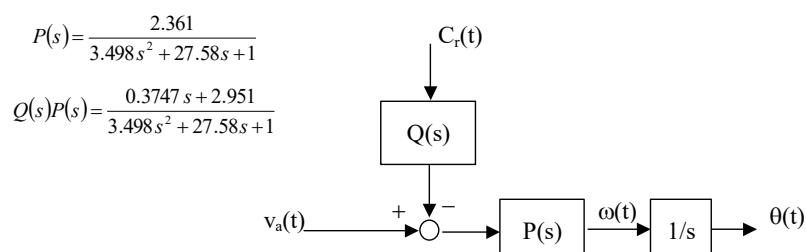


Esercitazione – n° 6

Si consideri il sistema della esercitazione n° 5 costituito da un braccio robotico in rotazione, utilizzato per la movimentazione di oggetti.

Il braccio, di lunghezza $l = 2m$ e massa $m_b = 1kg$, è azionato da un motore in corrente continua a magneti permanenti tipo D4M3511, le cui caratteristiche sono allegate, a cui è stata aggiunta una bobina di spianamento (*smoothing choke coil*) con induttanza $L_s = 50mH$. Il braccio deve movimentare dei pezzi, di massa $m_c = 2kg$, effettuando delle rotazioni di 90deg.

Considerando come ingresso la tensione di armatura del motore, come disturbo la coppia resistente e come uscita la posizione angolare del motore, la dinamica del sistema elettromeccanico costituente il processo da controllare è caratterizzata dalla seguente struttura



Al fine di ottenere la reiezione completa del disturbo di coppia costante si è scelto lo schema di controllo in cascata seguente

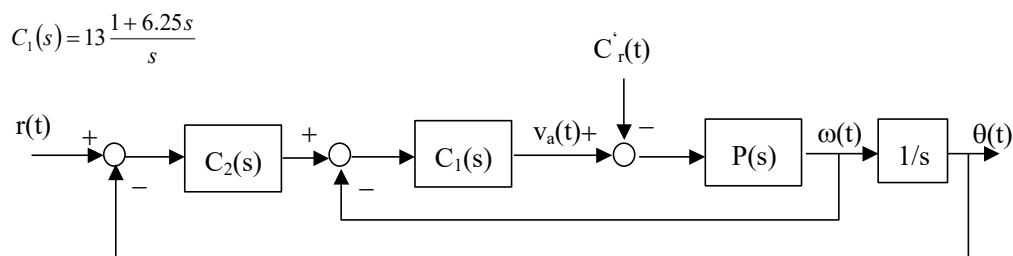


Figura 1.

Verificare che lo schema di controllo scelto soddisfa le seguenti specifiche di regime:

- posizione angolare a regime uguale al segnale di riferimento costante;
- influenza del disturbo costante di coppia, sulla posizione finale, nulla.

Definire la funzione di trasferimento del controllore $C_2(s)$ tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche sul transitorio:

- sovralongazione pressoché assente;
- raggiungimento della posizione finale con un errore massimo del 2% entro 4 secondi.

Verificare mediante simulazione che la tensione applicata $V_a(t)$ sia compatibile.



DATI MOTORE Motor ratings		SIMBOLI Symbols	UNITA' Units	SERIE Serie	D4M			
				COPPIA Torque	Nm 5.5			
S E O M O T O R E	TIPO DI AVVOLGIMENTO Type of winding			35 11	30 13	30 16	12 12	
	VELOCITA' NOMINALE Rated speed	n	RPM	3500	3000	3000	1200	
	COPPIA ROTORE BLOCCATO Cont. stall torque	Cn	Nm	5	5	5.5	5.5	
	CORRENTE A ROTORE BLOCCATO Stall current	In	A	15.6	11.6	10.8	5.9	
	PICCO DI COPPIA ALLO SPUNTO Peak torque	C max	Nm	25	25	27.5	27.5	
	CORRENTE AL PICCO DI COPPIA Peak current	I max	A	78	58	54	31.5	
	F.C.E.M ALLA VELOC. NOM. B.E.M.F at rated speed	E	V	113	135	163	120	
	MAX VELOCITA' Max speed	n max	RPM	4000	3500	3500	1700	
	N° POLI N° poles			4	4	4	4	
	DATI MECCANICI Mechanical data							
S E O M O T O R E	MOMENTO D' INERZIA Moment of inertia	J	Kgm ²	0.003	0.003	0.003	0.003	
	MAX. ACC. TEORICA Max theoretical acceleration	α max	rad/s ²	8300	8300	9170	9170	
	COSTANTE TEMPO MECC. Mechanical time constant	Tm	ms	33	24	16.5	8	
	COPPIA SMORZ. K RPM Damping constant K RPM	Td	Nm	0.19	0.19	0.19	0.19	
	COPPIA ATTRITO STATICO Static friction torque	Tf	Nm	0.16	0.16	0.16	0.16	
	MAX CARICO ASSIALE Max axial load	Fa	N	170	170	170	170	
	MAX CARICO RADIALE Max radial load	Fr	N	795	795	795	795	
	PESO Weight	G	Kg	12.5	12.5	12.5	12.5	
	DATI ELETTRICI Winding data							
	COSTANTE DI TENSIONE Voltage constant	Ke	Vs/rad	0.31	0.43	0.52	0.95	
D T T G	COSTANTE DI COPPIA Torque constant	Kt	Nm/A	0.32	0.43	0.51	0.93	
	COSTANTE TEMPO Elett. Electrical time constant	Te	ms	2	2.2	2.9	2.9	
	COSTANTE TEMPO TERMICA Thermal time constant	Tt	min	45	45	45	45	
	RESISTENZA ARM. Armature resistance	Ra	Ohm	0.3	0.52	0.65	2.2	
	RESISTENZA ARM. CON SPAZZ. Terminal resistance	Rm	Ohm	0.4	0.62	0.75	2.3	
	INDUTTANZA D'ARMATURA Armature inductance	La	mH	0.79	1.38	2.15	6.8	
	GRADO DI PROTEZIONE Protection (IEC 34.5)		IP	54	54	54	54	
	CLASSE ISOLAMENTO Insulation class			F	F	F	F	
	TOLLERANZE Tolerances		%	±5	±5	±5	±5	
	COSTANTE DI TENSIONE Voltage constant	Ke	Vs/rad	0.0955 (10 V/1000 RPM)				
F R E N K O E	ONDULAZIONE DI PICCO Ripple		%	1.6				
	LINEARITA' A 6000 RPM Linearity at 6000 RPM		%	0.5				
	ERRORE DI REVERSIBILITA' Reversibility error		%	0.5				
	COEFFICIENTE DI TEMP. Temperature coefficient		%	-0.043				
	MOMENTO D'INERZIA Moment of inertia	J	g\cm ²	90				
	RESISTENZA Resistance	Ra	Ohm	90				
	INDUTTANZA Inductance	La	mH	10				
	N° POLI N° poles			4				
	TIPO Type			FMPR 102				
	COPPIA STATICA Static torque	C	Nm	10				
F R E N K O E	TENSIONE DI ALIM. Power supply voltage	E	V	24				
	CORRENTE Current	I	A	1.1				
	POTENZA ASSORBITA Input power	P	W	26				

Altre tensioni a richiesta Other voltages on request

Soluzione esercitazione n° 6

Il controllo di un azionamento prevede la progettazione di due o più anelli di controllo, uno relativo alla corrente detto anche anello di corrente (o di coppia) ed uno più esterno relativo alla velocità (anello di velocità), a questi due anelli spesso si aggiunge un altro anello relativo alla posizione. Le motivazioni che portano ad optare per una configurazione in cascata anziché a singolo loop sono spesso legate al livello di precisione e robustezza che si vogliono raggiungere.

Sulla carta l'azionamento potrebbe essere controllato attraverso un singolo loop di controllo. Questa scelta però oltre che comportare maggiori difficoltà in fase di sintesi (il controllo in cascata infatti consente di suddividere un problema in più sotto problemi più semplici da trattare) comporterebbe anche un maggiore onere sul singolo regolatore (ad esempio di posizione) che si troverebbe nella condizione di dover calcolare *istantaneamente* i set-point anche degli anelli ommessi (in questo caso velocità e corrente).

Per quanto riguarda invece i benefici sulla precisione del controllo, nella scorsa esercitazione abbiamo visto come con il solo anello di posizione al massimo saremo stati in grado di garantire una influenza al disturbo di coppia $C_r(t) = \delta_1(t)$ sull'asse del motore limitata, ma non nulla (pena l'instabilità del loop di controllo), utilizzando invece più loop annidati, ad esempio come nello schema in Figura 1 potremo garantire una invarianza sulla velocità della macchina e di riflesso una invarianza sulla posizione.

Come mostrato in Figura 1, in questa esercitazione considereremo la progettazione e l'analisi dei soli anelli di velocità e posizione. Il loop di corrente è stato invece ommesso per semplicità.

1. La prima parte dell'esercitazione richiede di verificare il soddisfacimento delle seguenti specifiche a regime stazionario¹:
 - posizione angolare a regime uguale al segnale di riferimento costante;
 - influenza del disturbo costante di coppia sulla posizione finale, nulla.

Si noti come la richiesta di avere posizione angolare a regime $\theta(\infty)$ **uguale** al segnale di riferimento $r(t)$ **equivale** a richiedere un **sistema a retroazione unitaria**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [K_d \cdot r(t) - \theta(t)] = 0 \quad \rightarrow \quad K_d = 1$$

Per quanto riguarda invece la specifica sull'errore a regime nullo per set-point di posizione costanti ($r(t) = R \cdot \delta_{-1}(t)$) è chiaro che tale specifica risulterà automaticamente soddisfatta se e solo se la funzione a ciclo chiuso del loop di posizione presenterà poli nell'origine. Essendo nel nostro presente in catena diretta un polo in $s = 0$ nel processo², tale specifica è automaticamente soddisfatta. Il nostro sistema infatti ricade, nella casistica dei sistemi di asservimento di TIPO 1 a retroazione unitaria, vedi Tabella 1:

$$F(s) = \frac{k}{K_d} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i^z s)}{s^v \cdot \prod_{i=1}^{n-v} (1 + \tau_i^p s)}, \quad K_d = 1, \quad v = 1$$

i quali garantiscono errore a regime nullo per ingressi canonici a di tipo a gradino.

¹ Per regime stazionario si intende uno stato del sistema descritto dalla costanza delle sue caratteristiche nel tempo (o molto lentamente variabili). Può essere definito come lo stato del sistema una volta che terminano tutti i regimi transitori. Rappresenta una condizione in cui tutte le variabili di stato (grandezze fisiche) del sistema diventano costanti (r. stazionario) o periodiche (r. stazionario sinusoidale). Caratteristiche o parametri descrittivi sono ad esempio il l'ampiezza e la frequenza di una tensione. In tale regime vale la proprietà di traslazione causa-effetto.

² Si ricorda che posizione e velocità sono legate dal seguente rapporto integro-differenziale

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \longrightarrow s \cdot \Theta(s) - \theta(0) = \Omega(s)$$

		F.d.t. ad anello aperto:	F.d.t. Errore:	
		$F(s) = \frac{k}{K_d} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i^z s)}{s^\nu \cdot \prod_{i=1}^{n-\nu} (1 + \tau_i^p s)}$	$E(s) = \left[1 - \frac{F(s)}{1 + F(s)} \right] \cdot K_d R(s) \Big _{s \rightarrow 0} = \frac{s^\nu K_d^2}{s^\nu K_d + k} \cdot R(s)$	
Set-Point $R(s)$		Sistema TIPO 0 ($\nu = 0$)	Sistema TIPO 1 ($\nu = 1$)	Sistema TIPO 2 ($\nu = 2$)
Costante	$1/s$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = K_d^2 / (K_d + k)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = 0$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = 0$
Rampa	$1/s^2$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = \infty$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = K_d^2 / k$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = 0$
Parabola	$1/s^3$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = \infty$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = \infty$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \cdot R(s) = K_d^2 / k$

Tabella 1. Tabella sulla precisione a regime per sistemi in retroazione soggetti ad ingressi canonici.

Per completezza, date la dinamica del processo e del regolatore dell'anello interno si ottiene la seguente f.d.t. a ciclo chiuso per l'anello di velocità:

$$P_1(s) = \frac{2.361}{1 + 27.58 \cdot s + 3.498 \cdot s^2}, \quad C_1(s) = 13 \cdot \frac{1 + 6.25 \cdot s}{s}$$

$$G(s) = \frac{C_1(s) \cdot P_1(s)}{1 + C_1(s) \cdot P_1(s)} = \frac{191.8 s + 30.69}{(3.498 s^3 + 27.58 s^2 + 192.8 s + 30.69)}$$

Dalla quale, ipotizzando $C_2(s) = 1$ la f.d.t. ad anello aperto per il loop di posizione risulta:

$$F(s) = C_2(s) \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{191.8 s + 30.69}{s \cdot (3.498 s^3 + 27.58 s^2 + 192.8 s + 30.69)}$$

Dalla Tabella 1 deduciamo che il sistema complessivo garantirà un errore a regime nullo per set-point a gradino. La dimostrazione può essere ottenuta applicando il Teorema del Valore Finale come segue:

$$e(\infty)|_{r(t)=\delta_{-1}(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [K_d \cdot R(s) - W_r(s) \cdot R(s)]_{R(s)=\frac{1}{s}, K_d=1} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i^z s)}{s^\nu \cdot \prod_{i=1}^{n-\nu} (1 + \tau_i^p s) + k \cdot \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i^z s)} \right]_{\nu=1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \prod_{i=1}^{n-\nu} (1 + \tau_i^p s)}{s \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i^p s) + k \cdot \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i^z s)} = 0$$

Per quanto riguarda la risposta a regime (per $t \rightarrow \infty$) del sistema a un disturbo costante di coppia, poiché questo non può venire annullato dal polo del processo in quanto esso interviene a monte dello stesso, al fine di soddisfare tale specifica è stato suggerito per l'anello interno il seguente regolatore:

$$C_1(s) = 13 \cdot \frac{1 + 6.25 \cdot s}{s}$$

Dove l'introduzione del polo nell'origine in $C_1(s)$ a monte del punto in cui interviene il disturbo rende il sistema astatico³, e quindi la specifica risulta automaticamente soddisfatta.

E' chiaro che essendo la velocità $\Omega(s)$ indipendente dalla coppia disturbante, automaticamente anche l'influenza di $C_r(s)$ sull'uscita $\Theta(s)$ lo sarà. Come visto nella scorsa esercitazione si fa notare che a causa dello spostamento del disturbo come agente direttamente sulla tensione di armatura $V_a(s)$, $C_r'(s)$ non è esattamente un gradino, ma contiene un termine proporzionale ad esso più un termine impulsivo:

$$C_r'(s) = Q(s) \cdot C_r(s) = 1.25 \cdot (1 + 0.127 \cdot s) \cdot C_r(s) \Big|_{C_r(s)=\frac{1}{s}}$$

³ Un sistema di regolazione si dice statico o astatico rispetto a un disturbo a gradino, a seconda che l'errore finale conseguente al disturbo sia, rispettivamente, finito e diverso da zero o nullo.

Ad ogni modo, siccome a regime il disturbo risulta ancora una costante la trattazione svolta resta comunque valida. Per completezza di seguito è fornita la dimostrazione, dove si è applicato il Teorema del Valore Finale alla f.d.t. disturbo-uscita $\Theta(s)/C_r(s)$ ⁴:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{G(s)}{s}}{1 + \frac{C_2(s)G(s)}{s}} \cdot \left[\frac{Q(s)}{C_1(s)} \cdot C_r(s) \right]_{C_r(s)=\frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{s + C_2(s)G(s)} \cdot \frac{s \cdot Q(s)}{13 \cdot (1 + 6.25 \cdot s)} = 0$$

2. La seconda parte dell'esercitazione richiede di progettare la funzione di trasferimento del controllore $C_2(s)$ tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche sul transitorio:

- sovralongazione pressoché assente;
- raggiungimento della posizione finale con un errore massimo del 2% entro 4 secondi.

Dalle specifiche possiamo dedurre che il sistema a ciclo chiuso non dovrà presentare poli complessi coniugati⁵ ed inoltre avrà un vincolo sulla costante di tempo equivalente associata al sistema a ciclo chiuso. Sulla base di tali considerazioni il criterio di sintesi che permetterà il soddisfacimento di tali specifiche in maniera semplice e diretta è chiaramente la **Sintesi in s** o nel **Luogo delle Radici**.

Al fine di semplificare i conti di seguito sono riportati i comandi MatLab per valutare automaticamente i poli e gli zeri della f.d.t. ad anello aperto dell'anello di posizione e quindi tracciare il luogo delle radici.

```
% Esercitazione 6 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
% F.d.t. P1(s) e C1(s):
P1=tf(2.361,[3.498 27.58 1]);
C1=tf(13*[6.25 1],[1 0]);
% F.d.t. ad anello loop di portata:
F1=series(C1,P1);
% F.d.t. a ciclo chiuso dell'anello di velocità:
G=feedback(F1,1)
% zpk() trasforma una f.d.t. nella forma zero-pole-gain
zpk(G)
pole(G)
[numG,denG]=tfdata(G,'v')
zeriG=roots(numG)
poliG=roots(denG)

% F.d.t. a ciclo aperto dell'anello di posizione:
F=series(G,tf(1,[1 0]))
figure(1)
rlocus(F)
```

⁴ E' bene rimarcare che ogni qualvolta si esegue una analisi sulle prestazioni del sistema, poiché si ipotizza di lavorare con **sistemi dinamici lineari tempo invarianti** (LTI) è possibile applicare il **Principio di Sovrapposizione degli Effetti** e quindi **considerare un ingresso al sistema per volta**. Ad esempio se siamo interessati a studiare le prestazioni del sistema in termini ingresso-uscita, tutti gli eventuali disturbi saranno posti a zero. Viceversa se siamo interessati a valutare le prestazioni di un particolare disturbo sull'uscita, il set-point e tutti i disturbi escluso quello considerato saranno posti a zero.

⁵ Si ricorda che la sovralongazione $S_{\%} = 100 \cdot \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})$ è una grandezza tipica dei sistemi del secondo ordine $1/(1 + 2\xi/\omega_n \cdot s + s^2/\omega_n^2)$. Essa è massima quando il coefficiente di smorzamento $\xi = 0$ (che indica la presenza di una coppia di poli immaginari puri) e va scemando al crescere dello smorzamento. Per $\xi \geq 0.7$ la sovralongazione si può considerare trascurabile.

Supposto $C_2(s) = 1$, la f.d.t. a ciclo aperto del loop di posizione risulta essere:

$$F(s) = C_2(s) \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{54.8403 \cdot (s + 0.16) \cdot k'_c}{s \cdot (s + 0.1629) \cdot (s^2 + 7.722s + 53.87)} \Big|_{C_2(s)=k'_c=1}$$

$$z_1 = -0.16, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = -0.1629, \quad p_{2,3} = -3.8608 \pm j6.2420$$

Si noti che $F(s)$ è stata posta nella **forma zero-polo** in quanto siamo interessati a progettare il regolatore $C_2(s)$ attraverso la **Sintesi nel Luogo delle Radici** (o Sintesi per assegnazione dei poli), che consente l'**assegnazione degli autovalori del sistema a ciclo chiuso** (e quindi le proprietà di stabilità del sistema) attraverso la scelta appropriata del regolatore. In questa prima fase di progetto il regolatore $C_2(s)$ è stato scelto istantaneo con guadagno unitario al fine di poter valutare come reagisce il sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno in catena diretta.

Utilizzando le regole per il tracciamento del luogo delle radici per il caso in analisi otteniamo un luogo caratterizzato come segue:

- Numero di asintoti del luogo:

$$n - m = 3;$$

- Il centro degli asintoti:

$$p_c = \frac{\sum_{i=0}^n p_i - \sum_{i=0}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 0.1629 - 3.8608 \cdot 2 + 0.16}{3} = -2.5733$$

- La fase degli $n - m$ asintoti:

$$\psi_i = -\frac{(2 \cdot h + 1)}{n - m} \cdot 180 [\text{deg}], \quad h = 0, 1, \dots, n - m - 1, \quad i = 1, 2, 3$$

da cui si ricava:

$$\psi_1 = -60 [\text{deg}], \quad \psi_2 = -180 [\text{deg}], \quad \psi_3 = -300 [\text{deg}]$$

- Punti dell'asse reale percorrendo il luogo da $+\infty$ a $-\infty$ che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri, contati con la loro molteplicità:

$$s \in \Omega = \{[-\infty, -0.1629] \cup [-0.16, 0]\} \subset \mathbb{C}$$

Per quanto riguarda invece la presenza di eventuali punti doppi o di diramazione, data la struttura del luogo possiamo affermare a priori che l'equazione ai punti doppi non fornirà alcuna soluzione reale appartenente al luogo.

Per completezza riportiamo la procedura per il calcolo della direzione di partenza dei rami relativi ai poli complessi coniugati in $p_{2,3} = -3.8608 \pm j6.2420$. Tale condizione può essere espressa dalla così detta condizione di fase come segue:

$$\arg(D(s)) - \arg(N(s)) = \pm(2h + 1) \cdot \pi$$

dove h è un intero ed $N(s)$ ed $D(s)$ rappresentano numeratore e denominatore della f.d.t. a ciclo aperto. Dalla precedente attraverso semplici passaggi si deriva la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^n \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) = \pm(2h + 1) \cdot \pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta_i^* = \frac{1}{v_i} \cdot \left((2h+1) \cdot \pi + \sum_{j=1}^m \arg(s - z_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \arg(s - p_j) \right), \quad h = 0, 1, \dots, v_i - 1$$

dove l'incognita θ_i^* rappresenta l'angolo che la tangente al luogo nel polo complesso p_i forma con la direzione positiva dell'asse reale. v_i rappresenta la molteplicità del polo complesso coniugato (vedi Figura 2). Per analogia si potranno modificare la precedente relazione al fine di calcolare l'angolo ϕ_i^* di arrivo verso uno zero complesso attraverso semplici considerazioni.

Nel caso in analisi posto $s = p_2 = -3.8608 + j6.2420$ dalla seguente relazione si ricava:

$$\theta_2^* = 180 \text{ deg} + \arg(s - z_1) - \arg(s - p_0) - \arg(s - p_1) - \arg(s - p_3) = -29.59 \text{ deg}$$

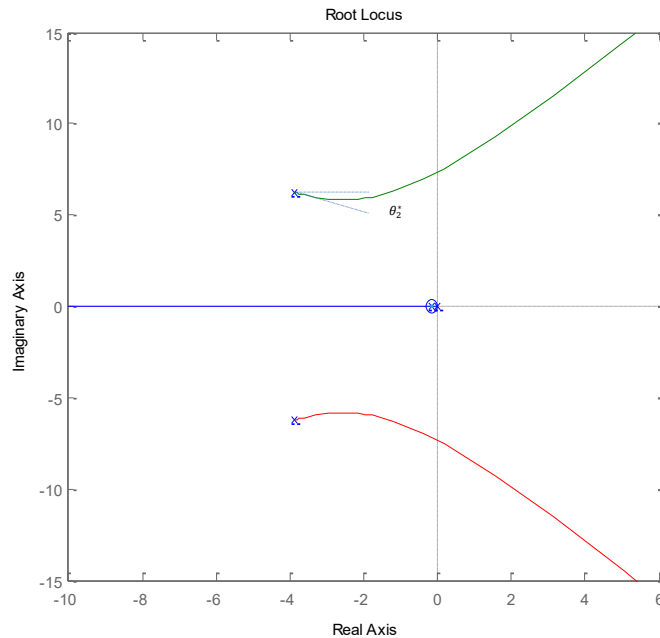


Figura 2. Luogo delle Radici della $F(s)$.

Per simmetria l'angolo di partenza del luogo per il polo p_3 sarà $\theta_3^* = +29.59 \text{ deg}$. In Figura 2 è riportato il luogo delle radici della $F(s)$ nell'ipotesi che $C_2(s)$ sia un regolatore statico con guadagno unitario.

Osservando il luogo in figura, è immediato notare come la sola correzione statica non sia sufficiente a soddisfare le specifiche in quanto per qualunque valore del guadagno, a causa della presenza della coppia di poli complessi coniugati una sovraelongazione sarà sempre presente. Si può inoltre notare come la coppia zero-polo nell'intorno di $s = -0.16$ determini una cancellazione imperfetta. Da notare che, supponendo di non effettuare la cancellazione, se andassimo a calcolare l'antitrasformata di Laplace associata a tale modo $R_1 \cdot e^{-\tau_1 t}$ con $\tau_1 = 1/0.1629$, vedremo che tale termine presenterà un residuo decisamente piccolo rispetto a quello degli altri modi a causa della presenza dello zero; sicché tale approssimazione risulta lecita in quanto effettuata nel semipiano a parte reale negativa.

Ricapitolando, la specifica sull'assenza di sovraelongazione richiede che i poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso siano tutti reali e stabili, mentre la specifica sul tempo di assestamento al 2% in base a quanto riportato in Tabella 2, richiede che tutti i poli del sistema a ciclo chiuso stiano a sinistra dell'ascissa:

	$\varepsilon = 1\%$	$\varepsilon = 2\%$	$\varepsilon = 5\%$
$t_{a\varepsilon\%} \approx K_\varepsilon \cdot \tau^*$	$K_\varepsilon = 5$	$K_\varepsilon = 4$	$K_\varepsilon = 3$

Tabella 2. Relazioni tra tempo di assestamento all' $\varepsilon\%$ e costante di tempo equivalent τ^* .

$$t_{a2\%} = 4\tau^* < 4 \rightarrow \tau^* > 1 \rightarrow \bar{\alpha} = -\frac{1}{\tau^*} < -1$$

Un modo per soddisfare queste specifiche è la sintesi per cancellazione, ovvero progettare un controllore che cancelli la dinamica indesiderata del processo e la sostituisca con un'altra appropriata.

In particolare, poiché si richiede un dinamica senza sovraelongazione, occorrerà innanzitutto cancellare i poli complessi coniugati attraverso due zeri identici come segue:

$$C_2(s) = \frac{(s^2 + 7.722s + 53.87)}{(s - p_{c1}) \cdot (s - p_{c2})}$$

inoltre, al fine di rendere causale il regolatore inseriremo due poli p_{c1} e p_{c2} scelti in modo che il punto doppio risultante risieda a sinistra della ascissa $\bar{\alpha} = -1$.

Per far ciò è possibile ad esempio risolvere l'equazione ai punti doppi a seguito delle cancellazioni:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s - p_{c1}} + \frac{1}{s - p_{c2}} = 0 \rightarrow 3s^2 - 2(p_{c1} + p_{c2})s + p_{c1}p_{c2} = 0$$

Poiché l'equazione ai punti doppi presenta due incognite p_{c1} e p_{c2} ed un solo vincolo esistono infinite coppie di poli che soddisfano il nostro problema. Ad esempio potremo fissare uno dei poli sufficientemente in alta frequenza e quindi ricavare il valore dell'altro, oppure definirli uno in funzione dell'altro ad esempio $p_{c2} = 4 \cdot p_{c1}$ e quindi risolvere l'equazione. In questo secondo caso si otterrebbe il seguente vincolo

$$\frac{10p_{c1} - \sqrt{(10p_{c1})^2 - 48p_{c1}^2}}{6} \leq -1 \rightarrow p_{c1} \leq -2.154$$

Ad ogni modo poiché la scelta di tali poli è del tutto arbitraria ed al fine di garantire un certo margine di sicurezza si è optato per la seguente coppia di poli $p_{c1} = -6$ e $p_{c2} = -10$. Come verifica, sostituendo tali valori nell'equazione ai punti doppi si dimostra che il punto doppio appartenente al luogo risulterà situato in $s = -2.43 < \bar{\alpha} = -1$.

Al fine di ricavare il luogo delle radici del sistema completo forniamo i seguenti comandi MatLab. Il luogo delle radici risultante è riportato in Figura 3.

```
F=series(G,tf(1,[1 0]))
C2=zpk([-3.8608+6.2420i -3.8608-6.2420i],[-6 -10 ],1)
figure(2)
rlocus(C2*F)
```

Poiché il punto doppio soddisfa le specifiche, e siccome tale punto appartiene al luogo, sceglieremo come guadagno in alta frequenza del nostro regolatore proprio il valore di guadagno tale che i poli a ciclo chiuso del sistema complessivo ivi risultino. Il guadagno del controllore K'_C può essere ricavato dalla taratura del luogo delle radici risolvendo l'equazione:

$$|54.8403 \cdot K'_C| = \frac{|s| \cdot |(s+6)| \cdot |(s+10)|}{1} \Big|_{s=-2.43}$$

da cui dividendo per il K' del processo si ottiene $K'_C \approx 1.2$.

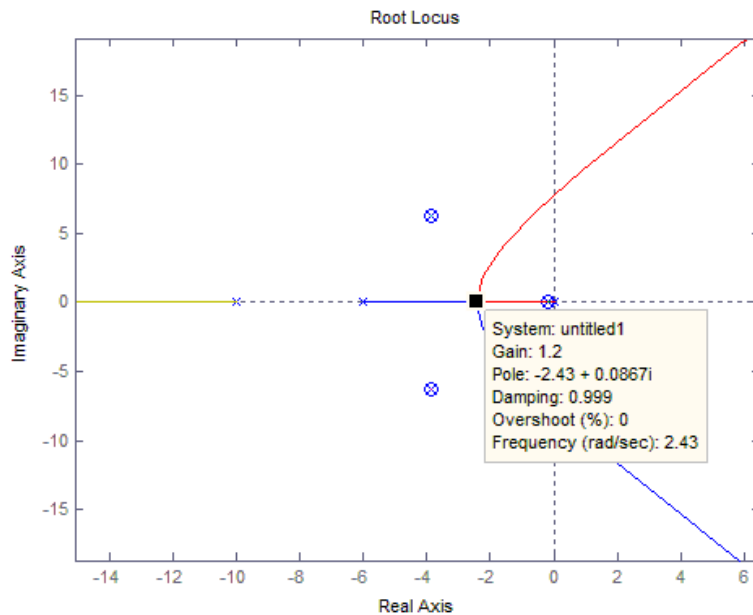


Figura 3. Luogo delle Radici della f.d.t ad anello aperto $C_2(s) \cdot F(s)$.

3. Per concludere al fine di validare mediante simulazione che la tensione applicata $V_a(t)$ sia compatibile con il range di valori di tensione stabiliti dal costruttore, ricorreremo all'ambiente grafico di simulazione Simulink⁶ disponibile in qualunque versione di MatLab.

Richiamando quanto illustrato nella scorsa esercitazione riguardo alla modellazione matematica del nostro sistema e sulla base dei dati forniti dal costruttore, in Figura 4 si riporta lo schematico Simulink completo del sistema controllato.

```
% Parametri elettrici:
R=0.4; La=0.79e-3; Ls=50e-3; L=La+Ls;
% Parametri meccanici:
Tm=33e-3; Jm=0.003; B=Jm/Tm;
l=2; mb=1; mc=2;
J=Jm+mc*l^2+1/3*mb*l^2;
% Costante di tensione e di coppia della macchina
ke=0.31; kt=0.32;
```

Si noti inoltre come la specifica sulla $V_a(t)$ possa essere tradotta in una specifica sulla tensione di picco ammissibile. Ad esempio, considerando la tensione alla velocità nominale riportata nel data-sheet pari a 113V si vorrà fare in modo che la $V_a(t)$ risulti sempre inferiore a tale valore.

Dal grafico riportato in Figura 5 (curva blu) si osserva come, preso in analisi il caso peggiore di ingresso, ovvero $r(t) = \pi/2$ (si ricorda infatti che al massimo il nostro braccio potrà compiere rotazioni di 90°) la

⁶ Per avviare Simulink digitare nella Command Window di MatLab il comando “*simulink()*”. E’ possibile trovare una breve ma completa guida al seguente indirizzo internet: http://www.dice.unica.it/~pisano/SimulinkFeb_2011.pdf

tensione di armatura risulta pari a 150V, e quindi fortemente fuori specifica. Al fine di ridurre tale tensione in ingresso al motore è però sufficiente ridurre un poco il guadagno di $C_2(s)$. Ad esempio posto $K_C = 0.9$ e lanciando nuovamente la simulazione possiamo vedere come in questo caso la tensione al massima varrà 114.9V. Anche in questo caso risuliamo leggermente sopra la specifica, ma poiché tale tensione risulta quella consigliata in condizioni di lavoro nominali (è importante sottolineare che 113V non rappresenta una tensione di rottura) e poiché questo test è stato svolto nel nostro “worst case”, possiamo considerare rispettata tale specifica. In Figura 6 è riportato l’andamento della risposta al gradino del nostro sistema nel caso in cui sia presente anche un disturbo di coppia pari a $C_r = 1Nm$. Dalla figura si nota che tutte le specifiche di progetto risultano verificate per cui possiamo considerare concluso il nostro progetto.

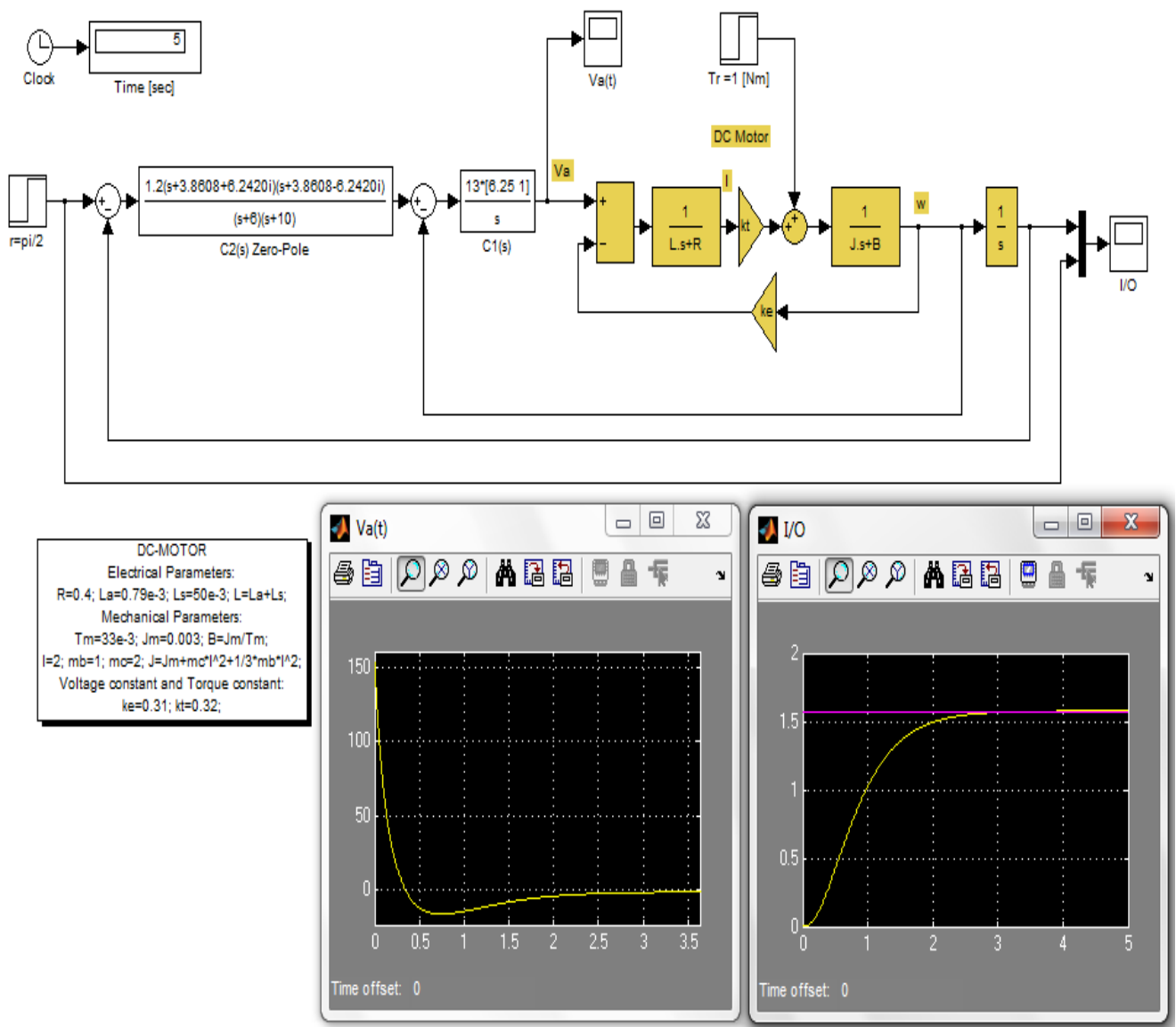


Figura 4. Schematico Simulink del sistema in analisi.

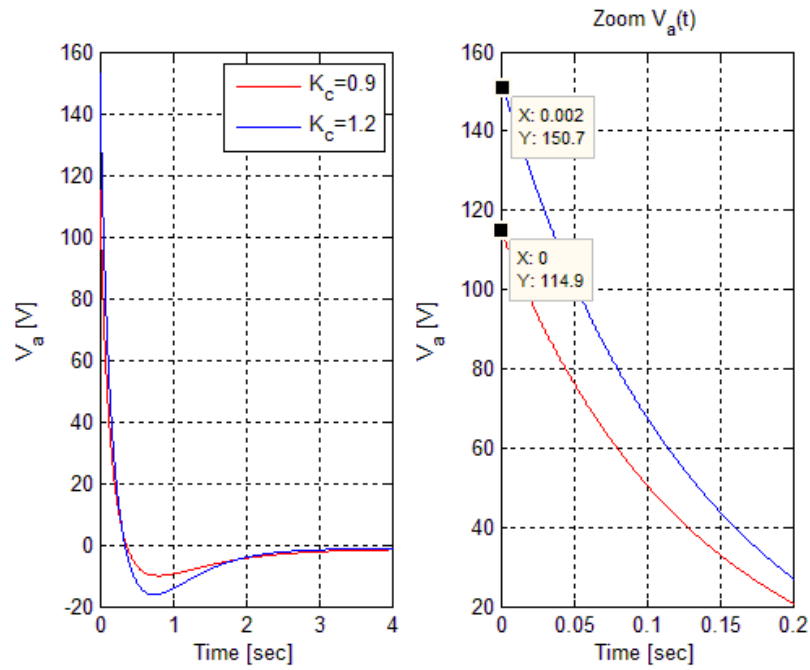


Figura 5. Andamento della tensione di armatura per diversi valori di K'_c .

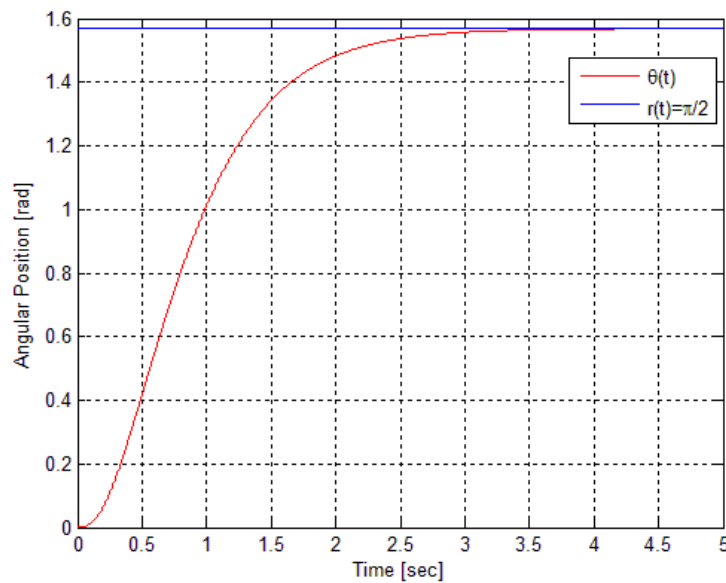


Figura 6. Risposta al gradino del sistema per $r(t) = \pi/2$, $C_r(t) = 0$.

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.