



Esercitazione di Controlli Automatici 1 – n°9

Un processo è stato sottoposto a vari test che hanno permesso di individuare la risposta armonica allegata. Si ipotizzi di utilizzare, per il controllo, un regolatore industriale inserito in un sistema di controllo “single-loop” con retroazione unitaria.

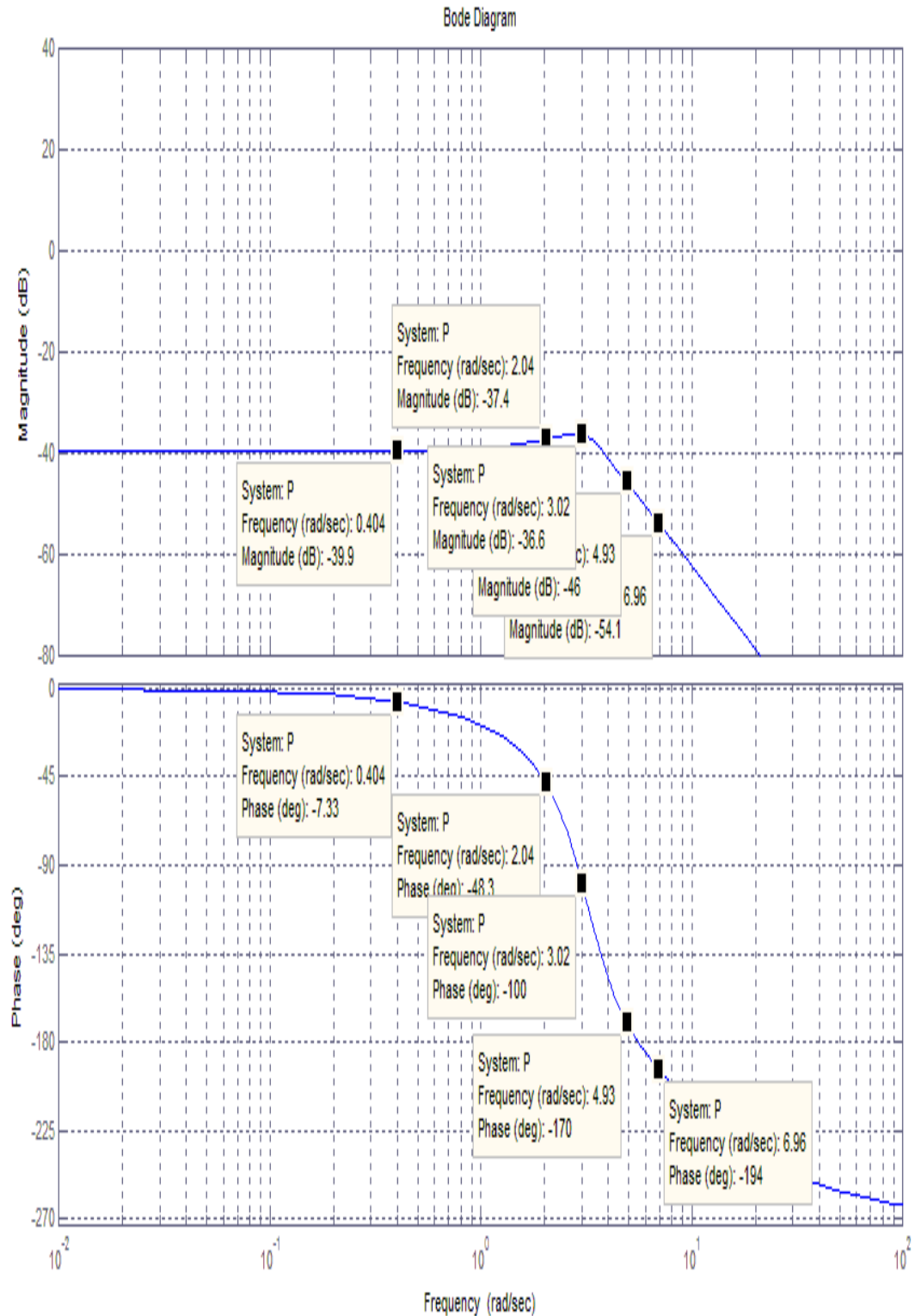
Si effettui la taratura dei parametri del regolatore utilizzando il metodo di Ziegler-Nichols a ciclo chiuso.

Si confrontino le risposte armoniche a ciclo chiuso ottenute inserendo nel sistema di controllo i differenti regolatori (P, PI, PID).

Si discutano i risultati ottenuti.

	K_P	$\tau_i = K_P/K_I$	$\tau_D = K_D/K_P$
P	$0.5 \cdot K_{p_{cr}}$	—	—
PI	$0.45 \cdot K_{p_{cr}}$	$0.8 \cdot T_{cr}$	—
PID	$0.6 \cdot K_{p_{cr}}$	$0.5 \cdot T_{cr}$	$0.125 \cdot T_{cr}$

Tabella di taratura Metodo di Ziegler-Nichols a ciclo chiuso.



Allegato 1. Diagramma di Risposta Armonica del processo in analisi.

Soluzione esercitazione n° 9

In questa esercitazione affronteremo il problema della taratura dei Regolatori Industriali attraverso il I° Metodo di Ziegler e Nichols, meglio noto come criterio a ciclo chiuso.

I regolatori PID sono di fatto le più usate reti di correzione nei processi industriali (oltre il 95% dei casi, con prestazioni che sono considerate in genere accettabili). Altre tecniche di controllo, così dette avanzate sono invece riservate a processi relativamente complessi e difficili da controllare.

I Regolatori Industriali sono classificati in base al tipo di azione di controllo sviluppata, e possiamo classificarli come segue:

- Regolatore di tipo P, ad azione integrale:

$$u(t) = K_P \cdot (r(t) - y(t)) = K_P \cdot e(t) \rightarrow U(s) = K_P \cdot E(s)$$

Tale azione dipende dal solo valore attuale, istantaneo dell'errore. La logica di funzionamento è abbastanza intuitiva, più grande è l'errore, istante per istante, più intensa sarà l'azione sul processo per guidare la variabile controllata al valore desiderato. L'azione proporzionale sebbene introduca diversi benefici deve comunque essere usata con parsimonia in quanto tende a destabilizzare il sistema a ciclo chiuso. Per contro, essendo una azione istantanea è assolutamente pronta a reagire non appena la variabile di controllo si discosta dal valore desiderato. Quando invece il segnale errore tende a diventare piccolo la sua azione diventa trascurabile ed idealmente nulla a regime.

- Regolatore di tipo PI, ad azione proporzionale-integrale:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + \int_0^t e(t) \cdot dt \rightarrow$$

$$C_{PI}(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_I}{K_P \cdot s}\right) = \frac{K_P}{\tau_i} \cdot \left(\frac{1 + \tau_i \cdot s}{s}\right)$$

Tale azione combina ai benefici della precedente rete con i ben noti benefici introdotti dall'utilizzo di una azione integrale. In particolare l'azione integrale non tiene conto del solo valore attuale, istantaneo dell'errore, bensì anche del suo passato per cui non può essere nulla a regime ma manterrà sempre una certa azione di controllo anche quando $e(t) = 0$. Serve a garantire che a regime l'errore sia nullo. Per definizione di integrale tale azione è la meno pronta (presenta un polo in $s = 0$) ed infatti non aiuta quasi per nulla nelle fasi transitorie. Per contro è spesso indispensabile quando sono richiesti elevati livelli di precisione a regime.

La configurazione PI è la più comune configurazione di controllo per i regolatori industriali.

- Regolatore di tipo PID, ad azione proporzionale-integrale-derivativa:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(t) dt + K_D \cdot \frac{d}{dt} e(t) \rightarrow$$

$$C_{PID}(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_P \cdot \left(1 + \frac{K_I}{K_P \cdot s} + \frac{K_D}{K_P} \cdot s\right) =$$

$$= \frac{K_P}{\tau_i} \cdot \left(\frac{1 + (\tau_i + \tau_D) \cdot s + \tau_i \tau_D \cdot s^2}{s}\right)$$

Questa configurazione combina i benefici delle azioni di controllo sopradescritte anche l'azione derivatrice. Per concetto stesso di derivata, tale azione consente di eseguire una sorta di predizione dell'errore in avanti. Tale azione reagendo in base alla velocità dell'errore risulta la più pronta a reagire, quindi contribuisce maggiormente nelle fasi transitorie, mentre è idealmente nulla a regime.

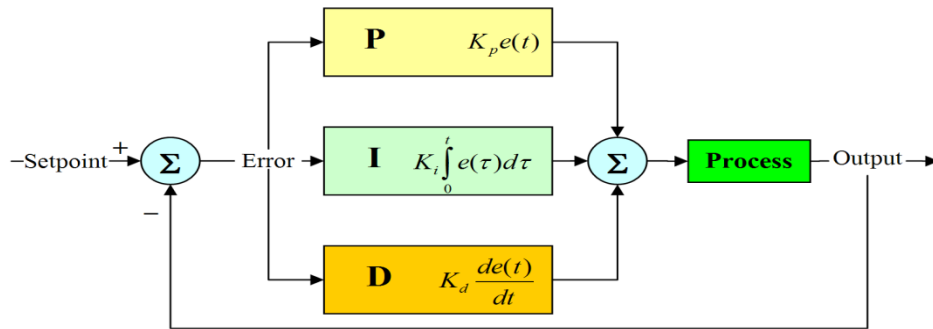


Figura 1. Schema a blocchi di un loop di controllo in retroazione con regolatore PID ideale.

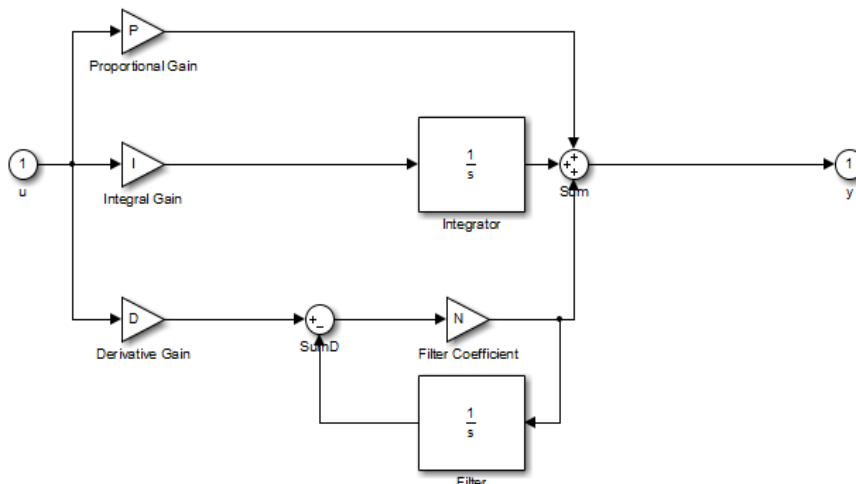


Figura 2. Schema a Regolatore PID reale.

In Figura 1 è riportata lo schema a blocchi di un regolatore PID ideale.

La sua applicazione è limitata in quanto tende ad amplificare anche i rumori di misura in alta frequenza, che possono essere presenti sull'uscita $y(t)$ del processo.

Da notare che il regolatore PID presentando una f.d.t. non causale, nella pratica viene implementato come segue:

$$C_{PID}(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot \frac{N}{1 + \frac{1}{s}} = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot s} + \frac{\tau_D \cdot s}{1 + \frac{\tau_D}{N} \cdot s} \right) =$$

$$= \frac{K_P}{\tau_i} \cdot \left(\frac{(1 + \tau_1^Z \cdot s) \cdot (1 + \tau_2^Z \cdot s)}{s \cdot (1 + \frac{\tau_D}{N} \cdot s)} \right),^1 \quad N = 5 \div 20$$

In Figura 3, dato il profilo del segnale di errore $e(t) = r(t) - y(t)$ è possibile verificare quanto asserito riguardo la logica di ciascuna azione di controllo P, I, e D in base all'andamento dei segnali ad esso relativi.

¹ Osservando la struttura risultante osserviamo sebbene le reti PID possano essere tarate attraverso i ben noti Metodi di Ziegler-Nichols, essendo questi delle rete con potenzialmente due poli e due zeri, vediamo che assegnando opportunamente i valori per i parametri K_P , K_I , K_D ed N , siamo in grado di implementare anche le reti di correzione viste per la Sintesi in ω , ovvero le reti Anticipatrici (equiparabile al Regolatore PD), Attenuatrici (PI) e Rete a Sella (PID).

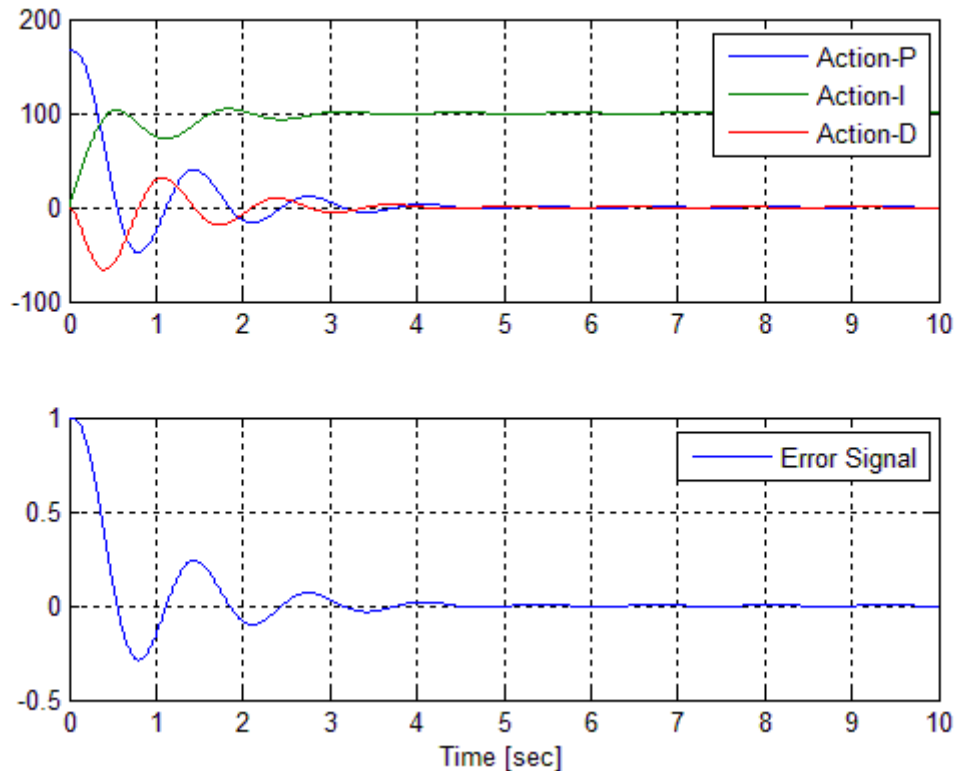


Figura 3. Confronto delle azioni di controllo P, I, D associate al medesimo segnale di errore.

Esistono anche altre combinazioni delle tre azioni di controllo rispettivamente proporzionale, integrale e derivativa, ad esempio PD ma nella pratica si usa fare riferimento alle sopracitate configurazioni.

Nella pratica spesso non ci si riferisce al K_P in termini di guadagno proporzionale ma bensì in termini di Banda Proporzionale Percentuale:

$$BP_{\%} = \frac{100}{K_P} \rightarrow K_P = \frac{BP_{\%}}{100}$$

Che rappresenta il massimo errore percentuale che causa un cambiamento dell'uscita del regolatore dal minimo (0%) al massimo (100%) valore ammissibile.

Dopo questa breve panoramica sulle azioni di controllo che governano le dinamiche del regolatore di seguito presentiamo il metodo di taratura di Ziegler-Nichols a ciclo chiuso.

Metodo di taratura di Ziegler-Nichols a ciclo chiuso:

E' un metodo di progettazione dei regolatori industriali abbastanza diffuso nella pratica, spesso è implementato nelle routine di autotuning dei regolatori. Tale metodo consente di ricavare i valori ottimali dei parametri K_P , K_I e K_D agendo su apposite manopole del regolatore direttamente sul campo. In Figura 4 sono riportati due regolatori industriali, sulla sinistra vediamo il PID PCE-RE19P-5 di moderna concezione, con display digitale, mentre sulla destra un PID pneumatico degli anni '70, in alto vediamo le manopole per la configurazione del regolatore.



Figura 4. Generazioni di Regolatori PID a confronto.

La condizione necessaria per il suo utilizzo è che il sistema ad anello aperto sia stabile.

Non è applicabile per sistemi che non raggiungono il limite di stabilità (i.e. sistemi a grado relativo minore o uguale a 2, $m_g = \infty$), oppure quando le oscillazioni possono risultare pericolose per il sistema oggetto del controllo.

Le fasi della taratura sono le seguenti²:

1. si pone K_P , K_I e $K_D = 0$ e si chiude l'anello di regolazione;
2. si escludono le azioni derivativa ed integrale, e si aumenta gradualmente il valore del parametro K_P fino a portare il sistema al limite della stabilità;
3. si misura il valore di K_P in corrispondenza del quale la risposta del sistema al gradino unitario è un'oscillazione di ampiezza costante ($K_P = K_P^{cr}$)
4. si misurano i valori della pulsazione e del periodo dell'oscillazione persistente;

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

5. si regolano, dopo aver compiuto le operazioni sopra descritte, le altre manopole in modo che i parametri K_P , K_I e K_D assumano i valori riportati nella Tabella 1.

	K_P	$\tau_i = K_P/K_I$	$\tau_D = K_D/K_P$
P	$0.5 \cdot K_P^{cr}$	—	—
PI	$0.45 \cdot K_P^{cr}$	$0.8 \cdot T_{cr}$	—
PID	$0.6 \cdot K_P^{cr}$	$0.5 \cdot T_{cr}$	$0.125 \cdot T_{cr}$

Tabella 1. Regole di Taratura Ziegler-Nichols a ciclo chiuso.

Alternativamente, se disponibile il diagramma di risposta armonica del processo la procedura si riduce a valutare il margine di guadagno e l'associata pulsazione critica:

$$m_g|_{dB} = -20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)| \quad , \quad \omega_c: \angle F(j\omega_c) = -180 \text{ deg}$$

Dopodiché si esplicitano i valori di K_P^{cr} e T_{cr} come segue:

$$K_P^{cr} = 10^{\frac{m_g|_{dB}}{20}} \quad , \quad T_{cr} = 2\pi/\omega_c$$

² La procedura esposta per la ricerca del così detto guadagno critico, valida in linea teorica ed applicata in passato, ormai è caduta in disuso grazie all'avvento di tecniche avanzate di analisi che permettono di valutare il guadagno critico e la corrente pulsazione angolare senza rischiare di portare il sistema in condizioni di instabilità (Metodo di Amstrom).

Si tiene a precisare che un regolatore progettato secondo questo metodo fornisce, in anello chiuso, un margine di fase inferiore a 40° in quanto tali regole sono preposte ad ottimizzare il transitorio durante l'applicazione di un disturbo a gradino. In particolare hanno come obbiettivo l'ottenimento di un rapporto di decadimento pari a 1/4 delle oscillazioni in risposta ad un disturbo a gradino.

Dopo questo breve introduzione, ora abbiamo tutti gli strumenti per procedere allo svolgimento dell'esercitazione. Da un'attenta analisi sull'andamento qualitativo del Diagramma di risposta armonica del processo iniziamo col far notare la sua f.d.t. presenterà la seguente struttura:

$$P(s) = \frac{k_p}{\left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \cdot (1 + \tau \cdot s)}, \quad k_p = 0.01, \zeta = \frac{1}{3}, \omega_n = \pi, \tau = \frac{1}{10}$$

Essendo disponibile il Diagramma di Risposta del processo, il primo passo consiste nel ricavare in base alla definizione di margine di guadagno i seguenti valori

$$m_g|_{dB} = 48.9dB, \quad \omega_c = 5.55 \text{ rad/sec}$$

a cui corrispondono rispettivamente un guadagno critico e un periodo critico di:

$$K_p^{cr} = 10^{\frac{m_g|_{dB}}{20}} = 278.6, \quad T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_c} = 1.1424 \text{ sec}$$

In base alle relazioni per la taratura dei regolatori attraverso il I° Metodo di Ziegler-Nichols, riportate in Tabella 1, si ottengono i seguenti valori di K_P , τ_I e τ_D per i vari tipi di regolatori industriali:

	K_P	$\tau_i = K_P/K_I$	$\tau_D = K_D/K_P$
P	139.3	—	—
PI	125.4	0.9139	—
PID	167.17	0.5712	0.1428

A cui corrispondono i seguenti regolatori:

$$C_P(s) = K_P^P 139.3$$

$$C_{PI}(s) = K_P^{PI} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_I^{PI} \cdot s}\right) = \frac{125.4 + 114.6 \cdot s}{0.9139 \cdot s}$$

$$C_{PID}(s) = K_P^{PID} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_I^{PID} \cdot s} + \tau_D^{PID} \cdot s\right) = \frac{167.2 + 95.49 \cdot s + 13.64 \cdot s^2}{0.5712 \cdot s}$$

$$C_{PID}^{Reale}(s) = K_P^{PID} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_I^{PID} \cdot s} + \frac{\tau_D \cdot s}{1 + \frac{\tau_D}{N} \cdot s}\right) = \frac{167.2 + 97.87 \cdot s + 15 \cdot s^2}{s \cdot (0.5712 + 0.008157 \cdot s)}, \quad N = 10$$

Nel grafico in Figura 5 è riportato un confronto delle risposte indicali del sistema a ciclo chiuso in presenza dei vari tipi di regolazione, rispettivamente P, PI e PID. Come si può notare, all'aumentare della complessità del regolatore le prestazioni migliorano considerevolmente. Il regolatore P, il più semplice, non è in grado di garantire un errore nullo a regime:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [1 - W_P(s)] \cdot R(s) \Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = 1 - \frac{k_p}{1 + K_P^P \cdot k_p} = 0.4179$$

I regolatori PI e PID invece garantiscono entrambi errore nullo a regime, grazie alla presenza dell'azione integrale:

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [1 - W_{PI}(s)] \cdot R(s) \Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{k_p K_P^{PI}}{s + K_P^{PI} \cdot k_p} \right] = 0$$

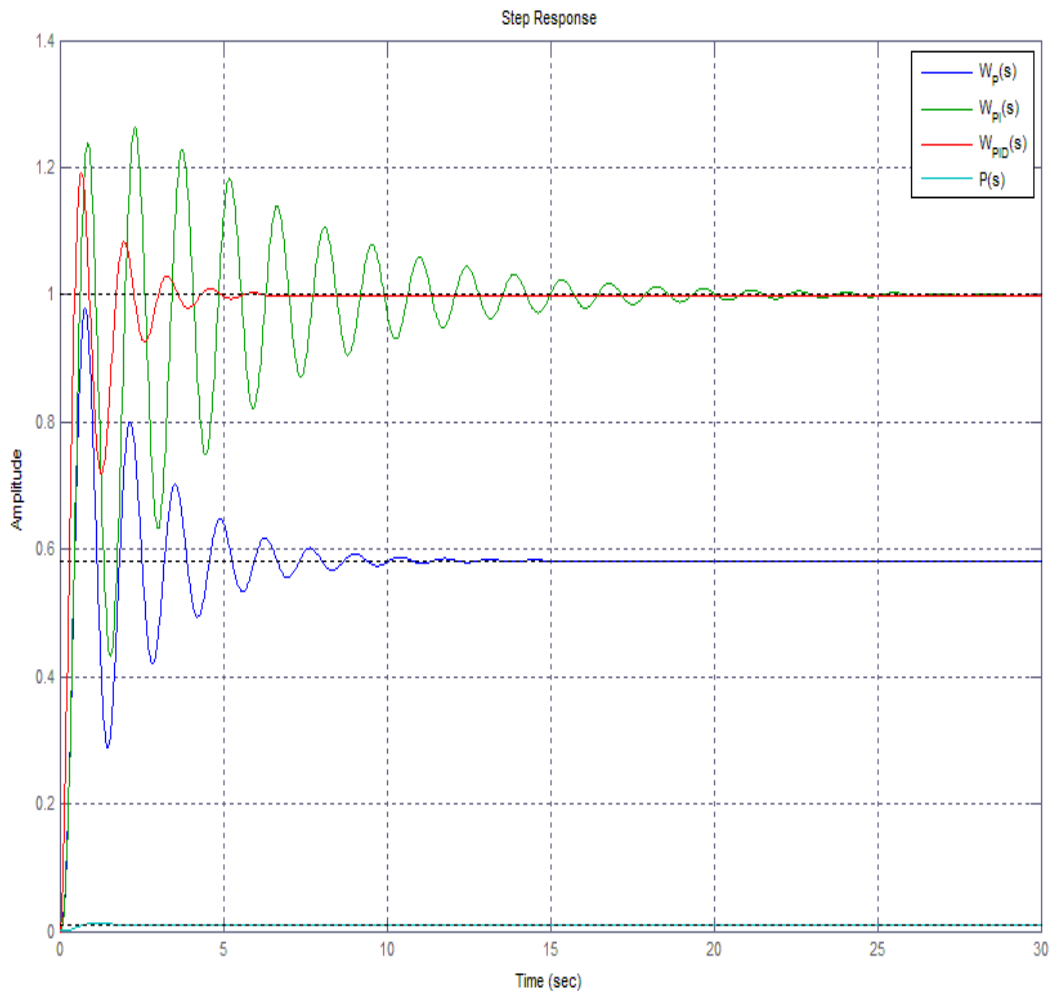


Figura 5. Risposte indicali del sistema a ciclo chiuso in presenza dei vari tipi di regolazione.

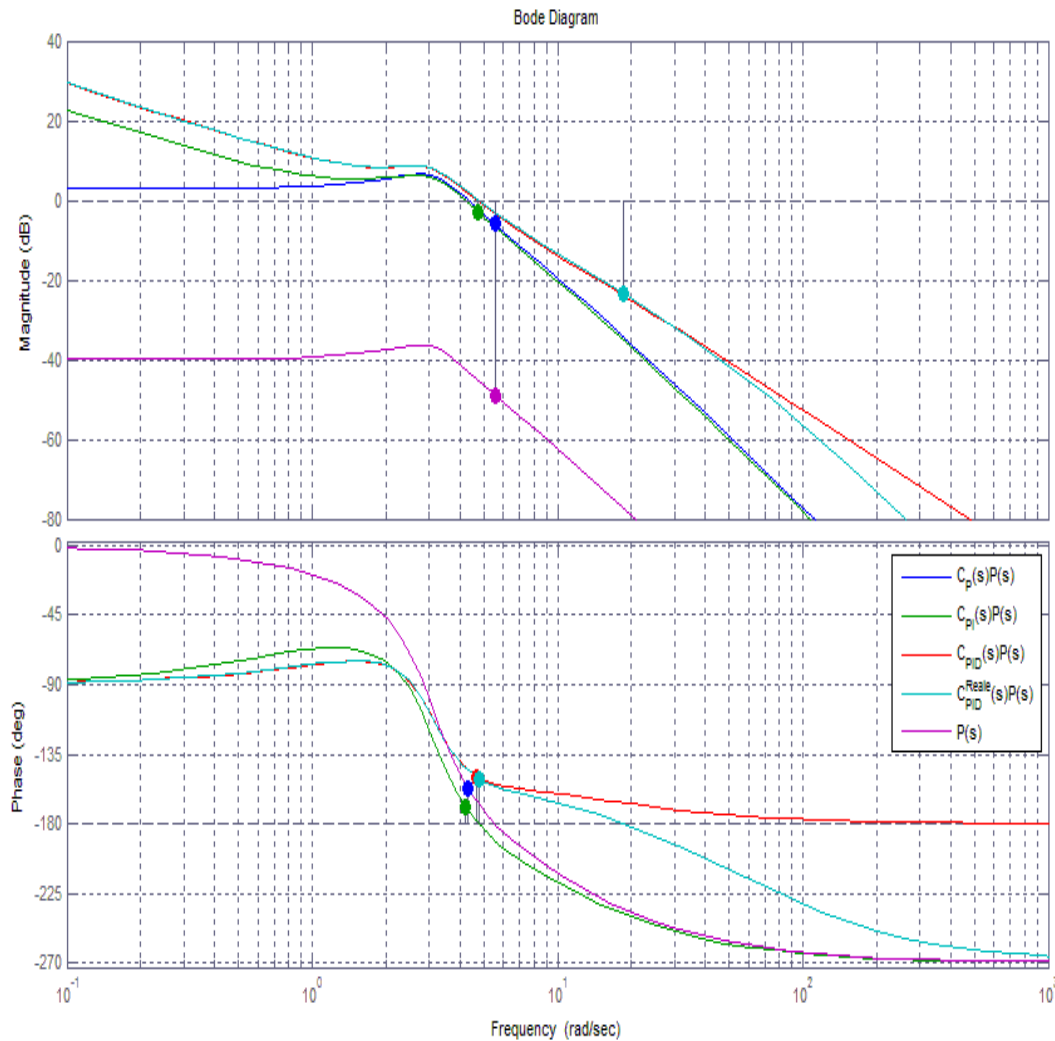


Figura 6. Risposte armoniche delle f.d.t. a ciclo aperto in presenza dei vari tipi di regolazione.

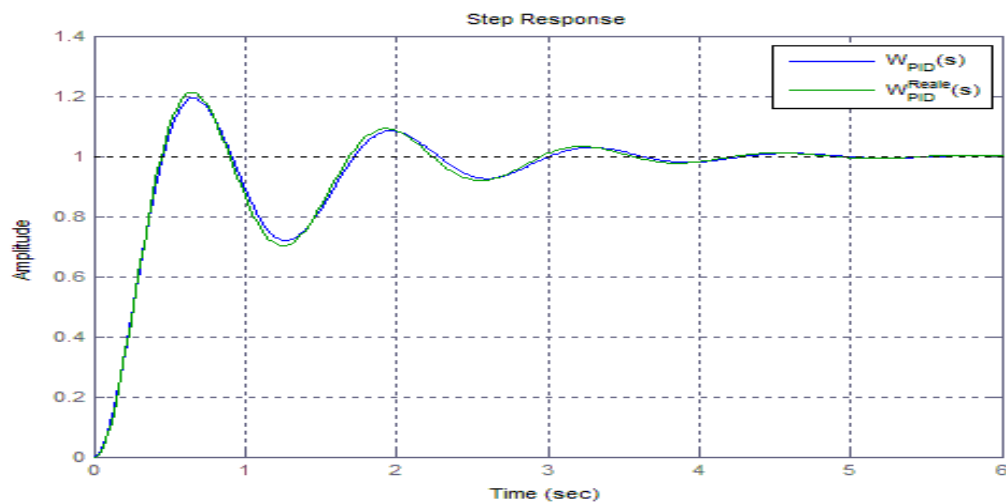


Figura 7. Confronto delle risposte indicali del sistema a ciclo chiuso controllato con $C_{PID}(s)$ e $C_{PID}^{Reale}(s)$.



con la differenza che il PI presenta consistenti oscillazioni nel transitorio, mentre il PID grazie all'azione anticipatrice legata alla componente derivativa riesce invece a garantire migliori prestazioni nel transitorio.

Le stesse considerazioni possono essere fatte anche nel dominio della frequenza, dal grafico in Figura 6 dove sono riportate le varie funzioni di trasferimento a ciclo aperto con i vari controllori progettati.

Importante sottolineare come la riduzione del grado relativo del sistema con il regolatore PID rispetto al PID REALE è solo apparente in quanto si è trascurata la presenza di una dinamica non modellata in alta frequenza, che invece risulta ben evidente della risposta armonica del PID REALE, sia in termini di modulo che di fase.

Ad ogni modo si può osservare come nella zona di interesse ($\omega \in [0 \div \omega_t \approx 5 \text{ rad/sec}]$) l'approssimazione sia accettabile.

Per completare l'analisi in Figura 7 si possono confrontare le risposte indiciali a ciclo chiuso tra i due regolatori. E' evidente come le due dinamiche siano molto simili.

Per quanto riguarda invece la valutazione del comportamento a ciclo chiuso per i risultanti sistemi si può fare ricorso ai diagrammi di Nichols (vedi Figura 8) e quindi andare a valutare rispettivamente il modulo alla risonanza e la banda passante per ciascun sistema.

Si ricorda che, come anticipato il Criterio di Ziegler-Nichols essendo ottimizzato per ottenere un rapporto di decadimento a $\frac{1}{4}$ sulle oscillazioni legate alla presenza di un disturbo, non garantisce buoni margini di fase, per cui non ci dovremo stupire se a ciclo chiuso andremo a misurare elevati valori per il modulo alla risonanza.

I Criteri di Ziegler-Nichols sebbene semplici da utilizzare non permettendo di garantire elevate. Essi prestazioni vengono utilizzati per una prima taratura di massima, dopodiché un operazione di retuning è sempre necessaria per affinare le prestazioni del sistema a ciclo chiuso.

Dallo zoom in Figura 9, possiamo notare come il regolatore PID garantisca un Modulo alla Risonanza M_r , decisamente inferiore rispetto al loop controllato attraverso la sola azione P oppure PI. Questo miglioramento è legato al fatto che le rete PID comprendendo al suo interno una azione derivativa, consente di inserire un anticipo di fase nella banda di lavoro tale da migliorarne il margine di fase a ciclo aperto, e quindi automaticamente ridurre il M_r a ciclo chiuso.

Si rimarca come la rete PID REALE, o nella sua forma approssimata (IDEALE), implementando una azione di controllo a Sella consente di ottenere le stesse prestazioni a ciclo chiuso di quest'ultima se opportunamente tarata.

Per concludere in Figura 10, sempre con l'ausilio di MatLab, oppure per punti direttamente dalla carta di Nichols si ricava il diagramma di risposta armonica dei risultanti sistema a ciclo chiuso. Ovviamente le informazioni che possiamo trarre da tali diagrammi sono **esattamente le stesse** che possiamo trarre dai dall'analisi dei Diagrammi di Nichols.

Interessante sottolineare come a ciclo chiuso l'azione di controllo $C_{PID}(s)$ e $C_{PID}^{Reale}(s)$, alle frequenze di interesse (ovvero prima della banda a 3dB) garantisca la medesima risposta armonica, ovviamente tale somiglianza tende a scomparire alle alte frequenze per via della presenza del polo in alta frequenza della rete $C_{PID}^{Reale}(s)$, necessario per garantire la causalità della rete e quindi la sua realizzabilità nella pratica.

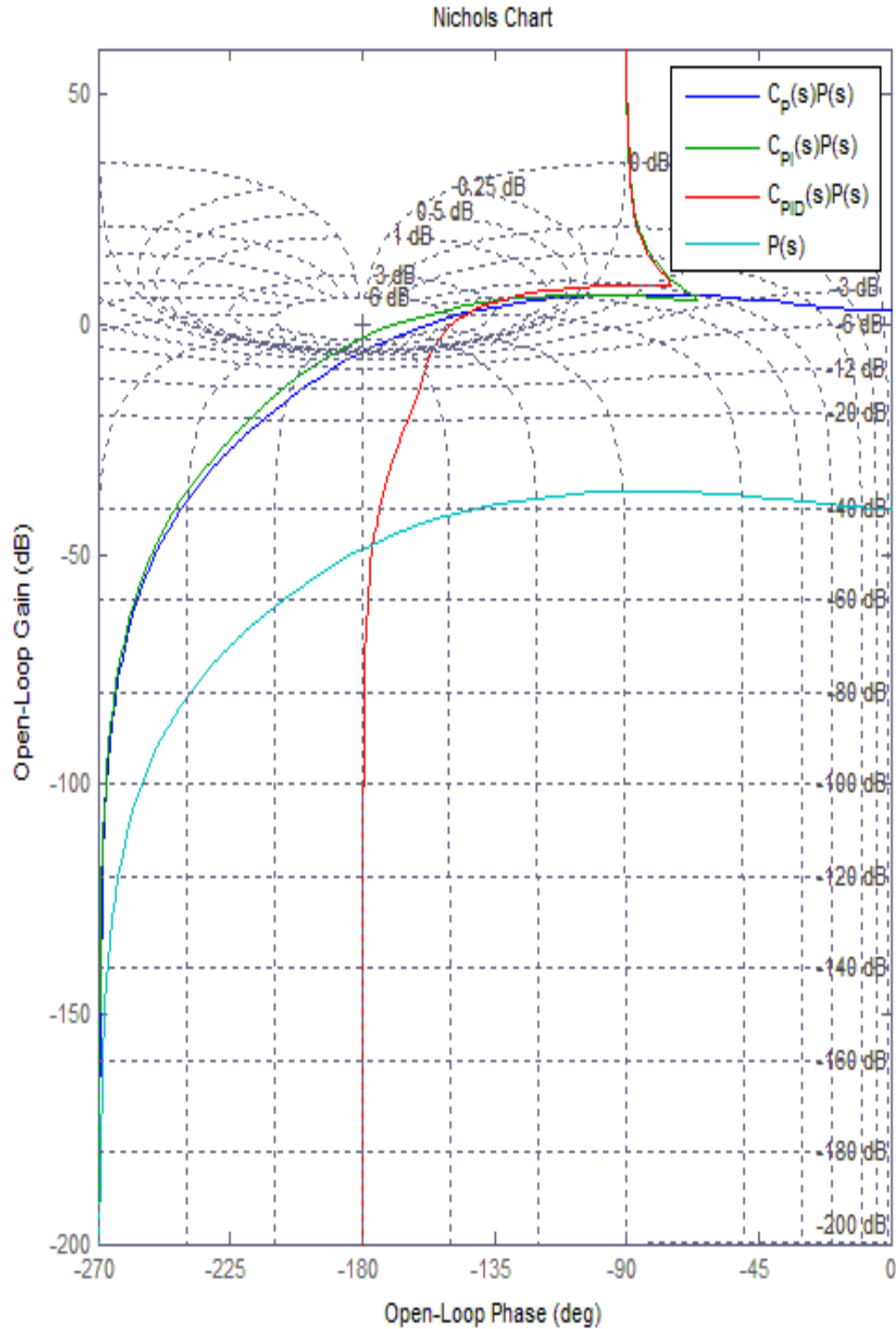


Figura 8. Digrammi di Nichols delle f.d.t. a ciclo aperto in presenza dei vari tipi di regolazione.

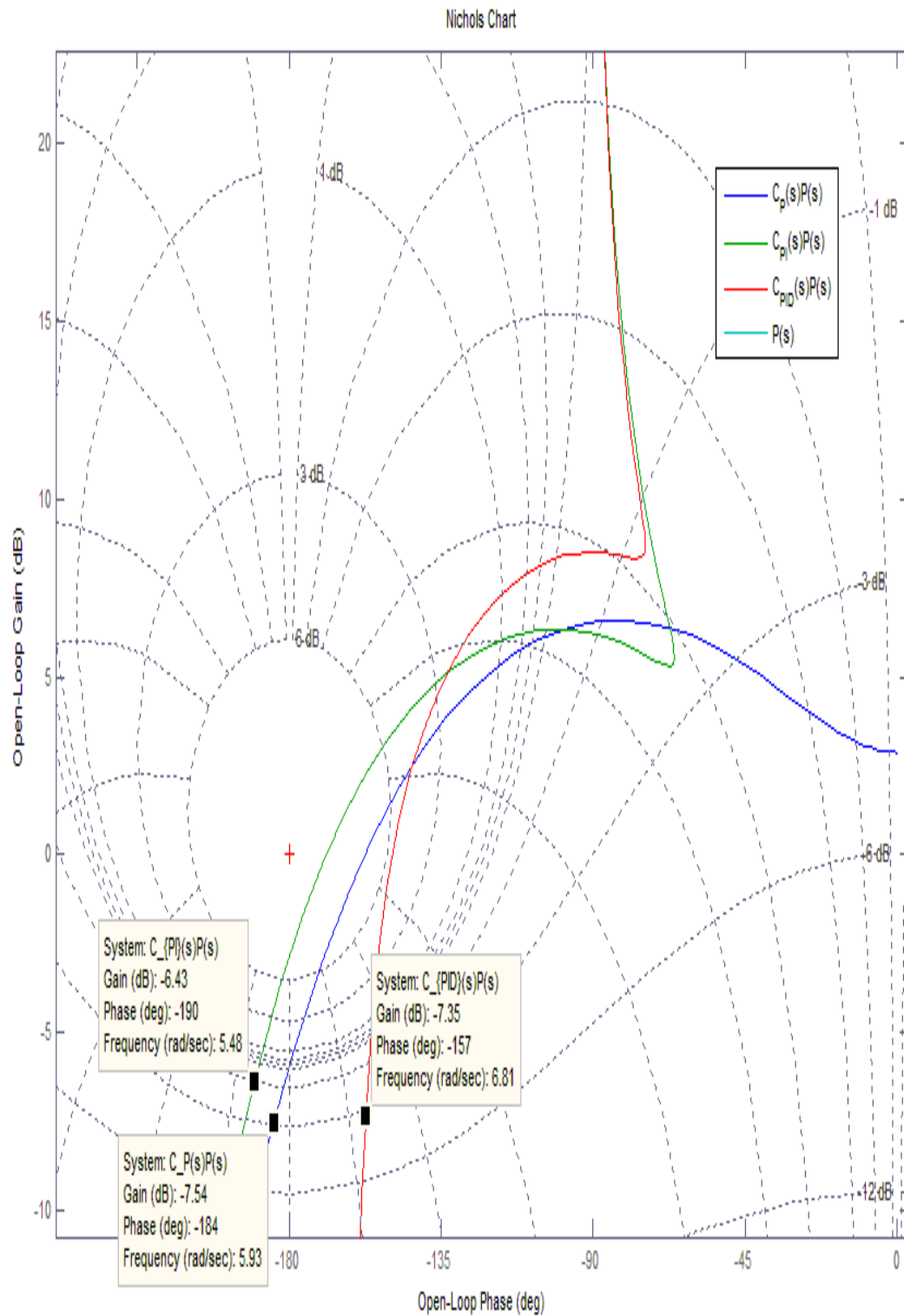


Figura 9. Zoom dei Diagrammi di Nichols delle f.d.t. a ciclo aperto in presenza dei vari tipi di regolazione.

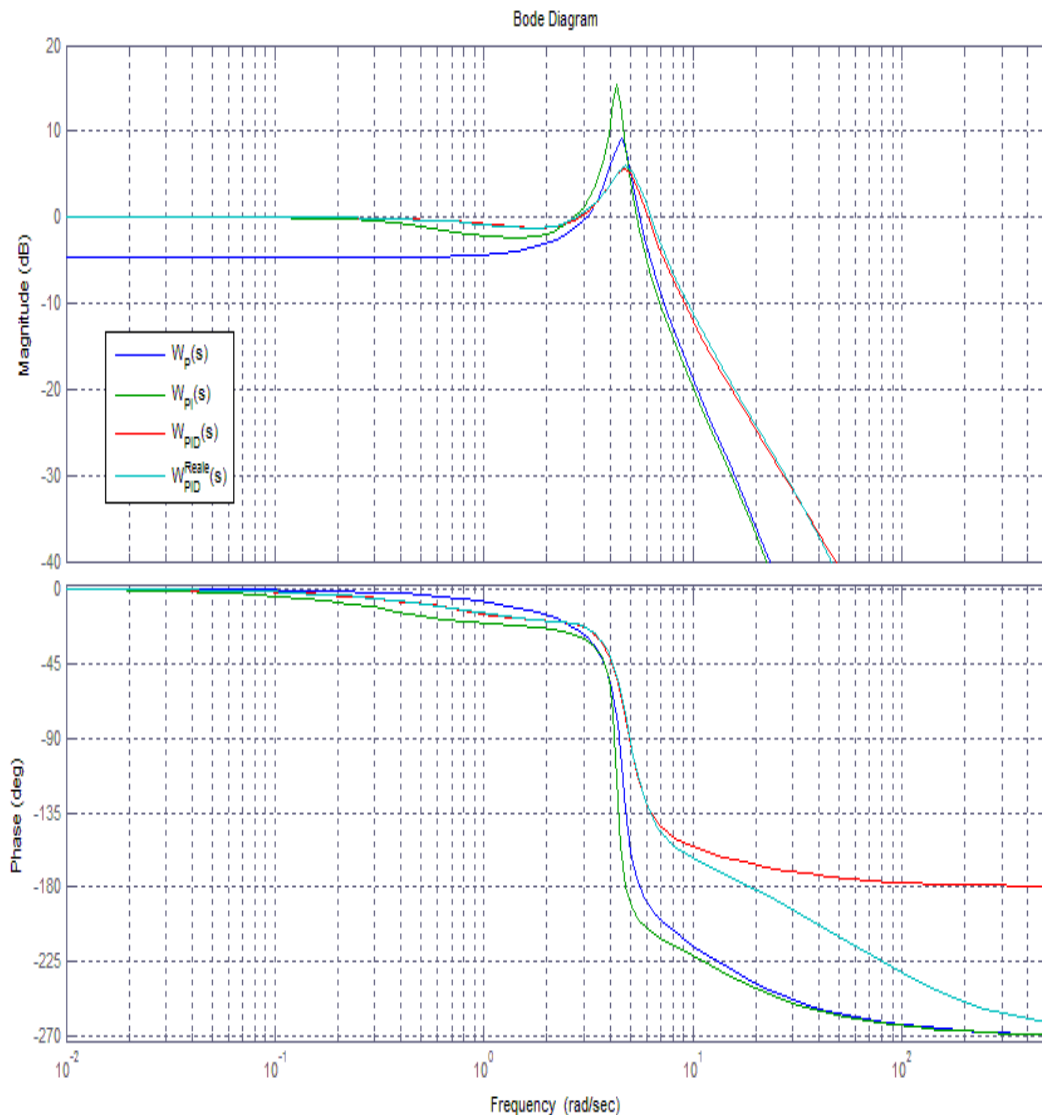


Figura 10. Digrammi di Risposta Armonica delle f.d.t. a ciclo chiuso $W(s)$ in presenza dei vari tipi di regolazione.

Per completezza di seguito è riportato il codice MatLab relativo all'esercitazione appena discussa. Copiare ed incollare il seguente codice in un MatLab m-file per eseguire in blocco tutte le istruzioni.

```
%% Esercitazione 9 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
% F.d.t. Processo
wn=pi; csi=1/3;
P=tf(0.01,conv([1/wn^2 2*csi/wn 1],[1/10 1]))
figure(1)
margin(P), grid

Kp_cr=10^(48.9/20); tau_cr=2*pi/5.5;
```



```
% Regolatore tipo P:
Kp_p=0.5*Kp_cr;
Cp=Kp_p

Wp=feedback(Cp*P,1);

% Regolatore tipo PI:
I=tf(1,[1 0]);
Kp_pi=0.45*Kp_cr; Ti_pi=0.8*tau_cr;
Cpi=Kp_pi*(1+I/Ti_pi);

Wpi=feedback(Cpi*P,1);

% Regolatore tipo PID:
D=tf([1 0],1);
Kp_pid=0.6*Kp_cr; Ti_pid=0.5*tau_cr;
Td_pid=0.125*tau_cr;
Cpid=Kp_pid*(1+I/Ti_pid+D*Td_pid)

Wpid=feedback(Cpid*P,1);

% Regolatore tipo PID Reale:
N=10;
Cpid_real=Kp_pid*(1+I/Ti_pid+tf([Td_pid,0],[Td_pid/N 1]))

Wpid_real=feedback(Cpid_real*P,1);
%%
figure(2)
step(Wp,Wpi,Wpid,P), grid
legend('W_P(s)', 'W_{PI}(s)', 'W_{PID}(s)', 'P(s)')
figure(3)
step(Wpid,Wpid_real), grid
legend('W_{PID}(s)', 'W_{PID}^{Reale}(s)')
figure(4)
bode(Cp*P,Cpi*P,Cpid*P,Cpid_real*P,P), grid
legend('C_P(s)P(s)', 'C_{PI}(s)P(s)', ...
       'C_{PID}(s)P(s)', 'C_{PID}^{Reale}(s)P(s)', 'P(s)')
figure(5)
nichols(Cp*P,Cpi*P,Cpid*P,P), grid
legend('C_P(s)P(s)', 'C_{PI}(s)P(s)', 'C_{PID}(s)P(s)', 'P(s)')
xlim([-270 0])
figure(6)
bode(Wp,Wpi,Wpid,Wpid_real), grid
legend('W_P(s)', 'W_{PI}(s)', 'W_{PID}(s)', 'W_{PID}^{Reale}(s)')
```

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.