

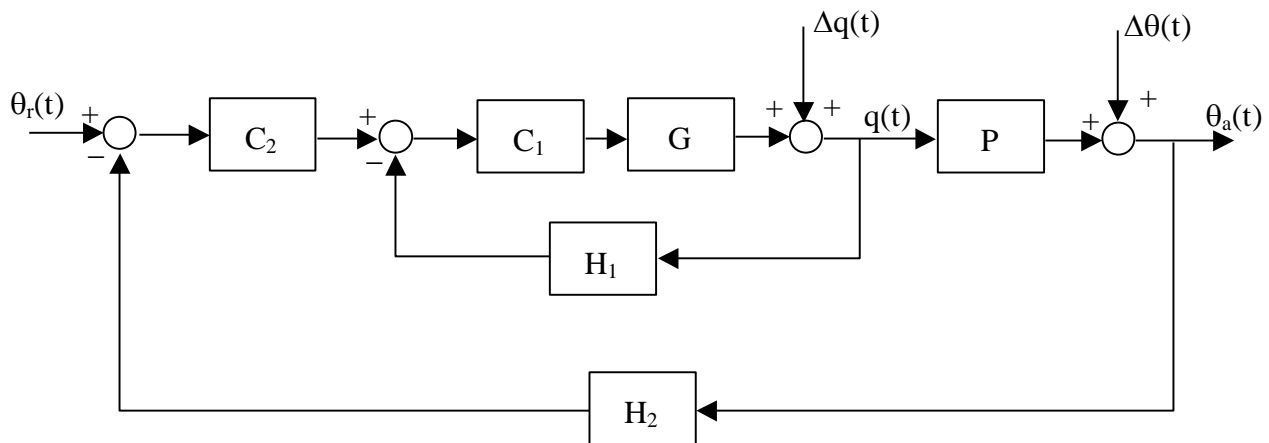
Esercitazione di Controlli Automatici 1 – n°2

Riferendosi al sistema di controllo della temperatura in un locale di piccole dimensioni discusso nella esercitazione precedente, e di seguito riportato:

1. Si analizzi la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare del guadagno k_{C_2} del controllore di temperatura $C_2(s)$ utilizzando il criterio di Nyquist.
2. Mediante il criterio di Nyquist si valuti il guadagno minimo del controllore $C_1(s)$ necessario affinché il loop interno di portata sia stabile nel caso in cui la funzione di trasferimento $G(s)$ sia la seguente

$$G(s) = \frac{-1}{1 - 10 \cdot s}$$

3. Si valutino le condizioni sulla funzione di trasferimento del controllore $C_1(s)$, strettamente proprio ed a fase minima, affinché il loop interno di portata sia stabile per qualunque valore del suo guadagno k_{C_1} .



$$P(s) = \frac{k_p}{(1 + \tau_{P_1} \cdot s) \cdot (1 + \tau_{P_2} \cdot s)} = \frac{0.1}{1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1}$$

$$G(s) = \frac{k_G}{1 + \tau_G \cdot s} = \frac{1}{1 + 10 \cdot s}$$

$$C_1(s) = k_{C_1} = 100$$

$$C_2(s) = \frac{k_{C_2}(1 + \tau_I \cdot s)}{s} = k_{C_2} \cdot \frac{1 + 100 \cdot s}{s}$$

$$H_1(s) = 1$$

$$H_2(s) = \frac{k_H}{1 + \tau_H \cdot s} = \frac{1}{1 + s}$$

Soluzione Esercitazione n° 2

1) Si consideri il sistema di controllo discusso nella precedente esercitazione e riportato in Figura 1

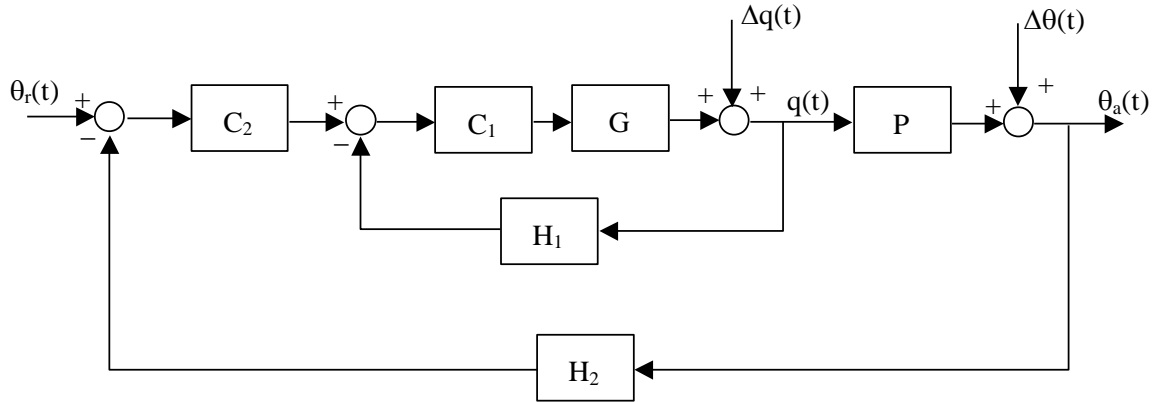


Figura 1. Schema a blocchi del sistema di controllo.

Come discusso nella scorsa esercitazione, la dinamica del loop interno di portata può essere trascurata in quanto caratterizzata da un guadagno praticamente unitario alle basse frequenze in quanto caratterizzato da una costante di tempo trascurabile $\tau = 1/10.1 = 0.0990$ rispetto a quella degli altri blocchi.

$$W_1(s) = \frac{Q(s)}{Z(s)} = \frac{C_1 G}{1 + C_1 G H_1} = \frac{100}{10s + 101} = \frac{100}{101 \left(1 + \frac{s}{10.1}\right)} = \frac{0.990099}{1 + \frac{s}{10.1}} \cong 1$$

Con riferimento allo schema in Figura 1, di seguito riportiamo la f.d.t. ingresso-uscita del processo in analisi $W_r(s)$:

$$W_r(s) = \frac{\Theta_a(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{C_2 W_1 P}{1 + C_2 W_1 P H_2} \cong \frac{C_2 P}{1 + C_2 P H_2}$$

La stabilità del sistema a ciclo chiuso si potrà valutare analizzando le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta(s) = 1 + C_2(s) W_1(s) P(s) H_2(s) \cong 1 + C_2(s) P(s) H_2(s) = 1 + F(s)$$

dove $F(s)$ rappresenta la così detta *funzione ad anello aperto* ovvero quella f.d.t. rappresentativa della serie di tutti gli elementi presenti nel loop di controllo, nell'ipotesi che l'anello di controllo sia interrotto. Si noti che $F(s)$ viene considerata nell'analisi di stabilità sia nel *Luogo delle Radici* che dal *Criterio di Nyquist*.

Supposto $W_1(s) \approx 1$, sostituendo le f.d.t. di ciascun blocco otteniamo la seguente funzione d'anello:

$$F(j\omega) \cong \frac{0.1 \cdot k_{c_2} \cdot (100 \cdot s + 1)}{s \cdot (s + 1) \cdot (1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1)}$$

Il diagramma di Nyquist (o polare) è una rappresentazione grafica nel piano complesso della risposta armonica della f.d.t. ad anello aperto

$$F(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\} + j\text{Im}\{F(j\omega)\} = M(j\omega) \exp j\phi(\omega)$$

Al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ e consente di studiare in maniera appropriata e conveniente la stabilità del sistema a ciclo chiuso. Si noti che per ogni valore $\omega = \omega_0$ della pulsazione, $F(j\omega_0)$ rappresenta un punto P nel piano di Nyquist, estremo del vettore \overline{PO} , essendo O l'origine del piano. Presa come convenzione quella antioraria per le fasi, modulo e fase di tale vettore risultano:

$$M(\omega_0) = \sqrt{\operatorname{Re}\{F(j\omega_0)\}^2 + \operatorname{Im}\{F(j\omega_0)\}^2}$$

$$\phi(\omega_0) = \operatorname{atan} \left\{ \frac{\operatorname{Im}\{F(j\omega_0)\}}{\operatorname{Re}\{F(j\omega_0)\}} \right\}$$

Da notare che grazie alle proprietà di simmetria delle funzioni modulo e fase, saremo interessati esclusivamente agli andamenti del diagramma per $\omega \geq 0$ ed otterremo poi il diagramma completo per ribaltamento intorno all'asse delle ascisse.

Il diagramma di Nyquist di una $F(j\omega)$ può essere ottenuto “per punti” calcolando $\operatorname{Re}\{F(j\omega)\}$ e $\operatorname{Im}\{F(j\omega)\}$ in corrispondenza a diversi valori di ω , oppure valutandone modulo e fase. Questi ultimi valori sono forniti direttamente dai diagrammi di Bode, che quindi possono essere convenientemente tracciati preliminarmente. Infatti per il diagramma di Nyquist non valgono le semplici regole di composizione viste per i diagrammi di Bode con riferimento ai singoli fattori elementari (poli e zeri) di cui una $F(j\omega)$ è composta. Ad ogni modo esistono delle regole per il tracciamento qualitativo dei diagrammi di Nyquist. Di seguito, con riferimento alla f.d.t. ad anello del nostro sistema, segnaliamo le più importanti:

- **Partenza del diagramma di $F(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |F(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{0.1 \cdot k_{c_2} \cdot (100 \cdot s + 1)}{s \cdot (s + 1) \cdot (1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1)} \right| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{0.1 \cdot k_{c_2}}{s} \right| = +\infty$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F(j\omega)\} = \arg\{k_{c_2}\} - \nu \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

dove $\nu = 1$ rappresenta la molteplicità dei poli nell'origine di $F(j\omega)$.

- **Tendenza del diagramma di $F(j\omega)$ per $\omega \rightarrow +\infty$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| = \frac{1}{\infty^3} = 0$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F(j\omega)\} = \arg\{k_{c_2}\} - (n - m) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2} \cdot \pi$$

dove $n = 4$ ed $m = 1$ rappresentano rispettivamente l'ordine del polinomio a denominatore e numeratore di $F(j\omega)$.

Poiché la $F(j\omega)$ **non ha poli a parte reale positiva**, al fine di studiarne la stabilità è possibile applicare il **Criterio di Nyquist Ridotto** riportato di seguito:

- **Criterio ridotto di Nyquist:** *Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità di un sistema di controllo a controreazione stabile a ciclo aperto è che percorrendo la curva $F(j\omega)$ nel verso delle $\omega \geq 0$ crescenti, in corrispondenza dell'eventuale primo punto di attraversamento dell'asse reale, il punto $(-1, j0)$ venga lasciato a sinistra del diagramma (sono compresi i casi di attraversamento all'infinito o mancanza di attraversamento).*

Sulla base dell'andamento qualitativo di $F(j\omega)$ e ricordando che il diagramma di Nyquist al crescere del guadagno si ingrandisce mantenendo la stessa forma, in Figura 1.a è riportato qualitativamente l'andamento di $F(j\omega)$. E' facile notare che sebbene il sistema possa risultare stabile, superato un certo valore critico per $k_{c_2} > k'_{c_2}$ il punto $(-1, j0)$ non sarà più lasciato a sinistra dal diagramma e quindi il sistema a ciclo chiuso risulterà instabile.

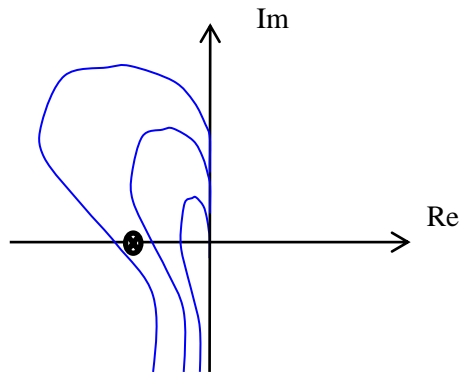


Figura 1.a

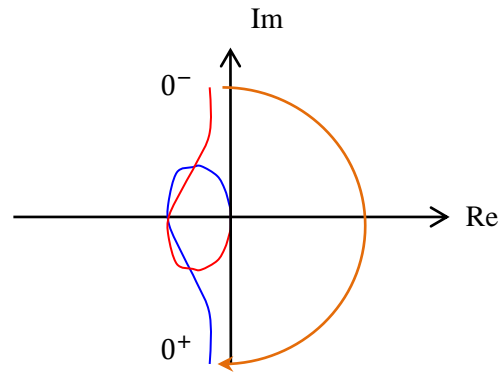


Figura 1.b

Per completezza, nota la tendenza del diagramma di Nyquist per $\omega \rightarrow 0^+$ ed $\omega \rightarrow +\infty$, grazie alle proprietà di simmetria di $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$, in Figura 1.b riportiamo il diagramma di Nyquist completo della $F(j\omega)$, dove data la presenza di un polo nell'origine, considerato come a parte reale negativa, con molteplicità $\nu = 1$ è stata necessaria una **chiusura all'infinito**, in corrispondenza della discontinuità da 0^- a 0^+ , di $\nu \cdot \pi = \pi$ [rad] in **verso orario** (vedi curva arancione in Figura 1).

E' immediato notare che per bassi valori di guadagno $0 < k_{c_2} < k'_{c_2}$ il digramma di Nyquist lascerà sempre a sinistra il punto $(-1, j0)$, mentre per $k_{c_2} = k'_{c_2}$ il sistema a ciclo chiuso sarà al limite di stabilità con due poli immaginari puri, mentre per $k_{c_2} > k'_{c_2}$ presenterà due poli instabili. A conferma, dato che $F(j\omega)$ è stabile ($P_F = 0$) ma $F(j\omega)$ effettua un numero di rotazioni in senso antiorario attorno al punto $(-1, j0)$ pari a $\tilde{N} = -2$, il numero di radici a parte reale positiva nella $W_r(s)$ sarà pari a $P_W = P_F - \tilde{N} = 2$ (vedi Figura 5).

Al fine di valutare il valore k'_{c_2} superato il quale il sistema a ciclo chiuso risulta instabile possiamo citare tre diversi approcci tutti equivalenti tra loro:

- Considerare $F(j\omega) = \text{Re}\{F(j\omega)\} + j\text{Im}\{F(j\omega)\}$ e dato che la situazione critica corrisponde al primo passaggio del diagramma di Nyquist per $(-1, j0)$ in corrispondenza di $\omega = \pm\bar{\omega}$, valutare i valori della pulsazione critica risolvendo l'equazione $\text{Im}\{F(j\omega)\} = 0$:

$$\text{Im}\{F(j\omega)\} = \frac{k_{c_2} \cdot (10000 \cdot \omega^4 - 603 \cdot \omega^2 - 0.1)}{\omega(\omega^2 + 1)(1000000 \cdot \omega^4 + 2900 \cdot \omega^2 + 1)} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10000 \cdot \omega^4 - 603 \cdot \omega^2 - 0.1 = 0 \rightarrow \bar{\omega} = \mathbf{0.2340}$$

e successivamente imporre $\text{Re}\{F(j\bar{\omega})\} = -1$, per ricavare il guadagno critico:

$$\text{Re}\{F(j\bar{\omega})\} = \frac{k(2.9 - 10600\bar{\omega}^2)}{(\bar{\omega}^2 + 1)(1000000 \bar{\omega}^4 + 2900\bar{\omega}^2 + 1)} = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow k'_{c_2} = \mathbf{6.36979} \rightarrow k'_{c_2} [\text{dB}] = \mathbf{20 \cdot \log_{10} k'_{c_2} = 16.1 \text{ dB}}$$

- b) Applicare il **Criterio di Routh-Hurwitz in forma parametrica**, rispetto al guadagno k_{C_2} , all'equazione caratteristica del sistema in retroazione $W_r(s) = N_W(s)/D_W(s)$.

Nel nostro caso, posto $F(s) = k_{C_2} \cdot N(s)/D(s)$ dovremo analizzare il seguente polinomio:

$$D_W(s) = D(s) + k_{C_2} \cdot N(s)$$

per cui sostituendo numeratore e denominatore della funzione ad anello otteniamo:

$$\begin{aligned} s \cdot (s + 1) \cdot (1000 \cdot s^2 + 70 \cdot s + 1) + 0.1 \cdot k_{C_2} \cdot (100 \cdot s + 1) &\rightarrow \\ \rightarrow 1000 \cdot s^4 + 1070 \cdot s^3 + 71 \cdot s^2 + (1 + 10k_{C_2}) \cdot s + 0.1 \cdot k_{C_2} \end{aligned}$$

Dai cui risulta la seguente tabella di Routh:

4	1000	71	$0.1 \cdot k_{C_2}$
3	1070	$1 + 10 \cdot k_{C_2}$	0
2	$\frac{1}{107}(7497 - 1000 \cdot k_{C_2})$	$0.1 \cdot k_{C_2}$	0
1	$\frac{-10000 \cdot k_{C_2}^2 + 62521 \cdot k_{C_2} + 7497}{7497 - 1000 \cdot k_{C_2}}$	0	0
0	$0.1 \cdot k_{C_2}$	0	0

Dalla quale si ricavano i seguenti vincoli per k_{C_2} :

- Dalla riga $n = 2$:

$$k_{C_2} < \frac{7497}{1000};$$

- Dalla riga $n = 1$:

$$\frac{62521 - 107 \cdot \sqrt{367609}}{20000} < k_{C_2} < \frac{62521 + 107 \cdot \sqrt{367609}}{20000} \quad \vee \quad k_{C_2} > \frac{7497}{1000}$$

- Dalla riga $n = 0$:

$$k_{C_2} > 0$$

Che comportano il seguente range di valori ammissibili per il guadagno del regolatore $C_2(s)$:

$$0 < k_{C_2} < \frac{62521 + 107\sqrt{367609}}{20000} = \mathbf{6.3698}$$

Che come anticipato, coincide con il valore calcolato al punto precedente.

- c) Valutare il **margine di guadagno** dal diagramma di bode della $F(j\omega)$, definito come:

$$\mathbf{m_g = -20 \cdot \log_{10}|F(j\bar{\omega})| \quad \text{con } \bar{\omega} : \arg\{F(j\bar{\omega})\} = -180 \text{ deg}}$$

Di seguito riportiamo i comandi MatLab per valutare automaticamente margine di guadagno e di fase della $F(j\omega)$. Per completezza analizzeremo sia la $F(j\omega)$ esatta che la sua forma approssimata nella quale si è assunto $W_1(j\omega) \approx 1$.

```
% Esercitazione 2 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
%% Definiamo le f.d.t. del sistema in analisi
P=tf(0.1,[1000 70 1]);
G1=tf(1,[10 1]);
```

```
C1=tf(100), C2=tf([100 1],[1 0]);
H1=tf(1), H2=tf(1,[1 1]);

% f.d.t dell'anello interno di portata
W1=feedback(C1*G1,H1);
% f.d.t. dell'anello di temperatura in forma esatta ed approssimata
F=C2*W1*P*H2;
Fapprox1=C2*P*H2;

figure(1)
subplot(1,2,1),
    margin(F, legend('F(j\omega)'))
subplot(1,2,2),
    margin(Fapprox1, legend('F_{approx1}(j\omega)'))
```

In Figura 2 è riportato l'output del comando `margin()`. Come si può notare il valore di $m_g \approx 10^{16.1/20} = 6.38$ risulta ancora una volta coerenti con quelli calcolati nei punti precedenti. E' immediato inoltre notare, come discusso nella scorsa esercitazione, che l'approssimazione $W_1(j\omega) \approx 1$ non crea alcun problema alle basse frequenze $\omega < 1$ rad/sec.

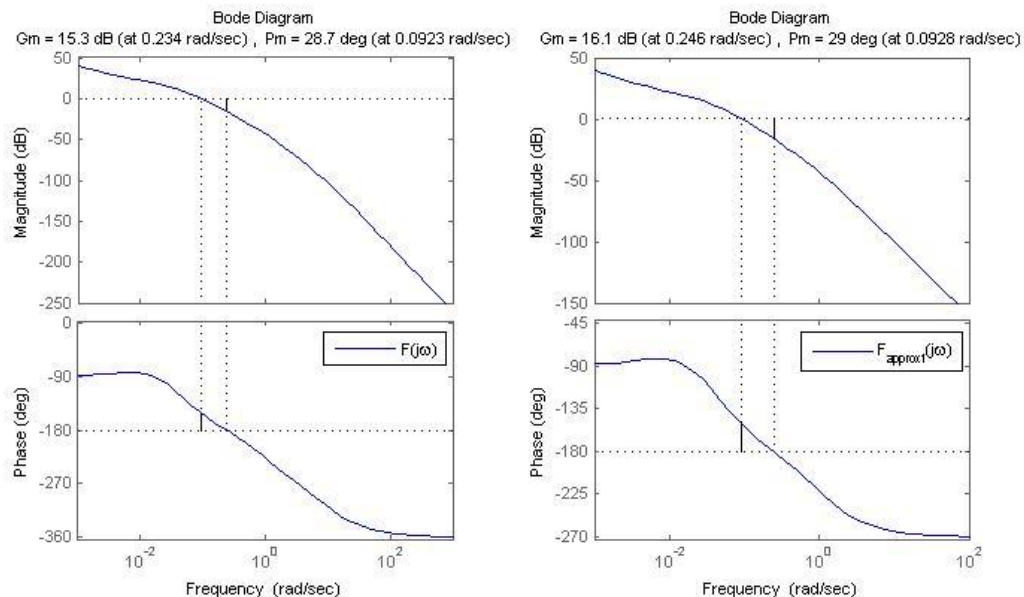


Figura 2. Margini di guadagno e di fase delle f.d.t. $F(j\omega)$ esatta e nell'ipotesi che $W_1(j\omega) \approx 1$.

Per quanto riguarda il tracciamento del diagramma di Nyquist in MatLab, di seguito riportiamo alcuni comandi che permetteranno di apprezzare l'andamento del digramma di Nyquist della $F(j\omega)$ approssimata ($W_1(j\omega) \approx 1$) per tre diversi valori di k_{C_2} (vedi Figura 3). Con riferimento alla curva blu ($k_{C_2} = 1$), sulla destra viene evidenziato, attraverso un etichetta ("datatip"), il valore dalla assunto dalla $F(j\omega)$ alla pulsazione di attraversamento $\bar{\omega} = 0.242$ dell'asse reale negativo del piano complesso e dal quale si può facilmente ottenere il valore del guadagno critico k'_{C_2} come segue:

$$\operatorname{Re}\{F(j\bar{\omega})\} = -1/k'_{C_2} = -0.156 \quad \rightarrow \quad k'_{C_2} = 6.41$$

Come si può notare, tale valore coincide con quelli calcolati precedentemente. In Figura 4 si può notare invece come l'approssimazione del loop interno $W_1(s) \approx 1$ comporti, come era da aspettarsi, una discrepanza rispetto al caso non approssimato solo alle alte frequenze ($\omega \rightarrow +\infty$).

```
figure(2)
subplot(1,2,1),
    nyquist(Fapprox1,6.37*Fapprox1,10*Fapprox1)
    legend('F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=1',...
          'F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=6.37',...
          'F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=10')
subplot(1,2,2),
    nyquist(Fapprox1,6.37*Fapprox1,10*Fapprox1)
    axis([-2 1 -0.3 0.3])
figure(3)
nyquist(F,Fapprox1)
axis([-1e-4 5e-5 -1e-3 1e-3])
legend('F(j\omega)', 'F_{approx1}(j\omega)')
```

Si sottolinea inoltre che un sistema di questo tipo viene definito a **stabilità regolare** in quanto per valori di k_{C2} compresi tra 0 ed il valore critico di guadagno il sistema sarà **sempre** stabile, mentre per valori di $k_{C2} > 6.38$ il sistema sarà sempre instabile.

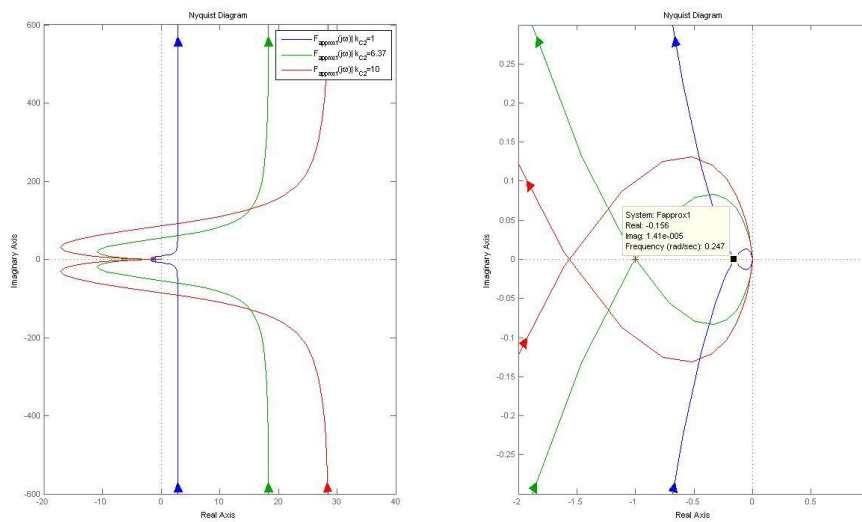


Figura 4. Digramma di Nyquist della $F(j\omega)$ per tre diversi valori di k_{C2} .

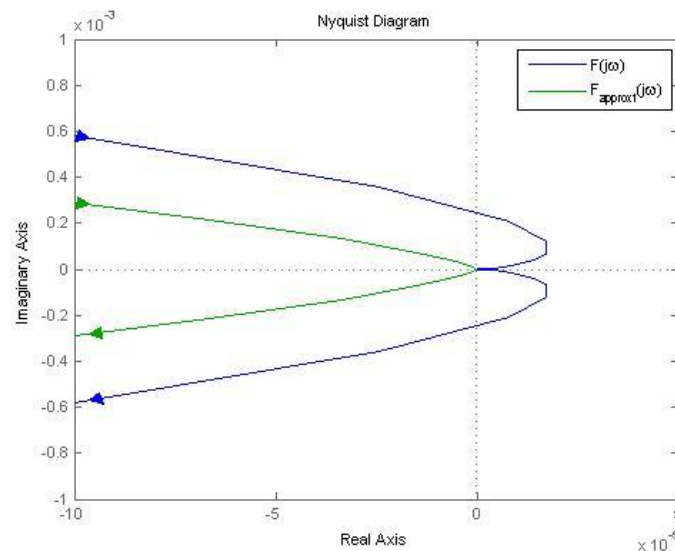


Figura 5. Digramma di Nyquist delle f.d.t. $F(j\omega)$ esatta e nell'ipotesi che $W_1(j\omega) \approx 1$.

- 2) Con riferimento al secondo quesito dell'esercitazione, al fine di valutare mediante il Criterio di Nyquist il guadagno minimo per il regolatore $C_1(s)$ affinché la f.d.t. $W_1(s)$ sia stabile, nell'ipotesi che $G(s)$ sia

$$G(s) = \frac{-1}{1 - 10 \cdot s}$$

occorrerà studiare la stabilità della funzione ad anello aperto del loop interno:

$$F_p(s) = C_1(s) \cdot G(s) \cdot H_1(s) = \frac{-k_{C_1}}{1 - 10 \cdot s}$$

al variare del guadagno statico del controllore.

- **Partenza del diagramma di $F_p(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |F_p(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{-k_{C_1}}{1 - 10 \cdot s} \right| = k_{C_1}$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F_p(j\omega)\} = \arg\{-k_{C_1}\} = -\pi$$

- **Tendenza del diagramma di $F_p(j\omega)$ per $\omega \rightarrow +\infty$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F(j\omega)| = \frac{1}{\infty} = 0$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F_p(j\omega)\} = \arg\{-k_{C_1}\} + \frac{\pi}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Si tenga presente che un polo instabile ha un contributo di fase di $+\pi/2$.

Poiché il sistema a ciclo aperto ha un polo a parte reale positiva ($P_F = 1$) non è possibile usare il *Criterio di Nyquist Ridotto*. In Figura 6 riportiamo l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo della $F_p(j\omega)$ per $k_{C_1} > 1$. Come possiamo notare, il numero di rotazioni in senso antiorario del diagramma di Nyquist attorno al punto $(-1 + j0)$ è pari a $\tilde{N} = 1$. Dunque per il *Criterio di Nyquist* il sistema a ciclo chiuso avrà un numero di poli a parte reale positiva pari a:

$$P_W = P_F - \tilde{N} = 1 - 1 = 0$$

dalla quale si evince che il loop di portata $W_1(s)$ sarà BIBO (Bounded Input-Bounded Output) stabile per valori di guadagno $k_{C_1} > 1$. Un aumento di guadagno ha semplicemente l'effetto di ingrandire il diagramma di Nyquist, non compromettendone la stabilità. Diversamente, riducendo il guadagno si ha che per $k_{C_1} < 1$ il diagramma non circonda mai il punto critico ($\tilde{N} = 0$), per cui il sistema a ciclo chiuso presenterà un polo instabile ($P_W = P_F - \tilde{N} = 1$). Per $k_{C_1} = 1$ il sistema a ciclo chiuso risulta *semplicemente stabile* data la presenza di un polo semplice nell'origine.

Un sistema di questo tipo viene definito a **stabilità paradossale** in quanto per piccoli valori di k_{C_1} il sistema risulta instabile, mentre per valori di $k_{C_1} \geq 1$ il sistema sarà **sempre** stabile.

Di seguito riportiamo alcuni comandi MatLab per tracciare il Diagramma di Nyquist della $F_p(j\omega)$ per tre diversi valori di k_{C_1} , rispettivamente 0.5, 1 e 2 (vedi Figura 7).

```
%% Quesito 2
G11=tf(-1,[-10 1]);
```


$F_p = G_{l1} * H_1$

```
figure(4)
nyquist(0.5*Fp, Fp, 2*Fp)
legend('F_p(j\omega) | k_{C1}=0.5', ...
       'F_p(j\omega) | k_{C1}=1', 'F_p(j\omega) | k_{C1}=2')
```

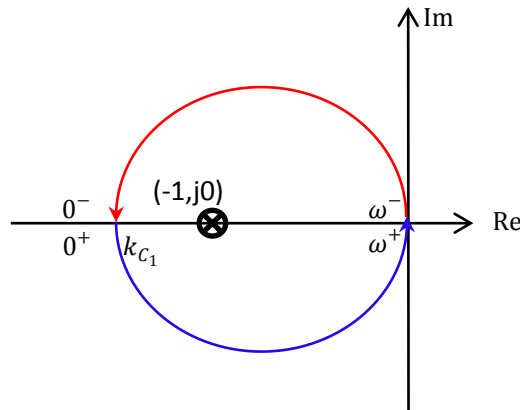


Figura 6. Diagramma di Nyquist della $F_p(j\omega)$ per $k_{C_1} > 1$.

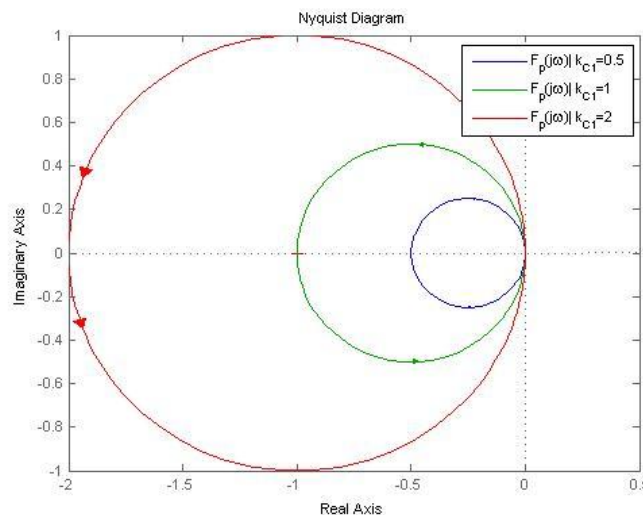


Figura 7. Diagramma di Nyquist della $F_p(j\omega)$ per tre diversi valori di k_{C_1} .

3) Considerando nuovamente

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 10 \cdot s} \rightarrow F_{p_1} = \frac{k_{C_1}}{1 + 10 \cdot s}$$

si vuole determinare quale sia la struttura del controllore $C_1(s)$ che garantisca la stabilità a ciclo chiuso dell'anello interno per qualunque valore del guadagno. Studiamo il Diagramma di Nyquist della $F_{p_1}(j\omega)$:

- **Partenza del diagramma di $F_{p_1}(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |F_{p_1}(j(\omega))| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{k_{C_1}}{1 + 10 \cdot s} \right| = k_{C_1}$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F_{p_1}(j\omega)\} = \arg\{k_{C_1}\} = 0$$

- **Tendenza del diagramma di $F_{p1}(j\omega)$ per $\omega \rightarrow +\infty$:**

Modulo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |F_{p1}(j\omega)| = \frac{1}{\infty} = 0$$

Fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{F_{p1}(j\omega)\} = \arg\{k_{c1}\} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Di seguito riportiamo alcuni comandi MatLab per tracciare il Diagramma di Nyquist della $F_{p1}(j\omega)$ per tre diversi valori di k_{c1} , rispettivamente 0.5, 1 e 2.

```
%% Quesito 3
Fp1=G1;
figure(5),
nyquist(0.5*Fp1,Fp1,2*Fp1)
legend('F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=0.5',...
       'F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=1',...
       'F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=2','Location','SouthWest')
```

Osservando Figura 8 è immediato notare come il diagramma di Nyquist del sistema non attraversi mai l'asse reale negativo. Per cui, qualunque sia il regolatore statico $C_1(s) = k_{c1} > 0$ il sistema sarà sempre BIBO stabile a ciclo chiuso.

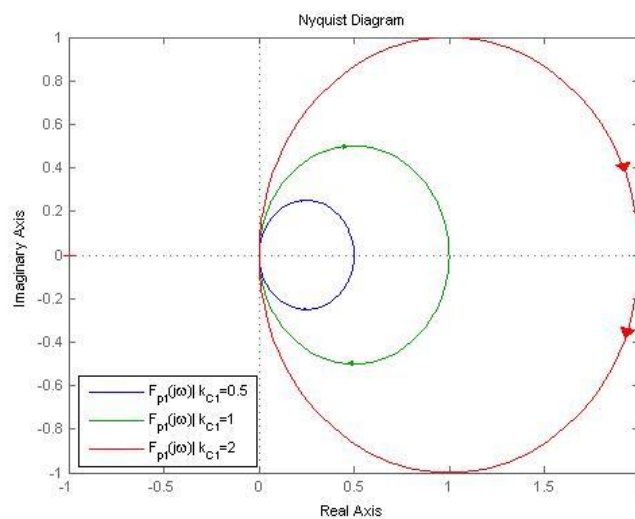


Figura 8. Diagramma di Nyquist della $F_{p1}(j\omega)$ per tre diversi valori di k_{c1} .

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile a ciclo chiuso per qualunque valore del guadagno (positivo) è che il diagramma non attraversi mai l'asse reale negativo.

Essendo il sistema del primo ordine, le strutture del controllore $C_1(s)$ a fase minima che garantiscono questa condizione sono le seguenti:

- Controllore statico: $C_1(s) = k_{c1}$;
- Controllore con un polo semplice (anche nell'origine: $\tau_1 \geq 0$): $C_1(s) = \frac{k_{c1}}{\tau_1 \cdot s + 1}$;
- Controllore con uno zero e un polo ($\tau_2 > 0, \tau_1 \geq 0$): $C_1(s) = \frac{k_{c1} \cdot (\tau_2 \cdot s + 1)}{(\tau_1 \cdot s + 1)}$.

Tra queste, richiedendo che il controllore sia strettamente proprio, scegliamo la seconda:

$$C_1(s) = \frac{k_{c_1}}{\tau_1 \cdot s + 1}$$

Per completezza di seguito è riportato l'intero codice relativo all'esercitazione appena discussa. Copiare ed incollare il seguente codice in un MatLab m-file per eseguire in blocco tutte le istruzioni.

```
% Esercitazione 2 Controlli Automatici
clc, clear all, close all
%% Definiamo le f.d.t. del sistema in analisi
P=tf(0.1,[1000 70 1]);
G1=tf(1,[10 1]);
C1=tf(100), C2=tf([100 1],[1 0]);
H1=tf(1), H2=tf(1,[1 1]);
% f.d.t. dell'anello interno di portata
W1=feedback(C1*G1,H1);
% f.d.t. dell'anello di temperatura in forma esatta ed approssimata
F=C2*W1*P*H2;
Fapprox1=C2*P*H2;

figure(1)
subplot(1,2,1),
    margin(F), legend('F(j\omega)')
subplot(1,2,2),
    margin(Fapprox1), legend('F_{approx1}(j\omega)')
figure(2)
subplot(1,2,1),
    nyquist(Fapprox1,6.37*Fapprox1,10*Fapprox1)
    legend('F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=1',...
        'F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=6.37','F_{approx1}(j\omega) | k_{C2}=10')
subplot(1,2,2),
    nyquist(Fapprox1,6.37*Fapprox1,10*Fapprox1)
    axis([-2 1 -0.3 0.3])
figure(3)
nyquist(F,Fapprox1)
axis([-1e-4 5e-5 -1e-3 1e-3])
legend('F(j\omega)', 'F_{approx1}(j\omega)')
%% Quesito 2
G11=tf(-1,[-10 1]);
Fp=G11*H1
figure(4)
nyquist(0.5*Fp,Fp,2*Fp)
legend('F_p(j\omega) | k_{C1}=0.5',...
    'F_p(j\omega) | k_{C1}=1','F_p(j\omega) | k_{C1}=2')
%% Quesito 3
Fp1=G1;
figure(5),
nyquist(0.5*Fp1,Fp1,2*Fp1)
legend('F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=0.5',...
    'F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=1',...
    'F_{p1}(j\omega) | k_{C1}=2','Location','SouthWest')
```

Authors: Prof. Elio Usai¹, Ing. Alessandro Pilloni¹.

E. Usai and A. Pilloni are with the Department of Electrical and Electronic Engineering (DIEE), University of Cagliari, Cagliari 09123, Italy. E-mail addresses: {eusai,alessandro.pilloni}@diee.unica.it



This work is licensed under the Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/it/>.