SOLUZIONI ESAME SCRITTO 10 GIUGNO 2021

ESERCIZIO 1

a) Verifica che

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

è Base di $M_2(\mathbb{R})$. Dopodiché l'esistenza di f è assicurata dal "Teorema fondamentale delle applicazioni lineari", avendo scelto $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Tale che

$$F\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$F\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,0)$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,1)$$

Basta verificare che sono linearmente indipendenti, dato che il loro numero è pari alla $\dim M_2(\mathbb{R})$, cioè 4.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha - \gamma & \gamma \\ \beta + \gamma + \delta & \gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

il sistema ammette solo la soluzione nulla perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \neq 0$$

b) Sì, per il "Teorema fondamentale delle applicazioni lineari"

c) Esprimo $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare della base.

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 =$$

$$\| \qquad = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_4 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \end{cases}$$

$\longrightarrow \lambda_3 = -1$

$\rightarrow \lambda_1 = 0$

$\longrightarrow \lambda_2 = -2$

$\longrightarrow \lambda_4 = 2 - \lambda_3 = 3$

Quindi

$$v = 0 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 + 3 \cdot v_4$$

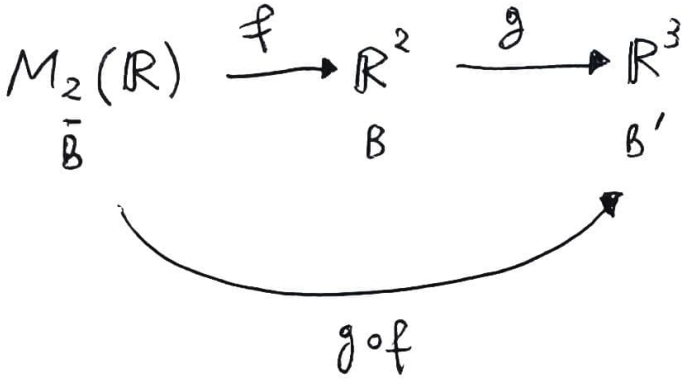
$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = f(v) = f(0 \cdot v_1 - 2v_2 - 1 \cdot v_3 + 3v_4)$$

$$\overset{f \text{ LINEARE}}{=} 0 \cdot f(v_1) - 2 f(v_2) - 1 \cdot f(v_3) + 3 f(v_4)$$

$$= -2 \cdot (0,0) - 1 \cdot (2,0) + 3 \cdot (0,1)$$

$$= (-2,3).$$

d) La situazione è la seguente:



Allora $M_{\bar{B}B'}(g \circ f) = M_{BB'}(g) \cdot M_{\bar{B}B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_{\bar{B}B}(f)$?

Ci serve $M_{\bar{B}B}(f)$.

$B = \{(1,1), (1,0)\}$, w_1, w_2

Ebbene:

$$f(v_1) = (1,1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$$
$$f(v_2) = (0,0) = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$$
$$f(v_3) = (2,0) = 0 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2$$
$$f(v_4) = (0,1) = 1 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2$$

$$\Rightarrow M_{\bar{B}B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(g\circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \in \ker(g\circ f) \iff$$

$$g\circ f(v) = (0,0,0) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ 4x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

pongo $x_4 = s$, $x_2 = t$

e allora $x_1 = -s$, $x_3 = \frac{1}{2}s$

Quindi

$$\ker(g\circ f) = \left\{ -s v_1 + t v_2 + \frac{1}{2} s v_3 + s v_4 \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s\left(\frac{1}{2} v_3 - v_1 + v_4\right) + t v_2 \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\frac{1}{2} v_3 - v_1 + v_4,\ v_2\right)$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Essendo tali due vettori linearmente indipendenti, si ha che una base di $\ker(g \circ f)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ESERCIZIO 2

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & k\\ 1 & k-1 & 0\\ 1 & k-1 & k\end{pmatrix} \qquad A|B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & k & k\\ 1 & k-1 & 0 & 0\\ 1 & k-1 & k & k\end{pmatrix}$$

Calcolo $\det(A|B)$.

$$\det(A|B)=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & k & k\\ 1 & k-1 & 0 & 0\\ 1 & k-1 & k & k\end{pmatrix}$$

IV COL. $\to$ IV $-$ III

$$=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & k & 0\\ 1 & k-1 & 0 & 0\\ 1 & k-1 & k & 0\end{pmatrix}$$

II RIGA $\to$ II $-$ III

$$=1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & k-1 & 0\\ 1 & k-1 & k\end{pmatrix}=$$

$$=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 0 & -k\\ 1 & k-1 & k\end{pmatrix}=k\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & k-1\end{pmatrix}=k(k-1-1)$$

$$=k\cdot(k-2).$$

Pertanto se $k\neq 0$ e $k\neq 2$ $\rho(A|B)=4\neq\rho(A)$ (A ha 3 colonne)

e per tali valori di k il sistema è incompatibile.

Restano i casi $k=0$, $k=2$, da trattare separatamente.

$k=0$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sicuramente $\rho(A) \geq 2$ perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Considero gli orlati di ordine 3 di tale minore

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \implies \rho(A) = 3$$

Anche $\rho(A|B) = 3$ perché A è sottomatrice di $A|B$ e $\rho(A|B)$ non può essere 4 (fatto prima).

Allora per $k=0$ il sistema è compatibile ed è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di Cramer, per costruzione, e quindi

ammette l'unica soluzione nulla.

$\underline{k=2}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$P(A)=2$ poiché A ha due colonne uguali e due colonne lin. indipendenti. In particolare il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$.

Considero i minori di ordine 3 di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in $A|B$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(due righe uguali)}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \implies P(A|B) = 3$$

$\Rightarrow$ per $k=2$ il sistema è incompatibile

ESERCIZIO 3

Trovo una Base di V.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \; a = -b \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -b & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \; b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$$

Dato che v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è Base di V.

Trovo $M_B(f)$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 3v_1 + 4v_2$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 8v_2 + 3v_3$$

$$\Rightarrow \quad M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2 (1+\lambda)$$

Ci sono due autovalori: 3 con molteplicità algebrica 2

-1 con molteplicità algebrica 1

Trovo gli autospazi.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3x_1 \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 3x_2 \\ 3x_3 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2s + 4t, \quad x_1 = s, \quad x_3 = t$$

Quindi

$$V(3) = \{ s v_1 + (2s+4t) v_2 + t v_3 : s, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ s(v_1 + 2v_2) + t(4v_2 + v_3) : s, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(v_1 + 2v_2, \; 4v_2 + v_3)$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

In particolare segue che $m_a(3) = 2$ e $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $V(3)$

Non c'è bisogno di fare calcoli per trovare $V(-1)$.

Sappiamo già, dalla teoria, che

$$1 \leq m_g(-1) \leq m_a(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad m_g(-1) = 1$$

$$\| \quad \dim V(-1)$$

Inoltre abbiamo visto prima che

$$f(v_2) = -v_2 = -1 \cdot v_2$$

$\Rightarrow v_2 \in V(-1)$. Quindi $\{v_2\}$ è base di $V(-1)$.

Allora una base di autovettori di f è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$