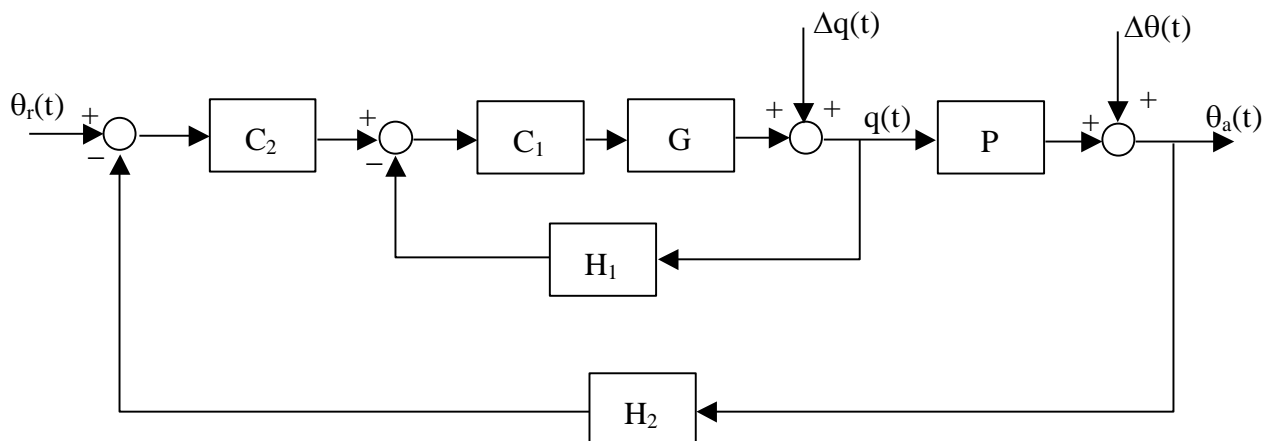


## Esercitazione di Controlli Automatici 1 – n°3

Riferendosi al sistema di controllo della temperatura in un locale di piccole dimensioni discusso nella esercitazione precedente, e di seguito riportato:

1. Si analizzino le caratteristiche modali del loop interno di portata al variare del guadagno  $k_{C_1}$  del controllore di portata  $C_1(s)$  utilizzando il luogo delle radici per  $k_{C_1} \in [0, +\infty)$ , e si facciano le considerazioni del caso.
2. Valutare i margini di guadagno e di fase del sistema, nonché la pulsazione critica ed il guadagno critico del loop di temperatura  $C_2(s)$ .
3. Si analizzino le caratteristiche modali del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno  $k_{C_2} \in [0, +\infty)$  del controllore di temperatura  $C_2(s)$  utilizzando il luogo delle radici.
4. Si discutano gli effetti della semplificazione del loop interno sulla valutazione delle caratteristiche di stabilità del sistema a ciclo chiuso (margini di fase e guadagno, e guadagno critico), utilizzando i diagrammi di Bode, Nyquist ed il luogo delle radici.



$$P(s) = \frac{k_P}{(1 + \tau_{P_1} \cdot s) \cdot (1 + \tau_{P_2} \cdot s)} = \frac{0.1}{1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1}$$

$$G(s) = \frac{k_G}{1 + \tau_G \cdot s} = \frac{1}{1 + 10 \cdot s}$$

$$C_1(s) = k_{C_1} = 100$$

$$C_2(s) = \frac{k_{C_2}(1 + \tau_I \cdot s)}{s} = k_{C_2} \cdot \frac{1 + 100 \cdot s}{s}$$

$$H_1(s) = 1$$

$$H_2(s) = \frac{k_H}{1 + \tau_H \cdot s} = \frac{1}{1 + s}$$

## Soluzione Esercitazione n° 3

1. Si consideri il sistema di controllo discusso nella precedente esercitazione. Al fine di analizzare le caratteristiche modali del loop interno di portata al variare del guadagno  $k_{C_1}$  del controllore di  $C_1(s)$  utilizzando il Luogo delle Radici, si dovrà studiare la *funzione ad anello aperto*<sup>1</sup> associata al loop di portata nella così detta **forma fattorizzata**

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = k' \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = k' \cdot \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  **polinomi monici** in cui  $z_i$  sono gli  $m$  zeri e  $p_i$  gli  $n$  poli della  $F(s)$ , con  $n \geq m$ , e  $k'$  detto anche **costante di guadagno in alta frequenza**, è il rapporto tra i coefficienti delle potenze di “ $s$ ” di grado massimo a numeratore e denominatore, ovvero  $b_m/a_n$ .

Il Luogo delle Radici (**completo**) è il luogo geometrico descritto nel piano complesso dagli **zeri dell'equazione caratteristica** (ovvero dai poli a ciclo chiuso):

$$1 + F(s) = 0 \rightarrow D(s) + k' \cdot N(s) = 0$$

al variare della costante  $k'$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Nel seguito ci interesseremo essenzialmente del luogo positivo  $k' \in [0, +\infty)$ , il quale andamento, anche solo di tipo qualitativo, risulta di grande aiuto nella soluzione di problemi classici di analisi e sintesi per tentativi di sistemi SISO (Single Input-Single Output).

Con riferimento al loop interno di portata, la f.d.t. a ciclo chiuso dell'anello interno risulta essere:

$$W_1(s) = \frac{C_1(s) \cdot G(s)}{1 + C_1(s) \cdot G(s) \cdot H_1(s)} = \frac{C_1(s) \cdot G(s)}{1 + C_1(s) \cdot G(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

la cui f.d.t. ad anello aperto in forma fattorizzata è

$$F_1(s) = C_1 \cdot G(s) = \frac{k_{C_1}}{1 + 10 \cdot s} = \frac{k_{C_1}}{10} \cdot \frac{1}{(s + 0.1)}$$

Ricordando che il Luogo delle Radici associato ad una  $F(s)$  è sempre costituito da  $n$  rami ed è simmetrico rispetto all'asse reale e che ogni ramo parte (per  $k' = 0$ ) da un polo di  $F(s)$  e termina (per  $k' = +\infty$ ) in uno zero di  $F(s)$  o all'infinito secondo una direzione asintotica, di seguito sfruttando le ben note regole di taratura, ricaveremo per il caso in analisi le sue caratteristiche.

- Il numero di asintoti del luogo:

$$n - m = 1;$$

- Il centro degli asintoti:

$$p_c = \frac{\sum_{i=0}^n p_i - \sum_{i=0}^m z_i}{n - m} = -0.1$$

- La fase degli  $n - m$  asintoti:

$$\psi_i = -\frac{(2 \cdot h + 1)}{n - m} \cdot 180 [\text{deg}] = -180 [\text{deg}], \quad h = 0, 1, \dots, n - m - 1 \rightarrow h = 0$$

<sup>1</sup> La funzione ad anello aperto è la f.d.t. rappresentativa della serie di tutti gli elementi presenti nel loop di controllo, nell'ipotesi che l'anello di controllo sia interrotto al comparatore. Si noti che tale funzione viene considerata nell'analisi di stabilità sia mediante il *Luogo delle Radici* che nell'applicazione del *Criterio di Nyquist*.

Al fine di valutare l'andamento del Luogo delle Radici di  $F(s)$  attraverso MatLab di seguito forniamo i seguenti comandi:

```
% Esercitazione 2 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
%% Definiamo le f.d.t. del sistema in analisi
P=tf(0.1,[1000 70 1]);
G=tf(1,[10 1]);
C1=tf(100);
C2=tf([100 1],[1 0]);
H1=tf(1);
H2=tf(1,[1 1]);
% F.d.t. ad anello loop di portata
F1=C1*G*H1
% Luogo delle Radici f.d.t ad anello per il loop di portata:
figure(1)
rlocus(F1), grid
```

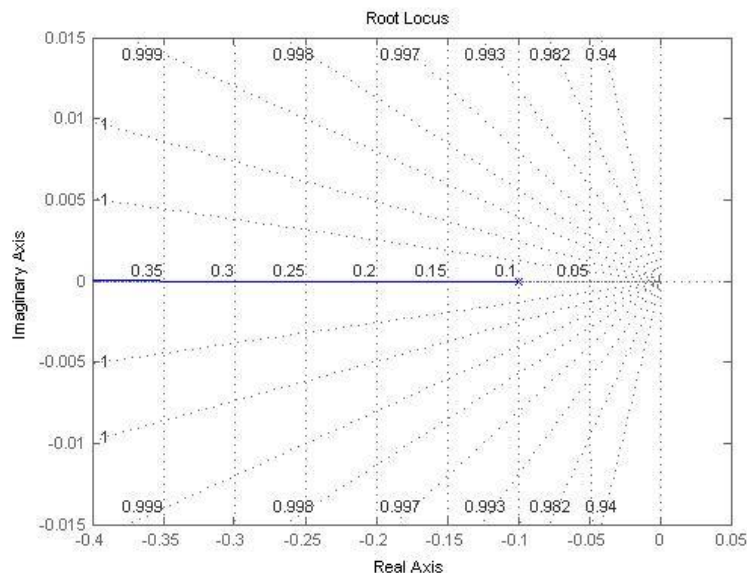


Figura 1. Luogo delle Radici della f.d.t.  $F_1(s)$ .

Come si può notare osservando il luogo riportato in Figura 1, l'anello interno è sempre caratterizzato da un modo aperiodico decrescente (il luogo non abbandona mai l'asse reale negativo) per qualunque valore del guadagno  $k_{C_1} \in [0, +\infty)$ . A conferma di ciò, possiamo calcolare la f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W_1(s) = \frac{C_1(s) \cdot G(s)}{1 + C_1 \cdot G(s)} = \frac{k_{C_1}}{10 \cdot (s + p_{W_1})}, \quad \text{con} \quad p_{W_1} = -(1 + k_{C_1})$$

Teoricamente si può dire che il loop interno possa essere reso rapido a piacere ( $p_{W_1} = -(1 + k_{C_1})$ ). Ovviamente questo nella pratica non è vero perché il processo sotto controllo, in questo caso la valvola  $P(s)$ , avrà sicuramente dei limiti costruttivi oltre i quali fisicamente non potrà andare salvo rottura della stessa o fenomeni di saturazione.

Ad esempio supposto  $k_{C_1} = 100$ , come nel testo dell'esercizio, per il criterio del modo dominante è possibile considerare  $W_1(s)$  istantaneo rispetto al resto del sistema ed in particolare si avrà:

$$W_1(s) = \frac{C_1(s) \cdot G(s)}{1 + C_1 \cdot G(s)} = \frac{100}{10 \cdot (s + 101)} = \frac{0.990099}{1 + \frac{s}{10.1}}$$

2. Al fine di valutare i margini di stabilità di Bode del loop di temperatura, nonché la pulsazione critica  $\omega_c$  ed il guadagno critico del controllore  $k'_{C_2}$  di temperatura  $C_2(s)$  dovremo ricavare il diagramma di Bode della f.d.t. ad anello aperto  $F(s)$  del sistema. Poiché risulta una approssimazione lecita nel range di frequenze di lavoro  $\omega < 1$  rad/sec, si assumerà  $W_1(s)|_{k_{C_1}=100} \approx 1$ .

La f.d.t. ad anello aperto, sostituendo i valori numerici è:

$$F(s) = C_2(s) \cdot P(s) \cdot H_2(s) = \frac{0.1 \cdot k_{C_2} \cdot (100 \cdot s + 1)}{s \cdot (s + 1) \cdot (1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1)}$$

Con riferimento al diagramma di Bode della  $F(j\omega)$ , riportati in Figura 2, rispettivamente margine di guadagno  $\mathbf{m_g}$  e di fase  $\mathbf{m_\phi}$  sono definiti come segue:

$$\mathbf{m_g|_{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(1) - 20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)| = -20 \cdot \log_{10} |F(j\omega_c)|, \omega_c: \angle F(j\omega_c) = -180 \text{ deg}$$

$$\mathbf{m_\phi|_{deg}} = \angle F(j\omega_t) - (-180 \text{ deg}) = \angle F(j\omega_t) + 180 \text{ deg}, \omega_t: |F(j\omega_t)| = 1 \equiv |F(j\omega_t)|_{dB} = 0$$

dove  $\omega_t$  è detta **pulsazione di taglio** o di **attraversamento**, in quanto corrisponde alla pulsazione per cui il digramma dei moduli della  $F(j\omega)$  passa per l'asse delle ascisse del diagramma (retta  $20 \cdot \log_{10} 1 = 0\text{dB}$ ). Per quanto riguarda invece il margine di guadagno, possiamo dire che esso esprime il valore in dB del segmento compreso tra il diagramma dei moduli e l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione  $\omega_c: \angle F(j\omega_c) = -180 \text{ deg}$ .

**La lettura di tali margini è immediata sui diagrammi di Bode in quanto consiste nel rilevare in corrispondenza delle pulsazioni  $\omega_c$  ed  $\omega_t$  rispettivamente il modulo della  $|F(j\omega_c)|$  cambiato di segno e la fase  $\angle F(j\omega_t)$  incrementata di 180deg .**

**Affinché un sistema stabile a ciclo aperto anche a ciclo chiuso è necessario che entrambi i margini di stabilità  $\mathbf{m_g}$  ed  $\mathbf{m_\phi}$  sopra definiti siano positivi.**

**Valori ritenuti soddisfacenti per  $\mathbf{m_\phi}$  nella sintesi dei sistemi di controllo sono compresi nell'intervallo (40 ÷ 60) deg.**

I margini di fase e di guadagno possono essere valutati mediante il tracciamento del diagramma di Bode, o equivalentemente utilizzando il comando MatLab *margin()* come segue:

```
%2)
% f.d.t. dell'anello di temperatura (W1(s) istantanea)
Fap=C2*P*H2
figure(2)
margin(Fap)
```

Osservando Figura 2 ricaviamo i seguenti valori per il margine di guadagno e di fase:

- $\mathbf{m_g} = 16.1 \text{ dB} \equiv 10^{\frac{16.1}{20}} = 6.38$  in corrispondenza della pulsazione critica  $\omega_c = 0.246 \text{ rad/sec}$ ;
- $\mathbf{m_\phi} = 29 \text{ deg}$  in corrispondenza della pulsazione di taglio  $\omega_t = 0.0928 \text{ rad/sec}$ .

Il guadagno critico del controllore  $C_2(s)$  risulta quindi, come ricavato nella scorsa esercitazione, essere pari al margine di guadagno, ovvero  $k'_{C_2} = 6.38$  alla pulsazione critica  $\omega_c = 0.246 \text{ rad/sec}$ .

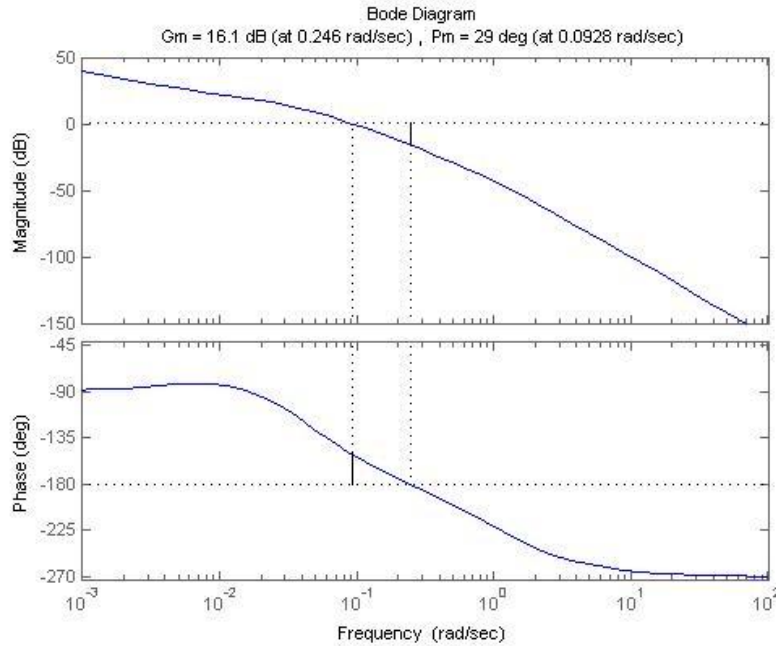


Figura 2. Margine di guadagno e di fase della f.d.t. ad anello aperto  $F(j\omega)$

3. Al fine di valutare le caratteristiche modali del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno  $k_{c_2}$  del controllore di temperatura  $C_2(s)$  utilizzando il luogo delle radici di seguito riscriviamo la f.d.t. in analisi nella sua forma poli/zeri, o forma fattorizzata:

$$F(s) = \frac{0.1 \cdot k_{c_2} \cdot (100 \cdot s + 1)}{s \cdot (s + 1) \cdot (1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1)} = \frac{0.01 \cdot (s + 0.01)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 0.05) \cdot (s + 0.02)}$$

Applicando le regole per il tracciamento del luogo delle radici per il caso in analisi otteniamo un luogo caratterizzato come segue:

- Numero di asintoti del luogo:

$$n - m = 3;$$

- Il centro degli asintoti:

$$p_c = \frac{\sum_{i=0}^n p_i - \sum_{i=0}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 1 - 0.05 - 0.02 + 0.01}{3} = -0.3533$$

- La fase degli  $n - m$  asintoti:

$$\psi_i = -\frac{(2 \cdot h + 1)}{n - m} \cdot 180 [\text{deg}], \quad h = 0, 1, \dots, n - m - 1, \quad i = 1, 2, 3$$

da cui si ricava:

$$\psi_1 = -60 [\text{deg}], \quad \psi_2 = -180 [\text{deg}], \quad \psi_3 = -300 [\text{deg}]$$

Per cui il Luogo delle Radici di  $F(s)$  comprenderà tutti i punti dell'asse reale (corrispondenti a valori di "s") che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri, contati con la loro molteplicità. Nel nostro caso i punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono rappresentati dal seguente dominio:

$$s \in \Omega = \{[-0.01, 0] \cup [-0.02, -0.05] \cup [-1, -\infty]\} \subset \mathbb{C}$$

Eventuali **punti doppi** o di **diramazione** dall'asse reale sono le soluzioni (reali) dell'*equazione ai punti doppi*:

$$x_D : \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = 0$$

**E' opportuno rimarcare che la diramazione dai punti doppi avviene a tangente verticale.**

Da cui svolgendo i calcoli:

$$\frac{1}{(s + 0.01)} - \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{(s + 1)} + \frac{1}{s + 0.05} + \frac{1}{s + 0.02} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-300000s^4 - 218000s^3 - 10310s^2 - 142s - 1}{s(s + 1) \cdot (20s + 1) \cdot (50s + 1) \cdot (100s + 1)} = 0$$

e calcolando le radici del polinomio al numeratore:

$$300000s^4 + 218000s^3 + 10310s^2 + 142s + 1 = 0$$

si ottengono le seguenti radici<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} & -0.0334 \\ & -0.6769 \\ & -0.0081 - 0.00899i \\ & -0.0081 + 0.00899i \end{aligned}$$

Tra le soluzioni ottenute, solo la prima appartiene all'asse reale del Luogo delle Radici di  $F(s)$   $\Omega \subset \mathbb{C}$ , per cui il punto doppio sarà  $x_D = -0.0334$ .

Di seguito riportiamo il codice MatLab per la risoluzione dell'equazione ai punti doppi e per il tracciamento per Luogo delle Radici della f.d.t. in analisi (vedi Figura 3 e 4):

```
% Comando per calcolare una f.d.t. in forma fattorizzata
zpk(Fap)
%% Calcolo dei punti doppi:
% Definiamo una variabile simbolica 's'
syms s
% Risoluzione equazione per il calcolo dei punti doppi
solve('1/(s+0.01)-(1/s+1/(s+1)+1/(s+0.05)+1/(s+0.02))=0',s)
% Luogo delle Radici di Fap(s)
figure(3)
rlocus(Fap)
```

Per l'analisi modale occorre infine tarare il luogo nei punti critici, ovvero nel punto doppio e all'attraversamento dell'asse immaginario. Come precedentemente calcolato, il guadagno critico  $k'_{c_2}$  per l'attraversamento dell'asse immaginario è pari al margine di guadagno, cioè  $k_{c_2} = k'_{c_2} = 6.38$ . Mentre, il guadagno nel punto doppio  $\bar{k}_{c_2}$  si ottiene invece risolvendo la seguente equazione:

$$|k'| = \left. \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|} \right|_{s=x_D} \quad \text{con} \quad k' = \bar{k} \cdot \hat{k}' \rightarrow |\bar{k}| = \frac{1}{\hat{k}'} \cdot \left. \frac{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}{\prod_{i=1}^m |(s - z_i)|} \right|_{s=x_D}$$

<sup>2</sup> Si noti che sebbene il Metodo della Risolvente permetta di ottenere una soluzione in forma chiusa per le equazioni di quarto grado complete, poiché fuori dalle tematiche di questo corso le radici di tale polinomio sono state ricavate per mezzo del *Symbolic Math Toolbox* di MatLab attraverso il comando *solve()*. Numericamente possono invece essere calcolate mediante il comando *root()*.

Sostituendo alla variabile di Laplace il valore assunto nel punto doppio, ovvero  $s = x_D = -0.0334$  come segue:

$$\overline{k_{C_2}} = \frac{|s| \cdot |(s+1)| \cdot |(s+0.05)| \cdot |(s+0.02)|}{0.01 \cdot |(s+0.01)|} \Big|_{s=-0.0334} = 0.0307$$

Dove  $\overline{k_{C_2}}$  risulta essere comprensivo di tutti i guadagni delle restanti f.d.t. dell'anello aperto escluso ovviamente  $C_2(s)$  (in questo caso  $\hat{k}' = 0.01$ ). Come si può notare tale valore di guadagno coincide con quello mostrato in Figura 4 mediante ispezione del Luogo delle Radici ricavato con MatLab.

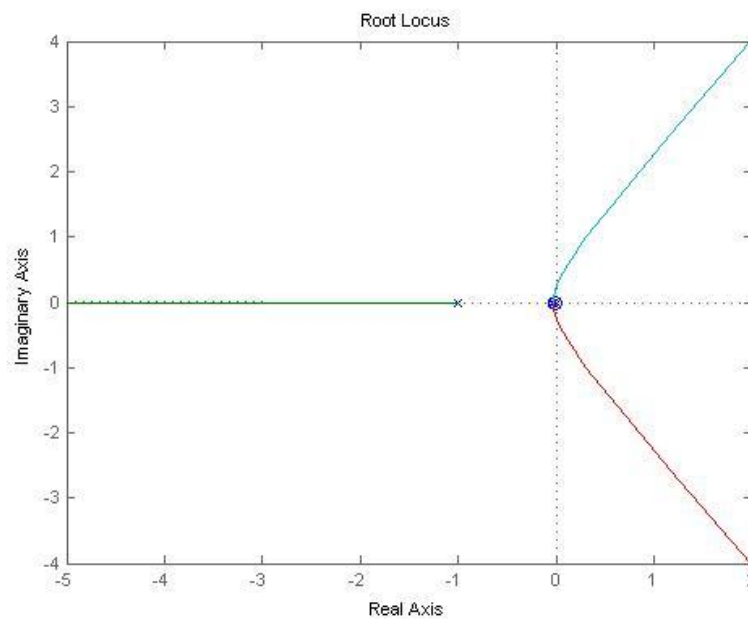


Figura 3. Luogo delle Radici della f.d.t.  $F(s)$  approssimata ( $W_1(s) \approx 1$ ).

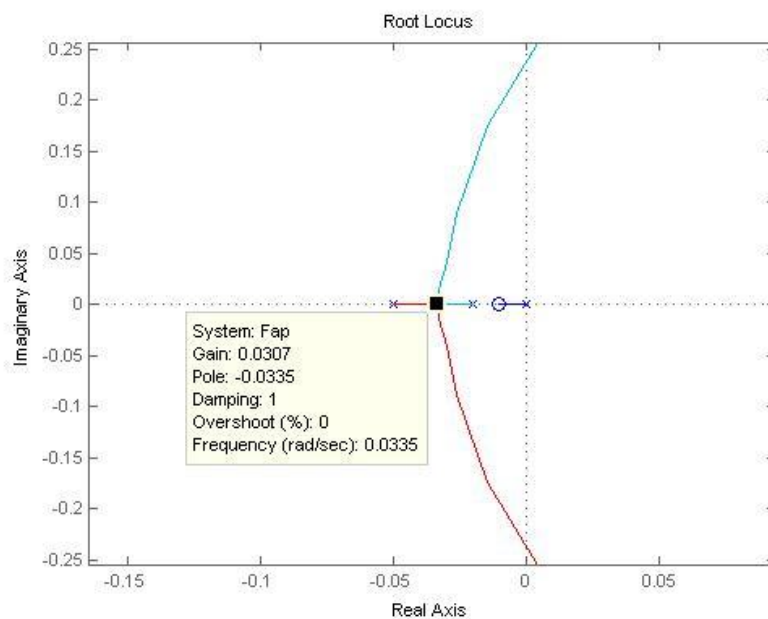


Figura 4. Ingrandimento del Luogo delle Radici della f.d.t.  $F(s)$  approssimata ( $W_1(s) \approx 1$ ).

Una volta eseguita la taratura del luogo, le caratteristiche modali del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno  $k_{C_2}$  sono riportate di seguito:

- 4 Modi aperiodici stabili per  $0 < k_{C_2} < k'_{C_2}$ :

$$\theta_a(t) = \sum_{i=1}^4 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Cisoidale e 3 Modi aperiodici stabili  $k_{C_2} = k'_{C_2}$ :

$$\theta_a(t) = R_{4_1} t e^{p_4 t} + \sum_{i=1}^3 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo Periodico e 2 Modi Aperiodici stabili per  $k'_{C_2} < k_{C_2} < \overline{k_{C_2}}$ :

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^2 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Oscillatorio e 2 Modi Aperiodici per  $k_{C_2} = \overline{k_{C_2}}$ :

$$\theta_a(t) = M_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^2 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo-Periodico instabile e 2 Modi Aperiodici stabili per  $k_{C_2} > \overline{k_{C_2}}$

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^2 R_i e^{p_i t}$$

- 4) Si discutano gli effetti della semplificazione del loop interno sulla valutazione delle caratteristiche di stabilità del sistema a ciclo chiuso (margini di fase e guadagno, e guadagno critico), utilizzando i diagrammi di Bode, Nyquist ed il luogo delle radici.

Come discusso nell'Esercitazione 2, in Figura 5 è possibile notare come le differenze tra i diagrammi di Bode del sistema originario (in blu) e del sistema semplificato (in verde) sono significative solo in "alta frequenza" ( $\omega > 1$  rad/sec). Per cui l'approssimazione risulta lecita ed i valori di  $m_g$  ed  $m_\phi$  sono approssimativamente gli stessi. In Figura 6 possiamo notare come i margini di fase e di guadagno e le frequenza critica e di taglio siano approssimativamente le stesse a meno dei decimali.

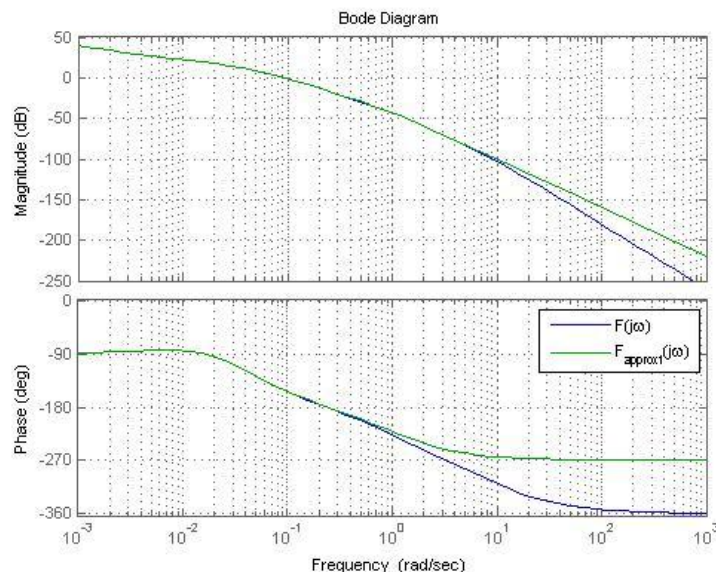


Figura 5. Diagramma di Bode delle f.d.t.  $F(j\omega)$  esatta e nell'ipotesi che  $W_1(j\omega) \approx 1$ .



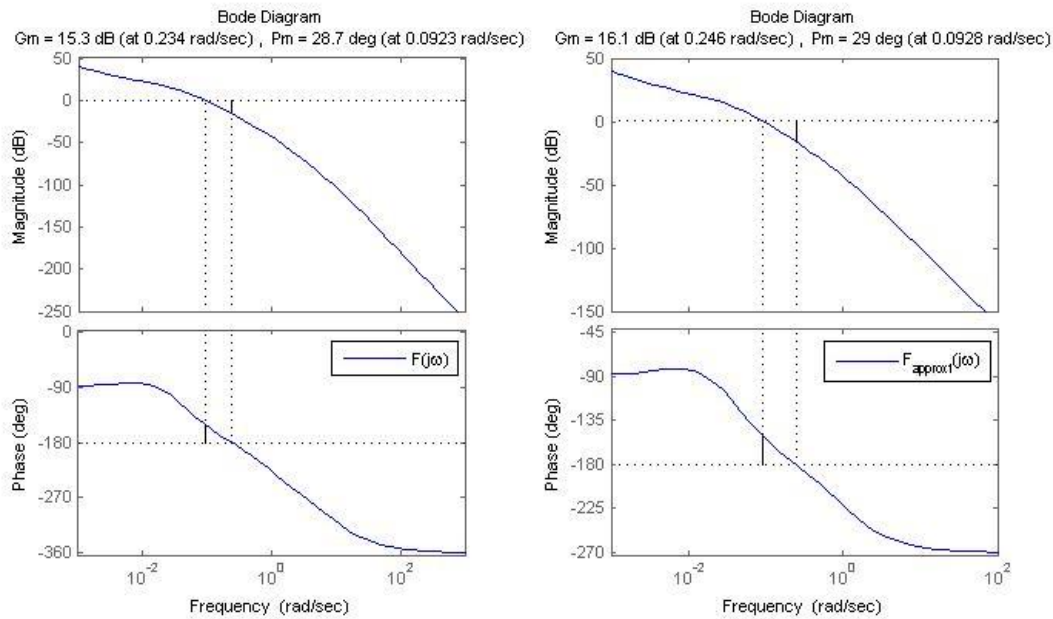


Figura 6. Margini di guadagno e di fase delle f.d.t.  $F(j\omega)$  esatta e nell'ipotesi che  $W_1(j\omega) \approx 1$ .

Analogamente, come mostrato in Figura 6, anche il Diagramma di Nyquist viene modificato solo in alta frequenza; in particolare è cambiata la fase per  $\omega \rightarrow \infty$  a partire da poco meno di una decade dalla frequenza critica  $\omega_c$ , ciò è più evidente dai diagrammi di bode.

Con riferimento alla f.d.t. esatta della funzione a ciclo aperto

$$F(s) = \frac{0.1 (s + 0.01)}{s (s + 10.1)(s + 1)(s + 0.05)(s + 0.02)}$$

ci si aspetta che luogo delle radici del sistema completo presenti caratteristiche asintotiche diverse dal caso approssimato ( $W_1 \approx 1$ ) in quanto è aumentato il grado relativo del sistema, cioè la differenza poli zeri.

Di seguito ricaviamo le principali caratteristiche del Luogo delle Radici ad essa associato:

- Il numero di asintoti del luogo:

$$n - m = 4;$$

- Il centro degli asintoti:

$$p_c = \frac{\sum_{i=0}^n p_i - \sum_{i=0}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 1 - 0.05 - 0.02 - 10.1 + 0.01}{4} = -2.79$$

- La fase degli  $n - m$  asintoti:

$$\psi_i = -\frac{(2 \cdot h + 1)}{n - m} \cdot 180 [\text{deg}], \quad h = 0, 1, \dots, n - m - 1, \quad i = 1, 2, 3$$

da cui si ricava:

$$\psi_1 = -45 [\text{deg}], \quad \psi_2 = -135 [\text{deg}], \quad \psi_3 = -225 [\text{deg}], \quad \psi_3 = -315 [\text{deg}]$$

Ora i punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono rappresentati dal seguente dominio:

$$s \in \Omega = \{[0, -0.01] \cup [-0.02, -0.05] \cup [-1, -10.1]\} \subset \mathbb{C}$$

I **punti doppi** o di **diramazione** sull'asse reale sono le soluzioni (reali) dell'equazione:

$$x_D : \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = 0$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s + 0.01)} - \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{(s + 1)} + \frac{1}{s + 0.05} + \frac{1}{s + 0.02} + \frac{1}{s + 10.1} \right) &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{-4s^5 - 33.56s^4 - 22.203s^3 - 1.04s^2 - 0.0144s - 0.000101}{s(s + 0.01)(s + 0.02)(s + 0.05)(s + 1)(s + 10.1)} &= 0 \\ \rightarrow 4s^5 + 33.56s^4 + 22.203s^3 + 1.04s^2 + 0.0144s + 0.000101 &= 0 \end{aligned}$$

le quali radici<sup>3</sup> sono:

$$\begin{aligned} &-0.0334 \\ &-0.6695 \\ &-7.6708 \\ &-0.00813 - 0.00899i \\ &-0.00813 + 0.00899i \end{aligned}$$

Tra le soluzioni ottenute, appartengono all'asse reale del Luogo delle Radici  $\Omega \subset \mathbb{C}$ :

$$x_{D_1} = -0.0334 \text{ e } x_{D_2} = -7.6708$$

alle quali corrispondono i seguenti valori di guadagno:

$$\begin{aligned} \overline{k}_{C_2}' &= \frac{|s| \cdot |(s + 1)| \cdot |(s + 0.05)| \cdot |(s + 0.02)| \cdot |(s + 10.1)|}{0.1 \cdot |(s + 0.01)|} \Bigg|_{s=-0.0334} = 0.0309 \\ \overline{k}_{C_2}'' &= \frac{|s| \cdot |(s + 1)| \cdot |(s + 0.05)| \cdot |(s + 0.02)| \cdot |(s + 10.1)|}{0.1 \cdot |(s + 0.01)|} \Bigg|_{s=-7.6708} = 9460.5 \end{aligned}$$

Mentre il guadagno critico  $k_{C_2}'$  che si ha all'attraversamento dell'asse immaginario del luogo può essere facilmente esplicitato dal margine di guadagno come segue:

$$k_{C_2}' = 10^{\frac{15.3}{20}} = 5.821$$

In Figura 7 possiamo osservare come il Luogo delle Radici della  $F(s)$  esatta ricavato attraverso il comando Matlab *rlocus()* presenta esattamente le caratteristiche ricavate utilizzando le regole per il tracciamento del Luogo delle Radici. In Figura 8 possiamo apprezzare uno zoom nell'intorno dell'origine. Come si può notare i valori di  $k_{C_2}$  nei punti di diramazione coincidono con quelli calcolati analiticamente, mentre il valore per il guadagno critico risulta 4.77 anziché 5.821, il motivo per il quale tali valori non coincidono è legato a ragioni di tipo puramente numerico.

Sulla base di quanto esposto, da un'analisi qualitativa del luogo in Figura 7 possiamo dedurre che il sistema a ciclo chiuso al variare di  $k_{C_2}$  sarà caratterizzato da:

- 5 Modi aperiodici stabili per  $0 < k_{C_2} < k_{C_2}'$ :

$$\theta_a(t) = \sum_{i=1}^5 R_i e^{p_i t}$$

<sup>3</sup> Le radici del polinomio sono state ricavate grazie al *Symbolic Math Toolbox* di MatLab attraverso il comando *solve()*.

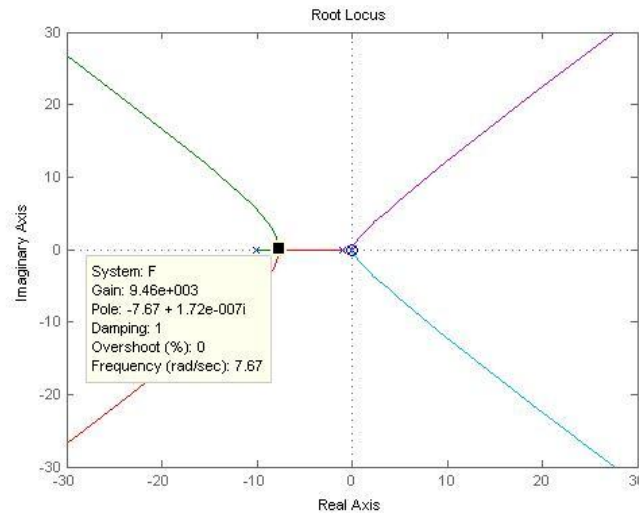


Figura 7. Luogo delle radici f.d.t.  $F(j\omega)$  esatta.

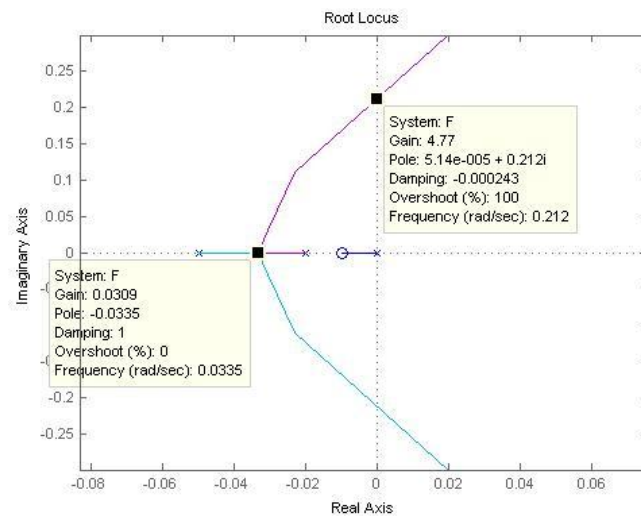


Figura 8. Zoom del Luogo delle radici f.d.t.  $F(j\omega)$  esatta in prossimità dell'origine.

- 1 Modo Cisoidale e 4 Modi aperiodici stabili  $k_{C_2} = \overline{k_{C_2}'}:$

$$\theta_a(t) = R_{4_1} t e^{p_4 t} + \sum_{i=1}^4 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo Periodico e 3 Modi Aperiodici stabili per  $\overline{k_{C_2}'} < k_{C_2} < k_{C_2}'$ :

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^3 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Oscillatorio e 3 Modi Aperiodici per  $k_{C_2} = k_{C_2}'$ :

$$\theta_a(t) = M_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^3 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo-Periodico instabile e 3 Modi Aperiodici stabili per  $k_{C_2}' < k_{C_2} < \overline{k_{C_2}''}$

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + \sum_{i=1}^3 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo-Periodico instabile, 1 Modo Cisoidale e 2 Modi Aperiodico stabile per  $k'_{C_2} = \overline{k_{C_2}}''$

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + R_{2_1} t e^{p_2 t} + \sum_{i=1}^2 R_i e^{p_i t}$$

- 1 Modo Pseudo-Periodico instabile, 1 Modo Pseudo-Periodico stabile e 1 Modo Aperiodico stabile per  $k_{C_2} > \overline{k_{C_2}}''$

$$\theta_a(t) = M_1 e^{\alpha_1 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + M_2 e^{\alpha_2 t} \sin(\omega_1 t + \phi) + R_1 e^{p_1 t}$$

E' importante osservare come fissato un valore di guadagno  $k_{C_2}$ , sebbene l'approssimazione  $W_1(s) \approx 1$  sia del tutto lecita alle basse frequenze, le caratteristiche modali del sistema risultano differenti. Ad ogni modo questo è vero solo per modi con residuo associato piccolo (per cui trascurabili) in quanto il comportamento qualitativo alle basse frequenze e per valori non elevati del guadagno risulta comunque assegnato dai così detti i modi dominanti del sistema (modi con residuo non trascurabile).

Importante comunque rimarcare la rilevante differenza per la fase degli asintoti, dovuta all'aumento dell'ordine del sistema.

Per completezza di seguito è riportato l'intero codice relativo all'esercitazione appena discussa. Copiare ed incollare il seguente codice in un MatLab m-file per eseguire in blocco tutte le istruzioni.

```
% Esercitazione 2 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
%% Definiamo le f.d.t. del sistema in analisi
P=tf(0.1,[1000 70 1]);
G=tf(1,[10 1]);
C1=tf(100);
C2=tf([100 1],[1 0]);
H1=tf(1);
H2=tf(1,[1 1]);
% F.d.t. ad anello loop di portata
F1=C1*G*H1
% Luogo delle Radici f.d.t ad anello per il loop di portata:
figure(1)
    rlocus(F1), grid

%2)
% f.d.t. dell'anello di temperatura (W1(s) istantanea)
Fap=C2*P*H2
figure(2)
    margin(Fap)
% Comando per calcolare una f.d.t. in forma fattorizzata
zpk(Fap)
%% Calcolo dei punti doppi:
% Definiamo una variabile simbolica 's'
syms s
% Equazione per il calcolo dei punti doppi
solve('1/(s+0.01)-(1/s+1/(s+1)+1/(s+0.05)+1/(s+0.02))=0',s)

figure(3)
    rlocus(Fap)

%% 4)
W1=feedback(C1*G,H1)
F=C2*W1*P*H2
```

```
figure(4)
    bode(F,Fap), grid
    legend('F(j\omega)', 'F_{approx1}(j\omega)')

figure(5)
subplot(1,2,1),
    margin(F), legend('F(j\omega)')
subplot(1,2,2),
    margin(Fap), legend('F_{approx1}(j\omega)')

figure(6)
subplot(121)
    nyquist(F,Fap)
subplot(122)
    nyquist(F,Fap)
    axis([-1e-4 5e-5 -1e-3 1e-3])
    legend('F(j\omega)', 'F_{approx1}(j\omega)')

% Equazione per il calcolo dei punti doppi
solve('1/(s+0.01)-
(1/s+1/(s+1)+1/(s+0.05)+1/(s+0.02)+1/(s+10.1))=0',s)

figure(7)
    rlocus(F)
```

---

Authors: Prof. Elio Usai<sup>1</sup>, Ing. Alessandro Pilloni<sup>1</sup>.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License.  
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.