno e sia B il numero di bambini nati nelle prime due settimane dell'anno. Si determini la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie A e B .

Indichiamo con S il numero di bambini nati in un anno (supponiamo esattamente di 52 settimane).

- (c) Si calcolino $\mathbb{E}(S)$ e $\text{Var}(S)$. Quindi, usando l'approssimazione normale fornita dal teorema limite centrale, si stimi la probabilità che in un anno nascano più di 700 bambini;
- (d) Si descriva un algoritmo numerico per stimare quest'ultima probabilità.

Soluzione. (a) Calcoliamo $\mathbb{P}(X \geq 2)$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) = 1 - e^{-13} \left(\frac{13^0}{0!} + \frac{13^1}{1!} \right) \approx 0.999968.$$

- (b) Sia X_1 il numero di bambini nati nella prima settimana dell'anno e X_2 il numero di bambini nati nella seconda settimana. Si ha che $A = X_1$ e $B = X_1 + X_2$ e, ovviamente, A e B sono variabili a valori in \mathbb{N} .

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$, allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A = n, B = m) &= \mathbb{P}(X_1 = n, X_1 + X_2 = m) = \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = m - X_1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = m - n) = \mathbb{P}(X_1 = n) \mathbb{P}(X_2 = m - n) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(m-n)}}{(m-n)!} = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^m}{n!(m-n)!}. \end{aligned}$$

Ovviamente se n o m non sono in \mathbb{N} si ha $\mathbb{P}(A = n, B = m) = 0$. Inoltre poiché $A \leq B$ quasi certamente (non possono essere nati meno bambini nelle prime due settimane che nella prima settimana) anche $\mathbb{P}(A = n, B = m) = 0$ se $m < n$. Riassumendo

$$\mathbb{P}(A = n, B = m) = \begin{cases} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^m}{n!(m-n)!} & m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ e } m \geq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (c) Denotiamo con X_j il numero di bambini nati nella j -esima settimana dell'anno. Si ha

$$S = \sum_{j=1}^{52} X_j,$$

da cui

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{52} X_j\right) = \sum_{j=1}^{52} \mathbb{E}(X_j) = 52\mathbb{E}(X_1) = 52\lambda = 676.$$

Inoltre, poiché abbiamo assunto che le X_j fossero indipendenti, abbiamo

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^{52} X_j\right) = \sum_{j=1}^{52} \text{Var}(X_j) = 52\text{Var}(X_1) = 52\lambda = 676.$$

Sia $Z \sim N(0, 1)$, per il teorema del limite centrale abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 700) &= \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{52}\sqrt{\text{Var}(X_1)}} > \frac{700 - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{52}\sqrt{\text{Var}(X_1)}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{52}\sqrt{\text{Var}(X_1)}} > \frac{700 - 676}{\sqrt{676}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z > \frac{12}{13}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{12}{13}\right) \\ &\approx 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.92) \approx 1 - 0.8212 = 0.1788. \end{aligned}$$

(d) Possiamo verificare il punto (c) utilizzando il seguente codice R

```

1  lambda=13
2  n=100000
3  s=0
4  for(i in c(1:n)){
5      X=rpois(52, lambda)
6      S=sum(X)
7      if(S>700){
8          s=s+1
9      }
10 }
11 p_ empirica=s/n

```

Esercizio 3 (15 punti). Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d., definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ con funzione di ripartizione

$$F_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t).$$

(a) Per quali $p \geq 1$ si ha $X_1 \in L^p$?¹

¹Suggerimento: Si ricordi che $\int_0^\infty \frac{x^k}{(1+x^2)^2} dx < \infty$ se $k-4 < -1$, in quanto $\frac{x^k}{(1+x^2)^2} \sim x^{k-4}$ per $x \rightarrow \infty$.

(b) Sia $n \in \mathbb{N}$ e definiamo

$$Y_n = \min\{\sqrt{n}X_1, \sqrt{n}X_2, \dots, \sqrt{n}X_n\}.$$

Si mostri che Y_n converge in legge per $n \rightarrow \infty$ verso una variabile aleatoria Y e se ne scriva la densità.²

Soluzione. (a) Calcoliamo la densità di X_n . Differenziando F_{X_n} in $[0, \infty)$ e ponendo $f_{X_n} = 0$ in $(-\infty, 0)$, abbiamo

$$f_{X_n}(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t).$$

Affinché $X_1 \in L^p$ dobbiamo avere che $\mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1|^p) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_{X_1}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^p \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x^{p+1}}{(1+x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Poiché $\frac{x^{p+1}}{(1+x^2)^2} \sim x^{p+1-4}$ per $x \rightarrow \infty$, abbiamo che $\mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$ se e solo se $p+1-4 < -1$, cioè se $p < 2$. Per cui $X \in L^p$ per $1 \leq p < 2$.

(b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di Y_n . Sia $t \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}(\min\{\sqrt{n}X_1, \sqrt{n}X_2, \dots, \sqrt{n}X_n\} \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min\{\sqrt{n}X_1, \sqrt{n}X_2, \dots, \sqrt{n}X_n\} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\cap_{j=1}^n \sqrt{n}X_j > t) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\sqrt{n}X_j > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - F_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}. \end{aligned}$$

Ovviamente, per $t < 0$ si ha $F_{Y_n}(t) = 0$. Riassumendo

$$F_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}\right) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)$$

²Suggerimento: si ricordi che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$

Di conseguenza, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \right) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) = \left(1 - e^{-t^2} \right) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) := F_Y(t).$$

Ovviamente F_Y è continua, monotona crescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} F_Y(t) = 1$, e $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_Y(t) = 0$, per cui è una funzione di ripartizione per una variabile Y . Una densità per Y si ottiene come

$$f_Y(t) = 2te^{-t^2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t).$$

Esercizio 4 (10 punti). Siano X e Y variabili aleatorie con densità congiunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{per } x, y \in (0, 1) \text{ e } y < x, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Si calcolino le densità marginali di X e Y e si dica se le variabili sono indipendenti;
 (b) Per quali $p \geq 1$ la variabile Y è in L^p ?

Soluzione. (a) Calcoliamo la densità di X . Sia $x \in (0, 1)$, allora

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x} \int_0^x dy = \frac{1}{x} x = 1.$$

Ovviamente, se $x \notin (0, 1)$ allora $f_X(x) = 0$. Vediamo che $X \sim U([0, 1])$.

Calcoliamo la densità di Y . Sia $y \in (0, 1)$, allora

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_y^1 = -\log(y).$$

Ovviamente, se $y \notin (0, 1)$ allora $f_Y(y) = 0$. Quindi

$$f_Y(y) = -\log(y) \mathbf{1}_{(0,1)}(y).$$

Poiché non abbiamo che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ quasi ovunque, le due variabili aleatorie non sono indipendenti.

- (b) Osserviamo che $|Y| < 1$ quasi certamente, per cui $|Y|^p < 1$ per $p \geq 1$, quindi

$$\mathbb{E}(|Y|^p) \leq \mathbb{E}(1) = 1$$

per $p \geq 1$. Quindi $Y \in L^p$ per ogni $p \geq 1$.

³Suggerimento: Non è necessario fare alcun conto. Basta osservare che $|Y| < \dots$

Tabella 2: Legge, funzione di ripartizione, media, e varianza più importanti distribuzioni.
F. di rip.

	Densità	F. di rip.	Media	Varianza
$B(n, p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Ipergeometrica	$p_k = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$		$\frac{nr}{b+r}$	$\frac{nr b(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)}$
$P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ
$U([a, b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
$G(p)$	$p_k = p(1-p)^k$	$1 - (1-p)^{k+1}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$Exp(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$		μ	σ^2
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$