

Statica e Scienza delle Costruzioni

> 5. Il problema elastico di de Saint-Venant

«È vietata la copia e la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.

È inoltre vietata la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini non autorizzata espressamente dall'autore».

«È vietata la copia, la rielaborazione, la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.

È inoltre vietata la diffusione, la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini, incluse le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzate espressamente dall'autore o da Unica».

Emanuele Reccia

emanuele.reccia@unica.it



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5A - IL LIQUIDO DI SAINT VENANT

Ⓡ

PROBLEMA DI SAINT VENANT (ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT, 1797 - 1886)

DEFINIZIONE DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE IN UNA TRAVE ELASTICA AD ASSE RETTILINEO SOGGETTA ALL'AZIONE DI CARICHI ESTERNI APPLICATI SOLO DUE ORE DUE ESTREME → COSTITUISCE IL FONDAMENTO DI TUTTA LA TEORIA DELLE TRAVI

PROBLEMA ELASTICO

EQUAZIONI GENERALI PER UN SOLIDO ELASTICO LINEARE

Ⓡ EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$[\bullet] \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

[•] EQUILIBRIO INTERNO

IN TUTTI I PUNTI DEL SOLIDO [NEL VOLUME V]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0$$

$$[\bullet \bullet] \begin{cases} \sigma_x dx + \tau_{yx} dy + \tau_{zx} dz = P_x \\ \tau_{xy} dx + \sigma_y dy + \tau_{zy} dz = P_y \\ \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy + \sigma_z dz = P_z \end{cases}$$

[••] EQUILIBRIO ESTERNO

SULLA FRONTIERA [CONTORNO LIBERO S.F.]

$$\sigma_{ij} n_i = P_j$$

Ⓡ EQUAZIONI DI CINGHERAZIA

o DI COMPATIBILITÀ CINEMATICA

$$[\bullet] \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

[•] CINGHERAZIA INTERNA

IN TUTTI I PUNTI DEL SOLIDO [NEL VOLUME V]

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

[S_i, S_j = u, v, w]

$$[\bullet] \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

[•] SUL BORDO VINCIUTO

[S₃]

Ⓡ RELAZIONE COSTITUTIVA

ELASTICO LINEARE

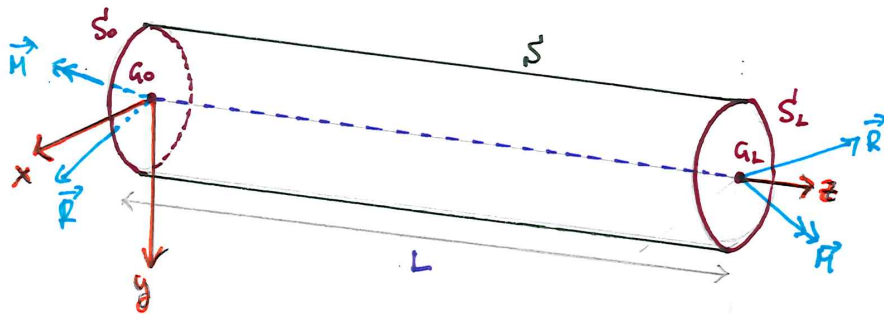
$$[\bullet] \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$[\bullet] \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{cases}$$

[•] LEGE DI HOOKE

GENERALIZZATA [PER MATERIALI ISOTROPICI]

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

 SOLIDO DI
 SAINT VENANT

 S_0 e S_L : Basi del solido - di forma qualunque

 S : Manto (superficie laterale del solido)

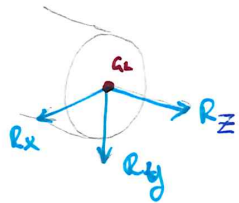
 G_0 e G_L : Centri delle basi

 G_0 : Origine del sistema di riferimento (principale)

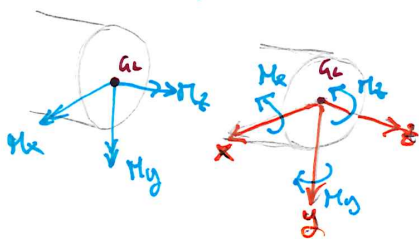
 L : Lunghezza (\gg delle dimensioni di S_0 e S_L)

 \vec{R} : Risultante delle forze applicate in S_0 e in S_L
 \vec{M}_G : Momento risultante in S_L e in S_0

$$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$$



$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$$


 POSTULATO
 DI SAINT
 VENANT

 LO STATO DI SFORTO NEL PUNTI INTERNI DEL SOLIDO A "INFINITESIMO" DI DISTANZA DALLE BASI DIPENDE SOLO DALLA RISULTANTE \vec{R} E DAL MOMENTO RISULTANTE \vec{M} E NON DALL'EFFETTUA DISTRIBUZIONE DI FORTE NELLE BASI

 - LA DISTRIBUZIONE DELLE FORTE NEI PUNTI INTERNI E', PER OGNI SEZIONE, LA NECESSARIA (GLI SFORTI $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ NON DIPENDONO DA z)

5A - IL SOLIDO DI SAINT VENANT -

 MODELLO GEOMETRICO \rightarrow IPOTESI DI UN GEOMETRICO

- SOLIDO CILINDRICO PRIVO DI VINCOLI *
- DI LUNGHEZZA L MOLTO MAGGIORE RISPETTO ALLE DIMENSIONI DELLA SEZIONE
- SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE (TERNA DESTRA) CON ORIGINE G_0 NEL BARICENTRO DI UNA SEZIONE ESTERNA (S_0)
- ASSE Z COINCIDENTE CON L'ASSE GEOMETRICO
- ASSI x e y ASSI PRINCIPALI DI INERZIA DELLA SEZIONE

 > IN TAL SISTEMA DI RIFERIMENTO SONO NULLI I MOMENTI STATICI E IL MOMENTO CENTRIFUGO DELLA SEZIONE RISPETTO A x e y :

$$S_x = \int_A y dA = 0; \quad S_y = \int_A x dA = 0; \quad I_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

> LIMITATAMENTE AI MOMENTI DEL PRIMO ORDINE, LE PROPRIETA' GEOMETRICHE DELLA SEZIONE SI MONDANO ALL'AREA E AI DUE MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AGLI ASSI PRINCIPALI:

$$A = \int_A dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

 MODELLO REOLOGICO O REOLOGICO \rightarrow IPOTESI DI UN MATERIALE

IL CILINDRO E' OMOGENEO E COSTITUITO DA UN MATERIALE ELASTICO LINEARE E IPERELASTICO

 MODELLO DELLE AZIONI ESTERNE \rightarrow IPOTESI DI UN FORTE

- NON CI SONO FORZE DI VOLUME: $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$
- IL MANTO S E' SENSO: $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$ su S
- SULLE BASI S_0 e S_L SONO APPLICATE DISTRIBUZIONI DI FORTE TALI DA GARANTIRE EQUILIBRIO GLOBALE *

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5A - IL SOLIDO DI SAINT VENANT -

 LE QUANTITÀ DA DETERMINARE SONO - LE TENSIONI INTERNE $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$

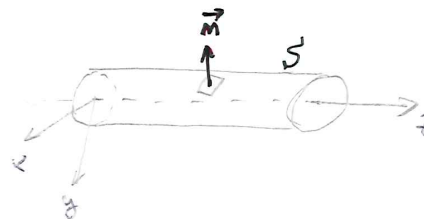
 - LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO u, v, w \rightarrow LE DEFORMAZIONI $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$

C'ADUNGO PROBLEMA ELASTICO, MA PER LE IPOTESI FATE IN CONSIDERAZIONE LE EQUAZIONI DIVERTONO:

$$[.] \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0}$$

$$[0.] \begin{cases} \sigma_x dx + \tau_{xy} dy = 0 \\ \tau_{xy} dx + \sigma_y dy = 0 \\ \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy = 0 \end{cases}$$

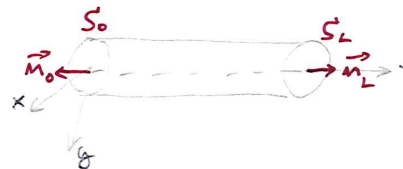
 SU S (LATERALE)


$$\vec{n} = \{\alpha_x, \alpha_y, 0\}$$

 $\alpha_z = 0$ \vec{n} NON FA "ORBITA" SU S

$$\vec{P} = \{P_x, P_y, P_z\} = \vec{0} \text{ SU } S$$

$$[.] \begin{cases} \sigma_z dz = -\sigma_z = p_z \\ \tau_{zy} dz = -\tau_{zy} = p_y \\ \tau_{zx} dz = -\tau_{zx} = p_x \end{cases}$$

 SU S_0 (BASE CON $z=0$)


$$\vec{n}_0 = \{0, 0, -1\} \quad \alpha_z = -1$$

$$\vec{n}_L = \{0, 0, 1\} \quad \alpha_z = +1$$

$$\alpha_x = \alpha_y = 0$$

$$\vec{P} = \{P_x, P_y, P_z\} \neq \vec{0} \text{ SU } S_0, S_L$$

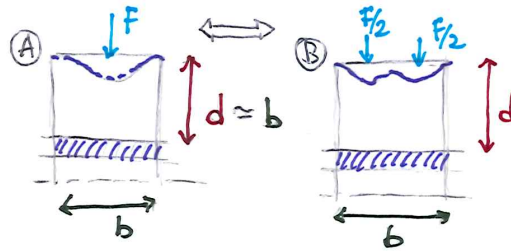
$$[0.] \begin{cases} \sigma_z dz = \sigma_z = p_z \\ \tau_{zy} dz = \tau_{zy} = p_y \\ \tau_{zx} dz = \tau_{zx} = p_x \end{cases}$$

 SU S_L (BASE CON $z=L$)

 MAE BASTA σ_z, τ_{xz} E τ_{zy} SONO FUNZIONI DI x E y

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

N.B. POSTULATO DI SAINT VENANT →



5A - IL SOLIDO DI SAINT VENANT -

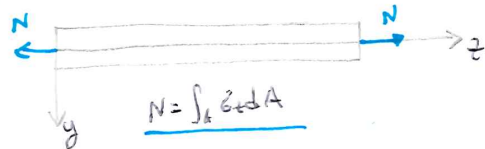
A E B SONO 2 SEZIONI EQUIVALENTI
 STRESS UNIFORME ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$) E IPOTESI
 TORRENTO UNIFORME
 A DISTANZA d - DISTANZA DI ESTINZIONE - PROXIMO AI
 SEMI EFFETTI.

N.B. IL SOLIDO È PRIVO DI VINCOLI (LIBERO NELLO SPAZIO), MA È IN EQUILIBRIO : $\vec{R} = \vec{0}$ E $\vec{M} = \vec{0}$ OUNO L'ENNERA \vec{R} E IL TORRENTO
 AUMENTANTE \vec{P} APPUNTI NELLE AZIONI S0 E S1 SONO IN EQUILIBRIO

ELASTICITÀ LINEARE → SOVRAPPONIBILITÀ DEGLI EFFETTI

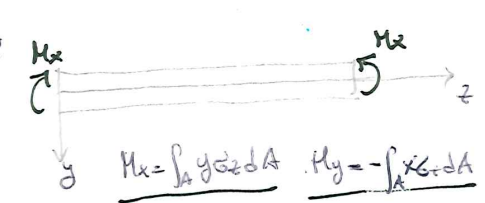
PER QUANTIFICARE L'EQUILIBRIO POSSIAMO CONSIDERARE SEPARATAMENTE LE COMPONENTI DI \vec{R} E \vec{M} , INDIVIDUANDO 4 CASI INDIPENDENTI

① $R_z = N$

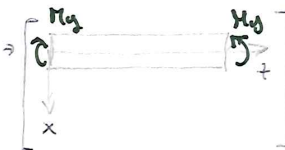


$R_z \neq 0$ $R_x = R_y = M_x = M_y = M_z = 0$
FORZA ASSIALE CENTRATA

② M_x o M_y



$M_x \neq 0$ $R_x = R_y = R_z = M_y = M_z = 0$
 $M_y \neq 0$ $R_x = R_y = R_z = M_x = M_z = 0$
FLESSIONE PURA

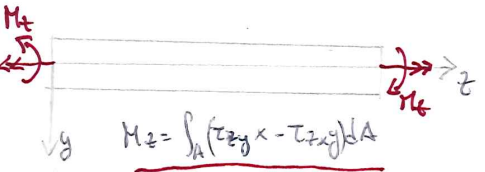


SI POSSONO COMBINARE:

PRESO FLESSIONE e
TENSO FLESSIONE

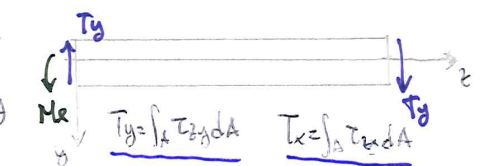
① E ② E LE LORO COMBINAZIONI
 GENERANO SOLO FORZE NORMALI
 > SECONDA ESATTE

③ M_z



$M_z \neq 0$ $R_x = R_y = R_z = M_x = M_y = 0$
TORSIONE

④ R_y o R_x
 T_y o T_x



$R_y \neq 0$ + $M_x \neq 0$ $R_x = R_z = M_y = M_z = 0$
 $R_x \neq 0$ + $M_y \neq 0$ $R_y = R_z = M_x = M_z = 0$
FLESSIONE COMPONATA A TORSIONE

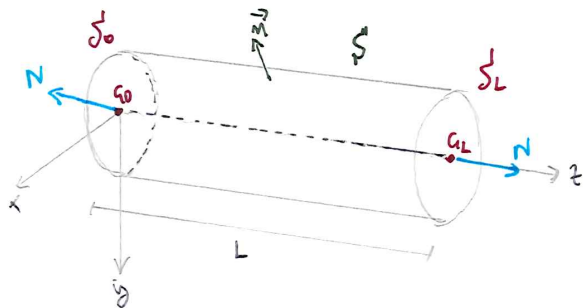


COMPONANO FORZE TANGENZIALI

④ ANCHE FORZE NORMALI

> SECONDA APPROXIMATA

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT



5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA -

I

5A

5B

$$p_x = p_y = p_z = 0 \text{ su } S, \quad \vec{m} = \{L_x, L_y, 0\} \quad \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} = \vec{0} \text{ IN } V$$

$$\vec{R} = \begin{cases} N \neq 0 \\ T_x = 0 \\ T_y = 0 \end{cases} \quad \vec{M} = \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \quad \text{SU } S_0, \vec{m}_0 = \{0, 0, -1\} \text{ e SU } S_L, \vec{m}_L = \{0, 0, +1\}$$

$$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\} \neq \vec{0} \text{ TALE CHE SOLO } N \neq 0 \text{ e}$$

$$T_x, T_y, M_x, M_y, M_z = 0$$

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

N.B. METODO SEMI-INVENZIONE

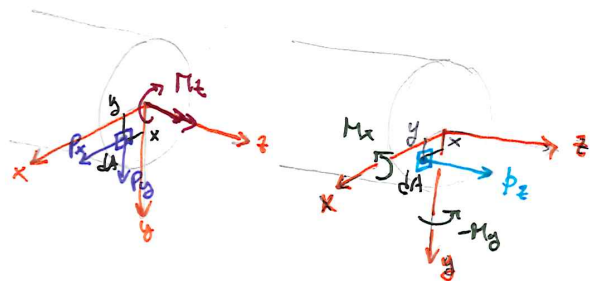
SIFANNO NELLE IPOTESI DELLE TENSIONI O DEGLI SPORTEMENTI (O N ENTRAMBI) ALLA BASE DELLA NATURA FINCA DEL PROBLEMA POI SI VERIFICANO ATTRAVERSO IL LADDERAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL PROBLEMA

LA DISTRIBUZIONE PIÙ SEMPLICE DI TENSIONI NELLE SEZIONI ETERNI E EQUIVALENTE ALLO STATO APPROSSIMATO È N

$$\text{SU } S_0 \quad p_x = 0, p_y = 0, \quad p_z = -\frac{N}{A} \quad p_z = \text{costante}$$

$$\text{SU } S_L \quad p_x = 0, p_y = 0, \quad p_z = \frac{N}{A}$$

(N.B. AVVERTO POTRE AVERE ANCHE $p_x \neq 0, p_y \neq 0$ MA TALI CHE $R_x = R_y = 0$ e $R_z = N$)



$$\int_A p_z dA = \int_A \frac{N}{A} dA = \frac{N}{A} \int_A dA = N$$

$$T_x = \int_A p_x dA = 0 \quad T_y = \int_A p_y dA = 0$$

$$M_x = \int_A p_z y dA = 0 = \frac{N}{A} \int_A y dA = 0 \quad \text{e} \quad M_y = - \int_A p_z x dA = -\frac{N}{A} \int_A x dA = 0$$

$$M_z = \int_A p_x y dA - \int_A p_y x dA = 0$$

* MOMENTI STATICI S_y e S_x NULLI
x e y SONO PRINCIPALI DI INERTIA

$$+ p_x = p_y = 0$$

2. VERIFICAZIONE LE EQUAZIONI DEL PROBLEMA

EQUILIBRIO ESTERNO
SUL CONFINO [•] =

$$\text{SU } S_L \quad \begin{cases} \tau_{zx} \cdot dz = \tau_{zx} \cdot 1 = 0 \\ \tau_{zy} \cdot dz = \tau_{zy} \cdot 1 = 0 \\ \sigma_z \cdot dz = \sigma_z \cdot 1 = \frac{N}{A} \end{cases} \quad \text{SU } S_0 \quad \begin{cases} \tau_{zx} \cdot dz = \tau_{zx} \cdot (-1) = 0 \\ \tau_{zy} \cdot dz = \tau_{zy} \cdot (-1) = 0 \\ \sigma_z \cdot dz = \sigma_z \cdot (-1) = -\frac{N}{A} \end{cases} \quad \text{SU } S \quad \begin{cases} \sigma_x dx + \tau_{xy} dy = 0 \\ \tau_{xy} dx + \sigma_y dy = 0 \\ \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \frac{N}{A}$$



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA



5A

IPOTIZZATO CHE SUO ESTREMO A SINISTRA ABBIAMO UNA DISTRIBUZIONE DI $p_z = \frac{N}{A}$ COSTANTE, ABBIAMO VERIFICATO CHE SUL CONTORNO LA DISTRIBUZIONE DELLE FORTE È: $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$; $\sigma_z = N/A$ *

VERIFICHIAMO L'EQUILIBRIO INTERNO

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N/A \end{bmatrix}$$

$$[\bullet] \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \sim 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \sim 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \sim 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{A} \right) \stackrel{*}{=} 0 \end{cases}$$

* $\left[\sigma_z = \text{cost} \rightarrow \text{DERIVATA DI UNA COSTANTE} = 0 \right]$

ANCHE L'EQUILIBRIO INTERNO È SODDISFATTO

5B

A PARTIRE DA UN'IPOTESI SULLA DISTRIBUZIONE DELLE FORTE $\left[p_z = \text{cost} = N/A; p_x = p_y = 0 \right]$ ABBIAMO DEFINITO UNA PARTE DI SOLUZIONE, DANDO LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI $\left[\sigma_z = N/A, \text{TUTTE LE ALTRE COMPONENTI DI } \underline{\underline{\sigma}}$ SONO NULLE $\left. \right]^*$

NOTI GLI SFORZI ABBIAMO CALCOLE LE DEFORMAZIONI MEDIANTE LE EQUAZIONI DI LEGAME $[\bullet]$

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A}; \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A}; \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z = \frac{N}{EA}; \quad \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0$$

E INFINE, CON LE EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ $[\bullet]$ RICEVIAMO GLI SPOSTAMENTI u, v, w ; N.B. IL CORPO DI RIFORMAZIONE DEVE ESSERE CONTINUO

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} \quad \text{DOBBIAMO TROVARE UNA FUNZIONE } u(x, y, z) \text{ LA CUI DERIVATA PARZIALE RISPETTO A } x \text{ SIA UNA COSTANTE}$$

PER INTEGRAZIONE: $u = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x + m_0(y, z)$ $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x \right) = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} \rightarrow \frac{\partial m_0(y, z)}{\partial x} = 0$

ANALOGAMENTE: $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} \Rightarrow v = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y + v_0(x, z)$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{N}{EA} \Rightarrow w = \frac{N}{EA} z + w_0(x, y)$$

* N.B. $m_0(y, z)$, $v_0(x, z)$ E $w_0(x, y)$ DIPENDONO DA 2 VARIABILI
N.B. PER VOLTA: $u \rightarrow x \quad m_0(y, z) \rightarrow \frac{\partial m_0}{\partial x} = 0$
 $v \rightarrow y \quad v_0(x, z) \rightarrow \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$
 $w \rightarrow z \quad w_0(x, y) \rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$

USANDO u, v E w PER GLI SPOSTAMENTI AVCIAM:

$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x + m_0(y, z)$$

$$v = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y + v_0(x, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial m_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

m_0, v_0, w_0 RAPPRESENTANO LE COMPONENTI DI UNO SCALARE DELLA GRAFICA

N.B. $\frac{\partial m_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA -



5A

$$\delta x z = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} u(x,y,z) &= -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x + u_0(y,z) & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u_0(y,z)}{\partial z} \\ w(x,y,z) &= \frac{N}{EA} z + w_0(x,y) & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

$$\delta y z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} v(x,y,z) &= -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y + v_0(x,z) & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v_0(x,z)}{\partial z} \\ w(x,y,z) &= \frac{N}{EA} z + w_0(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

N.B. SEGUE CHE u_0, v_0, w_0 GENERANO UN CAMPO DI SPOSTAMENTI CHE CORRISPONDE SOLO A UN ROTAZIONE MENO, VEDI NOTA 1

5B

NEL CAMPO DI SPOSTAMENTI ABBIAMO UNA PARTE NOTTA $\left[-\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x \text{ IN } u(x,y,z); -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y \text{ IN } v(x,y,z); \frac{N}{EA} z \text{ IN } w(x,y,z) \right]$ E UNA INCERTA $[u_0(y,z) \text{ IN } u(x,y,z); v_0(x,z) \text{ IN } v(x,y,z); w_0(x,y) \text{ IN } w(x,y,z)]$, MA PER GARANTIRE LA CONVENENZA ALORS u_0, v_0, w_0 NON POSSONO PRODURRE DEFORMAZIONI \rightarrow ROTO RIGIDO, QUINDI POSSIBILE TRASCURARE.

\triangleright A PARTIRE DA IPOTESI UNA DISTRIBUZIONE DELLE FORTE PIÙ BASTA ($p_z = \text{cost} = N/A$) TUTTE LE 15 INCORNITE DEL PROBLEMA SONO ACQUISTE DALL'APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, [•] E [••], DI CONVENENZA [•] E DI LEGARE [•]

$$\begin{array}{llll} \sigma_x = 0 & \tau_{xy} = 0 & u(x,y,z) = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x & \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} & \gamma_{xy} = 0 \\ \sigma_y = 0 & \tau_{xz} = 0 & v(x,y,z) = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y & \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} & \gamma_{xz} = 0 \\ \sigma_z = N/A & \tau_{yz} = 0 & w(x,y,z) = \frac{N}{EA} z & \epsilon_z = \frac{N}{EA} & \gamma_{yz} = 0 \end{array}$$

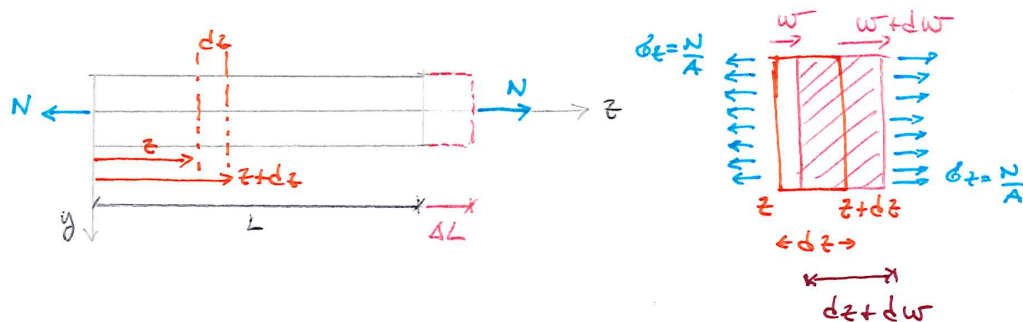
N.B. $-\sigma_z = N/A = \text{costante}$ A TUTTA LA TRAVE

$-w(x,y,z) = \frac{N}{EA} z \Rightarrow$ GLI SPOSTAMENTI LONGITUDINALI NON DIPENDONO DA x E $y \rightarrow$ LA DEFORMAZIONE AVVENUTA NELLA TRAVE È UNIFORME E PARALLELA ALLA CONFIGURAZIONE INIZIALE INDEFORMATA



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

PER INVESTIGARE LE DEFORMAZIONI LONGITUDINALI DELLA TRAVE, CONSIDERAMO UN CUNGLIO INFINITESIMO DI TRAVE:



5B - AZIONE AXIALE CENTRATA -

IV

5A

LA DEFORMAZIONE AVVENUTA;

+ L'ASCISSE \$z\$ È SPOLATA DI \$w = \frac{N}{EA} z\$

+ L'ASCISSE \$(z+dz)\$ È SPOLATA DI \$w+dw = \frac{N}{EA} (z+dz)\$

5B

IL CUNGLIO DI LUNGHEZZA INDEFORMATA \$dz\$, DOPO L'APPLICAZIONE DI \$N\$ HA UNA LUNGHEZZA PIU' A:

$$dz + (w+dw) - w = dz + dw = dz + \frac{N}{EA} dz$$

E LA VARIATIONE DI LUNGHEZZA \$\Delta dz\$ USCE:

$$\Delta dz = (dz + \frac{N}{EA} dz) - dz = \frac{N}{EA} dz$$

> INFATTI
$$\epsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{N}{EA}$$

IL ALLUNGAMENTO COMPLESSIVO DELLA TRAVE \$\Delta L\$ PUO' ESSERE CALcolato COME SOMMA DI TUTTI GLI ALLUNGAMENTI DEI CUNGLI:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dz = \int_0^L \frac{N}{EA} dz = \frac{N}{EA} \int_0^L dz = \frac{N}{EA} [z]_0^L = \frac{N}{EA} L$$

\$\Delta L\$ È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A \$N\$ E \$L \rightarrow\$ SE \$N > 0 \Delta L > 0\$; SE \$N < 0 \Delta L < 0\$

\$\Delta L\$ È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A \$EA \rightarrow\$ \$EA = RIGIDITÀ ASSOLUTA\$ \$\rightarrow\$ N.B. RIGIDITÀ UNISCE UNA CARATTERISTICA DEL MATERIALE [IL MODULO DI TORSIONE, \$E\$] E GEOMETRIA [L'AREA DELLA SEZIONE, \$A\$]

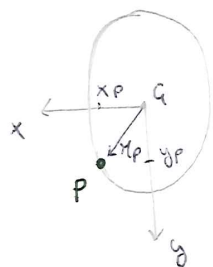
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA -

(V)

5A

LA TRAVE, OLTRE A SUBIRE UN'ESTENSIONE IN SENSO LONGITUDINALE, SI DEFORMA ANCHE TRASVERSALMENTE
CONFERENDO UN CERCEO PUNTO $P = (x_p, y_p)$ DEL GORTONO DELLA SEZIONE TRASVERSALE



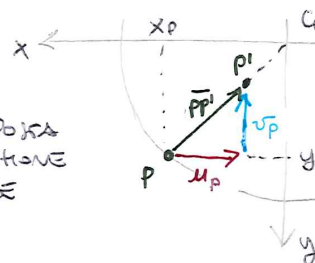
LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO NEL PIANO xy VALGONO:

$$u_p = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x_p$$

$$v_p = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y_p$$

$$\text{Allora } \frac{u_p}{v_p} = \frac{-\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} x_p}{-\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} y_p} = \frac{x_p}{y_p}$$

P si sposta
in direzione
assiale



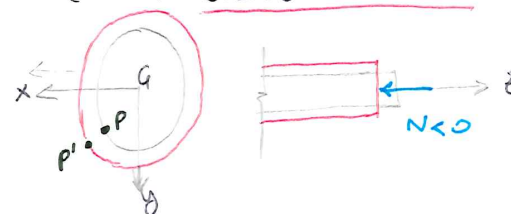
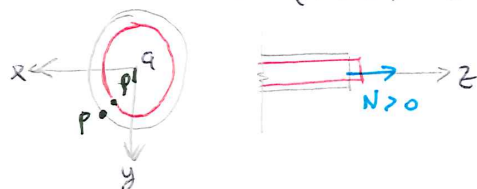
LO SPOSTAMENTO PP'
AVVIENE UNDO LA
CONGIUNTE PG

5B

ALLORA DETTA M_P LA LUNGHEZZA INIZIALE DI PG , PP' RAPPRESENTA UNA VARIATIONE ΔM_P DI M_P :

$$\Delta M_P = \sqrt{u_p^2 + v_p^2} = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} M_P \quad \left[\begin{array}{c} M_P \\ x_p \\ y_p \end{array} \right]$$

LA SEZIONE IN TRAZIONE ($N > 0$) O DI ESTENSIONE ($N < 0$) DEFORMA → MANTIENE LA STESSA FORMA



* APPROFONDENDO IL TEOREMA DI CASTIGLIONE È POSSIBILE CALCOLARE IL LAVORO DI DEFORMAZIONE:

$$L_e = \frac{1}{2} N \Delta L = \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} L = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA}$$

$$L_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z \epsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{N}{A} \cdot \frac{N}{EA} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{N^2}{EA^2} dV$$

$$dV = A dz \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA^2} A dz = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \int_0^L dz = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA}$$

$$L_i = L_e = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA}$$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B- AZIONE ASSIALE CENTRATA

VI

5A

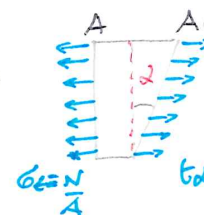
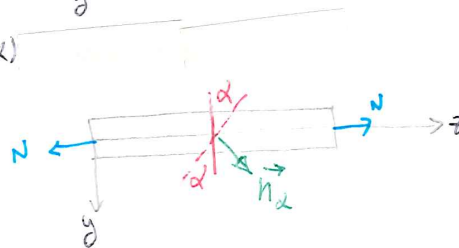
5B

σ_z È COSTANTE IN OGNI SEZIONE $\rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}$

SE CONSIDERAMO UNA SEZIONE RETTA (PERPENDICOLARE A Z)



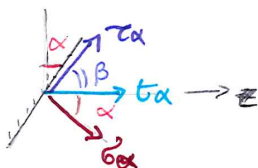
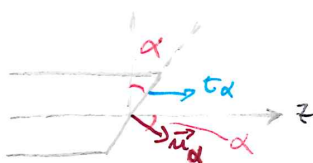
SE CONSIDERAMO UNA SEZIONE OBLIQUA (INCLINATA DI UN ANGOLO α)



PER L'EQUILIBRIO IN DIREZIONE Z: $\sigma_z A = \tau_\alpha A_\alpha$

$$A_\alpha \cos \alpha = A \rightarrow A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \rightarrow A_\alpha > A$$

$$\sigma_z A = \tau_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} \rightarrow \tau_\alpha = \sigma_z \cos \alpha \quad \tau_\alpha \leq \sigma_z$$



B = ANGOLO COMPLEMENTARE DI $\alpha \rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$

$$\tau_\alpha = \tau_\alpha \sin \alpha = \sigma_z \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma_z \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha = \tau_\alpha \cos \alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha$$

SU UNA SEZIONE OBLIQUA ABBIAMO SIA σ CHE τ

SE $\alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1 \quad \sigma_\alpha = \sigma_z \quad \tau_\alpha = 0 \quad (\sin \alpha = 0)$

$\alpha = 0 \rightarrow$ SEZIONE RETTA \rightarrow SOLO σ

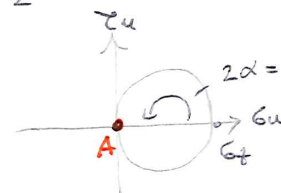
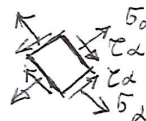
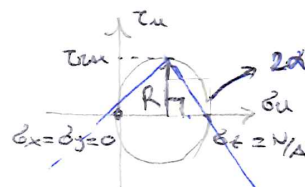
SE $\alpha = 90^\circ \quad \cos \alpha = 0 \quad \sigma_\alpha = 0 \quad \tau_\alpha = 0 \quad (\sin 2\alpha = 0)$

$\alpha = 90^\circ \rightarrow$ SEZIONE LONGITUDINALE \rightarrow NON CI SONO FORZE

SE $\alpha = 45^\circ \quad \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \sigma_z \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_z$$

$\alpha = 45^\circ \rightarrow$ MASSIMA TENSIONE DI TRAZIONE τ



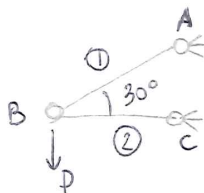
$\alpha = 30^\circ \rightarrow$ SEZIONE LONGITUDINALE $\sigma = 0 \quad \tau = 0$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA -


5A

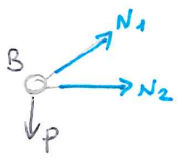
**ESEMPIO
APPLICATIVO**



STRUTTURA ISOTROPICA

$$P = 30 \text{ kN} = 30 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$k = 120 \text{ MPa} = 120 \text{ N/mm}^2 \quad (k' = k; k'' = k)$$



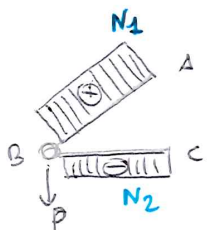
$$\begin{cases} N_1 \cos 30^\circ + N_2 = 0 \rightarrow R_{x1}' = 0 & \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \\ N_1 \sin 30^\circ - P = 0 \rightarrow R_{y1}' = 0 & \sin 30^\circ = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} N_1 - P = 0 \rightarrow N_1 = 2P \oplus \text{ TENSIONE}$$

$$2P \cos 30^\circ + N_2 = 0 \rightarrow \sqrt{3}P + N_2 = 0 \rightarrow N_2 = -\sqrt{3}P \ominus \text{ COMPRESIONE}$$

$$N_1 = 2P = 60000 \text{ N}$$

$$N_2 = -\sqrt{3}P = -51962 \text{ N}$$



$$\sigma_t = \frac{N}{A} \leq k' \quad \text{se } N > 0$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \geq -k'' \quad \text{se } N < 0$$

VERIFICA * NELLA AZIONE ASSIALE CENTRATA $\sigma_z = \frac{N}{A}$ IN TUTTI I PUNTI E COSTANTE NELLA SEZIONE

POSSIAMO PERCHÉ QUALSIASI PUNTO (DELLA SEZ ① o ②)

INOLTRE IL TUBERALE È SPARTITO AL TULLO → LO SFORZO ATTRIBIBILE VIENE RAGGIUNTO ENTROPPO UNIFORMEMENTE IN TUTTI I PUNTI

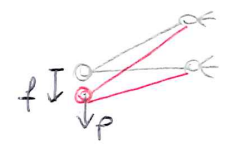
POSSIAMO RINVIARE LA VERIFICA PER IL PROGETTO → DIREZIONAMENTO DELLE AREE

$$\sigma_z^{①} = \frac{N_1}{A_1} \leq k \quad \text{INCOGNITA } A_1 \rightarrow \frac{N_1}{k} \leq A_1 \quad \text{OVVERO } A_1 \geq \frac{N_1}{k} \quad A_1 = A_1^{\text{MIN}} = \frac{60000}{120} = 500 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_c^{②} = \frac{N_2}{A_2} \geq -k \quad \text{INCOGNITA } A_2 \rightarrow N_2 \geq -k A_2 \quad -N_2 \leq k A_2 \quad A_2 \geq \frac{-N_2}{k} \quad A_2 = A_2^{\text{MIN}} = \frac{51962}{120} = 433 \text{ mm}^2$$

N.B. LE VERIFICHE DI RESISTENZA NON SONO AFFICIENTI

BISOGNA CONTROLLARE ANCHE LE DEFORMAZIONI →



AD ESEMPIO, CHE L'ABBASSAMENTO DEL PUNTO B INDEBITO AL CARICO P SIA MINORE DI UN CERTO VALORE

INOLTRE PER GLI ELEMENTI COMPRESI OCORRE UNA SPECIFICA VERIFICA NEI CONFINI DEL CARICO DI PUNTO (CHE PUÒ DARE LUOGO A FENOMENI DI INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO)

5B

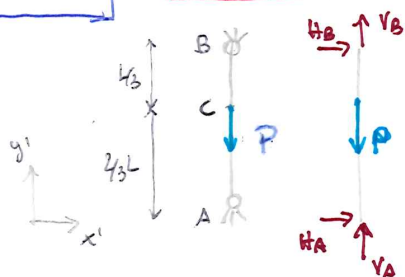


IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

ESEMPIO APPLICATIVO

Struttura iperstatica

[grado di vincolo > grado di libertà]



$$\begin{cases} R_x' = 0 \rightarrow H_A + H_B = 0 & H_A = 0 \\ R_y' = 0 \rightarrow V_A + V_B - P = 0 & \boxed{V_A + V_B = P} \\ M_{z'(A)} = 0 \rightarrow -H_B L = 0 & H_B = 0 \end{cases}$$

5B - Azione assiale centrata



5A

5B

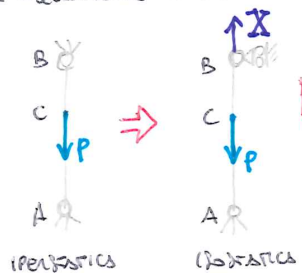
→ non siamo in grado di determinare V_A e V_B
(4 incognite - 3 equazioni cinematiche della struttura)

Poniamo $V_B = X$, quantità incognita
 $V_A = P - X$ e $V_B = X$, ma quanto vale X ?

Il vincolo in B impedisce lo spostamento verticale del punto B, ovvero impone che $\Delta L = 0$

Dividiamo l'asse in 2 tratti: ① = AB e ② = CB e per ognuna calcoliamo N e ΔL , allora $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$ *

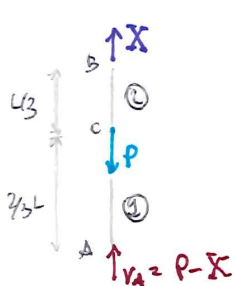
* L'equazione aggiuntiva ci consente di calcolare X



$\bar{U}_B = 0$ → condizione cinematica che afferma che l'ipotetica di spostare come la struttura iperstatica di partenza

$V_B = 0$ → per un preciso valore di X

→ per risolvere il problema non basta l'equilibrio (come nei corpi rigidi) ma bisogna tenere conto della deformabilità



A → C

① $0 < z < z_3 L$

$$\uparrow N(z) + (P - X) = 0$$

$$N_A(z) = -P + X$$

C → B

② $z_3 < z < L$

$$\uparrow N(z) - P + P - X = 0$$

$$N_C(z) = X$$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5B - AZIONE ASSIALE CENTRATA

(X)

5A

LA TRAVE ① E LA TRAVE ② SONO "SALDATE" INSIEME → HANNO STESSA AREA A E STESSO COEFFICIENTE ELASTICO E
GLI SFORZI VALGONO:

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{N_1^{(1)}}{A} = \frac{-(P-X)}{A} \Rightarrow \epsilon_1^{(1)} = \frac{\sigma_1^{(1)}}{E} = \frac{-P+X}{EA} \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{-P+X}{EA} \frac{2}{3}L$$

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{N_1^{(2)}}{A} = \frac{X}{A} \Rightarrow \epsilon_1^{(2)} = \frac{\sigma_1^{(2)}}{E} = \frac{X}{EA} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{X}{EA} \frac{1}{3}L$$

IMPOSTIAMO CHE

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\frac{-(P-X)}{EA} \frac{2}{3}L + \frac{X}{EA} \frac{1}{3}L = 0 \rightarrow -\frac{2PL}{3EA} + \frac{2}{3} \frac{XL}{EA} + \frac{XL}{3EA} = 0 \rightarrow -\frac{2}{3} \frac{PK}{EA} + \frac{XK}{EA} = 0 \quad \boxed{X = \frac{2}{3}P}$$

5B

 QUANTO VALGONO ΔL_1 E ΔL_2 ?

$$\Delta L_1 = -\frac{P+X}{EA} \frac{2}{3}L = -\frac{P+\frac{2}{3}P}{EA} \frac{2}{3}L = -\frac{2PL}{3EA}$$

$$\Delta L_2 = \frac{X}{EA} \frac{1}{3}L = \frac{\frac{2}{3}PL}{EA \cdot 3} = \frac{2PL}{9EA}$$

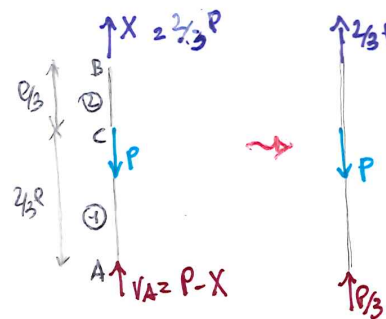
IL TRATTO ①

SI ACCORCIA

IL TRATTO ②

SI ALLUNGA

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = -\frac{2PL}{9EA} + \frac{2PL}{9EA} = 0 \quad \boxed{\Delta L = 0}$$

 NOTA X , INCOSNITA IPERSTATICA, E' POSSIBILE RILIVERE COMPLETAMENTE LA STRUTTURA:


$$N_1^{(1)} = -(P+X) = -P + \frac{2}{3}P = -\frac{1}{3}P$$

$$N_1^{(2)} = X = \frac{2}{3}P$$



MA PER FARLO OCCORRE TENERE CONTO DELLA DEFORMABILITÀ!
NON SI HA PIÙ UN SISTEMA RIGIDO.

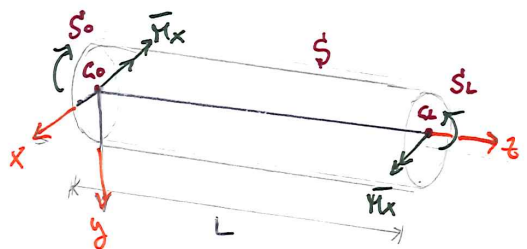
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA

①

5A

ANCHE PER IL 2° CASO INDIPENDENTE SI PUO' RICEVERE LA SOLUZIONE COMPLETA: **FLESSIONE RETTA** $M_x \neq 0$ ($\text{o } M_y \neq 0$)



BISOGNA TROVARE UNA DISTRIBUZIONE DI FORZE SULLE BASTI S_0 E S_L TALE CHE:

$$N=0 \quad T_x=0 \quad T_y=0 \quad \rightarrow \vec{R}=\vec{0}$$

$$M_{x(0)}=\bar{M}_x \quad M_{y(0)}=0 \quad M_{z(0)}=0 \quad \rightarrow \vec{M}=\bar{M}_x \vec{i}$$

IPOTESI: $S_0 \rightarrow p_x=0; p_y=0; p_z=-(q+bx+cy) \quad \vec{M}_0=(0,0,-1)$

$S_L \rightarrow p_x=0; p_y=0; p_z=(q+bx+cy) \quad \vec{M}_L=(0,0,+1)$

p_x e p_y NULLI, p_z VARIA LINEARMENTE IN x E y

CON RIFERIMENTO A S_L :

$$N = \int_A p_z dA = \int_A (q+bx+cy) dA = \underbrace{q \int_A dA}_A + \underbrace{b \int_A x dA}_{S_y=0} + \underbrace{c \int_A y dA}_{S_x=0} = qA \quad \text{PER AVERE } N=0 \rightarrow q=0$$

*[X E Y ASSI CENTRALI DI INERZIA]

$$p_z = bx + cy$$

$$T_x = \int_A p_x dA = 0 \quad \text{E} \quad T_y = \int_A p_y dA = 0$$

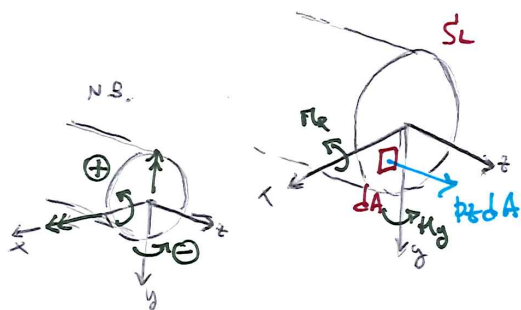
$$M_{z(0)} = \int_A -(p_x y) + (p_y x) dA = 0 \quad p_x = p_y = 0$$

$$M_{x(0)} = \int_A p_z y dA = \int_A (bx+cy) y dA = \underbrace{b \int_A xy dA}_{J_{xy}=0^*} + \underbrace{c \int_A y^2 dA}_{J_y} = c J_y = \bar{M}_x \rightarrow c = \frac{\bar{M}_x}{J_y}$$

$$M_{y(0)} = \int_A -p_z x dA = \int_A -(bx+cy) x dA = -\underbrace{b \int_A x^2 dA}_{J_x} - \underbrace{c \int_A xy dA}_{J_{xy}=0^*} = -b J_x = 0 \rightarrow b=0$$

ALLORA: $p_z = \cancel{q} + \cancel{bx} + cy = \frac{\bar{M}_x}{J_y} y$ p_z VARIA LINEARMENTE IN y

ANALOGHE CONCLUSIONI SI RICEVONO OPERANDO SU S_0



5B

5C



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

su S_0 $p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = -\frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y$ $\vec{M}_0 = (0, 0, -1)$
 su S_L $p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y$ $\vec{M}_L = (0, 0, 1)$
 su S $\vec{m} = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$ $\vec{p} = 0$

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA



5A

EQUILIBRIO CAUCHY

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = p_x = 0 & \sigma_x = 0 \quad \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = p_y = 0 & \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y = p_z = 0 & \rightarrow p_z = 0 \quad \vec{p} = 0 \text{ su } S \end{cases}$$

EQUILIBRIO ETERNO

RELAZIONI DI CAUCHY

EQUILIBRIO ETERNO

$$\begin{cases} -\tau_{zx} = p_x = 0 & \tau_{zx} = 0 = \tau_{xz} \\ -\tau_{zy} = p_y = 0 & \tau_{zy} = 0 = \tau_{yz} \\ -\sigma_z = p_z = -\frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y & \Rightarrow \sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y \end{cases}$$

EQUILIBRIO CAUCHY

$$\begin{cases} \tau_{zx} = p_x = 0 & \tau_{zx} = 0 = \tau_{xz} \\ \tau_{zy} = p_y = 0 & \tau_{zy} = 0 = \tau_{yz} \\ \sigma_z = p_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y & \Rightarrow \sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y \end{cases}$$

5B

5C

ALLORA NEL CASO DELLA FLESSIONE RETTA LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI $\vec{\sigma}$: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ e $\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y$

VERIFICHIAMO L' EQUILIBRIO INTERNO

*
$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow 0 + 0 + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$\left[\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{\gamma_x} y \rightarrow \sigma_z \text{ DIPENDE DA } y \rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \right]$

NOTI GLI SFORZI, E' POSSIBILE CALCOLARE LE DEFORMAZIONI:

LEGGE COSTITUTIVA

$$\begin{cases} \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E \gamma_x} y \\ \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E \gamma_x} y \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{E \gamma_x} y \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA -



5A

5B

5C

APARTIRE DA UN'IPOTESI LIBERA IN KUBAZIONE DELLE FORZE : $b_x = 0$; $b_y = 0$; $p_z = Q + b_x + c_y = \frac{M_x}{I_x} y$

ABBIAO DEDOTTO LA IN KUBAZIONE DELLE TENSIONI : $\epsilon_z = \frac{M_x}{E I_x} y$ E $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

E MUNITO CON LE LEGGI COSTITUTIVE LE DEFORMAZIONI : $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y$; $\epsilon_z = \frac{M_x}{E I_x} y$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

BISOGNA VERIFICARE CHE SIA POSSIBILE DEFINIRE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI CONTINUO \rightarrow **CONGRENZA**

[1] $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y$

[2] $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y$

[3] $\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{M_x}{E I_x} y \rightarrow$ PER INTEGRAZIONE $w(x,y,z) = \frac{M_x}{E I_x} y z + w_0(x,y)$ [3']

[4] $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

[5] $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow$ INTEGRANDO LA [3'] $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \rightarrow$ PER INTEGRAZIONE $\rightarrow u(x,y,z) = -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + u_0(x,y)$ [5']

[6] $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow$ INTEGRANDO LA [3'] $\rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M_x}{E I_x} z - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$

\rightarrow PER INTEGRAZIONE $\rightarrow v(x,y,z) = -\frac{M_x}{2 E I_x} z^2 - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + v_0(x,y)$ [6']

QUELLO TERMINE DIPENDE SOLO DA x,y

INTEGRANDO LA [5'] NELLA [1] $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y$ IL TERMINE NOSTRO NON CONTIENE z

DEVE ESSERE = 0
CONTIENE z

\rightarrow PER INTEGRAZIONE $\rightarrow u_0(x,y) = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y x + f_1(y)$ [7]

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA -

IV

5A

INFERENDO LA [6'] NEGLA [2] →

IL PRIMO TERMINE DELLA [6] NON CONTIENE y, HA SOLO z, È DERIVATO RISPETTO A y, SVANISCE

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E \bar{I}_x} y$$

IL PRIMO TERMINE NOTO NON CONTIENE z

DEVE ESSERE = 0 CONTIENE z

→ PER INTEGRAZIONE → $v_0(x,y) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{2E \bar{I}_x} y^2 + f_2(x)$ [8]

ABBIAMO ADDIZIONATO 5 EQUAZIONI DI 6, MANCA LA [4], HA NOTIZIA CHE:

INFERENDO LA [7] NEGLA [5] → $u(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E \bar{I}_x} y x - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} z + f_1(y)$ [9]

5B

5C

INFERENDO LA [8] NEGLA [6] → $v(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{2E \bar{I}_x} y^2 - \frac{\nu \bar{M}_x}{2E \bar{I}_x} z^2 - \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} z + f_2(x)$ [10]

QUINDI LA [4] → $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E \bar{I}_x} x - \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y \partial x} z + \frac{df_1(y)}{dy} - \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{df_2(x)}{dx} = 0$

DERIVATA TOTALE FUNZIONE IN y

DERIVATA TOTALE FUNZIONE IN x

N.B. $\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y \partial x}$

LA SOMMA DEI 5 TERMINI DEVE ESSERE = 0 → $-\frac{\nu \bar{M}_x}{E \bar{I}_x} x - 2 \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} z + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0$

DEVE ESSERE = 0 [È L'UNICO TERMINE CHE CONTIENE z.]

SEPARANDO I 5 MEMBRI DEI TERMINI MOMENTI:

$$\underbrace{-\frac{\nu \bar{M}_x}{E \bar{I}_x} x + \frac{df_2(x)}{dx}}_{= \alpha = \text{costante}} = -\frac{df_1(y)}{dy}$$
 [11] AFFINCHÉ 2 FUNZIONI DI PENDENTI DA 2 VARIABILI DIVERSE (x e y) SIANO UGUALI DEVONO ESSERE COSTANTI



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

RICAPITO CORSO:

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

w_0 DIPENDE DA x E y $w_0(x,y)$ E NON DA z → TUTTE LE SUE DERIVATE SECONDE SONO = 0
IN X E Y

ALLORA w_0 HA LA FORMA DI UN POLINOMIO COMPLETO: $w_0(x,y) = a + bx + cy$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = b \rightarrow \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{E} \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = c \rightarrow \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\alpha \rightarrow f_1(y) = -\alpha y + d \quad [12] \quad [\text{FORMA GENERALE DI } f_1(y)]$$

$$\frac{df_2(x)}{dx} - \frac{\nu \bar{M}_x}{E I_x} x = \alpha \rightarrow \frac{df_2(x)}{dx} = \alpha + \frac{\nu \bar{M}_x}{E I_x} x \rightarrow f_2(x) = \alpha x + \frac{\nu \bar{M}_x}{E I_x} \frac{x^2}{2} + e \quad [13] \quad [\text{FORMA GENERALE DI } f_2(x)]$$

QUINDI LE ESPRESSIONI COMPLETE DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO SONO:

$$[14] \quad u(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E I_x} xy - \underbrace{bz - \alpha y + d}_{u_1(y,z)} \rightarrow u(x,y,z) = -\frac{\nu \bar{M}_x}{E I_x} xy + u_1(y,z) \quad [14']$$

$$[15] \quad v(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{2E I_x} (-z^2 - \nu y^2 + \nu x^2) - \underbrace{cz + \alpha x + e}_{v_1(x,z)} \rightarrow v(x,y,z) = -\frac{\bar{M}_x}{2E I_x} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)] + v_1(x,z) \quad [15']$$

$$[16] \quad w(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{E I_x} yz + \underbrace{a + bx + cy}_{w_0(x,y)} \rightarrow w(x,y,z) = \frac{\bar{M}_x}{E I_x} yz + w_0(x,y) \quad [16']$$

* u_1, v_1, w_0 DANNO LUOGO SOLO A 1 NOTO MAGGIO: $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$

$$\text{E} \quad \delta_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\alpha + \alpha = 0; \quad \delta_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = -b + b = 0; \quad \delta_{yz} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -c + c = 0$$

u_1, v_1, w_1 POSSONO ESSERE TRASCURATI → CORPO IN EQUILIBRIO NOTI MAGGIO ANNULLATI DA VINCOLI

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

FLESSIONE RETTA

SOLUZIONE DEL PROBLEMA:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 & \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_y &= 0 & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{M_x}{J_x} y & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

STATO DI SFORTO

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{\nu M_x}{E J_x} y & \gamma_{xy} &= 0 \\ \epsilon_y &= \frac{\nu M_x}{E J_x} y & \gamma_{xz} &= 0 \\ \epsilon_z &= \frac{M_x}{E J_x} y & \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

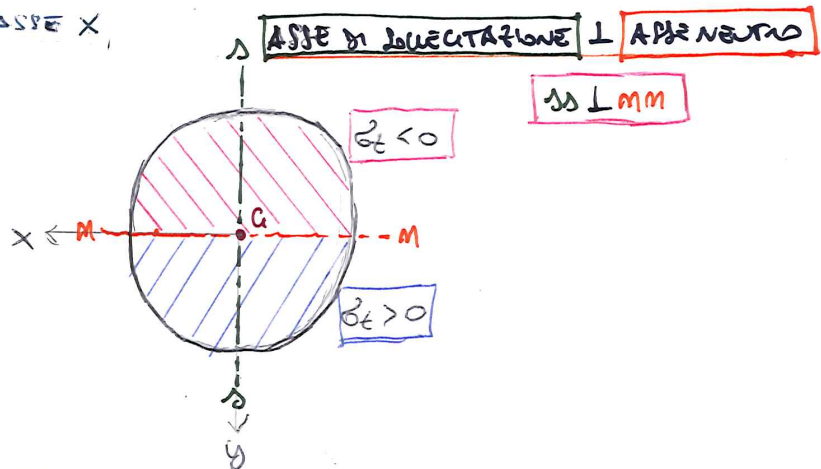
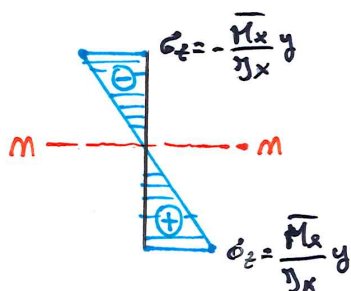
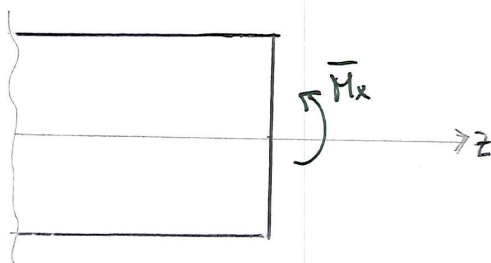
DEFORMAZIONI

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu M_x}{E J_x} x y \\ v &= -\frac{M_x}{2 E J_x} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)] \\ w &= \frac{M_x}{E J_x} y z \end{aligned}$$

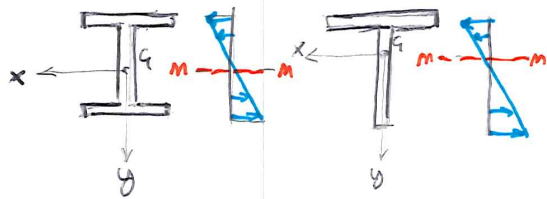
SPOSTAMENTI

LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORTI (σ_z) È A 'FALETTA' - OVVERO VARIA LINEARMENTE UNICO y E HA VALORI MASSIMI ALLA MASSIMA DISTANZA DALL'ASSE NEUTRO → LUOGO GEOMETRICO INDIVIDUATO DA $\sigma_z = 0$

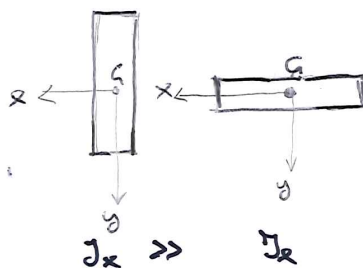
N.B. $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$ ALORA $\sigma_z = 0$ PER $y = 0$ → L'ASSE NEUTRO, NEL CASO DELLA FLESSIONE RETTA, COINCIDE CON L'ASSE DEL VETTORE MOMENTO, ASSE X, ASSE DI SOLLECITAZIONE ⊥ ASSE NEUTRO



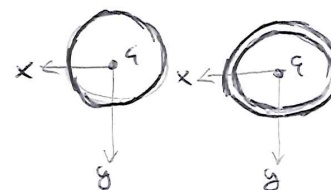
N.B. I PUNTI PIÙ SOLLECITATI SONO AI LEMBI PIÙ DISTANTI DALL'ASSE NEUTRO:



PER UN FUNZIONAMENTO OPTIMALE DELLA TRONCA OCCORRE DISPORRE PIÙ MATERIALE DOVE LE σ_z SONO PIÙ ALTE



MEGLIO TRAVI DI PROPE A GUTTELLO CHE IN PROPE RE



PIÙ CONVENIENTE UTILIZZARE PROFILI TUBOLARI

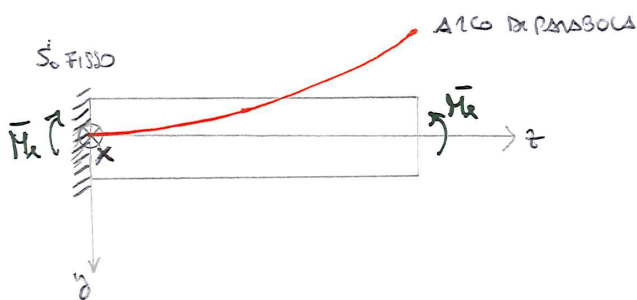


IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA -



5A



I PUNTI QUOCATI IN UN'IPOTEZ HANNO COORDINATE (ρ, θ) E SUBISSONO QUESTI SPOSTAMENTI:

$u = 0$ NON SI SPOSTANO IN DIREZIONE x
 $w = 0$ NON SI SPOSTANO IN DIREZIONE z
 $v = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2$ → SPOSTAMENTI SOLO IN DIREZIONE y

5B

A DEFORMAZIONE AVVENUTA

→ L'ASSE BARICENTRICO DELLA TRAVE, ASSE z , PER EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE, SI CURVA TENDE ALLUNGARSI ($w=0$) E MANTIENE NEL PIANO $y-z$ ($u=0$)
 IL PIANO $y-z$ → PIANO DI FLESSIONE

5C

LE COORDINATE ξ SONO:

$\xi = x + u \rightarrow \xi = \rho$
 $\eta = y + v \rightarrow \eta = -\frac{M_x}{2EJ_x} z^2$ EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA PARABOLA
 $\zeta = z + w \rightarrow \zeta = z$

← A DEFORMAZIONE AVVENUTA, L'ASSE z SI ATTEGGIA SECONDO UNA CURVA PARABOLICA*
 CON RAGGIO DI CURVATURA R , TALE CHE:

CURVATURA (INVERSO DI R)
 $\frac{1}{R} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ PER PICCOLI SPOSTAMENTI $\frac{d\eta}{d\xi} \ll 1$ SI PUÒ TRASCURARE
 $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2v}{dz^2}$
 $\frac{1}{R} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}$ RIGIDEZZA FLESSIONALE

$\frac{1}{R} = -\frac{M_x}{EJ_x}$ $R = \text{CORANTE}$

L'UNICA CURVA IL CUI RAGGIO DI CURVATURA E' COSTANTE E' LA CIRCONFERENZA ⇒ NEGLI IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI → CURVATURA DELL'ASSE BARICENTRICO PUO' ESSERE CONSIDERATA COME UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $R = \frac{EJ_x}{M_x}$

CURVATURA $\frac{1}{R}$ DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A M_x INVERSAMENTE PROPORZIONALE A EJ_x

UNISCE UNA COSTANTE DEL MATERIALE, $E = \text{MODULO DI YOUNG}$ E UNA SUA GEOMETRIA, $J_x = \text{MODULO DI INERZIA DELLA SEZIONE ALIPEDIO A X}$

N.B. $\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\frac{M_x}{2EJ_x} 2\xi$ $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

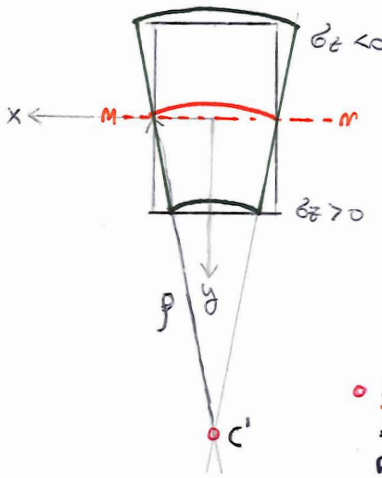
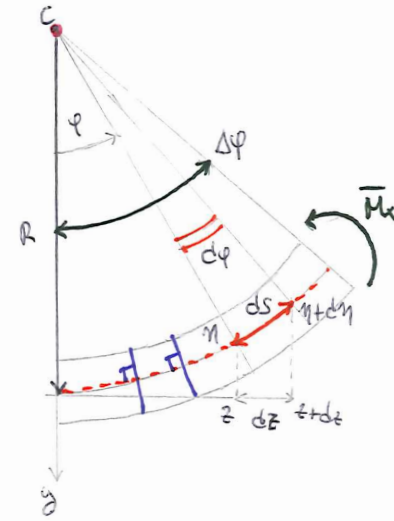
5C- FLESSIONE RETTA E DEVIATA-



5A

5B

5C



• W=0 A DEFORMAZIONE AVVENUTA L'ASSE DELLA TRAVE NON SUBISCE ALLUNGAMENTI / SPORTEMENTI

$$ds = \sqrt{dz^2 + d\eta^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2} \approx dz \text{ POICHÉ ANCORA } \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 \ll 1$$

• I PUNTI CHE APPARTENGONO A UNA SEZIONE RETTA PERPENDICOLARE E HANNO EQUAZIONE Z = F LA COORDINATA LA DEFORMAZIONE AVVENUTA DIVENTA: $J = z + w = f + \frac{M_x}{EJ_x} y f = f \left(1 + \frac{M_x}{EJ_x} y\right) = f \left(1 - \frac{y}{R}\right)$ ANCHE $J = f \left(1 - \frac{y}{R}\right)$ È L'EQUAZIONE DI UN PIANO

PERPENDICOLARE ALL'ASSE DELLA TRAVE A DEFORMAZIONE AVVENUTA

QUINDI LE SEZIONI DELLA TRAVE SI MANTENGONO PIANE E ROTANO MANTENENDOSI

PERPENDICOLARI ALL'ASSE DEFORMATO → È CONFERMATO L'IPOTESI DI EULERO-BERNOULLI

CHE VA DATO IL NOME DI "CONSERVAZIONE DELLE SEZIONI PIANE"

• TUTTE LE SEZIONI ROTANO DELLO STESSO ANGOLO $d\varphi$ (2 SEZIONI POSTE A DISTANZA ds)

$$R d\varphi = ds \approx dz \rightarrow d\varphi = \frac{dz}{R} = \frac{1}{R} dz \rightarrow \boxed{d\varphi = \frac{M_x}{EJ_x} dz}$$

• L'ANGOLO COMPLESSIVO $\Delta\varphi$ DI CUI ROTANO LE SEZIONI ESTERNE DELLA TRAVE VALE:

$$\Delta\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{M_x}{EJ_x} dz = \frac{M_x}{EJ_x} \int_0^L dz = \frac{M_x}{EJ_x} [z]_0^L \rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{M_x L}{EJ_x}}$$

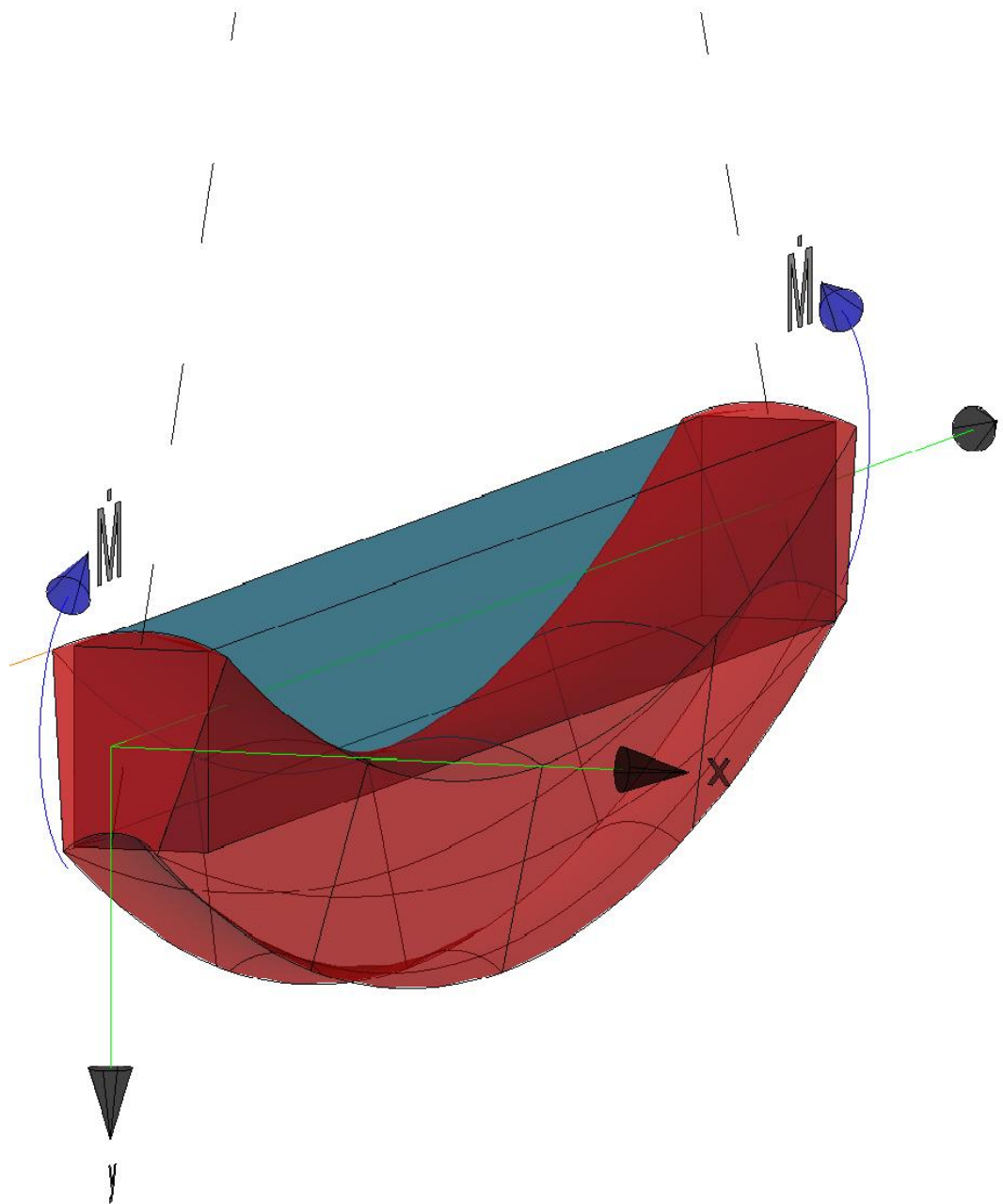
• IL LAVORO DI DEFORMAZIONE ESTERNO = AL LAVORO DI DEFORMAZIONE INTERNO

$$L_e = \frac{1}{2} M_x \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EJ_x} L \quad L_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z \epsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^L dz \int_A \sigma_z \epsilon_z dA = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EJ_x} L$$

• L'ASSE NEUTRO A DEFORMAZIONE AVVENUTA SI MUOVA, DISPONENDOSI A SUA VOLTA SECONDO UNA PARABOLA ANCHE APPROPRIABILE CON UN MAG. DI CIRCONFERENZA E CENTRO DI CURVATURA C' IN DIREZIONE OPPOSTA RISPETTO ALL'ASSE DEFORMATO DELLA TRAVE ($0 \leq v \leq 1/2$) $y \cdot y = 0$ → L'ASSE NEUTRO NON PUÒ AITERNERE DINTO!

L'EQUAZIONE DELL'ASSE NEUTRO È $y=0$ LE COMPONENTI DI SPORTEMENTO VALGONO:

$$u=0; v = \frac{v M_x}{2 E J_x} x^2; w=0 \quad [x=z=0] \quad \text{LA CURVATURA DELL'ASSE NEUTRO DIPENDE DA } v \rightarrow \frac{1}{\rho} = -v \frac{1}{R}$$



5A

5B

5C

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA -

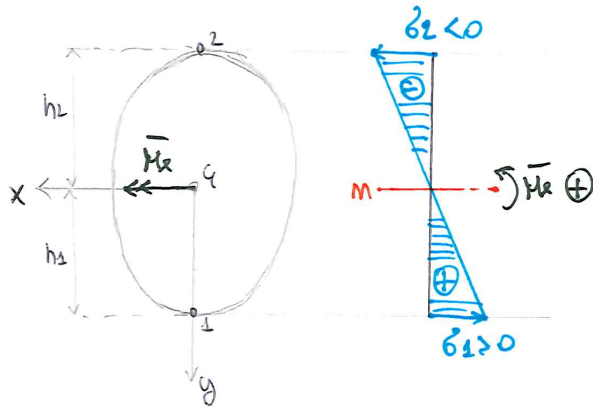
(18)

5A

5B

5C

VERIFICHE DI RESISTENZA:



$$\underline{\sigma_2} = \sigma_x|_{y=-h_2} = -\frac{\bar{M}_x}{I_x} h_2 \quad \sigma_2 < 0 \leftrightarrow \bar{M}_x > 0$$

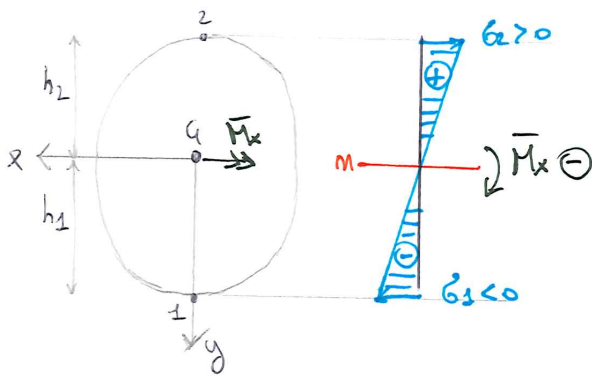
h_1, h_2 DISTANTE DALL'ASSE
NEUTRO PRESSE IN VALORE
ASSOLUTO

$$\underline{\sigma_1} = \sigma_x|_{y=h_1} = +\frac{\bar{M}_x}{I_x} h_1 \quad \sigma_1 > 0 \leftrightarrow \bar{M}_x > 0$$

DEFINIZIONE: $W_{x1} = \frac{I_x}{h_1}$ e $W_{x2} = \frac{I_x}{h_2}$ MODULI DI RESISTENZA A FLESSIONE

ALLORA $\sigma_1 = \frac{\bar{M}_x}{W_{x1}}$ e $\sigma_2 = -\frac{\bar{M}_x}{W_{x2}}$ PER LA VERIFICA: $\sigma_1 = \frac{\bar{M}_x}{W_{x1}} \leq k'$ e $\sigma_2 = -\frac{\bar{M}_x}{W_{x2}} \geq -k''$ $k = \text{TENSIONE AMMISSIBILE}$

N.B. SE $\bar{M}_x < 0$ L'ANDAMENTO DEGLI SPORTE È OPPOSTO:



$$\sigma_2 = \sigma_x|_{y=-h_2} = -\frac{\bar{M}_x}{W_{x2}} > 0 \quad \sigma_2 > 0 \leftrightarrow \bar{M}_x < 0$$

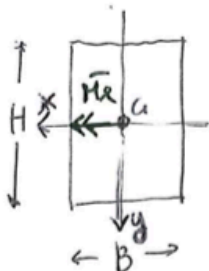
[N.B. W_{x1} e W_{x2} SEMPRE > 0 PER DEFINIZIONE]

$$\sigma_1 = \sigma_x|_{y=h_1} = \frac{\bar{M}_x}{W_{x1}} < 0 \quad \sigma_1 < 0 \leftrightarrow \bar{M}_x < 0$$

PER LA VERIFICA: $\sigma_1 \geq -k''$ e $\sigma_2 \leq k'$

ESEMPIO APPLICATIVO

DATA LA TRAVE DI LEGNO DI FORMA RETTANGOLARE:



$$\bar{M}_x = 18500 \text{ Nm} \quad k = 6 \text{ MPa}$$

NEGLI FIBRE + PIÙ VICINE DOVREMO AVERE CHE:

$$\sigma_1 = \frac{\bar{M}_x}{W_{x1}} \leq k$$

$$\sigma_2 = -\frac{\bar{M}_x}{W_{x2}} \geq -k$$

È IL DOPICATO LETTERALE,
 QUINDI $W_{x1} = W_{x2}$,
 PER IL $\frac{W_{x2}}{H/2} = \frac{1/12 BH^3}{H/2} = \frac{1}{6} BH^2$

QUINDI: $W_{x1} \geq \frac{\bar{M}_x}{k}$ È UN'EQUAZIONE (PER UNO DEI CASI
 O $W_{x2} \dots$) ALTRA È INFINITA, AD ESEMPIO, IL

MINIMO $B/H = 7/10$

ALTRA: $W_{x1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} H \cdot H^2 = \frac{7}{60} H^3$

E QUINDI $W_{x1} \geq \frac{\bar{M}_x}{k} \Rightarrow \frac{7}{60} H^3 \geq \frac{18500000 \text{ Nm}}{6 \text{ N/mm}^2} =$

$$= \frac{16500000}{6} \text{ mm}^3 \rightarrow \text{N.B. } W = [L]^3:$$

$$H^3 \geq \frac{60}{7} \cdot \frac{16500000}{6} = \frac{185000000}{7} = 26'428'571 \text{ mm}^3$$

$$H \geq \sqrt[3]{26'428'571} = \underline{\underline{297,868 \text{ mm}}} \approx 300 \text{ mm}$$

QUINDI $B = \frac{7}{10} H = 210 \text{ mm}$

N.B.

SE FORTE IN LEGNO: \rightarrow DAL PRINCIPALE SI SCEGLIE W_x

5A

5B

5C

5A

DOMANDA? PERCHÉ SE SI HA LA FORME QUADRATA SI SI DIFERENZE \square E NON GH \diamond ?

A PARTE DI INTORNO:

①

$J_x = \frac{B^4}{12}$ e $J_y = \frac{B^4}{12}$

②

$J_x' = \frac{B^4}{12}$ e $J_y' = \frac{B^4}{12}$

5B

COE' UNBU AUREA? LA RESISTENZA A FLESSIONE E' DATA DA W_x : ② $W_x = \frac{J_x}{B/2} = \frac{1/12 B^4}{B/2} = \frac{B^3}{6}$

5C

INVECE IN ② HA NON E' + 2 A $B/2$ MA A $B/2\sqrt{2}$, QUINDI: ② $W_x = \frac{J_x}{B/2\sqrt{2}} = \frac{1/12 B^4}{\sqrt{2} B/2} = \frac{B^3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} B^3$

QUINDI $W_{x1} = W_{x2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, E COE' $W_{x2} < W_{x1}$, COE' NEL CASO ② LA RESISTENZA E' DIMINUITA POCO MENO DEL CASO ① (TANTO PIU' VICINO ALL'ASSE NEUTRO, POCO DI PIU' E' RESISTENTE)

N.B. NOTO E' CHE SI DIFERENZE LE FORME \square E NON \square

ESERCIZIO

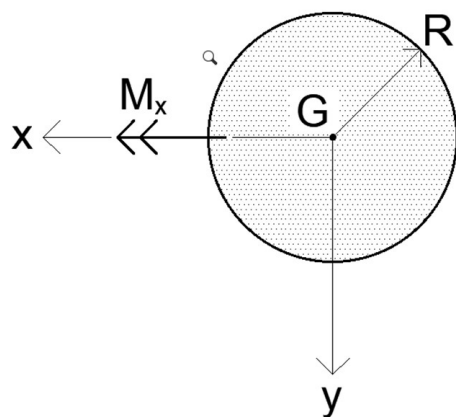
5A

Considerata una trave di lunghezza L sollecitata da un momento flettente M_x (sollecitata solo a flessione retta), determinare la percentuale di materiale che si risparmierebbe utilizzando una sezione circolare cava invece che una sezione circolare piena, a parità di Modulo di Resistenza W_x

5B

5C

1) SEZIONE CIRCOLARE PIENA



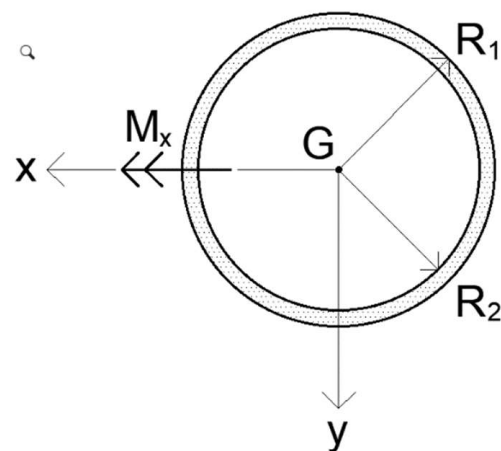
$$A_1 = \pi R^2$$

$$J_{x1} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$W_{x1} = \frac{\pi R^3}{4}$$

Imponendo $W_{x1} = W_{x2}$ si può determinare quanto deve valere R in funzione di R_1 :

2) SEZIONE CIRCOLARE CAVA



$$\frac{R_2}{R_1} = 0.9$$

$$A_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2$$

$$J_{x2} = \frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4}$$

$$W_{x2} = \left(\frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4} \right) \frac{1}{R_1}$$

$$W_{x1} = W_{x2}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \left(\frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4} \right) \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4 R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi (0.9 R_1)^4}{4 R_1}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} - \frac{\pi 0.656 R_1^3}{4}$$

$$\frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi R_1^3}{4} (1 - 0.656)$$

$$R^3 = R_1^3 (1 - 0.656)$$

$$R^3 = 0.344 R_1^3$$



$$R = \sqrt[3]{0.344R_1^3} \cong 0.7R_1$$

5A

Quindi, per avere lo stesso Modulo di Resistenza W_x , il raggio della sezione circolare piena, R , deve essere pari a 0,7 volte il raggio esterno della sezione circolare cava, R_1 .

L'area dei due profili vale:

$$A_1 = \pi R^2 = \pi(0.7R_1)^2 = \pi 0.49R_1^2$$

$$A_2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi R_1^2 - \pi(0.9R_1)^2 = \pi R_1^2 - \pi 0.81R_1^2 = \pi R_1^2(1 - 0.81) = \pi 0.19R_1^2$$

5B

La percentuale di materiale risparmiato è data dalla differenza delle aree divisa per l'area della sezione piena:

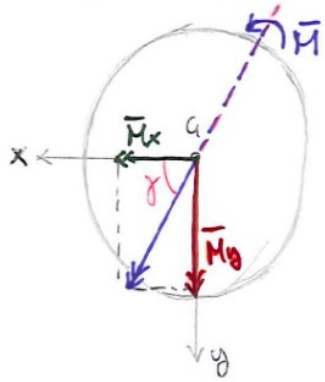
$$\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1}\right) 100\% = \left(\frac{\pi 0.49R_1^2 - \pi 0.19R_1^2}{\pi 0.49R_1^2}\right) 100\% = (1 - 0.387)100\% \cong 61\%$$

5C

Pertanto, a parità di Modulo di Resistenza W_x , utilizzando una sezione circolare cava (con $R_2/R_1 = 0.9$) al posto di una piena (con $R \cong 0.7R_1$) si **risparmia il 61% di materiale**.

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

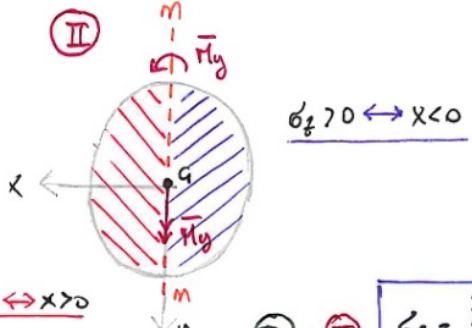
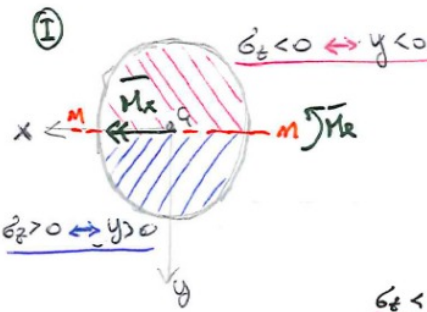
FLESSIONE DEVIATA



\bar{M} NON È ORIENTATO SECONDO GLI ASSI PRINCIPALI DI INERTIA

\bar{M} PUÒ ESSERE CONVENIENE SCOPPOSO NELLE COMPONENTI \bar{M}_x E \bar{M}_y : $\bar{M}_x = \bar{M} \cos \gamma$ $\bar{M}_y = \bar{M} \sin \gamma$

LO STATO PUÒ ESSERE CONDOTTO ALLA SEMPLIFICAZIONE DI DUE FLESSIONI RETTE:



Ⓘ $\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y = \frac{\bar{M} \cos \gamma}{I_x} y$

Ⓜ $\sigma_z = \frac{\bar{M}_y}{I_y} x = \frac{\bar{M} \sin \gamma}{I_y} x$

Ⓘ + Ⓜ $\sigma_z = \frac{\bar{M} \cos \gamma}{I_x} y - \frac{\bar{M} \sin \gamma}{I_y} x$ [N.B. CI VUOLE UN - PERCHÉ DI I_y]

L'ASSE NEUTRO - LUOGO DEI PUNTI IN CUI $\sigma_z = 0$ - È UN ASSE BARICENTRICO → EQUAZIONE ADDIRITTATA

PER $x=0$ E $y=0$ $\sigma_z = \bar{M} \left(\frac{y \cos \gamma}{I_x} - \frac{x \sin \gamma}{I_y} \right) = 0$ $\frac{y \cos \gamma}{I_x} - \frac{x \sin \gamma}{I_y} = 0$ $y = \frac{I_x \sin \gamma}{I_y \cos \gamma} x = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma x$

$y = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma x$ È L'EQUAZIONE DI UNA RETTA CHE PASSA PER IL BARICENTRO CON UNA CERTA INCLINAZIONE;
SE $I_x/I_y \neq 1 \rightarrow y = \tan \beta x$ CON $\beta \neq \gamma \rightarrow \tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma$ SE $I_x > I_y \rightarrow \beta > \gamma$ E VICEVERSA

> L'ASSE NEUTRO NON È INCLINATO COSÌ L'ASSE DEL PLOREATO MA È ROTATO DI UN ANGOLO β IMPETTO A X

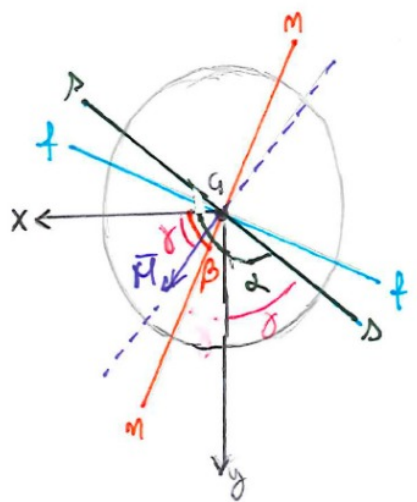
$I_x = k p_x^2$ E $I_y = k p_y^2$ CON p_x, p_y RAGGI GYRATORI DI INERTIA $\tan \beta = (p_x^2/p_y^2) \tan \gamma$ [0]

> SE INDIVIDUAMO L'ASSE DI SOLLECITAZIONE, CHE È ORTOGONALE ALL'ASSE DEL PLOREATO, LA [0] DIVENTA:

$\alpha = \gamma + \pi/2 \rightarrow \gamma = \alpha - \pi/2 \rightarrow \tan \gamma = -\cot \alpha = -1/\tan \alpha \rightarrow \tan \beta = -(p_x^2/p_y^2) / \tan \alpha \rightarrow \tan \alpha \tan \beta = -p_x^2/p_y^2$ RELAZIONE DI CONIUGIO

FLESSIONE DEVIATA ASSE NEUTRO E ASSE DI SOLLECITAZIONE NON SONO PERPENDICOLI

LA REGIONE IN TENSIONE NEL PIANO DI FLESSIONE, ORTOGONALE ALL'ASSE NEUTRO



5C - FLESSIONE RETTA E DEVIATA -

(X)

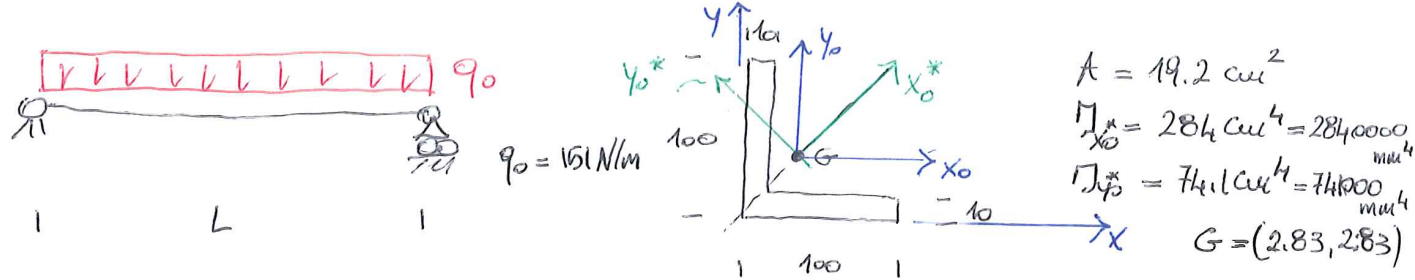
5A

5B

5C

FLESSIONE DEVIATA

SI CONSIDERA UNA TRAVE APPOGGIATA DI LUCE $L = 3\text{m}$ SOGGETTA A PESO PROPRIO E REALIZZATA CON UNA SEZIONE A "L" A LATI EGUALI.



5A

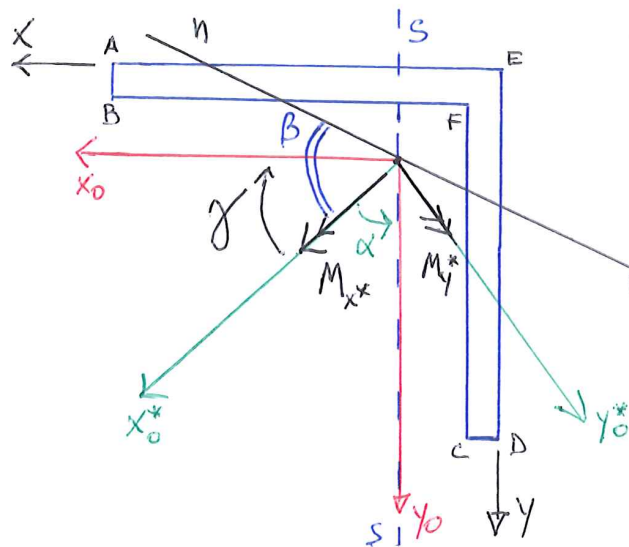
5B

5C

IL MOMENTO FLETTENTE MASSIMO VALE:

$$\bar{M}_x = \frac{q_0 L^2}{8} = \frac{151 \cdot 3^2}{8} = \frac{1359}{8} = 169.875 \text{ N}\cdot\text{m} = 169875 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

SI È IN CONDIZIONI DI FLESSIONE DEVIATA PERCHÉ L'ASSE DEL VETTORE MOMENTO (x) NON COINCIDE CON UN ASSE PRINCIPALE DI INERZIA.



$$\gamma = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_{x_0}^* = \bar{M}_x \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{M}_x$$

$$M_{y_0}^* = \bar{M}_x \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \bar{M}_x \sin \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{M}_x$$

$$\sigma_z = \frac{M_{x_0}^* y^*}{I_{x_0}^*} - \frac{M_{y_0}^* x^*}{I_{y_0}^*}$$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\bar{M}_x}{I_{x_0}^*} y^* + \frac{\bar{M}_x}{I_{y_0}^*} x^* \right)$$

CS-SI NON SONO ORTOGONALI
RESTA DA CALCOLARE IL VALORE DELLO SFORZO σ_z NEI PUNTI SIGNIFICATIVI.

5A

QUESTI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y HANNO LE SEGUENTI COORDINATE (IN mm):

$$A = (100, 0)$$

$$D = (0, 100)$$

$$B = (100, 10)$$

$$E = (0, 0) \equiv O$$

$$C = (10, 100)$$

$$F = (10, 10)$$

5B

SI OSSERVA CHE PER PASSARE DAL SISTEMA DI COORDINATE (BARICENTRICHE)
 x_0, y_0 ALLE CORRISPONDENTI COORDINATE NEL SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA x_0^*, y_0^*
SI FA USO DELLA TRASFORMAZIONE

5C

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 \cos \vartheta + y_0 \sin \vartheta \\ y_0^* = -x_0 \sin \vartheta + y_0 \cos \vartheta \end{cases} \quad [^*]$$

$$\text{DOVE } \vartheta = \hat{x}_0 x_0^* = -\gamma.$$

D'ALTRA PARTE IL LEGAME FRA I SISTEMI DI RIFERIMENTO x, y E x_0, y_0 È DATO DA:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_G \\ y = y_0 + y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x - x_G \\ y_0 = y - y_G \end{cases} \quad [^{**}]$$

TENENDO CONTO DELLE $[^{**}]$ LE $[^*]$ DIVENGONO:

$$\begin{cases} x_0^* = (x - x_G) \cos \vartheta + (y - y_G) \sin \vartheta \\ y_0^* = -(x - x_G) \sin \vartheta + (y - y_G) \cos \vartheta \end{cases}$$

SI TROVA PERTANTO CHE NEL SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA X_0, Y_0 LE COORDINATE DEI PUNTI INDICATI E I CORRISPONDENTI VALORI DI σ_z SONO I SEGUENTI (COORDINATE ESPRESSE IN mm, SFORZI IN $N/mm^2 = MPa$)

$$A = (30,69, -70,71)$$

$$\sigma_z|_A = 1,984 MPa$$

$$B = (37,76, -63,64)$$

$$\sigma_z|_B = 3,429 MPa$$

$$C = (37,76, +63,64)$$

$$\sigma_z|_C = 8,813 MPa = \sigma_{z \max}$$

$$D = (30,69, +70,71)$$

$$\sigma_z|_D = 7,966 MPa$$

$$E = (-40,02, 0,00)$$

$$\sigma_z|_E = -6,488 MPa = \sigma_{z \min}$$

$$F = (-25,88, 0,00)$$

$$\sigma_z|_F = -4,195 MPa$$

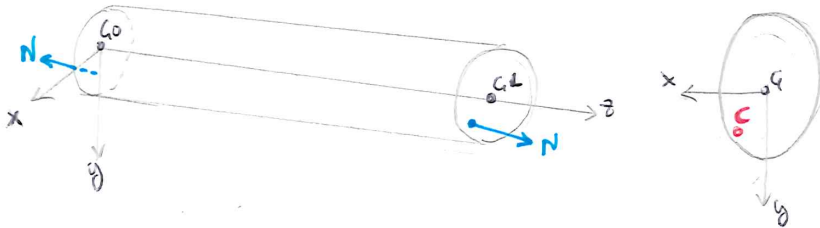
5A

5B

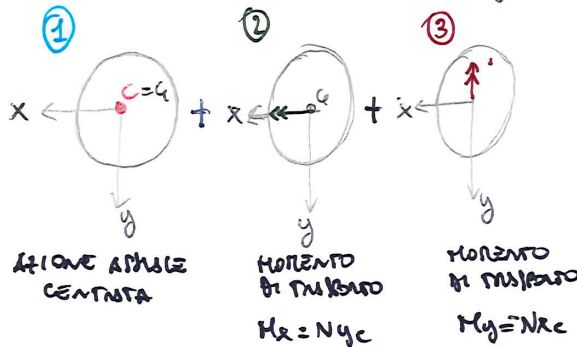
5C

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

L'AZIONE ASSIALE NON È APPLICATA NEL BARICENTRO



SOVRAPPOSIZIONE
DEGLI EFFETTI:



5D - AZIONE ASSIALE ECCENTRICA -

(I)

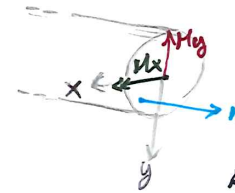
5A

C = CENTRO DI PRESSIONE C = (xc, yc)

LA POSIZIONE ECCENTRICA DETERMINA L'INDEGENZA DI ADESSO:

SE $N > 0$ TRATTIONE → TENSO-FLESSIONE

SE $N < 0$ COMPRESIONE → PRESSO-FLESSIONE



AZIONE ASSIALE + 2 FLESSIONI RETTE

5B

5C

$$① \quad \sigma_z = N/A$$

$$② \quad \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{N y c}{J_x} y$$

$$③ \quad \sigma_z = -\frac{M_y}{J_y} x = +\frac{N x c}{J_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N y c}{J_x} y + \frac{N x c}{J_y} x$$

5D

CONFERMANDO CHE $J_x = A r_x^2$ E $J_y = A r_y^2$ → $\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y c y}{r_x^2} + \frac{x c x}{r_y^2} \right)$ NEL BARICENTRO σ_z È ESATTAMENTE QUELLO CHE

SI AVREBBE SE L'AZIONE ASSIALE N FOSSE CENTRATA, MA L'ASSE NEUTRO ($\sigma_z = 0$) NON È PIÙ BARICENTRICO

$$\sigma_z = 0 \quad \underbrace{1 + \frac{y c y}{r_x^2} + \frac{x c x}{r_y^2}}_{\text{RELAZIONE DI ANTIPOLOSITÀ}} \neq 0 \quad \text{PER } x=0 \text{ E } y=0, \text{ OVVERO NEL BARICENTRO } \sigma_z = N/A$$

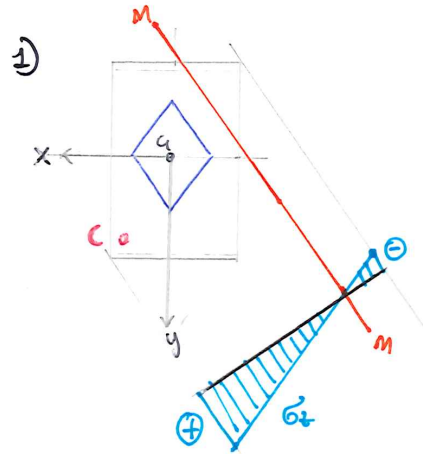
RELAZIONE DI ANTIPOLOSITÀ
TRA ASSE NEUTRO E CENTRO
DI PRESSIONE C

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

LA POSIZIONE DELL'ASSE NEUTRO DIPENDE DALLA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA: 3 SITUAZIONI

5D - AZIONE ASSIALE ECCENTRICA -

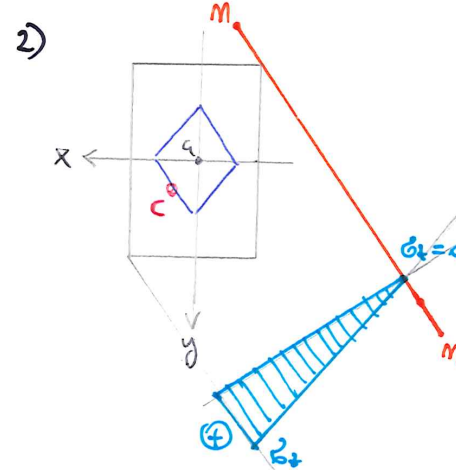
II



1) C ESTERNO AL NOCCIOLLO CENTRALE

DI INERTIA DELLA SEZIONE

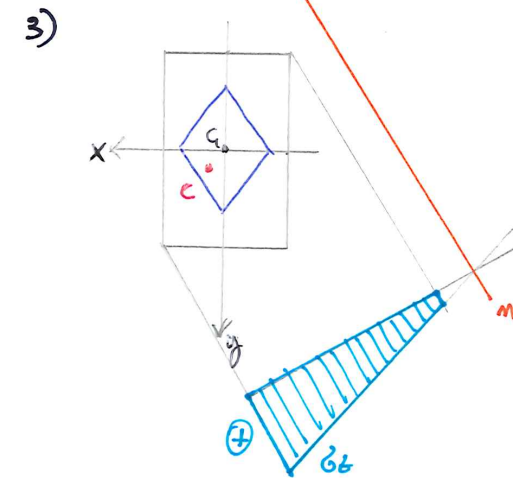
- L'ASSE NEUTRO TAGLIA LA SEZIONE
- SFORTI DI TRAZIONE ALTERNATI
- ANDAMENTO A FANTASMA



2) C SUL BORDO DEL NOCCIOLLO

CENTRALE DI INERTIA DELLA

- L'ASSE NEUTRO È TANGENTE ALLA SEZIONE
- SFORTI CHE SI ANNULANO IN CORNICE SPORZANTE DELL'ASSE NEUTRO CHE GINCIDE GLI BORDI DELLA SEZIONE
- SFORTI TRAZIONE DELLO STESMO TRAZIONE



3) C INTERNO AL NOCCIOLLO CENTRALE

- L'ASSE NEUTRO È ESTERNO ALLA SEZIONE
- SFORTI TRAZIONE DELLO STESMO TRAZIONE CHE NON SI ANNULANO IN NESSUN PUNTO

5A

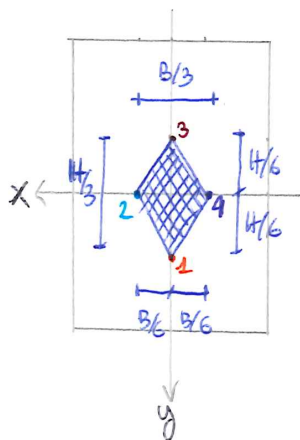
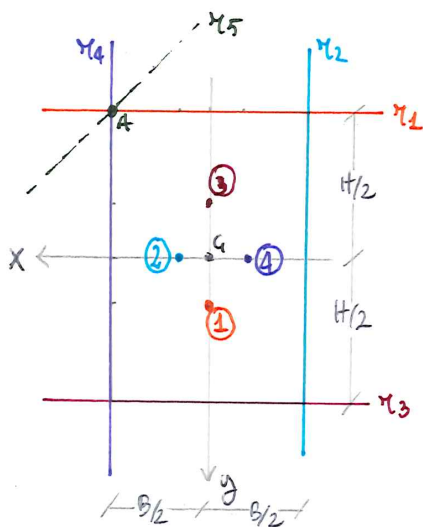
5B

5C

5D

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

NOCCIOLA CENTRALE DI INERZIA



LUOGO INDIVIDUATO DAL CENTRO DI PRESSIONE $C = (x_c, y_c)$ CORRISPONDENTI AD ASP. NEUTRI TANGENTI ALLA SEZIONE [CASO 2]

EQUAZIONE ASP. NEUTRO:

$$1 + \frac{y_c y}{I_x} + \frac{x_c x}{I_y} = 0 \quad [0]$$

[RETTA TANGENTE DI
CONIUGIO
TRA CENTRO DI
PRESSIONE C E
ASP. NEUTRO]

SEZIONE RETTANGOLARE: $I_x = \frac{BH^3}{12}$; $A = BH$; $I_y = \frac{B^3H}{12}$; $p_x = \frac{H^2}{12}$; $p_y = \frac{B^2}{12}$; $y_g = \frac{B^3H}{12}$

m_1) $y = -H/2$ [2] $1 + \frac{y_c(H/2)}{H^2/12} + \frac{x_c x}{B^2/12} = 0$ $x_c = 0 \rightarrow y_c = H/6$ ① = (0, H/6) C DI m_1
PER OTTENERE LA [2]

m_2) $x = -B/2$ [2] $1 + \frac{y_c y}{H^2/12} + \frac{x(-B/2)}{B^2/12} = 0$ $y_c = 0 \rightarrow x_c = B/6$ ② = (B/6, 0) C DI m_2
PER OTTENERE LA [2]

m_3) $y = +H/2$ [2] $1 + \frac{y_c(H/2)}{H^2/12} + \frac{x_c x}{B^2/12} = 0$ $x_c = 0 \rightarrow y_c = -H/6$ ③ = (0, -H/6) C DI m_3
PER OTTENERE LA [2]

m_4) $x = +B/2$ [4] $1 + \frac{y_c y}{H^2/12} + \frac{x_c(B/2)}{B^2/12} = 0$ $y_c = 0 \rightarrow x_c = -B/6$ ④ = (-B/6, 0) C DI m_4
PER OTTENERE LA [4]

N.B. ASP. NEUTRO TANGENTE DAL LATO OPPOSTO, RISPETTO AL BARICENTRO, DEL CENTRO DI PRESSIONE

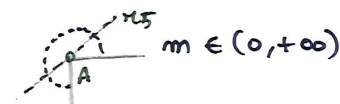
N.B.2 CI SONO ANCHE TUTTE LE RETTE TANGENTI AI VERTICI DEL RETTANGOLO, AD ESEMPIO IN A

TUTTE LE RETTE CHE PASSANO IN UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0)$ HANNO EQUAZIONE $y - y_0 = m(x - x_0)$

FORMA SPECIALE DI UNA RETTA $y = mx + q$, DOVE $q = y_0 - mx_0$ E $m =$ COEFFICIENTE ANGOLARE

$A = (B/2, -H/2)$ E $m \in (0, +\infty)$ ERMETTI ESCLUSI $\rightarrow m_5$ NON DEVE INTERSECCARE LA SEZIONE

m_5) $y = m(x - B/2) - H/2$ CON $0 < m < +\infty$

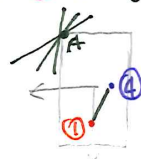


SOSTITUENDO IN [0] DEVE Moltiplicare CHE

$$1 + \frac{y_c [m(x - B/2) - H/2]}{I_x} + \frac{x_c x}{I_y} = 0$$

AL VARIARE DI m IL C DI m_5 PERCORRE

IL SEGMENTO ① ④



ANALOGAMENTE, PER GLI ALTRI 3 VERTICI (CENTRI SI TROVANO SULI SEGMENTI CHE CHIAMAMO ② ③ ① E ④

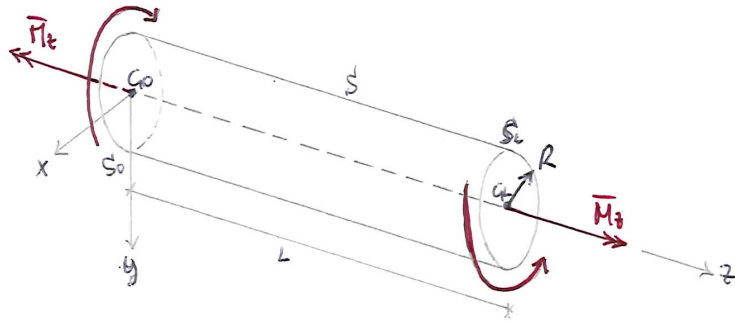
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5E - TORSIONE -

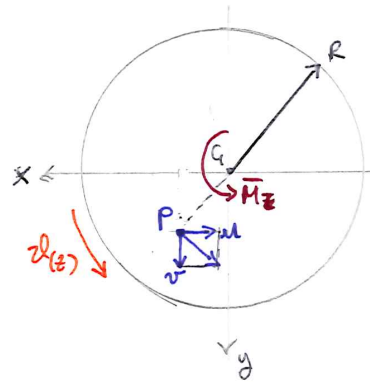
I

5A

SI CONSIDERI UN PRISMA CILINDRICO DI BASE CIRCOLARE DI RAGGIO R E SOGGETTA SUE BASSI ESTREMITÀ ALLA COPPIA TORCENTE \vec{M}_z



IL SOLIDO SUBISCE UNA TORSIONE A TORNO ALL'ASSE Z
 > RAGIONANDO SULLI SPOSTAMENTI: OGNI SEZIONE DELLA TRAVE SUBISCE UNA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE GEOMETRICO (ASSE Z)



$\varphi(z)$ = ANGOLO DI TORSIONE

$$\varphi(z) = \oplus z$$

\oplus = ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \text{CONSTANTE} = \oplus$$

EFFIENDO COSTANTE L'AZIONE INTERNA \vec{M}_z
 TUTTI I PUNTI UGUALI DEL PRISMA HANNO ANGOLO \oplus , CHE RAPPRESENTA LA ROTAZIONE RELATIVA TRA 2 SEZIONI POSTE A DISTANZA UNITARIA.

5B

5C

UN GENERALE PUNTO P SI SPOSTA UNITAMENTE SULLA CIRCUNFERENZA CON IL CENTRO. NEGLI IPOTESI CHE LA ROTAZIONE φ SIA MOLTO PICCOLA LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO HANNO ESPRESSIONE:

$$u = -\varphi(z)y = -\oplus zy \quad \text{E} \quad v = \varphi(z)x = \oplus zx$$

LE SEZIONI ROTANO TUTTE NEL LORO PIANO (PER LA SIMMETRIA FORNITA DALLA SEZIONE), ALLORA $w = 0$

DEFINITO UNIVOCAMENTE UN CAMPO DI SPOSTAMENTI* CONTINUO POSSIAMO CALCOLARE LE DEFORMAZIONI DERIVANDO \rightarrow **CONCURRENZA**

ANCHE

}	$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$	$u = -\oplus zy \rightarrow$ NON CONTIENE x $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $v = \oplus zx \rightarrow$ NON CONTIENE y $\rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $w = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$	$\epsilon_x = 0$ $\epsilon_y = 0$ $\epsilon_z = 0$	TUTE LE DEFORMAZIONI SONO NULLE L'ASSE Z NON SI ALLUNGA / ACCORCIA	* N.B. NON È Y NOTO IL VALORE DI \oplus , MA SOLO CHE È COSTANTE	
	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$	$\frac{\partial u}{\partial y} = -\oplus z$ E $\frac{\partial v}{\partial x} = \oplus z \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} = -\oplus y$ E $\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\oplus y$ $\frac{\partial v}{\partial z} = \oplus x$ E $\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \oplus x$	$\gamma_{xy} = 0$ $\gamma_{xz} = -\oplus y$ $\gamma_{yz} = \oplus x$			LA SEZIONE ROTATA MA NON SI DISTORCE, LE FIBRE MANTENGONO PERPENDICOLARI AL RAGGIO R (ANGOLO FRA ASSE X E Y A DEFORMAZIONE ARRIVATA SI CONSERVA RETTO) LE UNICHE DEFORMAZIONI PRESENTI SONO GLI SCAMBIAMENTI ANGOLARI γ_{xz} E γ_{yz} (DUNQUE L'ANGOLO FRA GLI ASSI X E Z E Y E Z NON SI CONSERVA RETTO!)

5E



IL PADDLETTA DI SAINT VENANT

5E - TORSIONE



5A

È NECESSARIO VERIFICARE CHE, A PARTIRE DALLE IPOTESI FATTE NGLI SPORZANTIALI, SIA POSSIBILE DEDURRE UN CAMPO DI TENSIONE CHE SODDISFI L'EQUILIBRIO E CHE SIA PRACTICAMENTE EQUIVALENTE NGLIE BASSI ESTREMI A UNA COPPIA TORCENTE Tz.

RICAVIAMO LE TENSIONI A PARTIRE DALLE DEFORMAZIONI CON IL LEGANTE: DALLE LEGGE DI HOOKE:

CONSTITUTIVO

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = 0 \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) = 0 \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE DI 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE CON I TENSIONI NOTI NULLI: AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È NULLO - TEOREMA DI ROCHER-CAYLEY

$$\det. \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow$$

UNICA SOLUZIONE È QUELLA BANALE

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

TUTTE LE COMPONENTI NORMALI DI TENSIONE SONO NULLE

5B

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \rightarrow \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \rightarrow \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \rightarrow \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -G \oplus y \\ \tau_{yz} = G \oplus x \end{cases}$$

LE UNICHE TENSIONI PRESENTI SONO LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{xz} E τ_{yz}

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

5C

5D

VERIFICHIAMO CHE LA DISTRIBUZIONE DI TENSIONI SODDISFI LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} \text{EQUILIBRIO INTERNO} \\ \left[\cdot \right] \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

τ_{zx} DIPENDE SOLO DA $y \rightarrow$ LE SUE DERIVATE RISPETTO A z E A x SONO NULLE

τ_{yz} DIPENDE SOLO DA $x \rightarrow$ LE SUE DERIVATE RISPETTO A z E A y SONO NULLE

L'EQUILIBRIO INTERNO È SODDISFATTO

5E

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

SE - TORSIONE -

III

5A

 SUL CONTORNO AGISCE SOLO \vec{M}_z SULLE BASTI S_0 E S_L E IL NASTRO S È SCUOLO

 SU S , $\vec{M} = (d_x, d_y, 0)$ $p_x = 0$; $p_y = 0$; $p_z = 0$ PER LA RELAZIONE DI CAUCHY:

 EQUILIBRIO
ELEMENTARE
[00]

$$\begin{cases} \sigma_x dx + \tau_{yx} dy = 0 & \sigma_x = 0 \quad \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{xy} dx + \sigma_y dy = 0 & \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = 0 \\ \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy = 0 \end{cases} \rightarrow \text{BISOGNA GARANTIRE CHE } -G \oplus y dx + G \oplus x dy = 0$$



INDIVIDUANO UN VETTORE GENERALE

$$\vec{\tau}_t = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} \quad [\text{N.B. } \tau_{xt} = \tau_{tx} \text{ E } \tau_{yz} = \tau_{zy}]$$

 INDICANDO CON $\vec{n} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}$

LA NORMALE AL CONTORNO IN UN PUNTO GENERALE, AVREMO LA COMPONENTE

 NORMALE DI $\vec{\tau}_t$ SUL CONTORNO DOVRA' ESSERE NULLA: $\tau_{tm} = 0$, OVVERO $\vec{\tau}_t \times \vec{n} = 0$
 $\vec{\tau}_t$ DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA NORMALE \vec{n} E QUINDI TANGENTE AL CONTORNO DELLA SEZIONE

IL RAGGIO R HA, IN UN GENERALE PUNTO DEL CONTORNO, ESPRESSIONE IN X E IN Y

 L'EQUAZIONE DI UN PUNTO SUL CONTORNO È: $P \rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow dx = \frac{x}{R}$ E $dy = \frac{y}{R}$

$$\rightarrow -G \oplus y \frac{x}{R} + G \oplus x \frac{y}{R} = 0 \quad \frac{G \oplus}{R} [-y dx + x dy] = 0 \quad \text{LA CONDIZIONE CHE IL NASTRO HA SCUOLO È SODDISFATTA}$$

 SU S_0 , $\vec{M}_0 = (0, 0, -1)$

$$[01] \begin{cases} \tau_{zx} dz = p_x & -\tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy} dz = p_y & -\tau_{zy} = p_y \\ \sigma_z dz = p_z & \sigma_z = 0 \quad p_z = 0 \end{cases} \quad [\text{N.B. SE } p_z \neq 0 \text{ AVREMO AVUTO ANCHE } N, N_x \text{ E } N_y]$$

 SU S_L , $\vec{M}_L = (0, 0, 1)$

$$[02] \begin{cases} \tau_{zx} dz = p_x & \tau_{zx} = p_x \\ \tau_{zy} dz = p_y & \tau_{zy} = p_y \\ \sigma_z dz = p_z & \sigma_z = 0 \quad p_z = 0 \end{cases}$$

ALLORA SULLE BASTI:

$$p_z = 0; \quad p_x = \tau_{zx} = -G \oplus y; \quad p_y = \tau_{zy} = G \oplus x$$

5B

5C

5D

5E



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5E - TORSIONE -

IV

5A

RESTANO DA ESAMINARE ESCLUSIVAMENTE LE CONDIZIONI DI EQUITRANZA STATICA TRA TENSIONI E MOMENTO APPLICATO, OVVERO CHE p_x E p_y COMPARTINO SOLO \bar{M}_z

ESSENDO NUNCA p_t È EVIDENTE CHE DEVONO ESSERE NULLE N, M_x E M_y :

$$N = \int_A p_z dA = 0 \quad M_x = \int_A p_z y dA = 0 \quad M_y = \int_A p_z x dA = 0$$

5B

LE COMPONENTI DI TAGLIO DEVONO ANCHE ESSERE NULLE:

$$T_x = \int_A p_x dA = \int_A -G \ominus y dA = -G \ominus \int_A y dA \rightarrow \underline{T_x = 0}$$

$\int_A y dA$ \rightarrow S_x MOMENTO STATICO RISPETTO A $x = 0$ x È ASSI BARICENTRICO

$$T_y = \int_A p_y dA = \int_A G \oplus x dA = G \oplus \int_A x dA \rightarrow \underline{T_y = 0}$$

$\int_A x dA$ \rightarrow S_y MOMENTO STATICO RISPETTO A $y = 0$ y È ASSI BARICENTRICO

CELA DA VERIFICARE M_z :

$$M_z = \int_A p_x (-y) dA + \int_A p_y (x) dA = \bar{M}_z$$

$$M_z = \int_A [-G \ominus y (-y) + G \oplus x (x)] dA = G \oplus \int_A (x^2 + y^2) dA \rightarrow \underline{M_z = G \oplus J_p = \bar{M}_z}$$

J_p MOMENTO POLARE DI INERTIA

ALLORA L'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE \ominus [GRADI] VALE

$$\ominus = \frac{\bar{M}_z}{G J_p}$$

\rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{DIRETTAMENTE PROPORZIONALE A } \bar{M}_z \\ \text{INVERSAMENTE PROPORZIONALE A } G J_p \end{array} \right.$

$$\underline{\text{N.B.}} \quad \frac{1}{R} = \frac{\bar{M}_z}{E J_x}$$

CURVATURA NESS
FLESSIONE

FORMA
ANALOGA

$$\ominus = \frac{\bar{M}_z}{G J_p}$$

RAPPORTO TRA
MOMENTO APPLICATO
E RIGIDEZZA

RIGIDEZZA TORSIONALE

UNISCE UNA COSTRUTTIVA
DEL MATERIALE, G = MODULO
DI TAGLIO, ALLA GEOMETRIA
DELLA SEZIONE, J_p = MOMENTO
POLARE DI INERTIA

5C

5D

5E

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5E - TORSIONE -

V

5A

 NOTO \ominus LA DISTRIBUZIONE COMPLETA DEL PROBLEMA È:

$$G_x = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\epsilon_x = 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$u = -\ominus z y = -\frac{\bar{M}_z}{G J_P} z y$$

$$G_y = 0$$

$$\tau_{xz} = -G \ominus y = -\frac{\bar{M}_z}{J_P} y$$

$$\epsilon_y = 0$$

$$\gamma_{xz} = -\ominus y = -\frac{\bar{M}_z}{G J_P} y$$

$$v = \ominus z x = \frac{\bar{M}_z}{G J_P} z x$$

$$G_z = 0$$

$$\tau_{yz} = G \ominus x = \frac{\bar{M}_z}{J_P} x$$

$$\epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{yz} = \ominus x = \frac{\bar{M}_z}{G J_P} x$$

$$w = 0$$

5B

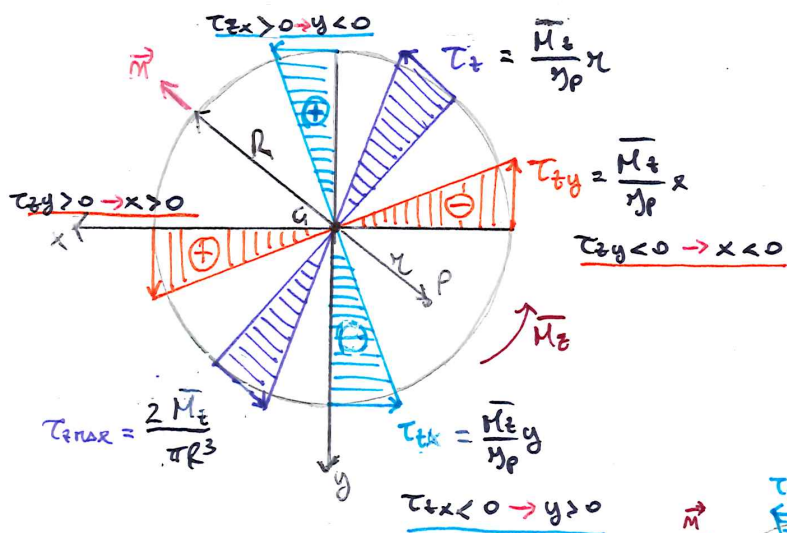
 > LE UNICHE COMPONENTI DI TENSIONE NON NULLE SONO τ_{xz} E τ_{yz}

 CHE Danno LUOGO A UNA TENSIONE TANGENZIALE CIRCUMFERENZIALE τ_z , SEMPRE PERPENDICOLARE A \bar{M}_z E TANGENTE AL BORDO

5C

 IN UN PUNTO DELLA SEZIONE $\tau_z = \frac{\bar{M}_z}{J_P} \rho$, ON ρ CHE INDIVIDUA LA POSIZIONE DEL PUNTO $P=(x,y)$, E τ_z ORTOGONALE AL RAGGIO R . LE TENSIONI TANGENZIALI SONO NULLE AL BANCENTRO, VARIANO LINEARMENTE LUNGO IL RAGGIO E SONO MASSIME AL BORDO;

5D



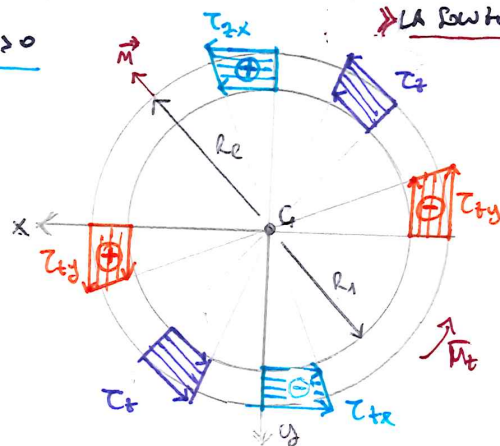
$$\tau_{max} = \frac{\bar{M}_z}{J_P} R$$

EFFENDO $J_P = \frac{\pi R^4}{2}$

$$\tau_{max} = \frac{\bar{M}_z}{\frac{\pi R^4}{2}} R = \frac{2 \bar{M}_z}{\pi R^3}$$

5E

> LA SOLUZIONE PUO' ESSERE ESTESA AUE SEZIONI CIRCOLARI CAVE <



LE TENSIONI VARIANO LINEARMENTE LUNGO R SONO MASSIME AL BORDO ESTERNO SONO TANGENTI AL CONTOURNO FID AL BORDO ESTERNO CHE AL BORDO INTERNO

$$\tau_{max} = \frac{\bar{M}_z}{J_P} R_e$$

$$J_P = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \bar{M}_z R_e}{\pi(R_e^4 - R_i^4)}$$

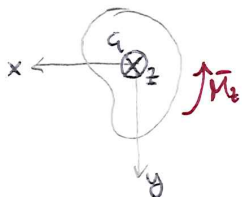
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5E - TORZIONE -

VII

5A

LA SOLUZIONE OTTENUTA PER LE SEZIONI CIRCOLARI, PIENE O CAVE, NON È VALIDA PER SEZIONI DI FORMA GENERALE, PERCHÉ NON MANTIENE ADDIZIONALMENTE LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO $\tau_{zx} dx + \tau_{zy} dy = 0$ CHE EQUIVALE A DIRE CHE LA COMPONENTE NORMALE DELLE TENSIONI TANGENZIALI SUL PIANETTO HA VALORE: $\tau_{zz} = 0$. LA SOLUZIONE DEVE ESSERE CORRETTA TENENDO CONTO CHE, NON ESISTENDO PIÙ SIMMETRIA PIANE, A DEFORMAZIONE AVVENUTA LA SEZIONE TRASVERSALE NON SI MANTIENE PIÙ PIANA MA SI INGOBBA



$w \neq 0 \rightarrow w = \oplus \omega(x, y, z)$, con $\omega(x, y, z) = \text{FUNZIONE DI INGOBBAMENTO}$

N.B. $\frac{\partial w}{\partial x} = \oplus \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y} = \oplus \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow$ SI RIBATTONO ANCHE LE TENSIONI TANGENZIALI CHE HANNO COMPONENTI IN X E Y: τ_{zx} E τ_{zy} ; E $\tau_{xy} \neq 0$

5B

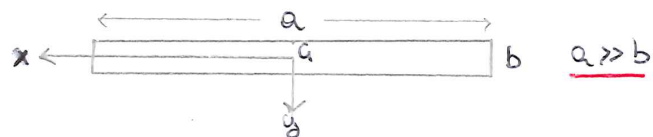
LA SOLUZIONE È MOLTO COMPICATA... \rightarrow CASI PARTICOLARI RISOLVIBILI CON SOLUZIONI APPROSSIMATE **SEZIONI SOTTILI**

5C

I SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE

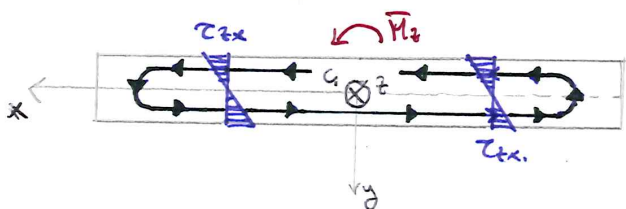
IL PROFILO DELLA SEZIONE TRASVERSALE È UN RETTANGOLO CON LARGHEZZA a , LATO PARALLELO A X, E ALTEZZA b , LATO PARALLELO A Y.

5D



ANALOGIA IDRODINAMICA

LE TENSIONI TANGENZIALI SCOMPAiono ALL'INTERNO DELLA SEZIONE COME UN FLUIDO ALL'INTERNO DI UN RECIPIENTE CHE VIENE FATTO ROTARE ATTORNO AL PROPRIO ASSE CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE



LINEE DI FLUSSO CURVA CARATTERIZZATA DAL FATTO CHE, IN OGNI SUO PUNTO IL VETTORE τ_z È TANGENTE ALLA CURVA. PERÒ \rightarrow DESCRIVONO L'ANDAMENTO DELLE τ_z ALL'INTERNO DELLA SEZIONE

5E

N.B. J_t È SFAVOREVOLE \rightarrow SULLA RESISTENZA A TORSIONE PER QUESTI PROFILI

$$\oplus = \frac{M_z}{G J_t}$$

$J_t = \text{FATTORE DI INERZIA TORSIONALE} \rightarrow J_t = \alpha a b^3$

N.B. b PICCOLO, ANCHE È MOLTO PICCOLO ANCHE IL BRACCIO DELLA COPPIA $\rightarrow \tau_{zx}$ MOLTO GRANDE

$$\tau_{zx} = \frac{2 M_z y}{\alpha a b^3}$$

LE TENSIONI TANGENZIALI HANNO UN ANDAMENTO A PARABOLA, COME NELLA SEZIONE CIRCOLARE; NUOVE NELLA LINEA NEBIA E MASSIME AL BORDO [TANGENTI AL BORDO]

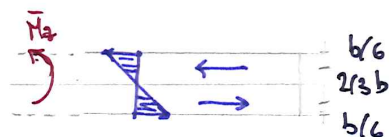
$$\tau_{zx \max} = \frac{\beta M_z}{a b^2}$$

α E β COEFFICIENTI CHE DIPENDONO DAL RAPPORTO TRA I LATI a E b

$$a/b = \infty \leftrightarrow a/b = 1$$

$$\alpha \quad 0,333 \dots \quad 0,141$$

$$\beta \quad 3,000 \dots \quad 4,800$$

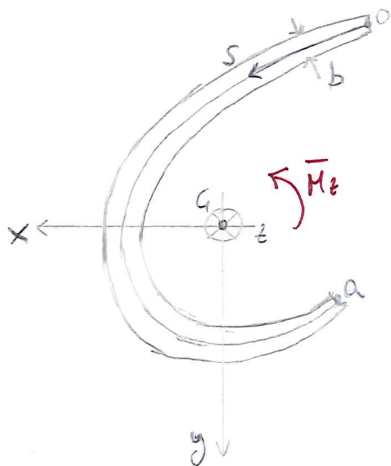


IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

SE-TORSIONE-

II SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO

È POSSIBILE GENERALIZZARE LA SOLUZIONE PER LE SEZIONI RETTANGOLARI SOTTILI: IMMAGINIAMO DI 'PIEGARE' LA SEZIONE RETTANGOLARE SOTTILE → LA SEZIONE TRASVERSALE DELLA TRAVE È COSTITUITA DA UNA STRISCIA SOTTILE DI MATERIALE DI SPESORE b , EVENTUALMENTE VARIABILE



oa = LINEA MEDIA DELLA SEZIONE → N.B. LA LINEA MEDIA NON FORMA CIRCUITI CHIUSI (SEZIONE APERTA)
 s = ASCISSA LOCALE CHE PEGNENE LA LINEA MEDIA
 b = SPESORE - VA VARIABILE - LUNGO oa
 $b(s)$ = b FUNZIONE DI s

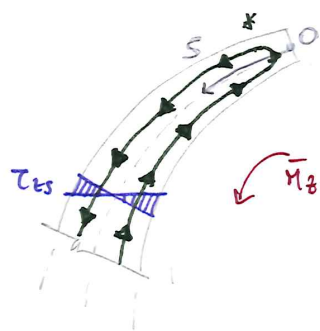
* [NOTA: $\tau_{zs \max} = \frac{2 \bar{M}_z}{J_t} \frac{b(s)}{2} = \frac{\bar{M}_z}{J_t} b(s)$]

CONFERMANDO UN RAPPORTO $a/b \rightarrow \infty$ $\alpha = 0,333$ E $\beta = 3,000$

$J_t = \alpha a b^3 = \frac{1}{3} a b^3 \rightarrow J_t = \frac{1}{3} \int_0^a b^3(s) ds$

$\tau_{zs} = \frac{\bar{M}_z}{J_t} b(s)$ * $\tau_{zs \max}$ DOVE LO SPESORE b È MAGGIORE $\tau_{zs \max} = \frac{\bar{M}_z}{J_t} b_{\max}$

$\tau_{zs}(s)$ → τ_{zs} È FUNZIONE DI s E VARIA LUNGO b : ANDAMENTO A FANFALLA, LE τ_{zs} SONO NULLE IN CORRISPONDENZA DELLA LINEA MEDIA E MASSIME AL BORDO E TANGENTI AL CONFINO



N.B. ANCHE IN QUESTO CASO J_t È SEBBO NEVOLE → SCARSA RESISTENZA A TORSIONE PER QUESTI PROFILI

INTEGRANDO LE τ_{zs} SI OTTIENE LA COPPIA INTERNA CHE DEVE EQUILIBRARE IL MOMENTO TORCENTE \bar{M}_z IL BRACCIO È DELL'ORDINE DI GRANDEZZA DELLO SPESORE b → b PICCOLO ↔ τ_{zs} MOLTO GRANDI

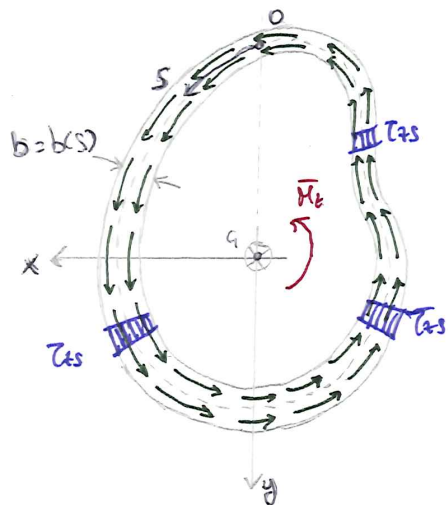
* N.B. ANCHE IN QUESTO CASO LINEE DI FLUSSO 'CHIUDE' NELLO SPESORE → ANALOGIA IDRODINAMICA
 È DI VENTO DI SCORRE NIPERO SUI LINEA MEDIA



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

III SEZIONI IN PARTE SOTTILE A PROFILO CHIUSO

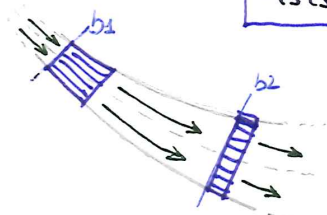
BEN AVENDO È QUELLO CHE ACCADE SE LA SEZIONE HA INVECE UN PROFILO CHIUSO → SE LA LINEA MEDIA DELLA SEZIONE FORMA UN CIRCOLO CHIUSO, NON ESISTENDO PIÙ ELEMENTI TERMINALI, LE **LINEE DI FLUSSO** SCORRONO ALL'INTERNO DELLA SEZIONE E HANNO VERSO CONCORDE NELLE PAREI OPPOSITE RISPETTO ALLA LINEA MEDIA. LE TENSIONI TANGENZIALI τ_{ts} RELATIVE A UN GENERICO PUNTO b HANNO TUTTE LO STESSO VERSO E, PRENDENDO PER IPOTESI LO SPESORE t MOLTO PICCOLO, È POSSIBILE INTENDERE UNIFORMI NELLO SPESORE t STESSO.



ANALOGIA IDRODINAMICA

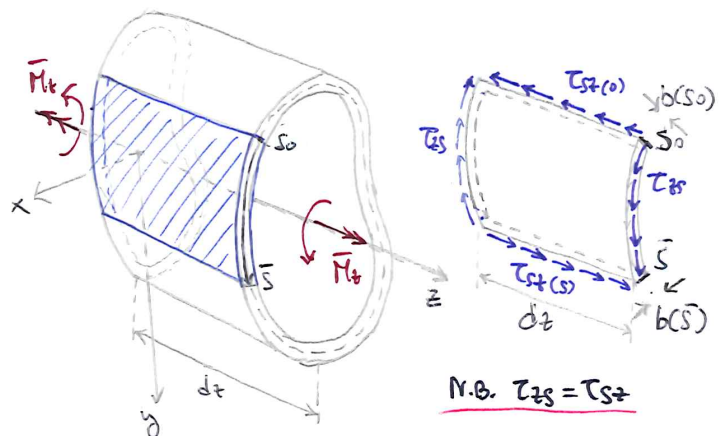
IL FLUIDO SCORRE LUNGO S , TANGENTE IN OGNI PUNTO ALLA LINEA MEDIA. IL LIQUIDO CIRCOLA DENTRO LA SEZIONE → LA PORTATA È COSTANTE

$$\tau_{ts}(s) \cdot b(s) = \text{COSTANTE}$$



LE τ_{ts} SONO MAGGIORI DOVE b È PIÙ PICCOLO E VICEVERSA

$$\tau_{ts} b_1 = \tau_{ts} b_2 = \text{COSTANTE}$$



N.B. $\tau_{ts} = \tau_{st}$

→ CONSIDERIAMO UN CONCILO INFINITESIMO DI TRAVE DI LUNGHERIA dz E NE TAGLIAMO UN PEZZO COMPRESO TRA L'ORIGINE DELLA APERTA CURVILINEA $S - S_0$ - E UNA ASCISSA GENERALE - \bar{s}

τ_{ts} SONO LE TENSIONI TANGENZIALI CHE AGISCONO SULLA FACCE DI NORMALE \bar{z} NELLO SPESORE LUNGO L'ASCISSA \bar{z} (TRA S_0 E \bar{s})
 AIUTATA PER IL PRINCIPIO DI AECI PRODOTTA' DELLE TENSIONI TANGENZIALI SI SVILUPPANO SULLE FACCE PIANE TRONCATE DAI TAGLI LE FORTE:

$\tau_{st}(0)$ → NELLO SPESORE $b(0)$

$\tau_{st}(\bar{s})$ → NELLO SPESORE $b(\bar{s})$

PER L'EQUILIBRIO AUS TRANSLAZIONE IN DIREZIONE \bar{z} :

$$\tau_{st}(0) b(0) dz = \tau_{st}(\bar{s}) b(\bar{s}) dz \quad \forall \bar{s} \rightarrow \text{DEVE VALERE QUALUNQUE SIA LA SCELTA DEL TAGLIO E' ARBITRARIA!}$$

$$\tau_{st}(0) b(0) = \text{COSTANTE} \quad \text{FLUSSO DELLA TENSIONE TANGENZIALE}$$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5E - TORSIONE -

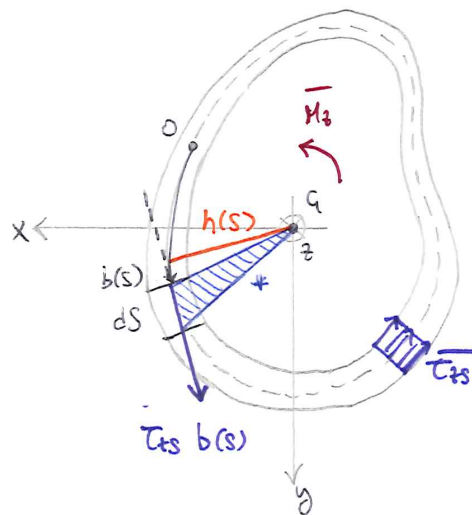
(II)

5A

→ LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI TANGENZIALI DEVE DAR LUOGO A UN MOMENTO TORCENTE PARI A \bar{M}_t

- SU UNA CURVA $b(s)$ ORTOGONALE A S LA τ_{zs} (COMPONENTE DI τ_z RISPETTO A S) È PERPENDICOLARE ALLA CURVA z E
- PER SEZIONI SOTTILI LA DISTRIBUZIONE DI τ_{zs} PUÒ ESSERE CONSIDERATA UNIFORME (VALORE MEDIO)
- SU UN TRAFI DI SEZIONE dS $\tau_{zs}(s) b(s) = \text{cost}$
- SCEGLIENDO UN POLO Q (MA LA SCELTA È ARBITRARIA E SI PUÒ SCEGLIERE QUALSIASI PUNTO ALL'INTERNO DEL CONTOURNO), $h(s)$ È LA DISTANZA TRA Q E LA TANGENTE ALLA LINEA MEDIA DI ASCISSA CURVILINEA S

5B


SIAMO:

$$\bar{M}_t = \oint \tau_{zs}(s) b(s) h(s) ds \quad \left[\text{N.B. } \oint \text{ INDICA: INTEGRALE SU TUTTO LO SVILUPPO DI S} \right]$$

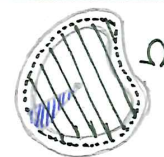
5C

$$\bar{M}_t = \underbrace{\tau_{zs}(s) b(s)}_{\text{CONSTANTE}} \oint h(s) ds \rightarrow \text{PARI AL DOPPIO DELL'AREA DEL TRIANGOLO *}$$

$$\oint h(s) ds = 2\Omega \quad \underline{\Omega = \text{AREA INCHIUSA DALLA LINEA MEDIA}}$$

QUINDI:

$$\bar{M}_t = \tau_{zs}(s) b(s) 2\Omega \rightarrow \tau_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{2\Omega b(s)} \quad \text{FORMULA DI BREDT}$$



5D

τ_{zs} È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A $b(s) \rightarrow \tau_{zs \text{ max}} = \frac{\bar{M}_t}{2\Omega b(s)_{\text{MIN}}}$ [D'ALTROONDE $\tau_{zs} b(s) = \text{cost}$]

5E

N.B. LA FORMULA DI BREDT È BASATA SULL'EQUILIBRIO, MA NON GARANTISCE COMPATIBILITÀ CON SPORTELLI E DEFORMAZIONI

IN GENERALE $\Theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ_t}$ E LA ROTAZIONE TRA LE 2 SEZIONI DI ESTREMITÀ VALE $\Theta L = \frac{\bar{M}_t}{GJ_t} L$

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE VALE: $\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \bar{M}_t \Theta L \rightarrow \mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \bar{M}_t \frac{\bar{M}_t}{GJ_t} L = \frac{1}{2} \frac{\bar{M}_t^2}{GJ_t} L$

POSSIAMO ANCHE J_t : $\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \int_V \tau_{zs}(s) \gamma_{zs}(s) dV \rightarrow \mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \int_0^L dt \oint \tau_{zs} \frac{\tau_{zs} b(s) ds}{G} = \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \oint \tau_{zs}^2 b(s) ds = \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \oint \frac{(\tau_{zs} b(s))^2}{b(s)} ds = \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \oint \frac{(\tau_{zs} b(s))^2}{b(s)} ds$

$$= \frac{1}{2} L \frac{1}{G} \underbrace{(\tau_{zs} b(s))^2}_{\rho} \oint \frac{1}{b(s)} ds \rightarrow \bar{M}_t = \tau_{zs} b(s) 2\Omega \leftrightarrow (\tau_{zs} b(s))^2 = \left(\frac{\bar{M}_t}{2\Omega} \right)^2$$



IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

$$J_i = \frac{1}{2} \frac{\bar{M}_t^2}{4\Omega^2} \frac{L}{G} \rho$$

$$J_i = J_e \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\bar{M}_t^2}{4\Omega^2} \frac{L}{G} \rho = \frac{1}{2} \frac{\bar{M}_t^3}{G \gamma_t} \rightarrow \frac{\rho}{4\Omega^2} = \frac{1}{\gamma_t}$$

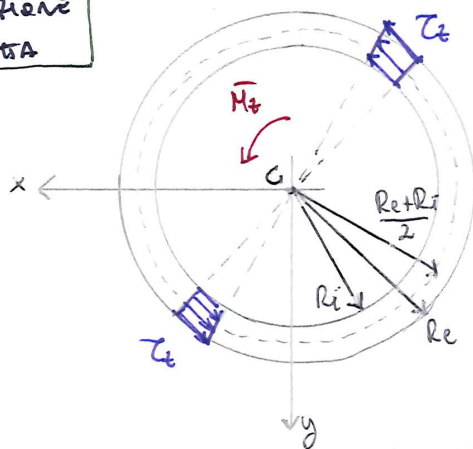
$$\gamma_t = \frac{4\Omega^2}{\rho}$$

FATTORE DI RIGIDITA' TORSIONALE PER PROFILI ICHIOSA

NB ASSUMERE CHE LE τ_{zs} SIANO UNIFORMI E' UN'APPROXIMAZIONE NECESSARIA PER CALCOLARE LE TENSIONI TAV CENTRALI IN UNA SEZIONE TORRE CHIUSA GENERICA. QUANTO VALE L'APPROXIMAZIONE?

VEDIAMO PER IL CASO PIU' SEMPLICE: CORONA CIRCOLARE

SOLUZIONE ESATTA



$$\tau_z = \frac{\bar{M}_t}{\gamma_p} r$$

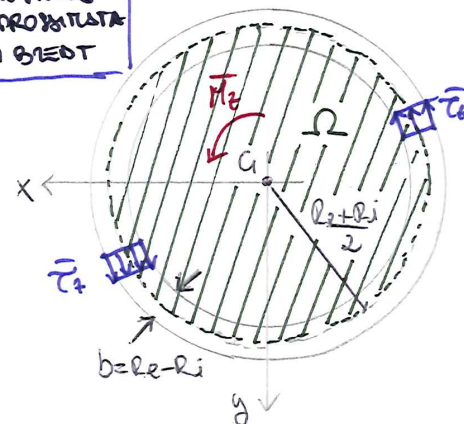
$$\gamma_p = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2}$$

$$\tau_{zs} = \bar{\tau}_{zs} \text{ PER } r = \frac{r_e + r_i}{2}$$

$$\bar{\tau}_z = \frac{2\bar{M}_t}{\pi (r_e^4 - r_i^4)} \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right) = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{(r_e + r_i)}{(r_e^4 - r_i^4)}$$

$$\text{SE AD ESEMPIO } r_i = 0,8 r_e \rightarrow \bar{\tau}_z = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{1,8 r_e}{(1 - 0,8^4) r_e^4} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{3,05}{r_e^3}$$

SOLUZIONE APPROXIMATA DI BLEDT



$$\Omega = \pi \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (r_e + r_i)^2$$

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{2\Omega b}$$

$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{2 \left[\frac{\pi}{4} (r_e + r_i)^2 \right] (r_e - r_i)} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{2}{(r_e + r_i)^2 (r_e - r_i)}$$

$$= \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{2}{(r_e + r_i)^2 (r_e - r_i)}$$

$$r_i = 0,8 r_e \quad \bar{\tau}_{zs} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{2}{(1+0,8)^2 (0,2 r_e)} =$$

$$\text{ERRORE \%} = \frac{\bar{\tau}_z - \bar{\tau}_{zs}}{\bar{\tau}_z} \approx 1,3\% \rightarrow = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{3,09}{r_e^3}$$

L'ERRORE AUMENTA GUARDANDO LE τ_{max} :

$$\tau_{tmax} = \frac{\bar{M}_t}{\gamma_p} r_e = \frac{2\bar{M}_t r_e}{\pi (r_e^4 - r_i^4)} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{2 r_e}{r_e^4 - r_i^4}$$

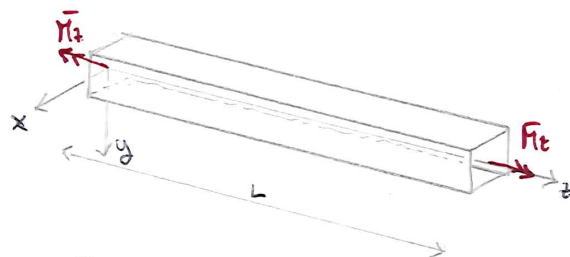
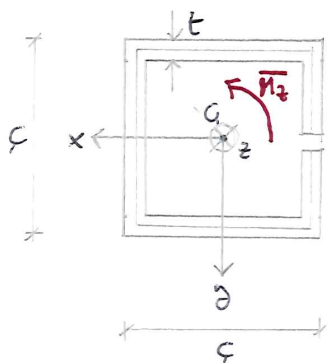
$$r_i = 0,8 r_e$$

$$\tau_{tmax} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{2 r_e}{(1 - 0,8^4) r_e^4} = \frac{\bar{M}_t}{\pi} \frac{3,38}{r_e^3}$$

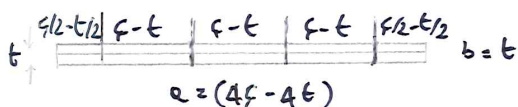
8,8% IN PIU' RISPETTO A BLEDT!

ESEMPIO APPLICATIVO

LAVORANO PIZZO A TORSIONE I PROFILI APERTI O I PROFILI CHIUSI?

(A) SEZIONE IN PARETE LOTTICE A PROFILO APERTO
(B) SEZIONE IN PARETE LOTTICE A PROFILO CHIUSO


$$\begin{aligned} \bar{M}_z &= 500 \text{ Nm} = 500'000 \text{ Nmm} \\ L &= 1 \text{ m} = 1'000 \text{ mm} \\ G &= 77 \text{ GPa} = 77 \cdot 10^9 \text{ N/mm}^2 \\ c &= 100 \text{ mm} \quad t = 2 \text{ mm} \end{aligned}$$

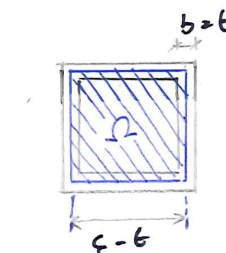
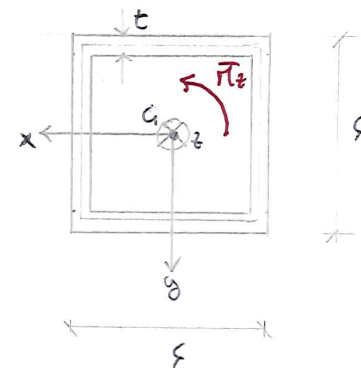


$$J_t^A = \frac{1}{3} e b^3 = \frac{1}{3} 4(c-t)t^3 = \frac{4}{3}(c-t)t^3 \quad 10457333 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{zs \text{ max}}^A = \frac{\bar{M}_z}{J_t} t = \frac{\bar{M}_z}{\frac{4}{3}(c-t)t^3} t = \frac{3 \bar{M}_z}{4(c-t)t^2} \quad 956633 \text{ N/mm}^2$$

$$\vartheta^A = \frac{\bar{M}_z}{G J_t} = \frac{\bar{M}_z}{G \frac{4}{3}(c-t)t^3} = \frac{3 \bar{M}_z}{4 G (c-t)t^3} \quad 0,00622 \text{ rad/mm}$$

$$\vartheta^A = \vartheta^A L = \frac{3 \bar{M}_z}{4 G (c-t)t^3} L \quad 6,220 \text{ rad} \approx 356^\circ$$



$$\Omega^B = (c-t)(c-t) = (c-t)^2 \quad 3604000 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{zs}^B = \frac{\bar{M}_z}{2 \Omega b} = \frac{\bar{M}_z}{2(c-t)^2 t} = \tau_{zs \text{ max}}^B \quad 13,015 \text{ N/mm}^2$$

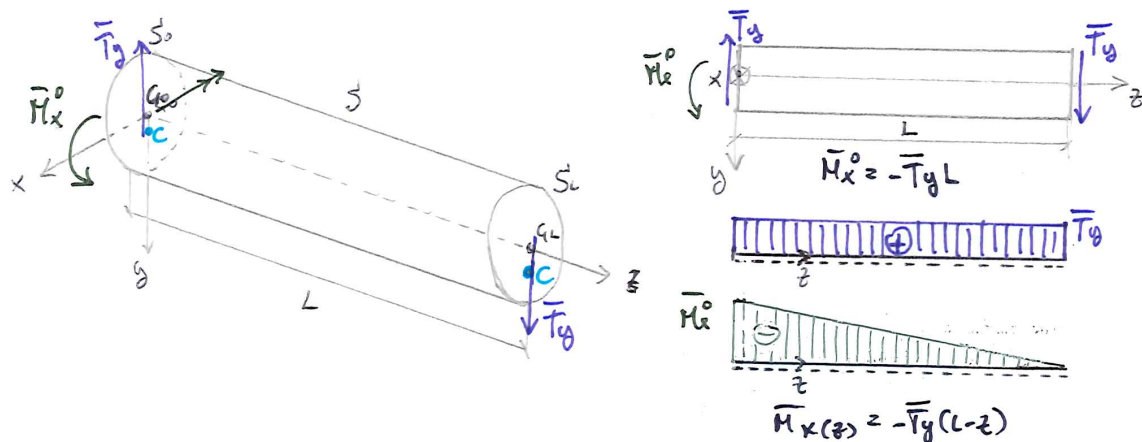
$$\begin{aligned} \vartheta^B &= \frac{4 \Omega^2}{J} = \frac{4 \Omega^2}{\int \frac{1}{b(s)} ds} = \frac{4 \Omega^2}{\int \frac{1}{t} ds} = \frac{4 \Omega^2}{\frac{4(c-t)}{t}} = \frac{4(c-t)^4}{4(c-t)t} \\ &= \frac{(c-t)^3}{t} = (c-t)^3 t \quad 1,188 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\vartheta^B = \frac{\bar{M}_z}{G J} = \frac{\bar{M}_z}{G (c-t)^3 t} \quad 3,448 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm}$$

$$\vartheta^B = \vartheta^B L = \frac{\bar{M}_z}{G (c-t)^3 t} L \quad 0,0034 \text{ rad} = 0,682^\circ$$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

SI CONSIDERA UNA TRAVE SOGGETTA ALLA BASE S_0 A UNA FORZA \bar{T}_y AGENTE PARALLELAMENTE ALL'ASSE DI INERZIA y E ALLA BASE S_0 A UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA $-\bar{T}_y$ E A UN MOMENTO FLETTENTE $\bar{M}_x^0 = -\bar{T}_y L$



5F - FLESSIONE COMPOTA A TAGLIO -

I

5A

5B

5C

IL MOMENTO FLETTENTE \bar{M}_x^0 APPLICATO SU S_0 È NECESSARIO PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z

$$\bar{M}_x^0 = -\bar{T}_y L$$

$\bar{M}_x(z)$ NON È COSTANTE, MA VARIA UNICO z :

$$\bar{M}_x(z) = -\bar{T}_y(L-z)$$

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y \rightarrow \sigma_z = \frac{-\bar{T}_y(L-z)}{I_x} y$$

PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO SONO PRESENTI σ_z

2g

5D

DETTO $C =$ CENTRO DI TAGLIO, \bar{T}_y APPLICATO IN C NON PRODUCE EFFETTI TORCENTI

LE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE AL TAGLIO PRODUCONO LAVORO NULO PER LE DEFORMAZIONI DOVUTE ALLA TORSIONE

N.B. APPLICANDO QUESTA CONDIZIONE SI PÒÒ' INDICARE C , CHE È UNA CARATTERISTICA DELLA TRAVE

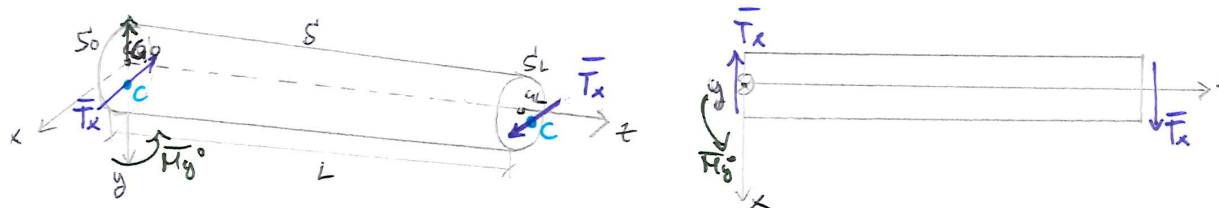
SE \bar{T}_y NON PÒÒ'È APPLICATO IN C SI AVREBBE ANCHE UN MOMENTO TORCENTE $\bar{M}_z \rightarrow$ ANDREBBERO STUDIATI SEPARATAMENTE I DUE CASI E POI SOVRAPPORRE I LORO EFFETTI [VEDI NOTA 1]

SE L'ASSE PRINCIPALE DI INERZIA y È ANCHE ASSE DI SIMMETRIA DELLA C GIACE SULL'ASSE y

SE ENTRAMBI GLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA x E y SONO ASSI DI SIMMETRIA DELLA C GIACERÀ CON IL BARICENTRO G

IL SOLIDO COSÌ CARICATO SI DICE SOGGETTO A **FLESSIONE COMPOTA A TAGLIO** \rightarrow TAGLIO COSTANTE + FLESSIONE NON UNI FORME

NB SE IL TAGLIO AGISCE IN DIREZIONE x LA SITUAZIONE È ANALOGA MA IL MOMENTO FLETTENTE AGISCE ATTORNO ALL'ASSE y



5E

5F

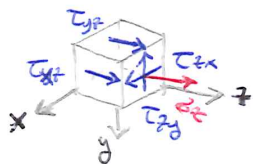
IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5F - FLESSIONE COMPOSITA A TAGLIO -

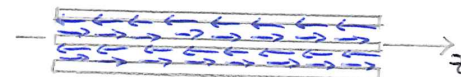
II

5A

IPOTESI → $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ SU OGNI ELEMENTO CON GIACENTURA PARALLELA ALL'ASSE Z LE TENSIONI ORTOGONALI ALL'ASSE Z SONO NULLE;



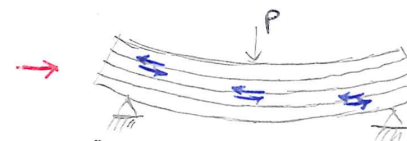
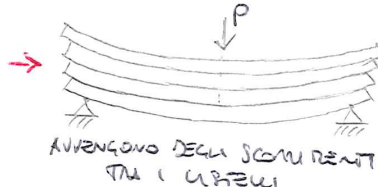
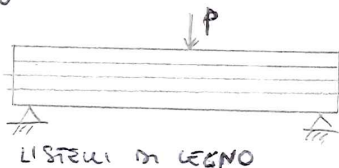
LE SINGOLE FIBRE, IDEALMENTE ELEMENTI FILIFORMI PARALLELI A Z, SI SCAMBIANO SOLO TENSIONI TANGENTI ADE FIBRE: τ_{xz} E τ_{yz}



5B

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

N.B.



5C

EQUILIBRIO INTERNO

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \tau_{zx} \text{ e } \tau_{zy} \text{ COSTANTI IN OGNI SEZIONE, NON DIPENDONO DI } z \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \sigma_z = -\bar{T}_y \frac{(L-z)}{y_x} \rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\bar{T}_y}{y_x} \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\bar{T}_y}{y_x} y$$

5D

EQUILIBRIO ESTERNO

SU $S, \vec{m} = \{dx, dy, 0\}, p_x = 0, p_y = 0, p_z = 0$

$$\begin{cases} \sigma_x dx + \tau_{yx} dy = 0 \\ \tau_{xy} dx + \sigma_y dy = 0 \\ \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{\tau}_t = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\} \text{ DEVE ESSERE NORMALE A } \vec{m}, \vec{\tau}_t \cdot \vec{m} = 0, \text{ LE } \tau_t \text{ SONO TANGENTI AL CONTORNO}$$

SU $S_0, \vec{m} = \{0, 0, -1\}$

$$\begin{cases} \tau_{xz}(-1) = p_x \rightarrow -\tau_{xz} = p_x \\ \tau_{yz}(-1) = p_y \rightarrow -\tau_{yz} = p_y \\ \sigma_z(-1) = p_z \rightarrow +\frac{\bar{T}_y L}{y_x} = p_z \end{cases}$$

SU $S_L, \vec{m} = \{0, 0, 1\}$

$$\begin{cases} \tau_{zx}(1) = p_x \quad \tau_{xz} = p_x \\ \tau_{zy}(1) = p_y \quad \tau_{yz} = p_y \\ 0(1) = p_z = 0 \end{cases}$$

SU $S_L \bar{p}_x = 0 \rightarrow \sigma_z = 0$

LA DISTRIBUZIONE DI TENSIONI SULLE PARI DEVE GARANTIRE CHE:

$$\tau_x = \int_A p_x dA = 0; \quad \tau_y = \int_A p_y dA = \bar{T}_y$$

$$M_z = \int_A (-p_x y + p_y x) dA = \bar{T}_y x +$$

CON x_T A COORDINATA DI C - CENTRO DI TAGLIO

5F

N.B. su $S_0 \bar{M}_z = -\bar{T}_y L \Rightarrow \sigma_z = -\frac{\bar{T}_y L}{y_x} y$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

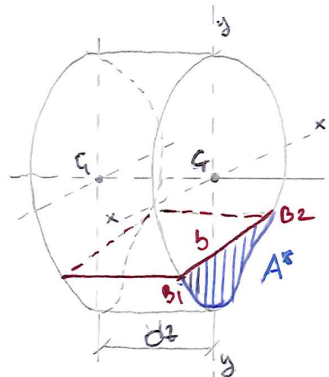
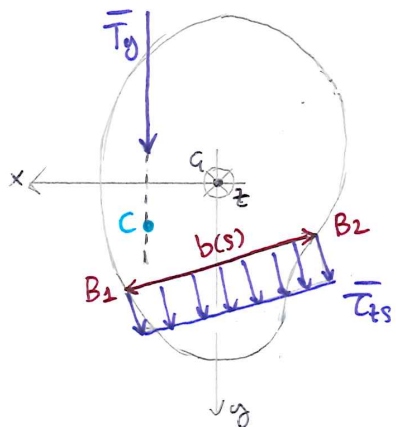
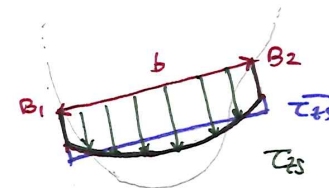
LA SOLUZIONE ESATTA DEL PROBLEMA (LA DETERMINAZIONE ESATTA DELLE TENSIONI TANGENZIALI NEL SOGGETTO DI SAINT VENANT SOGGETTO A FLESSIONE CORPOSA A TAGLIO) È MOLTO COMPLICATA DA UN PUNTO DI VISTA MATEMATICO → SOLUZIONE APPROSSIMATA DI JOURNSKI CONSENTE DI MOVARE UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA CON CONSIDERAZIONI SULL'EQUILIBRIO (N.B. SOLUZIONE EQUILIBRATA, NON COMPATIBILE) SFRUTTANDO IL PRINCIPIO DI RECIPROCIITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI È POSSIBILE MOVARE IL VALORE MEDIO DELLE TENSIONI TANGENZIALI AGENTI SU UNA CORDA CENEREA DELLA FLESSIONE TRANSVERSALE, $\bar{\tau}_{zs}$, SCRIVENDO L'EQUILIBRIO IN DIREZIONE Z (CALCOLANDO QUINDI LE $\bar{\tau}_{sz}$)

SU UNA CENEREA SEZIONE DI TRAVE SOGGETTA A FLESSIONE CORPOSA A TAGLIO F CONSIDERA UNA CENEREA CORDA $B_1 B_2$ DI LARGHEZZA b

LA TENSIONE TANGENZIALE MEDIA AGENTE IN DIREZIONE NORMALE A TALE CORDA VALE:

$$\bar{\tau}_{sz} = \frac{1}{b} \int_{B_1}^{B_2} \tau_{zs} ds$$

N.B. C'È DIFFERENZA TRA LA TENSIONE TANGENZIALE τ_{zs} E IL SUO VALORE MEDIO $\bar{\tau}_{zs}$, MA PER SPESORI PICCOLI, OVVERO PER b PICCOLE, LA DIFFERENZA È MOLTO PICCOLA



CONSIDERAMO UN CUNEO INFINITESIMO DI TRAVE DI LARGHEZZA dz E ISOLIAMO LA PARTE DI TALE CUNEO DEBITAMENTE RIPRODOTTA DAL PIANO PARALLELO A Z COMPREDENTE LA CORDA $B_1 B_2$ E $|\bar{\tau}_{sz}| = |\bar{\tau}_{zs}|$ ADORA POSSIAMO CALCOLARE MOVENDO EQUILIBRIO IN DIREZIONE Z

$$-\int_{A^*} G_z dA^* - \bar{\tau}_{sz} b dz + \int_{A^*} (G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} dz) dA^* = 0$$

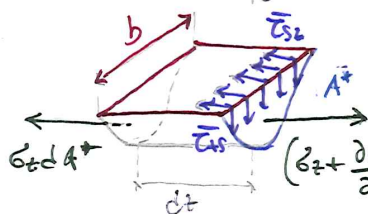
N.B. $G_z = -\frac{\bar{T}_y(L-z)}{J_x} y \rightarrow \frac{\partial G_z}{\partial z} = +\frac{\bar{T}_y}{J_x} y$

$$-\bar{\tau}_{sz} b dz + \int_{A^*} \frac{\bar{T}_y}{J_x} y dA^* = 0 \rightarrow \bar{\tau}_{sz} b = \frac{\bar{T}_y}{J_x} \int_{A^*} y dA^*$$

S_x^* MOMENTO STATICO RISPETTO A X DELL'AREA SOTTESA ALLA CORDA $B_1 B_2$

$$\bar{\tau}_{sz} = \frac{\bar{T}_y S_x^*}{J_x b}$$

FORMULA DI
JOURLSKI



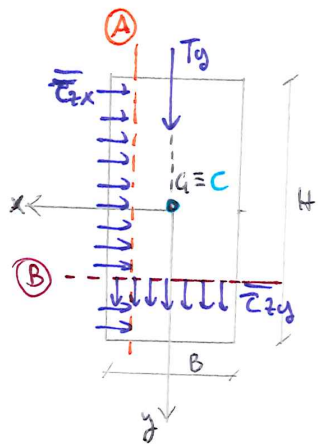
N.B. $M_x(z)$ NON È COSTANTE, SPOSTANDOSI DUNQUE dz VARIA. ADORA ANCHE LE G_z VARIANO → $\frac{\partial G_z}{\partial z} dz$

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5F-FLESSIONE COMPONTE A TAGLIO -

IV

5A



SEZIONE RETTANGOLARE

x e y APPI DI DIAMETRA \rightarrow $q \equiv c$

(A) CURVA PARABOLA A $y \rightarrow$ $S_x^* = 0 \rightarrow \tau_{zx} = 0$

(B) CURVA PARABOLA A x

$S_x^* = A^* y^*$

y^* = DISTANZA TRA IL BARRICENTRO DI A^* E L'ASSE x

$y^* = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} - y \right) + y = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} - y + 2y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + y \right)$

$S_x^* = A^* y^* = \left(\frac{H}{2} - y \right) B \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + y \right) = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)$

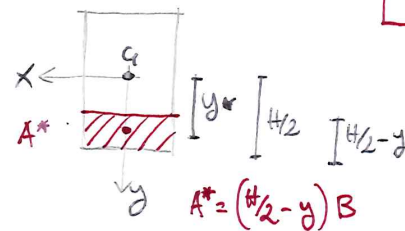
$\tau_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{\eta_x B} = \frac{T_y}{\eta_x B} \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) = \frac{T_y}{2\eta_x} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)$

τ_{zy} VARIA PROPORZIONALMENTE A y $y = -\frac{H}{2} \cdot \tau_{zy} = 0$

IL MASSIMO SI HA PER $y = 0$

$y = +\frac{H}{2} \tau_{zy} = 0$

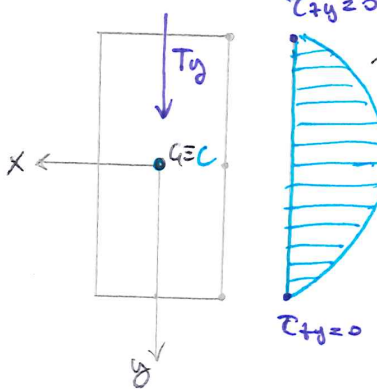
5B



$A^* = \left(\frac{H}{2} - y \right) B$

S_x^* È FUNZIONE DI y^2
ANDAMENTO PARABOLICO

$\tau_{zy \text{ MAX}} = \frac{T_y}{2\eta_x} \frac{H^2}{4} = \frac{T_y H^2}{2BH^2/12 \cdot 4} = \frac{3T_y}{2BH}$



5C

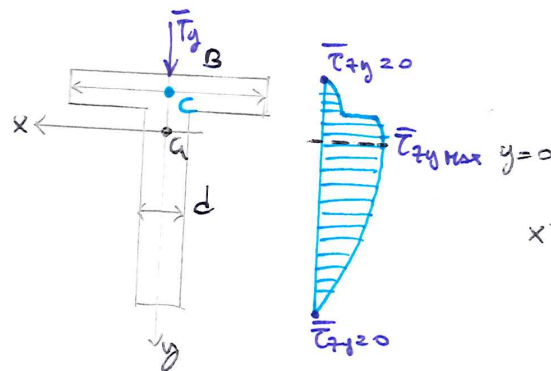
5D

5E

LA SOLUZIONE PER LA SEZIONE RETTANGOLARE SI PUÒ GENERALIZZARE PER **SEZIONI COMPOSITE** \rightarrow PROFILI

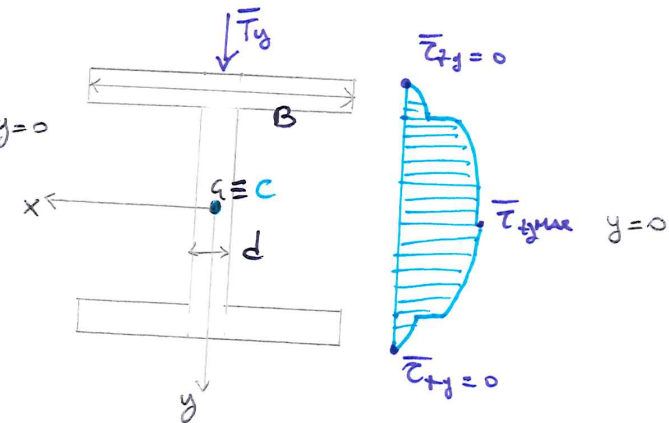
N.B.

LA SOLUZIONE APPROSSIMATA VA PARTICOLARMENTE BENE PER SEZIONI LOTTI \rightarrow POCA DIFFERENZA TRA τ_{zs} E τ_{zs}



NEL PASSAGGIO DALL'ASA ALL'ALTRA C'È UN SALTO

$B \gg d$



5F

IL PROBLEMA DI SAINT VENANT

5F - FLESSIONE COMPOSTA A TAGLIO

(V)

5A

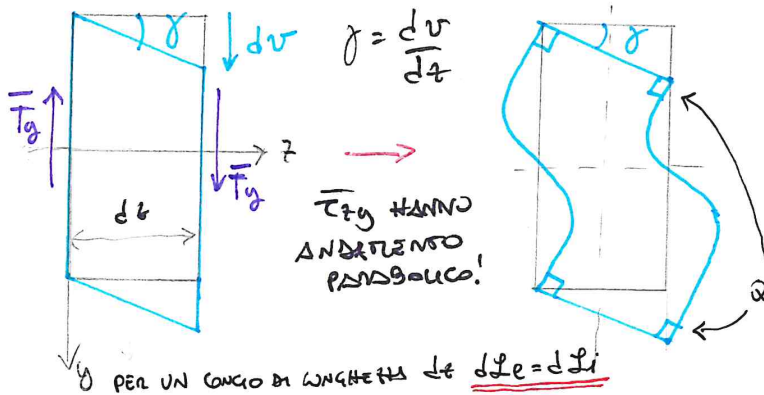
5B

5C

5D

5E

5F



PRENDIAMO UN GUSCIO DI TRAVE DI LUNGHEZZA dz E QUADRIAMO COME SI DEFORMA

LE FACCE SUPERIORI E INFERIORI ROTANO DI UN ANGOLO $\gamma = \frac{dv}{dz}$
LE FACCE LATERALI SI INGOBBANO

$\tau_{zy} = 0$ E JONQUE $\gamma_{zy} = 0 \Rightarrow$ RETTE PARALLELE AGLI ASSI y E z SI MANTENGONO PERPENDICOLARI A DEFORMAZIONE AVVENUTA

PER UN GUSCIO DI LUNGHEZZA dz $dL_e = dL_i$

$$dL_e = \frac{1}{2} \bar{\tau}_y \cdot \gamma \cdot dz \quad dL_i = \frac{1}{2} \int_A \tau_{zy} \gamma_{zy} dA dz \quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \quad dL_i = \frac{1}{2G} \int_A \tau_{zy}^2 dA dz$$

$\bar{\tau}_{zy} = \frac{\bar{T}_y S_x^*}{J_x B}$ PER SEZIONI RETTANGOLARI $\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y J_x^*}{J_x B} \quad dL_i = \frac{1}{2G} \int_A \left(\frac{\bar{T}_y S_x^*}{J_x B} \right)^2 dA dz \quad E \quad S_x^* = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right)$

$$dL_i = \frac{1}{2G} \int_A \left(\frac{\bar{T}_y \left[\frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - y^2 \right) \right]}{J_x B} \right)^2 dA dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{4 J_x^2} \int_{-B/2}^{+B/2} dx \int_{-H/2}^{+H/2} \left(\frac{H^4}{16} - \frac{H^2 y^2}{2} + y^4 \right) dy dz$$

FUNZIONI PARI, ASSUMONO VALORI SIMMETRICI RISPETTO ALL'ASSE DELLE ORDNATE, QUINDI GLI INTEGRALI DIVENTANO $2 \int_0^{B/2}$ E $2 \int_0^{H/2}$

$$dL_i = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{4 J_x^2} 2 \int_0^{B/2} dx \cdot 2 \int_0^{H/2} \left(\frac{H^4}{16} - \frac{H^2 y^2}{2} + y^4 \right) dy dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{4 J_x^2} 2 [x]_0^{B/2} \cdot 2 \left[\frac{H^4}{16} y - \frac{H^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_0^{H/2} dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{4 J_x^2} 2 \cdot \frac{B}{2} \cdot 2 \left[\frac{H^5}{32} - \frac{H^5}{48} + \frac{H^5}{160} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{4 J_x^2} B \cdot 2 \left[\frac{(15-10+3)H^5}{480} \right] dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{2 J_x^2} B \left[\frac{8}{480} H^5 \right] dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{2 J_x^2} B \frac{1}{60} H^5 dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{2 J_x^2} \frac{B H^5}{60} dz$$

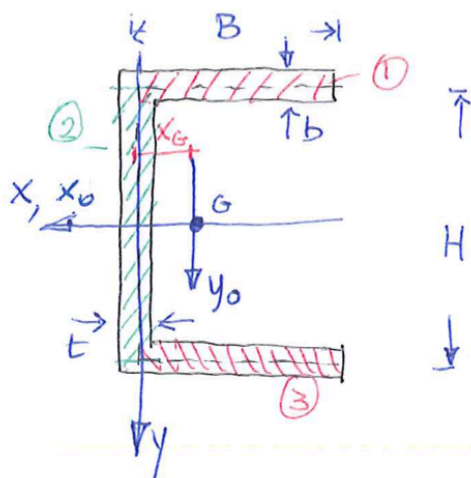
N.B. $J_x = \frac{B H^3}{12} \quad J_x^2 = \frac{B^2 H^6}{144}$

$$dL_i = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{2 J_x^2} \frac{B H^5}{60} dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{2} \frac{6}{5 B H} dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{5/6 B H} dz \rightarrow A_T = \frac{5}{6} A \quad \text{FAATTORE CORRETTIVO DI TAGLIO} \rightarrow dL_i = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{A_T} dz$$

$$dL_e = dL_i \rightarrow \frac{1}{2} \bar{T}_y \gamma dz = \frac{1}{2G} \frac{\bar{T}_y^2}{A_T} dz \rightarrow \gamma = \frac{\bar{T}_y}{G A_T}$$

PER SEZIONE RETTANGOLARE $\chi = \frac{6}{5}$
 $G A_T =$ RIGIDEZZA A TAGLIO (MODULO DI TAGLIO G PER AREA CORRETTA CON IL FATTORE DI TAGLIO χ)
 $A_T = A / \chi$

ESEMPIO: CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN UNA SEZIONE A U, ANALIZZATA COME UNA SEZIONE DI SPESSORE SOTTILE.



SI ASSUME IL SISTEMA DI RIFERIMENTO $x_1 y_1$ CON L'ASSE x_1 COINCIDENTE CON L'ASSE DI SIMMETRIA DELLA SEZIONE E L'ASSE y_1 PASSANTE PER LA LINEA MEDIA DELL'ANIMA.

SI HA: $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = B \cdot b ; A_2 = H \cdot t ; A_3 = B \cdot b$$

$$A = 2Bb + Ht$$

$$G_1 = \left(-\frac{B}{2}, -\frac{H}{2}\right) ; G_2 = (0, 0) ; G_3 = \left(-\frac{B}{2}, +\frac{H}{2}\right)$$

SEGUE POI $S_{y_1} = A_1 \cdot \left(-\frac{B}{2}\right)$ È TRASCURABILE. $S_{y_3} = A_3 \cdot \left(-\frac{B}{2}\right)$

$$S_y = 2B \cdot b \cdot \left(-\frac{B}{2}\right) = -B^2 b \quad \text{MENTRE, PER RAGIONI DI SIMMETRIA } S_x = 0$$

IL BARICENTRO G È QUINDI INDIVIDUATO DA: $G = (x_G, y_G)$, DOVE

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{-B^2 b}{2Bb + Ht} ; y_G = 0 \Rightarrow G = \left(-\frac{B^2 b}{2Bb + Ht}, 0\right)$$

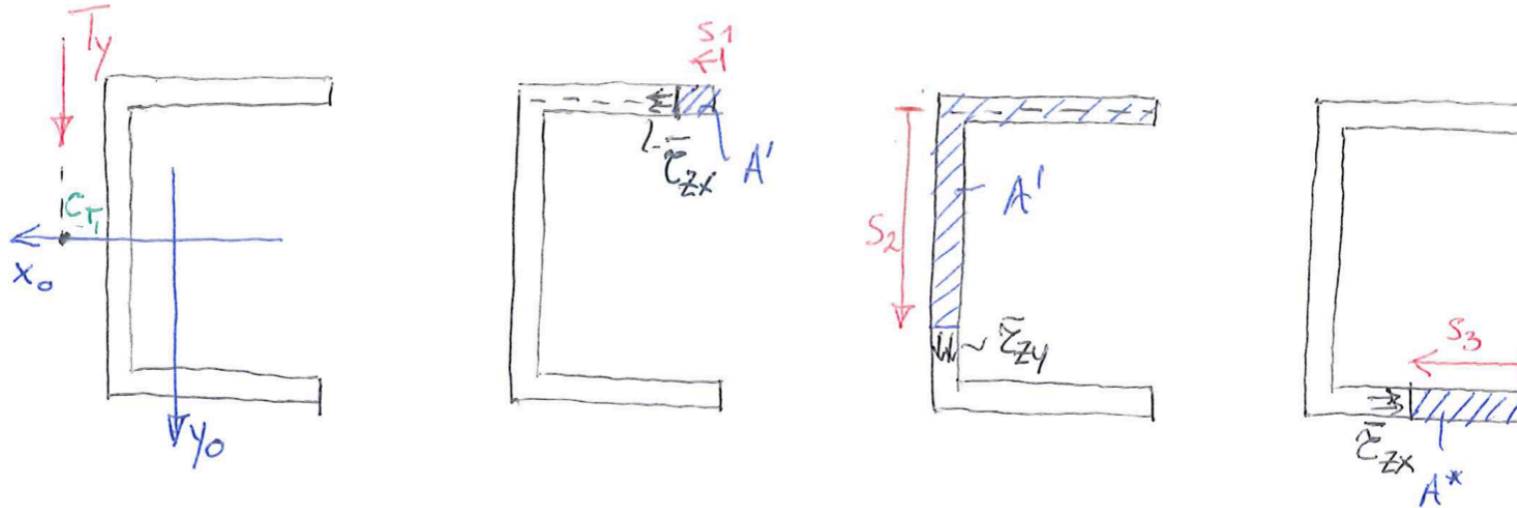
IL MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE x_0 (COINCIDENTE CON L'ASSE x_1) È

DATO DA:

$$I_x = \frac{1}{12} tH^3 + 2 \left[\frac{1}{12} Bb^3 + Bb \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 \right] \approx \frac{1}{12} tH^3 + \frac{BbH^2}{2}$$

IN QUANTO IL CONTRIBUTO DEL MOMENTO D'INERZIA "PROPRIO" DI CIASCUNA ALA $\frac{1}{12} Bb^3$ È TRASCURABILE.

SI PASSA A CONSIDERARE IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TAGLIO T_y APPLICATO NEL CENTRO DI TAGLIO, C_T



RISULTA

$$\bar{\tau}_{zx}^{(1)} = - \frac{T_y s_x^{(1)}}{I_x b}$$

CON $s_x^{(1)} = +s_1 b \cdot \left(-\frac{H}{2}\right) = -\frac{s_1 b H}{2}$

PERTANTO

$$\bar{\tau}_{zx}^{(1)} = \frac{T_y s_1 H}{2 I_x} \quad , \quad \text{VARIABLE LINEARMENTE FRA } 0 \text{ (} s_1=0 \text{)} \text{ E } \frac{T_y B H}{2 I_x} \text{ (} s_1=B \text{)}$$

5A

5B

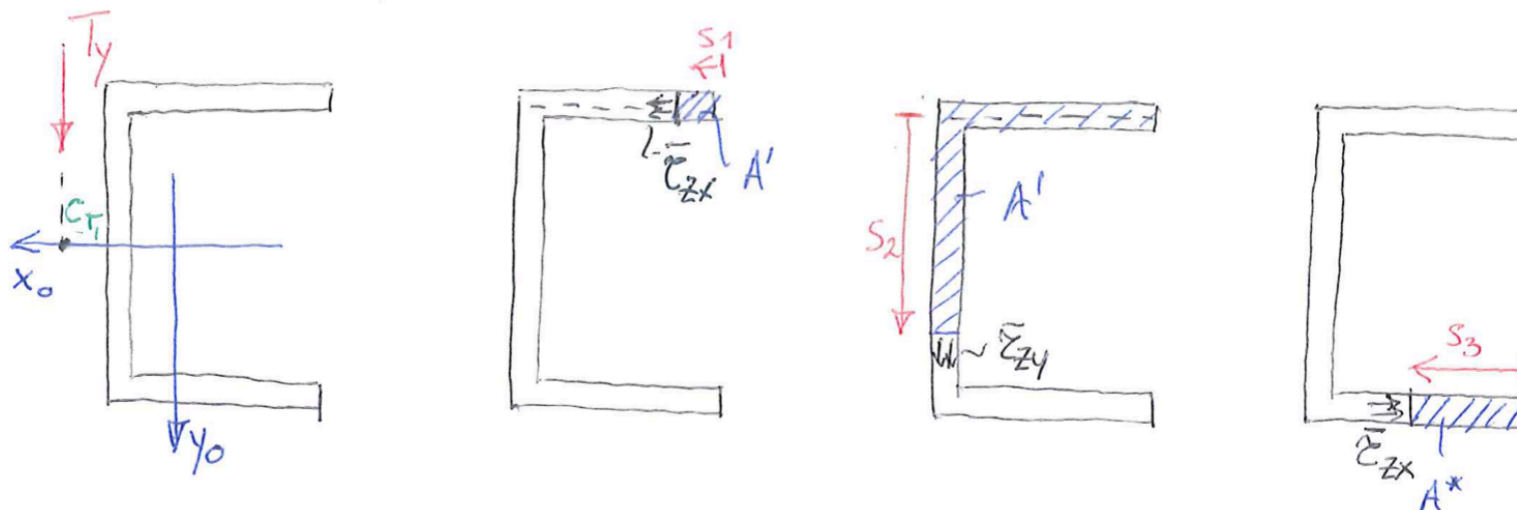
5C

5D

5E

5F

SI PASSA A CONSIDERARE IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TAGLIO T_y APPLICATO NEL CENTRO DI TAGLIO, C_T



$$\bar{\tau}_{ZY}^{(2)} = -\frac{T_y S_x'^{(2)}}{I_x t} \quad \text{CON } S_x'^{(2)} = Bb\left(-\frac{H}{2}\right) + s_2 \cdot t \cdot \left(-\frac{H}{2} + \frac{s_2}{2}\right) = -Bb\frac{H}{2} - s_2 t \left(\frac{H-s_2}{2}\right)$$

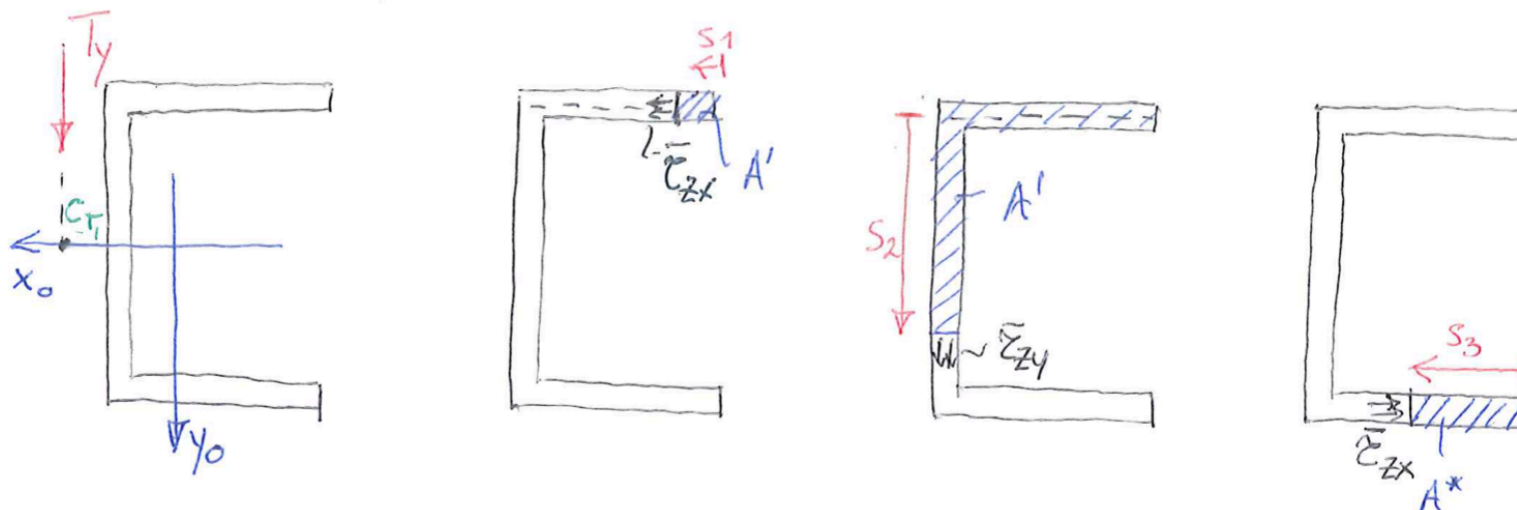
PERTANTO

$$\bar{\tau}_{ZY}^{(2)} = \frac{T_y \left(Bb\frac{H}{2} + s_2 t \left(\frac{H-s_2}{2} \right) \right)}{I_x t} = \frac{T_y BbH + s_2 t (H-s_2)}{2I_x t}$$

VARIABILE QUADRATICAMENTE FRA $\frac{T_y BbH}{2I_x t}$ ($s_2=0$ o $s_2=H$) E IL VALORE

MASSIMO $\frac{T_y \left(BbH + \frac{H^2}{4} t \right)}{2I_x t}$ ($s_2 = \frac{H}{2}$).

SI PASSA A CONSIDERARE IL CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TAGLIO T_y APPLICATO NEL CENTRO DI TAGLIO, C_T



$$\bar{\tau}_{zx}^{(3)} = + \frac{T_y S_x^{*(3)}}{I_x b}$$

$$\text{CON } S_x^{*(3)} = S_3 b \cdot \left(+\frac{H}{2}\right) = + \frac{S_3 b H}{2}$$

DUNQUE

$$\bar{\tau}_{zx}^{(3)} = \frac{T_y S_3 H}{2 I_x}, \text{ VARIABILE LINEARMENTE FRA } 0 (S_3=0) \text{ E } \frac{T_y B H}{2 I_x} (S_3=B)$$

5A

5B

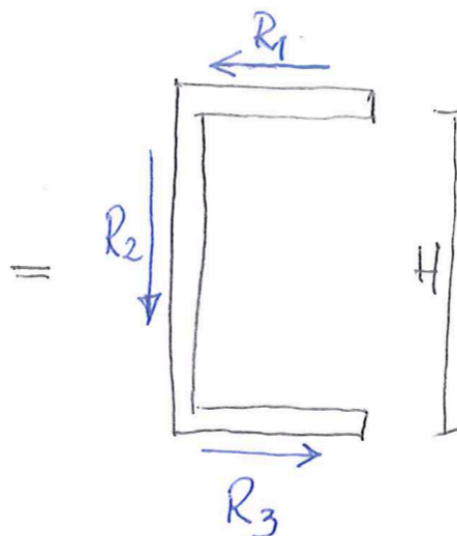
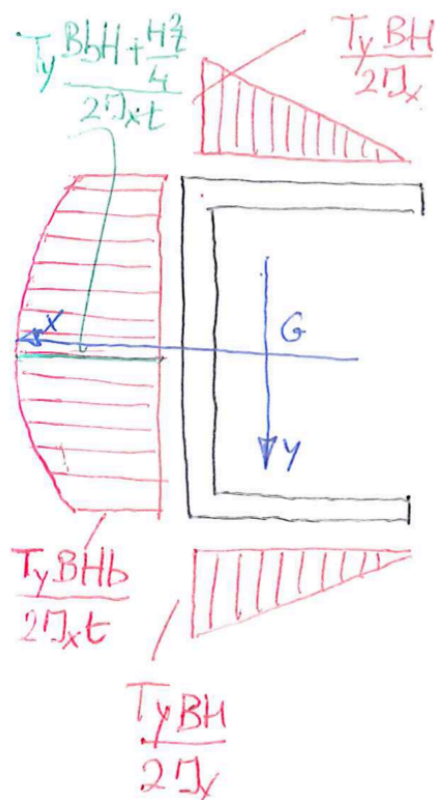
5C

5D

5E

5F

L'ANDAMENTO DELLE TENSIONI TANGENZIALI "MEDIE" È RIPORTATO IN FIGURA. QUESTE DANNO LUOGO ALLE TRE RISULTANTI INDICATE, OTTENUTE PER INTEGRAZIONE



APPARE EVIDENTE CHE LE RISULTANTI R_1 E R_3 SI BILANCIANO PRODUCENDO UNA FORZA ORIZZONTALE NETTA DI VALORE NULLO.

5A

5B

3

$$R_1 = \int_0^B \bar{\tau}_{zx}^{(1)} b \, ds_1 = \int_0^B \frac{\tau_y s_1 H}{2 I_x} b \, ds_1$$

5C

$$R_1 = \frac{3 \tau_y B^2 b}{H(6Bb + tH)}$$

5D

$$R_2 = \int_0^H \bar{\tau}_{zy}^{(2)} t \, ds_2 = \int_0^H \frac{\tau_y B b H + s_2 t (H - s_2)}{2 I_x t} t \, ds_2$$

5E

$$R_2 = \tau_y$$

$$R_3 = \int_0^B \bar{\tau}_{zx}^{(3)} b \, ds_3 = \int_0^B \frac{\tau_y s_3 H}{2 I_x} b \, ds_3$$

5F

$$R_3 = \frac{3 \tau_y B^2 b}{H(6Bb + tH)}$$

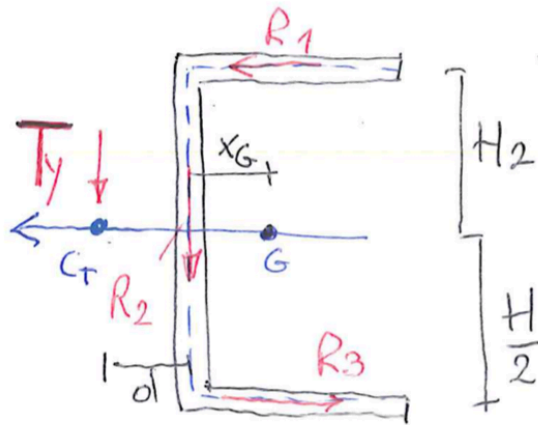
5A

TUTTAVIA R_1 E R_3 DANNO LUGO A UNA COPPIA DI MOMENTO RISPETTO A G
 $M_z = R_1 \cdot H$; PER QUANTO RIGUARDA R_2 ESSO È EQUIVALENTE A T_y .

5B

T_y NON PÒ QUINDI ESSERE APPLICATO NEL BARICENTRO G PERCHÉ SI AUREBBE ANCHE UN MOMENTO TORCENTE M_z ; PER ANNULLARE QUESTO EFFETTO T_y DEVE ESSERE APPLICATO NEL PUNTO C_T (DAL LATO OPPOSTO DEL BARICENTRO G RISPETTO AL PROFILO). PER EQUIVALENZA STATICA DEVE ESSERE:

5C



$$\sum M_{z(C_T)} = R_1 \cdot \frac{H}{2} + R_3 \cdot \frac{H}{2} - R_2 \cdot d = 0$$

5D

NE SEGUE

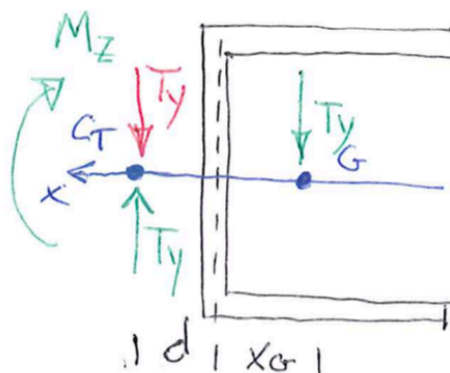
$$R_1 \cdot H - R_2 \cdot d = 0$$

$$d = \frac{R_1 \cdot H}{R_2} = \frac{\cancel{3T_y} B^2 b}{\cancel{H} (6Bb + tH)} = \frac{3B^2 b}{6Bb + tH}$$

5E

5F

SE T_y È INVECE RIPORTATO
NEL BARICENTRO G, SI HA DA
AGGIUNGERE UN MOMENTO
(TORCENTE) DI TRASPORTO
 $M_z = -T_y (d + x_G)$



5A

5B

5C

LE TENSIONI TANGENZIALI DOVUTE A TORSIONE SI CALCOLANO UTILIZZANDO LA TEORIA DELLA
TORSIONE DI SEZIONI IN PARETE SOTTILE A PROFILO APERTO.

4

5D

NEL CASO IN ESAME IL FATTORE DI RIGIDITÀ TORSIONALE SI DETERMINA COME:

$$J_t = \sum_{i=1}^N \frac{1}{3} a_i b_i^3 = 2 \cdot \frac{1}{3} B b^3 + \frac{1}{3} H t^3$$

5E

I VALORI MASSIMI DELLA TENSIONE TANGENZIALE SI RAGGIUNGONO NEL PUNTO MEDIO DI
OGNI TRATTO, IN CORRISPONDENZA DELLA PARETE DELLA SEZIONE.

5F

5A

I VALORI MASSIMI DELLA TENSIONE TANGENZIALE SI RAGGIUNGONO NEL PUNTO MEDIO DI OGNI TRATTO, IN CORRISPONDENZA DELLA PARETE DELLA SEZIONE.

5B

IN PARTICOLARE SI HA SULLE ALI:

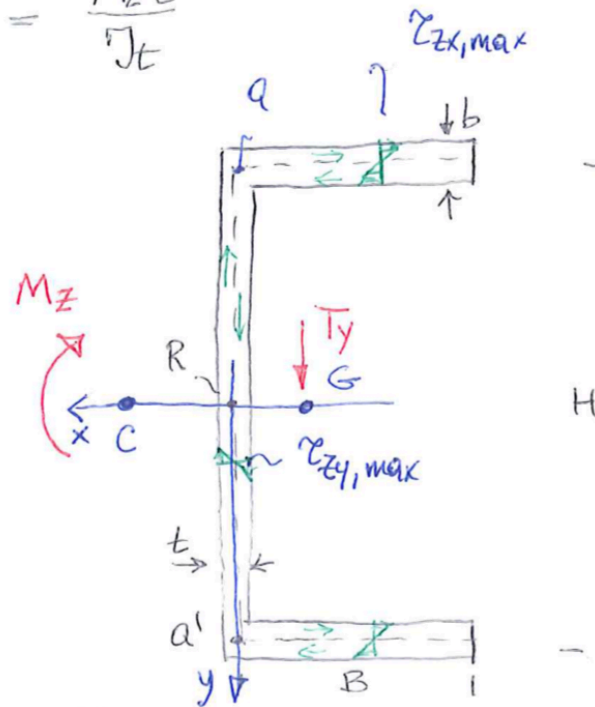
$$\tau_{zx, \max} = \frac{M_z b}{J_z}$$

E IN CORRISPONDENZA DELL'ASSE NEUTRO NELL'ANIMA:

$$\tau_{zy, \max} = \frac{M_z t}{J_z}$$

5C

5D



5E

5F