

Parte 1

MODELLISTICA DEI SISTEMI DINAMICI

1.1 Introduzione al corso

Un sistema generico può essere rappresentato attraverso un blocco in cui compaiono degli ingressi e delle uscite:

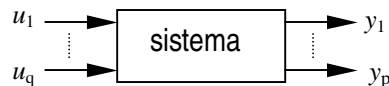


Figura 1- 1: rappresentazione a blocchi di un sistema di tipo MIMO (con p ingressi e q uscite); se $p = q = 1$ il sistema è di tipo SISO.

Un sistema fisico interagisce con l'ambiente esterno scambiando energia. Si dice ingresso ogni sollecitazione dell'ambiente esterno sul sistema, mentre l'uscita è qualsiasi azione del sistema sull'ambiente esterno. Il sistema preleva quindi energia dall'esterno, la modula e la restituisce all'ambiente sotto forma di lavoro utile: affinché questo avvenga è necessaria l'azione di un mediatore che immagazzini l'energia rendendo possibili le trasformazioni ingressi-stato e stato-uscita. Tale mediatore è detto variabile di stato e rappresenta l'energia interna del sistema.

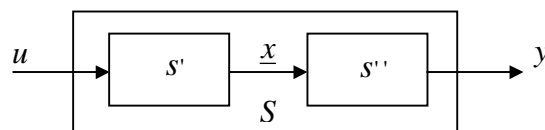


Figura 1- 2: la trasformazione ingresso-uscita è resa possibile dal mediatore variabile di stato

$$y = S(u) \Rightarrow y = s''(x) = s'' [s'(u)] \text{ ovvero } S = s'' \circ s'.$$

Al fine di analizzare le caratteristiche di un sistema (problema di analisi) è necessario procedere con l'identificazione, che consiste nel determinare il modello matematico che lega gli ingressi assegnati alle uscite note tramite misure. Il problema di analisi è un problema di tipo diretto con soluzione unica; Il problema inverso è costituito dalla sintesi di un sistema dagli ingressi assegnati e dalle uscite desiderate, cioè scelte come

obiettivo del progetto. Il problema di sintesi può avere infinite soluzioni ed è analogo al problema di identificazione.

Il problema fondamentale è quindi la determinazione della funzione di trasferimento di un sistema, che in genere è del tipo in Figura 1-3.

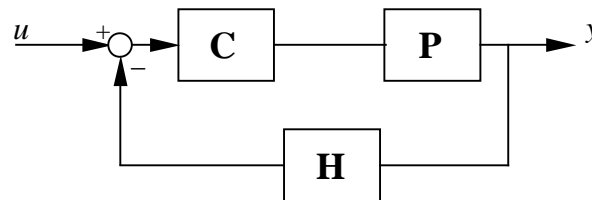


Figura 1-3: schema di un sistema a controreazione.

Nel procedimento di analisi si cerca il modello matematico che più si avvicina al sistema reale, dove con modello matematico si intende la descrizione matematica delle caratteristiche dinamiche del sistema.

Il modello matematico del sistema può assumere diverse forme, ad esempio si può esprimere attraverso un insieme di equazioni differenziali nel dominio del tempo (o della frequenza):

$$y = f\left(t, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{(m)}u}{dt^m}\right) \quad m \leq n \quad (1.1)$$

oppure mediante l'utilizzo delle variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = g(t, \underline{u}(t), \underline{x}(t)) \\ \underline{y}(t) = f(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

Se il modello è unico è possibile passare da una forma ad un'altra, fatte le opportune osservazioni sulla controllabilità ed osservabilità del sistema allo studio.

Si vedrà in seguito che un sistema è controllabile se agendo sulla sugli ingressi possibile ottenere le uscite desiderate, mentre è osservabile quando da una serie di misure sulle uscite è possibile risalire alla sua struttura.

Per ottenere il modello matematico di un sistema fisico è necessario in primo luogo predisporre un sistema di misura. Dalle misure si costruisce quindi un modello di tentativo e da tale modello, mediante un calcolatore, si deduce l'evoluzione teorica del sistema che viene confrontata con il comportamento effettivo rilevato, quindi si procede all'affinamento del modello matematico fino ad arrivare al livello di precisione desiderato.

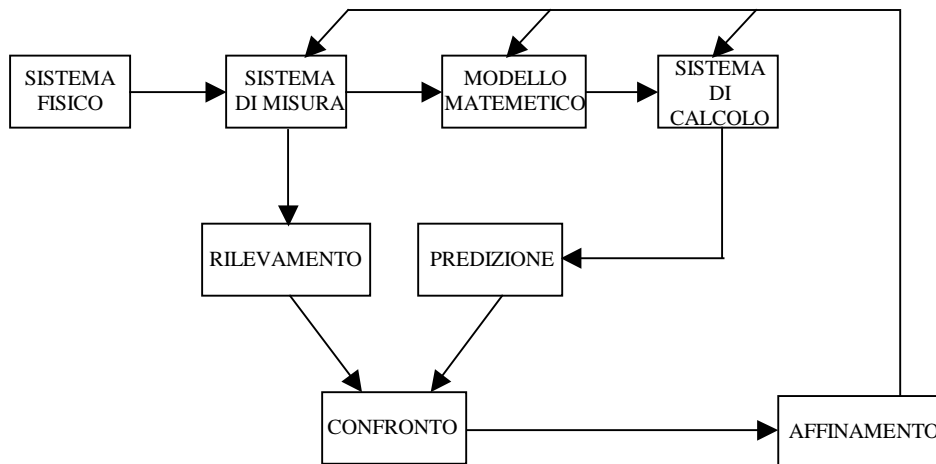


Figura 1- 4: procedura di affinamento di un modello matematico.

Nel definire un modello matematico si deve raggiungere un compromesso tra complessità e accuratezza: spesso non è conveniente appesantire troppo il modello per ottenere un affinamento modesto.

Sono quindi necessarie delle ipotesi di semplificazione legate all'obiettivo che si vuole raggiungere: un'ipotesi di semplificazione è considerata valida se una volta introdotta non toglie credibilità al modello, che continua quindi a fornire risultati aderenti a quelli sperimentali. Nella maggior parte dei casi un modello semplificato fornisce solamente una descrizione qualitativa del sistema fisico, mentre con un modello più dettagliato si riesce ad ottenere anche una aderenza quantitativa. Molto spesso si suppone che il sistema sia lineare ed a parametri concentrati, ipotesi che permette l'utilizzo delle equazioni differenziali ordinarie lineari per la modellistica.

In genere i modelli lineari a parametri concentrati sono validi nello studio di fenomeni a basse frequenze, mentre sono meno efficaci per descrivere i fenomeni a frequenza più elevata.

Poiché per i sistemi lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti, si può affermare che un modello lineare è soddisfacente se sperimentalmente si osserva che esiste un legame di tipo proporzionale tra ingresso e uscita.

Classici esempi di non linearità sono quelli di saturazione (Figura 1-5a) e di soglia (Figura 1-5b) che però possono essere trascurati in certi intervalli dei valori di ingresso.

Se il sistema non è lineare si effettuano, se possibile, delle linearizzazioni locali della caratteristica ingresso-uscita, per esempio mediante lo sviluppo in serie.

Sistemi tipicamente non lineari in tutto il loro campo di funzionamento sono i sistemi ON – OFF come i relè o apparecchi simili in cui gli stati sono solo due. In questi casi non è possibile linearizzare la caratteristica ingresso-uscita del sistema (Figura 1- 6).

In conclusione si può affermare che il modello migliore è quello che, essendo il più semplice possibile, fornisce all'utilizzatore tutti gli strumenti per i fini pratici che esso ha (controllo, regolazione, ottimizzazione etc.).

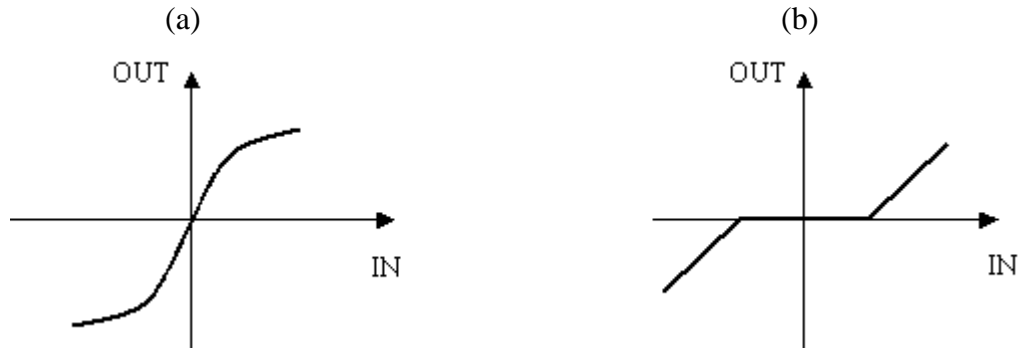


Figura 1- 5: effetti di saturazione (a) e soglia (b) nelle relazioni ingresso-uscita.

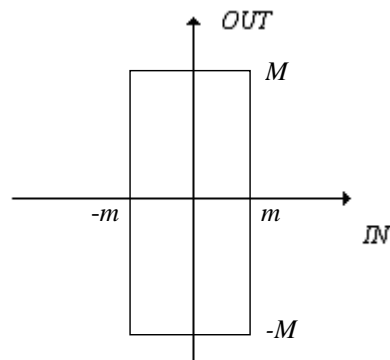


Figura 1- 6: caratteristica ingresso-uscita di un relè.

1. 2 Componenti elementari di un sistema dinamico

L'analisi di un sistema complesso consiste nell' individuare tutti i sistemi elementari che lo compongono; le equazioni caratteristiche dei componenti elementari sono note e tramite la loro composizione è possibile ricavare un modello matematico per il sistema oggetto dell'analisi.

I sistemi elementari sono sede dei fenomeni energetici di immagazzinamento, dissipazione e trasformazione; tali elementi sono ideali e/o puri, cioè si ipotizza che in un componente elementare avvenga uno ed uno solo dei fenomeni energetici considerati.

In realtà non esistono componenti elementari puri ma solo componenti che presentano un fenomeno in misura preponderante rispetto agli altri. Un elemento ideale puro è per definizione lineare, pertanto la sua equazione caratteristica è lineare.

In natura si osserva che esistono analogie tra i vari tipi di fenomeni, per esempio elettrici, meccanici e fluidodinamici, ed è quindi possibile individuare uno strumento unico per la loro modellistica, ovvero il grafo lineare.

1.2- 1 SISTEMI MECCANICI in traslazione

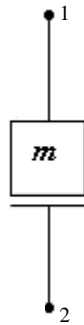


Figura 1-7: rappresentazione della massa negli schemi di rete.

Nei sistemi meccanici si individuano tre elementi ideali puri: massa molla e smorzatore. Si considereranno di seguito sistemi ad un solo grado di libertà che potrà essere traslazionale (il movimento avviene lungo una linea retta) o rotazionale (attorno all'asse del sistema). Si definisce massa pura di traslazione quell' elemento in cui gli effetti dissipativi ed elastici sono nulli e che può essere considerata come un corpo rigido; in altro modo si può dire che la massa è un sistema che immagazzina energia cinetica ed è sede di fenomeni inerziali.

Per i sistemi inerziali vale la seconda legge della dinamica classica espressa nelle diverse forme:

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad \underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{dt} \quad \underline{F} = m \frac{d\underline{s}^2}{dt^2} \quad (1.3)$$

si definisce quantità di moto la grandezza:

$$\underline{p} = m\underline{v} \quad (1.4)$$

combinando la (1.3) e la (1.4) si ricava la relazione:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = m\underline{a} = \underline{F} \quad (1.5)$$

Tutte queste leggi valgono se si assume la massa costante, cioè per velocità piccole rispetto alla velocità della luce; se invece la massa è in moto con una velocità prossima a quella della luce si ha che:

$$m_R = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.6)$$

dove m_R è la massa relativistica e m_0 la massa in quiete. L'andamento grafico della (1.6) è riportato in Figura 1- 8.

Si osservi come il grafico della relazione classica si sovrappone a quello della relazione relativistica per velocità piccole rispetto a quella della luce.

L'energia cinetica posseduta dalla massa è:

$$E_{cin} = \int_{t_1}^{t_2} Fv \, dt = \int_0^{p_f} v \, dp \quad (1.7)$$

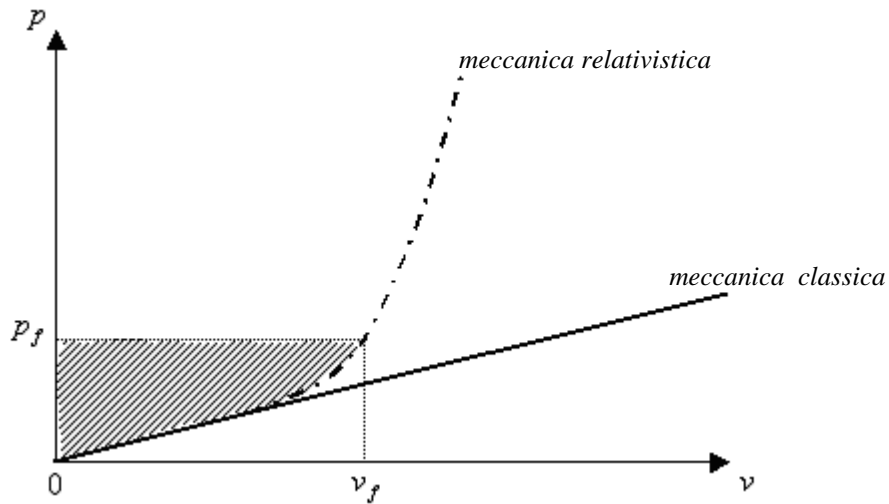


Figura 1- 8: andamento della relazione tra massa e quantità di moto e confronto tra la legge classica e relativistica

nel caso di elemento lineare la (1.7) diventa:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (1.8)$$

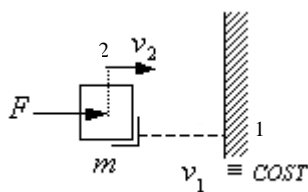


Figura 1-9: rappresentazione della massa in relazione al riferimento del sistema e alle grandezze coinvolte.

La massa ideale in traslazione si può definire in maniera più precisa: si dice massa ideale di traslazione qualsiasi elemento di un sistema meccanico le cui particelle sono rigidamente collegate, caratterizzate dall' avere velocità ed accelerazione istantanea

coincidenti; l'equazione caratteristica è del tipo:

$$p = f(v)$$

se $v \ll c$ allora la massa è anche ideale.

La massa schematizzata come in Figura 1-7 può essere considerata a tutti gli effetti un elemento a due terminali: nel terminale “2” si suppone applicata la velocità v_2 della massa in movimento mentre il secondo terminale “1” è caratterizzato dall’aver la velocità costante v_1 del sistema di riferimento (Figura 1-9) quindi, posto $v_{21} = v_2 - v_1$, la relazione costitutiva della massa ideale pura può essere espressa nei due modi:

$$F = m \frac{dv_{21}}{dt} \quad v_{21} = \int_0^t F dt + v_{21}(0) \quad (1.9)$$



Figura 1- 10: rappresentazione della molla negli schemi di rete.

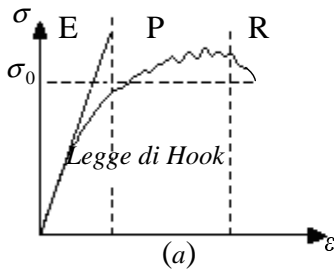
Un altro elemento passivo presente nei sistemi meccanici è la molla. Si definisce molla di traslazione l’elemento in cui si suppongono nulli i fenomeni inerziali e di attrito, sede di fenomeni elastici per i quali si ha immagazzinamento di energia potenziale elastica.

È possibile considerare la molla come un elemento a due terminali coincidenti con gli estremi della molla stessa. La forza di richiamo che la molla restituisce quando viene compressa o espansa cresce al crescere della deformazione che questa subisce. La sua equazione caratteristica è data dal legame tra la forza applicata F e la deformazione x :

$$x = f(F) \quad (1.10)$$

Snervamento: a differenti forze applicate può corrispondere la stessa deformazione. Il corpo elastico può rompersi quando:

$$\sigma_0 \leq \max\{\sigma(\varepsilon)\}.$$



- E: fase elastica
- P: fase plastica
- R: fase di rottura

Isteresi: nell’elemento si osserva una deformazione residua: in assenza di sollecitazione la deformazione è pari a $\varepsilon_0 \neq 0$.

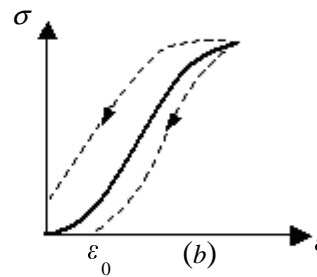


Figura 1- 11 Esempi di non-linearità della relazione pressione-deformazione nei fenomeni elastici: snervamento (a) e isteresi (b).

In generale la relazione (1.10) non è lineare: come si può vedere in Figura 1-11 le cause di non linearità sono principalmente due e sono dovute per esempio all'usura oppure a sollecitazioni che deformano in maniera permanente un materiale elastico.

La forza fluisce attraverso la molla rimanendo inalterata ed ha un comportamento analogo a quello della corrente negli elementi passivi. L'equazione costitutiva della molla è data dalla legge di Hook:

$$F = k(x_2 - x_1) \tag{1.11}$$

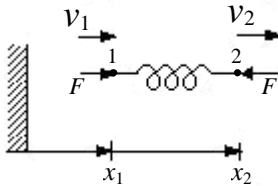


Figura1-12: rappresentazione della molla in relazione alle grandezze coinvolte e al riferimento del sistema.

che è valida per la molla ideale, ma che rispecchia il comportamento della molla reale in un certo campo di funzionamento, ovvero per piccole sollecitazioni.

La costante k è detta costante elastica della molla e dipende dalle caratteristiche geometriche e dal tipo di materiale di cui è costituita. Se per esempio si considera una barretta d'acciaio di lunghezza l e sezione A si osserva che $k = E \frac{A}{l}$ con E costante caratteristica del materiale.

Nella Figura 1-12 si osserva che:

$$v_2 - v_1 = v_{21} = \frac{dx_{21}}{dt} \tag{1.12}$$

sostituendo la legge di Hook nella forma:

$$x_{21} = \frac{1}{k} F + x_{21}(0) \tag{1.13}$$

si ottiene la relazione costitutiva:

$$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} \tag{1.14a}$$

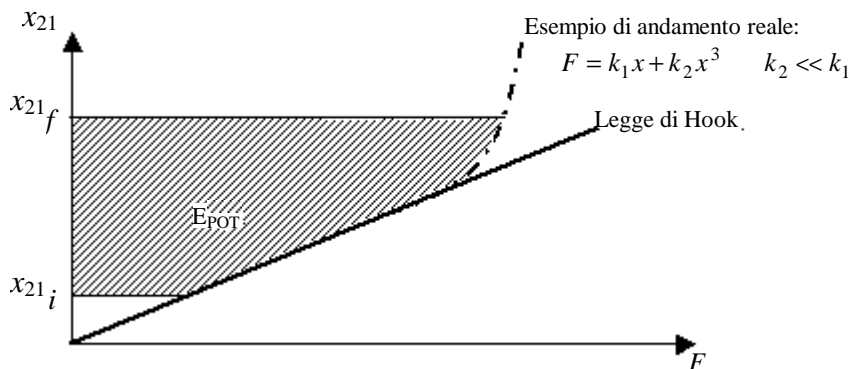


Figura 1- 13: Energia potenziale elastica in un tipico andamento reale della relazione forza-deformazione per i fenomeni elastici.

che può anche essere scritta in forma integrale:

$$F = \int_0^t v \, dt + F(0) \tag{1.14b}$$

l'energia potenziale immagazzinata nella molla è data da:

$$\int_{t_1}^{t_2} Fv \, dt = \int_{x_{21in}}^{x_{21fin}} F dx_{21} \tag{1.15}$$

ed è una funzione dello stato di sforzo dell'elemento; nel campo di linearità della relazione forza-deformazione questa vale:

$$E_{POT} = \frac{1}{2k} F^2 \tag{1.16}$$

Ogni sistema meccanico è sede di fenomeni di dissipazione. Si definisce dissipatore meccanico qualsiasi elemento che non presenta fenomeni conservativi dell'energia. Esso evidenzia essenzialmente gli attriti dovuti ai contatti. Il dissipatore meccanico è rappresentato schematicamente in Figura 1- 14.

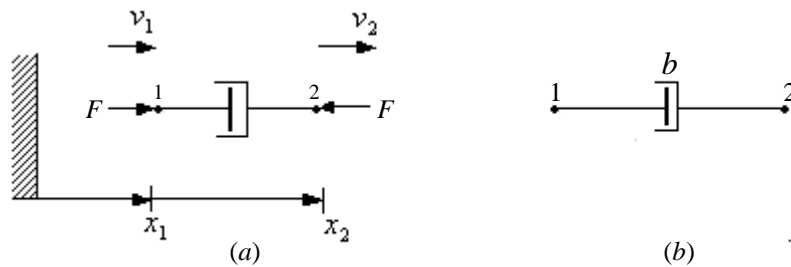


Figura 1- 14: rappresentazione del dissipatore meccanico in relazione al riferimento del sistema (a) e negli schemi di rete (b).

La forza di attrito dipende dalla differenza tra le velocità degli elementi che sono a contatto, quindi la relazione costitutiva del dissipatore è del tipo:

$$F = f(v_2 - v_1) \tag{1.17}$$

ed i segni di v_{21} e F sono concordi. Nel caso di elemento ideale la relazione è:

$$F = bv_{21} \tag{1.18}$$

dove b è il coefficiente di attrito e dipende dal materiale di cui sono costituite le superfici poste a contatto. L'espressione dell'energia dissipata è:

$$E_d = \int_0^t Fv_{21} dt \tag{1.19}$$

e nel caso particolare in cui v_{21} e f sono costanti si ha che:

$$E_d = bv_{21}^2 t \tag{1.20}$$

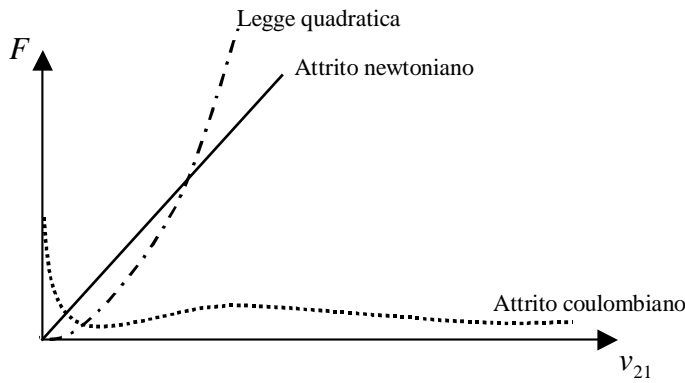
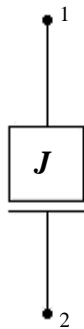


Figura 1- 15: relazione velocità-forza di attrito nelle diverse forme.

1.2- 2 SISTEMI MECCANICI in rotazione

Anche per i sistemi meccanici in rotazione si possono individuare tre componenti elementari che sono la massa rotante, la molla di torsione e il dissipatore torsionale.



Il momento di inerzia assiale J è la misura dell'inerzia di un corpo messo in rotazione attorno ad un determinato asse, analogamente alla massa inerziale per il movimento di un corpo in linea retta. La relazione costitutiva per la massa ideale di rotazione è:

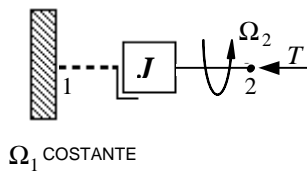
$$T = J \frac{d\Omega_{21}}{dt} \tag{1.21a}$$

Figura 1-16: a) rappresentazione della massa rotante.

La stessa relazione (1.21a) può essere scritta in forma integrale:

$$\Omega_{21} = \frac{1}{J} \int_0^t T dt + \Omega_{21}(0) \tag{1.21b}$$

In generale il momento di inerzia è un tensore 3×3 e si ottiene sviluppando la seguente espressione:



$$\begin{aligned} J &= \sum_i m_i R_i^2 \\ &= \sum_i m_i (|r_i| \sin \theta_i)^2 \\ &= \sum_i m_i |r_i \times n|^2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Figura 1-16: b) grandezze e riferimento.

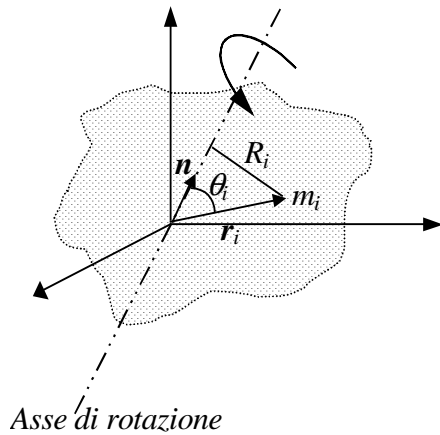


Figura 1-17: sistema di punti in rotazione attorno ad un asse.

che fornisce i momenti di inerzia rispetto ai tre assi coordinati:

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &\equiv \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
 J_{yy} &\equiv \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\
 J_{zz} &\equiv \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

e i prodotti di inerzia:

$$I_{xy} \equiv -\sum_i m_i x_i y_i \quad I_{xz} \equiv -\sum_i m_i x_i z_i \quad I_{yz} \equiv -\sum_i m_i y_i z_i \tag{1.24}$$

Nel caso particolare dei sistemi meccanici, la massa rotante è solitamente costituita da un corpo rigido che ruota attorno al proprio asse di simmetria, dove la posizione relativa delle particelle che lo compongono non varia: questo riduce il momento di inerzia a uno scalare che si ottiene come risultato dell'integrale di definito:

$$J_{zz} = \int_M (x^2 + y^2) dm \tag{1.25a}$$

Se il solido è omogeneo la densità di massa ρ è costante la (1.25a) diventa:

$$J_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \tag{1.25b}$$

in quanto è possibile definire $dm = \rho dV$.

Se si considera come esempio un cilindro di massa m , lunghezza l e raggio r che ruota attorno al proprio asse si ha:

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2 l} \quad \text{e} \quad J = \rho \int_0^l dl \int_0^r R^3 dR \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{1}{2} m r^2$$

Il momento della forza (o coppia) T è dato dal il prodotto vettoriale fra la forza F che mette in rotazione un corpo attorno al proprio asse e il raggio di rotazione r :

$$\underline{T} = \underline{r} \times \underline{F}$$

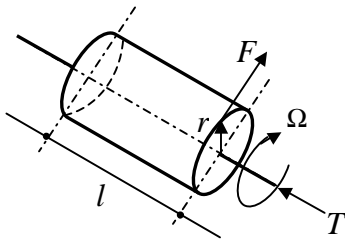


Figura 1-18: cilindro in rotazione attorno al proprio asse.

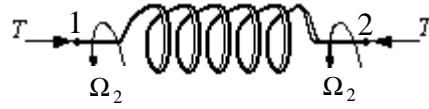


Figura 1-19: rappresentazione della molla di torsione.

Per le rotazioni è assunta la convenzione destrorsa della vite destra. I vettori coppia e velocità angolare giacciono sull'asse di rotazione.

Il comportamento della molla di torsione ideale è descritto dalla relazione:

$$T = K \vartheta_{21} \tag{1.26}$$

dove ϑ_{21} rappresenta lo sfasamento dei due estremi $\theta_2 - \vartheta_1$, K è detta rigidità torsionale. La relazione costitutiva si ottiene derivando la (1.26):

$$\Omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt} \tag{1.27a}$$

che in forma integrale diventa:

$$T = k \int_0^t \Omega_{21} + \Omega_{21}(0) \tag{1.27b}$$

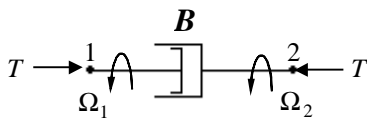


Figura 1-20: rappresentazione del dissipatore torsionale negli schemi di rete.

Il dissipatore torsionale è l'elemento che negli schemi rappresenta l'attrito rotante. L'attrito genera una coppia opposta al moto rotatorio di un corpo ed è direttamente proporzionale alla sua velocità di rotazione. Il coefficiente di proporzionalità B è detto coefficiente di attrito rotante.

La relazione costitutiva è:

$$T = B\Omega_{21} \tag{1.28}$$

Nella Tabella 1 sono riportate le corrispondenze tra le grandezze della meccanica traslazionale e quelle della meccanica rotazionale.

Posizione	x	Angolo	ϑ
Velocità	v	Velocità angolare	Ω
Accelerazione	a	Accelerazione angolare	χ
Forza	F	Coppia	T
Massa	m	Momento di inerzia	J
Coeff. di attrito	b	Coeff. di attrito rotante	B
Costante elastica	k	Rigidità torsionale	K

Tabella 1: corrispondenza tra le grandezze della meccanica di traslazione e rotazionale.

1.2- 3 TRASFORMATORI MECCANICI

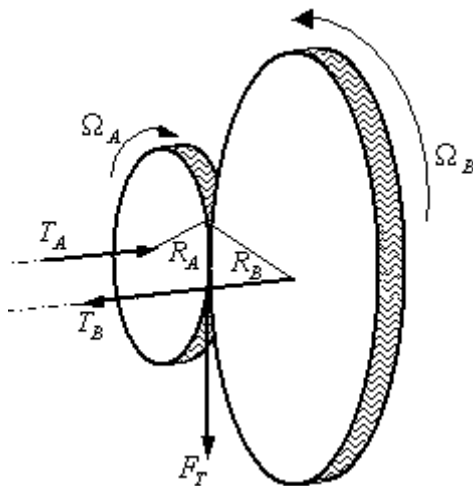
Si definiscono trasformatori meccanici ideali gli elementi che modificano coppie, forze e/o velocità senza attriti ed inerzia.

Un esempio classico è il riduttore ad ingranaggi in cui la primitive ruotano senza strisciare. Gli ingranaggi garantiscono l'assenza strisciamento tra gli elementi rotanti quindi si può scrivere che:

$$R_A \Omega_A dt = R_B \Omega_B dt \tag{1.29}$$

l'equilibrio dinamico per ciascuna ruota è dato da:

$$T_A = F_T R_A \quad T_B = F_T R_B \tag{1.30}$$



combinando le (1.30) si ottiene l'espressione

$$\tau = \frac{T_A}{T_B} = \frac{R_A}{R_B} = -\frac{\Omega_B}{\Omega_A} \tag{1.31}$$

che fornisce il rapporto di trasformazione. Le coppie di ingresso e di uscita sono T_A e T_B . La relazione costitutiva ottenuta soddisfa la conservazione della potenza:

$$P_{in} + P_{out} = 0 \tag{1.32a}$$

infatti:

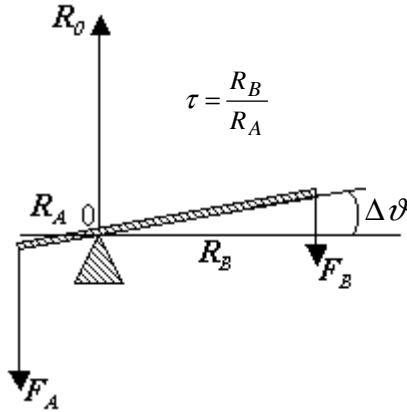
$$T_A \Omega_A + T_B \Omega_B = T_A \Omega_A - \frac{1}{\tau} T_A (\tau \Omega_A) = 0 \tag{1.32b}$$

Figura 1-21: esempio di trasformatore meccanico: il riduttore ad ingranaggi:

La convenzione usata per i segni è quella in base alla quale la potenza ha segno positivo quando un sistema passivo riceve energia dall'esterno.

Un altro esempio di trasformatore meccanico è la leva.

Si consideri l'asta rigida e l'angolo $\Delta\vartheta$ piccolo in modo tale che R_A e R_B possano considerarsi pressoché costanti. In questo caso si ha che:



$$F_A R_A = F_B R_B \quad \text{da cui:} \quad F_A = \tau F_B \quad (1.33)$$

$$\frac{v_A}{R_A} = -\frac{v_B}{R_B} \quad \text{da cui:} \quad v_A = -\frac{1}{\tau} v_B \quad (1.34)$$

che verificano le espressioni di flusso di energia:

$$v_B F_B + v_A F_A = v_B F_B + \left(-\frac{1}{\tau} v_B \cdot \tau F_B\right) = 0$$

Figura 1-22: Schema di una leva.

1.2- 4 SISTEMI ELETTRICI

I sistemi elettrici elementari sono dipoli passivi lineari e dalla loro connessione è possibile ottenere un sistema elettrico complesso. Le relazioni che definiscono tali dipoli sono ottenute mediante il principio di conservazione della carica.

Nei sistemi elettrici si individuano elementi che dissipano energia (resistore), che la immagazzinano (condensatore e induttore) e che la trasformano (trasformatore).

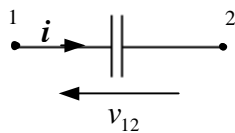


Figura 1-23: schema di rete del condensatore.

Il condensatore puro è quel bipolo lineare che tende a mantenere costante la tensione, in cui sono assenti fenomeni dissipativi e di conservazione di energia magnetica.

L'equazione caratteristica è del tipo:

$$q = f(v_{12}) \quad (1.35)$$

dove q è la carica immagazzinata nel condensatore.

Nel caso in cui l'elemento sia lineare la relazione costitutiva è data dalla (1.36):

$$q = c v_{12} \quad (1.36)$$

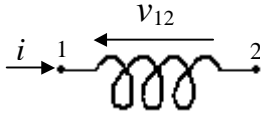
da cui si ha, posto $i = dq / dt$:

$$i = c \frac{dv_{12}}{dt} \quad \text{e} \quad v_{12} = c \int_0^t i dt + v_{12}(0) \quad (1.37)$$

Dove $v_{12} = v_1 - v_2$ è la differenza di potenziale ai morsetti.

L'energia elettrica immagazzinata nel condensatore è data dall'espressione:

$$E_C = \int_0^t v_{12} i dt = c \int_0^t v_{12} dv_{12} = \frac{1}{2} c v_{12}^2 \quad (1.38)$$



L'induttore puro è quel bipolo che non presenta fenomeni di dissipazione e di conservazione di energia elettrica e tende a mantenere costante la corrente.

La sua equazione caratteristica è del tipo:

Figura 1-24: schema elettrico dell'induttore.

$$\Phi_L = f(i) \quad (1.39)$$

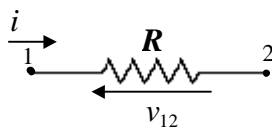
dove Φ_L è il flusso concatenato con il dipolo. Se il dipolo è lineare si ha:

$$\Phi_L = Li \quad (1.40)$$

da cui, posto $v_{12} = \frac{d\Phi_L}{dt}$ e se l'elemento è puro, si ottiene la relazione costitutiva:

$$v_{12} = L \frac{di}{dt} \quad \text{e} \quad i = \frac{1}{L} \int_0^t v_{12} dt + i(0) \quad (1.41)$$

L'energia magnetica immagazzinata nell'induttore è data dalla (1.42).



$$E_L = \int_0^t v_{12} i dt = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1.42)$$

Figura 1-25: resistenza negli schemi elettrici.

Il dissipatore puro o resistore puro è un bipolo dove sono assenti i fenomeni di conservazione dell'energia. La sua relazione caratteristica è:

$$i = f(v_{12}) \quad (1.43)$$

Quindi se la differenza di potenziale ai terminali è nulla non fluisce corrente attraverso il bipolo, ovvero il grafico (v,i) passa per l'origine.

Nel caso di bipolo lineare si ha:

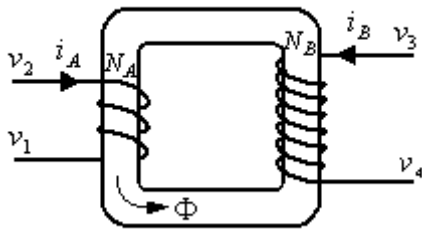
$$i = \frac{1}{R} v_{12} \quad (1.44)$$

che è meglio nota come legge di Ohm. L'energia dissipata dal resistore è in generale:

$$E_d = \int_0^T v_{12} i dt \quad (1.45a)$$

se v_{12} e i sono costanti la (1.45a) diventa:

$$E_d = \frac{v_{12}^2}{R} T = Ri^2 T \quad (1.45b)$$



Il trasformatore elettrico ideale puro è un quadripolo che non dissipa, non conserva ma trasforma l'energia.

Se si suppone che il flusso Φ sia lo stesso attraverso tutte le spire del secondario, è possibile scrivere le relazioni:

Figura 1-26: trasformatore elettrico.

$$\phi_{43} = N_B \Phi \tag{1.46}$$

$$v_{43} = \frac{d\phi_{43}}{dt} \tag{1.47}$$

che combinate danno la (1.48):

$$v_{43} = N_B \frac{d\Phi}{dt} \tag{1.48}$$

la stessa relazione si può scrivere per la differenza di potenziale al primario:

$$v_{21} = N_A \frac{d\Phi}{dt} \tag{1.49}$$

quindi la relazione costitutiva, nel caso di quadripolo lineare, è data da:

$$v_{OUT} = \frac{N_B}{N_A} v_{IN} = n v_{IN} \tag{1.50}$$

dove n è il rapporto di trasformazione. Si osservi che il segno delle v_{OUT} e v_{IN} dipende dal verso degli avvolgimenti.

Per il trasformatore ideale vale la relazione:

$$P_{IN} + P_{OUT} = 0$$

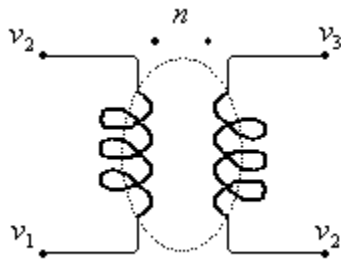


Figura 1-27: schema del trasformatore.

quindi se la potenza in ingresso è positiva e quella di uscita negativa, si ha che il rapporto di trasformazione è negativo:

$$V_{IN} I_A = -V_{OUT} I_B = -n V_{IN} I_B$$

$$\frac{I_A}{I_B} = -n$$

negli schemi il trasformatore è indicato come rappresentato nella Figura 1-27, dove i puntini indicano i terminali a potenziale maggiore.

1.3 Analogie e generalizzazione

Se si considerano gli elementi caratteristici dei sistemi meccanici ed elettrici e le loro relazioni costitutive si nota una certa analogia nella forma delle equazioni, per esempio per la massa e il condensatore si ha:

$$F = m \frac{dv_{12}}{dt} \quad \text{e} \quad i = c \frac{dv_{12}}{dt} \quad (1.51)$$

(a)

Forza F	Corrente i
Velocità v	Tensione v_{12}
Massa m	Capacità C
Costante elastica $1/k$	Induttanza L
Coeff. di attrito b	Conduttanza $1/R$

(b)

Forza F	Tensione v_{12}
Velocità v	Tensione v_{12}
Massa m	Induttanza L
Costante elastica $1/k$	Capacità C
Coeff. di Attrito b	Resistenza R

Tabella 2: analogia massa-capacità (a) e massa-induttanza (b).

Di analogie elettro-meccaniche ne sono state proposte due: una massa-capacità (Tabella 2a) e una massa-induttore (Tabella 2b).

La prima è preferibile perché presenta una similitudine strutturale tra sistemi elettrici e meccanici, perciò è possibile associare alla similitudine delle equazioni caratteristiche una similitudine di schematizzazione grafica che verrà utilizzata per arrivare alla scrittura del modello matematico di un sistema generico attraverso l'uso di procedure sistematiche. In particolare si può osservare che due sistemi analoghi hanno lo stesso grafo lineare, ad eccezione dei sistemi elettrici dove si trovano condensatori non connessi a terra: in questo caso non esiste un analogo sistema meccanico per la proprietà della massa di essere sempre misurata rispetto al riferimento del sistema e non rispetto ad un altro punto.

Tuttavia ciò non comporta grosse difficoltà perché in genere si preferisce studiare i sistemi meccanici con riferimento a quelli elettrici e non vice-versa, in altre non è usuale associare ad una rete elettrica una rete meccanica, ma è più comune l'analogia inversa.

L'analogia massa capacità è basata sulle caratteristiche fisiche delle variabili coinvolte nei rispettivi fenomeni. La forza e la corrente possono essere considerate come variabili di flusso (tipo f) mentre la velocità e la tensione sono variabili di posizione (tipo v_{ij}).

Le grandezze come forze e correnti "attraversano" i componenti passivi restando inalterate, mentre le grandezze come la velocità e la tensione variano tra gli estremi dell'elemento; questo comporta un diverso procedimento di misura per le due classi di grandezze: per le misure di variabili di tipo f gli strumenti devono essere inseriti in serie all'elemento, mentre per le variabili di tipo v_{ij} devono essere inseriti in parallelo.

Il comportamento degli elementi passivi ideali nei vari sistemi può essere descritto mediante tre tipi di equazioni caratteristiche generalizzate scritte in funzione delle variabili di posizione e di flusso.

Il primo elemento generalizzato è quello che immagazzina energia tramite la variabile di posizione e viene detto elemento di tipo A o capacità generalizzata, la cui relazione costitutiva generalizzata è la seguente:

$$f = C_{GEN} \frac{dv_{12}}{dt} \text{ oppure } v_{12} = \frac{1}{C_{GEN}} \int_0^t f dt + v_{12}(0) \quad (1.52)$$

Il secondo elemento generalizzato è detto di tipo T o induttanza generalizzata, il quale immagazzina energia mediante la variabile di flusso, la cui relazione costitutiva è:

$$v_{12} = L_{GEN} \frac{df}{dt} \text{ oppure } f = \frac{1}{L_{GEN}} \int_0^t v_{12} dt + f(0) \quad (1.53)$$

IL terzo elemento generalizzato è detto di tipo D o resistenza generalizzata ed è sede di soli fenomeni dissipativi. La relazione costitutiva è:

$$v_{12} = R_{GEN} f \text{ oppure } f = \frac{1}{R_{GEN}} v_{12} \quad (1.54)$$

Infine per i trasformatori ideali valgono le relazioni generalizzate:

$$v_1 = n v_2 \text{ oppure } f_1 = -\frac{1}{n} f_2 \quad (1.55)$$

con la considerazione che il rapporto di trasformazione è positivo o negativo a seconda delle convenzioni assunte e/o dalla natura fisica del dispositivo.

1.3- 1 ENERGIA E POTENZA

In tutti gli elementi ideali che sono stati esaminati la potenza che determina i fenomeni energetici è espressa come il prodotto scalare tra la variabile di flusso e la variabile di posizione:

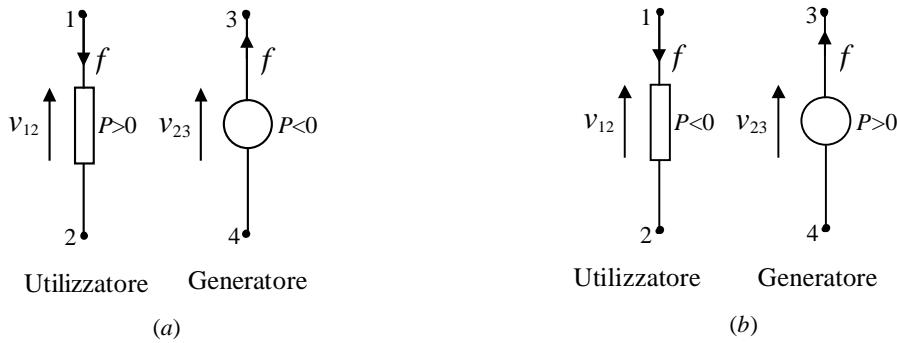
$$P = f \cdot v_{12} \quad (1.56)$$

l'energia è l'integrale della potenza nel periodo di tempo di interesse:

$$E = \int_0^{T_{FINALE}} P dt \quad (1.57)$$

L'energia immagazzinata negli elementi ideali dipende solo dai valori finali delle variabili di flusso e posizione in quanto nell'integrazione si riesce ad estrarre il tempo; per quanto riguarda gli elementi che immagazzinano energia mediante la variabile di flusso si ha:

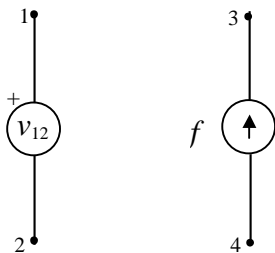
$$E_{L_{GEN}} = \int_0^{T_{FINALE}} f \cdot v_{12} dt = L_{GEN} \int_0^{f(T_{FINALE})} f df = \frac{1}{2} L_{GEN} f_{FINALE}^2 \quad (1.58)$$



Convenzione degli utilizzatori: la potenza è considerata positiva quando la variabile f fluisce dal terminale con variabile di posizione maggiore verso il terminale con variabile di posizione minore.

Convenzione dei generatori: la potenza è considerata positiva quando la variabile f fluisce attraverso l'elemento nel verso crescente della variabile di posizione.

Figura 1-28: nella rappresentazione schematica delle variabili di posizione il verso della freccia indica la variabile maggiore (per esempio in figura (a) $v_1 > v_2$) mentre, nel caso delle variabili di flusso, il verso della freccia indica semplicemente il verso col quale la variabile f attraversa il bipolo. Come conseguenza della convenzione degli utilizzatori si ha che f è da considerare positiva se attraversa il bipolo da v_1 a v_2 , con $v_1 > v_2$. Per la convenzione dei generatori il comportamento è duale.



Sorgente ideale di variabile di posizione: **Sorgente ideale di variabile di flusso:**

$$v_{12} = v_g \qquad v_{34} \text{ qualunque}$$

$$f \text{ qualunque} \qquad f = f_g$$

Figura 1-29: le sorgenti ideali fissano la variabile di posizione o la variabile di flusso ad un valore noto, rispettivamente ai capi o attraverso gli elementi a cui sono connessi, con una legge di variazione nota. Sono dei bipoli attivi in quanto forniscono in maniera continua energia al sistema. Il valore della variabile non definita dipende dalle caratteristiche del sistema su cui agisce la grandezza nota. Secondo la convenzione degli utilizzatori la potenza fornita da un generatore è negativa. Gli schemi a lato vengono utilizzati nella rappresentazione dei sistemi attraverso i grafi lineari (par. 1-6) e negli schemi di rete.

e analogamente per gli elementi che immagazzinano energia mediante la variabile di posizione:

$$E_{C_{GEN}} = \int_0^{T_{FINALE}} f \cdot v_{12} dt = C_{GEN} \int_0^{v(T_{FINALE})} v_{12} dv_{12} = \frac{1}{2} C_{GEN} v_{12,FINALE}^2 \quad (1.59)$$

Contrariamente alle energie immagazzinate l'energia dissipata dal dissipatore ideale dipende dai valori istantanei delle variabili di flusso e di posizione ed è quindi necessario conoscere la legge di variazione di almeno una delle due grandezze ai fini del calcolo della (1.56).

Il segno della potenza si stabilisce in base alla convenzione sui segni che si decide di adottare; esistono due convenzioni: la prima è detta convenzione degli utilizzatori e stabilisce che è positiva la potenza assorbita da un elemento mentre è negativa la potenza erogata da un elemento; la seconda convenzione, detta dei generatori, è duale a quella degli utilizzatori. In Figura 1-28 sono descritte le due convenzioni per i sistemi elettrici.

Ogni elemento utilizzatore è di tipo passivo in quanto non è in grado di generare energia ma può solamente immagazzinarla per restituirla al sistema, oppure può dissiparla sotto le varie forme, mentre ogni elemento generatore è di tipo attivo in quanto fornisce energia con continuità verso l'esterno e non è in grado di assorbirla dal sistema; Il resistore per esempio è un bipolo passivo in quanto dissipa energia.

Un sistema si comporta da generatore o da utilizzatore indipendentemente dalla convenzione stabilita, che è utile ai fini della modellistica ma non influisce nel comportamento del sistema.

Negli schemi qualsiasi sorgente di variabile di flusso o di posizione viene rappresentata come si rappresentano rispettivamente il generatore di corrente e il generatore di tensione nei circuiti elettrici. In Figura 1-29 oltre ai due tipi di generatore sono riportate le rispettive relazioni costitutive.

1.4 Sistemi fluidi

I sistemi fluidi possono essere trattati come sistemi a parametri concentrati se sono composti da grossi serbatoi collegati da tubazioni lunghe, in modo tale da considerare il moto del **fluido stazionario, con velocità delle particelle costante.**

L'ulteriore ipotesi che si introduce è che il fluido sia incomprimibile (a densità costante) e le tubazioni ed i serbatoi indeformabili.

L'aspetto energetico nei sistemi fluidi è legato all'energia cinetica dalle particelle in moto, all'energia dissipata per attrito tra gli strati in moto relativo e, per i fluidi immagazzinati in un serbatoio, dall'energia di pressione.

Si definisce portata volumetrica q la quantità di fluido che attraversa la sezione di una tubazione nell'unità di tempo. Se valgono le ipotesi di moto stazionario la portata della tubazione è costante attraverso ogni sua sezione e può essere trattata come variabile di flusso per la modellistica. Si ha quindi:

$$q = Sv_{\text{fluido}} \quad (1.60)$$

dove S è la misura della sezione della tubazione.

Dalla (1.60) si ricava il volume del fluido che attraversa una sezione della tubazione nell'istante di tempo dt , che può essere espresso come:

$$dV = Sdh = qdt \tag{1.60a}$$

ovvero:

$$V = Sh = \int_0^T qdt \tag{1.60b}$$

dove h è la lunghezza del "cilindro di fluido" che attraversa la sezione S nell'intervallo di tempo T .

La pressione del fluido è invece definita come la forza che il fluido esercita sulle pareti di un recipiente che lo contiene.

Si consideri per esempio il serbatoio in Figura 1-31: la pressione P_1 è tanto maggiore quanto più alta è la colonna sovrastante la base del serbatoio, mentre diminuisce attraverso le sezioni più vicine al pelo del fluido.

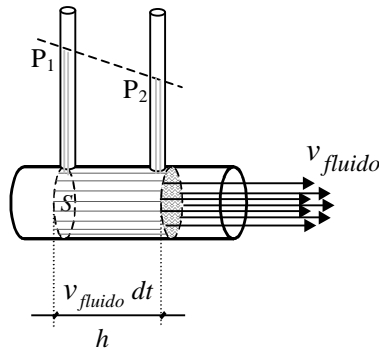


Figura 1-30: la portata volumetrica di una tubazione è definita come il volume di fluido che ne attraversa una sezione nell'unità di tempo. Si considera il moto del fluido stazionario, ipotesi verosimile per i liquidi immagazzinati in grandi serbatoi collegati da lunghe tubazioni. Per velocità del fluido si intende la velocità media delle particelle che lo compongono. La pressione diminuisce nel verso in cui il fluido scorre attraverso la tubazione.

E' quindi naturale considerare la pressione come variabile di posizione, che è data dalla legge di Stevino:

$$P_1 - P_2 = \rho gh \tag{1.61}$$

dove ρ rappresenta la densità del fluido, g la costante gravitazionale e h l'altezza della colonna del fluido nel serbatoio.

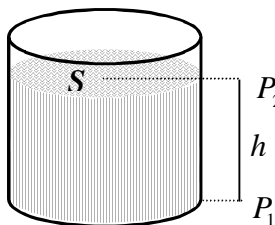


Figura 1-31: il serbatoio nei sistemi fluidi è un elemento che immagazzina energia potenziale di tipo gravitazionale e può essere pertanto considerato come l'equivalente del condensatore nei sistemi elettrici.

Il fluido nel serbatoio è soggetto alla forza di gravità, quindi il serbatoio è a tutti gli effetti pratici un accumulatore di energia potenziale gravitazionale ed è quindi analogo al condensatore per i sistemi elettrici, come alla massa per i sistemi meccanici.

Se si mettono in relazione le due variabili di flusso e di posizione definite in precedenza, combinando le relazioni (1.60b) e (1.61) si ottiene la relazione costitutiva del sistema descritto in figura 1-32, che associa fisicamente le due grandezze:

$$P_{12} = \frac{\rho g}{S} \int_0^T q dt \tag{1.62a}$$

nel caso in cui la pressione iniziale è non nulla la (1.62a) diventa:

$$P_{12} = \frac{1}{C_f} \int_0^T q dt + P_{12}(0) \tag{1.62b}$$

oppure in forma differenziale:

$$q = C_f \frac{dP_{12}}{dt} \tag{1.62c}$$

dove si definisce la capacità fluida $C_f = \frac{S}{\rho g}$.

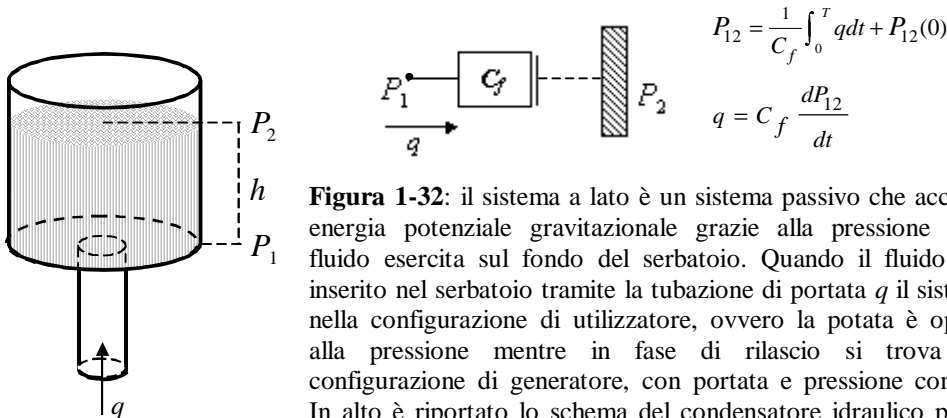


Figura 1-32: il sistema a lato è un sistema passivo che accumula energia potenziale gravitazionale grazie alla pressione che il fluido esercita sul fondo del serbatoio. Quando il fluido viene inserito nel serbatoio tramite la tubazione di portata q il sistema è nella configurazione di utilizzatore, ovvero la portata è opposta alla pressione mentre in fase di rilascio si trova nella configurazione di generatore, con portata e pressione concordi. In alto è riportato lo schema del condensatore idraulico puro in accordo con la convenzione degli utilizzatori e le relative equazioni costitutive. Nello schema si considera P_2 come pressione di riferimento.

L'induttanza fluida pura è un elemento che immagazzina energia grazie alla portata, cioè grazie a fenomeni di tipo cinetico.

Si consideri per esempio la tubazione con portata q e lunghezza l alimentata a regime e riportata in Figura 1-33: se in un certo istante si chiude l'alimentazione si nota che il fluido continua a scorrere con pressione decrescente fino ad esaurimento e analogamente, in fase di accensione, la pressione si porterà a regime sulla tubazione in un certo intervallo di tempo: il sistema è sede di un fenomeno induttivo.

L'equilibrio dinamico del sistema è dato dalla legge di Newton che fornisce la risultante delle forze applicate al fluido in movimento dentro la tubazione:

$$R = ma = m \frac{dv_{\text{fluido}}}{dt} \tag{1.63}$$

che si può scrivere anche in termini di pressione:

$$R = S(P_1 - P_2) = SP_{12} \tag{1.64}$$

combinando assieme le due equazioni (1.63) e (1.64), ricordando che la massa m del fluido è data da:

$$m = \rho Sl \tag{1.65}$$

si ottiene la relazione:

$$P_{12} = \rho l \frac{dv_{\text{fluido}}}{dt} \tag{1.66}$$

da cui, inserendo la definizione di portata volumetrica (1.60), si ottiene la relazione costitutiva dell'induttore fluido ideale puro:

$$P_{12} = L_f \frac{dq}{dt} \tag{1.67a}$$

l'induttanza fluida è definita come segue:

$$L_f = \frac{\rho l}{S} \tag{1.67b}$$

La stessa relazione costitutiva si può scrivere in forma integrale:

$$q = \frac{1}{L_f} \int_0^T P_{12} dt + q(0) \tag{1.67c}$$

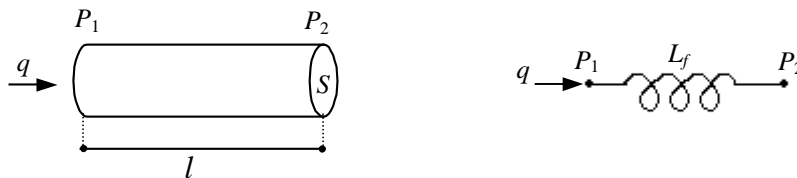


Figura 1-33: sistema fluido sede di fenomeni induttivi. A fianco lo schema dell'induttanza fluida ideale pura.

La distribuzione delle particelle del fluido in moto dentro una tubazione è rappresentata approssimativamente in Figura 1-34. Da questa si evince che sono le particelle a ridosso dell'asse del tubo ad avere la velocità massima, che diminuisce verso le pareti a causa dell' attrito viscoso.

Questo fenomeno diventa meno evidente all' aumentare della velocità media del fluido e/o all'aumentare del diametro del tubo: in questi casi gli effetti dissipativi sono trascurabili mentre diventa preponderante il fenomeno induttivo.

La relazione costitutiva per il dissipatore fluido ideale puro è:

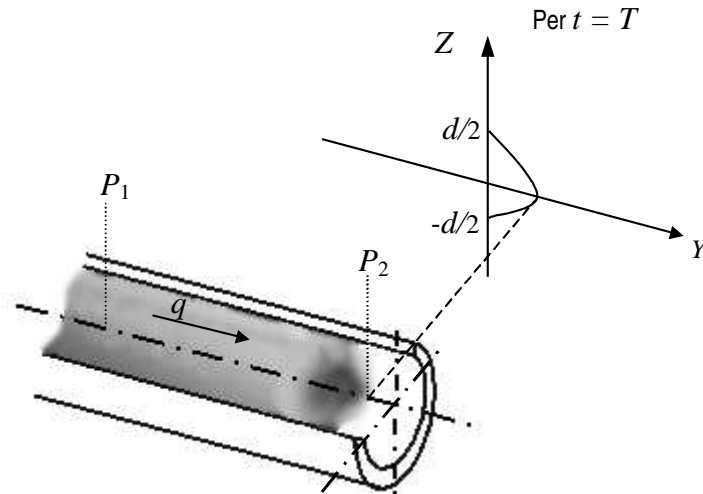


Figura 1-34: esempio di distribuzione delle particelle del fluido in moto: nell'estremità con pressione minore, immaginando di fotografare il fluido in un istante generico $t = T$, si osserva che le particelle con velocità maggiore sono quelle a ridosso dell'asse del tubo, infatti le particelle a ridosso delle pareti sono più lente di quelle centrali perché il loro moto è ostacolato dall'attrito viscoso.

La relazione costitutiva per il dissipatore fluido ideale puro è:

$$P_{12} = R_f q \tag{1.68}$$

dove R_f è la resistenza fluida che assume diversi valori a seconda del tipo di fenomeno che si studia.

Un sistema come quello in Figura 1-35 è un trasformatore fluido. Due pistoni rigidamente accoppiati e di sezione differente mantengono la camera centrale alla pressione costante di riferimento P_1 . per l'equilibrio dei pistoni vale l'equazione:

$$S_A P_{A1} = S_B P_{B1} \tag{1.69}$$

da cui:

$$\frac{P_{B1}}{P_{A1}} = \frac{S_A}{S_B} = n \tag{1.70}$$

la (1.70) è la relazione che lega le pressioni alle due sezioni, con n rapporto di trasformazione.

Data la rigidità dei pistoni, la velocità dell'elemento traslante si può esprimere come:

$$v_p = \frac{q_A}{S_A} = -\frac{q_B}{S_B} \tag{1.71}$$

la trasformazione di portata è data da:

$$\frac{q_B}{q_A} = -\frac{1}{n} \tag{1.72}$$

per la conservazione della potenza si ha:

$$\begin{aligned} P_{IN} + P_{OUT} &= 0 \\ q_A P_{A1} + q_B P_{B1} &= q_A P_{A1} - \frac{1}{n} q_A (nP_{A1}) = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

che verifica la proprietà.

I segni dipendono dalla convenzione che si utilizza, in questo caso quella degli utilizzatori in quanto la portata è nel verso decrescente della pressione.

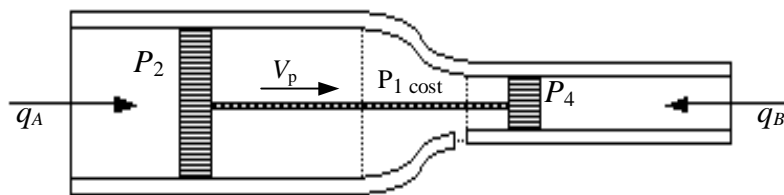


Figura 1-35: trasformatore idraulico: la trasformazione di pressione e di portata avviene perché i pistoni sono accoppiati rigidamente, ovvero i pistoni hanno la stessa velocità nelle due sezioni.

1.5 Sistemi termici

La legge fondamentale degli scambi termici è la prima legge della termodinamica per la quale la quantità di calore Q scambiata da un sistema con l'ambiente durante una trasformazione è pari alla somma del lavoro W necessario per lo scambio di calore e della variazione di energia interna del sistema ΔU .

$$Q = \Delta U + W \quad (1.74)$$

Il calore è la quantità di energia termica posseduta da un sistema e più precisamente rappresenta, a livello macroscopico, uno scambio di energia non accompagnato da scambi di materia. La differenza di temperatura tra due corpi consente questo scambio, dal corpo a temperatura più alta a quello a temperatura più bassa, fino a quando i due sistemi si portano all'equilibrio termico.

Nei sistemi termici si trovano alcune anomalie rispetto ai comportamenti generalizzati visti per gli altri sistemi e per il loro studio ai fini della modellistica si suppone che il flusso termico sia monodimensionale, ed inoltre si trascurano gli effetti collaterali legati agli scambi di calore, per esempio gli effetti termoelettrici nei materiali.

La scelta che pare più appropriata per lo studio dei sistemi termici in termini sistemistici è quella di utilizzare come variabile di posizione la temperatura ϑ .

La scelta della variabile di flusso è meno intuitiva e nasce da considerazioni di tipo energetico: la variazione di temperatura in un corpo dipende dalla potenza termica che viene fornita al corpo stesso; un corpo che immagazzina energia sotto forma di calore

restituisce la stessa energia all'ambiente e tale energia dipende dall'entalpia, che è una funzione di stato dipendente da pressione volume e temperatura:

$$\mathcal{H} = f(\vartheta, p, V) \quad (1.75)$$

I fenomeni termici trattati in questa sede non comportano il trasferimento di materia durante una trasformazione termica, ma solamente una variazione di temperatura: per esempio in una trasformazione termica che coinvolge un solido, a temperatura molto minore rispetto alla temperatura di fusione, pressione e volume si possono considerare costanti e di conseguenza la funzione \mathcal{H} è dipendente solo dalla temperatura:

$$\mathcal{H} = f(\vartheta) \quad (1.75')$$

In conclusione per scambi di energia che non coinvolgono scambi di materia, energia e calore assumono lo stesso significato:

$$\mathcal{H} \cong Q \quad (1.76)$$

la scelta più conveniente per la variabile di flusso è appunto il flusso termico o portata di calore, che equivale alla variazione di energia termica e rappresenta la velocità con la quale avviene il trasferimento di calore in una trasformazione termica:

$$q = \frac{d\mathcal{H}}{dt} \quad (1.77)$$

Nei sistemi termici la scelta della variabile di flusso costituisce una anomalia: la potenza termica è la stessa variabile di flusso e per questo motivo non è possibile individuare una induttanza termica per temperature ordinarie come non è possibile definire il trasformatore termico; è per questo che i sistemi termici, come già accennato, non sono del tutto analoghi ai sistemi studiati in precedenza.

La conduzione del calore è sintetizzata dalla legge di Fourier:

$$\underline{q} = -\lambda \text{grad}(\vartheta)$$

dove il flusso termico è definito come un vettore, tangente alle linee di flusso, proporzionale al gradiente della temperatura.

Il coefficiente di proporzionalità λ è detto coefficiente di conducibilità termica che dipende dal materiale e si ipotizza costante.

In realtà la conducibilità termica non è una costante ma varia con la temperatura:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta\vartheta)$$

con λ_0 conducibilità a 0°C.

Per i problemi monodimensionali il gradiente della temperatura dipende solo da una coordinata spaziale e la legge di Fourier si può riscrivere come:

$$q = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}$$

che si può integrare come equazione a variabili separabili:

$$q dx = -\lambda d\vartheta$$

e, se si integra sopra una lastra di spessore l come quella in Figura 1-37 con $\vartheta_1 > \vartheta_2$ e se si ipotizza il flusso stazionario attraverso lo strato, si ottiene:

$$q \int_0^l dx = -\lambda \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta$$

che fornisce la legge di conduzione:

$$\vartheta_{12} = \frac{l}{\lambda} q = R_T q$$

La conducibilità termica λ è una caratteristica intrinseca di ogni materiale e rappresenta il flusso di calore che in condizioni di regime stazionario passa attraverso una parete di materiale omogeneo dello spessore di $1m$, su $1m^2$ di superficie e per una differenza di $1K$ di temperatura tra le due facce opposte e parallele della parete di materiale considerato.

La resistenza termica R_T è data dal rapporto tra lo spessore dell'isolante e il λ del materiale. In una parete composta da vari strati la resistenza termica totale sarà data dalla somma delle resistenze termiche dei vari strati.

Si definisce capacità termica quell'elemento ideale puro di un sistema termico che è in grado di immagazzinare energia mediante l'aumento della temperatura, caratterizzato da una relazione caratteristica del tipo:

$$\mathcal{H} = f(\vartheta_{21}) \tag{1.78}$$

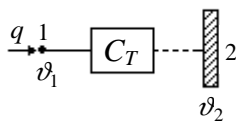


Figura 1-36: capacità termica.

Per componenti lineari si può assumere:

$$\mathcal{H} = C_T \vartheta_{12} \tag{1.79}$$

derivando *m. a m.* la (1.79) e sostituendo la (1.77) si ha:

$$q = C_T \frac{d\vartheta_{12}}{dt} \tag{1.80a}$$

dove $C_T = c_{sp} \rho V$ è la capacità termica con c_{sp} il calore specifico, ρ la densità e V il volume del mezzo che immagazzina il calore. La capacità termica è schematizzata in Figura 1-36, dove si assume l'ipotesi di temperatura uniforme nell'elemento che non sempre è verificata, per esempio nei materiali isolanti.

In forma integrale la stessa relazione si può esprimere come:

$$\vartheta_{12} = \frac{1}{C_T} \int_0^{\tau} q dt + \vartheta_{12}(0) \tag{1.80b}$$

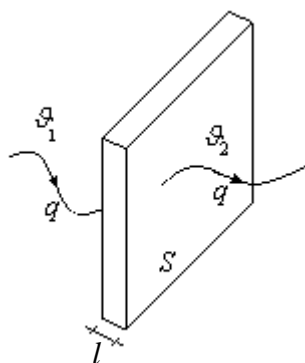


Figura 1-37: esempio di blocco dissipativo: parete isolante.

Il fenomeno della conduzione termica si verifica per esempio quando due ambienti a diversa temperatura sono separati da una parete come in Figura 1-37. Il flusso di calore attraverso la parete è direttamente proporzionale alla sua superficie S e inversamente proporzionale al suo spessore l .

$$q = k \frac{S}{l} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (1.81)$$



In generale si definisce resistenza termica pura (conduttore termico) quell'elemento in cui la quantità di calore immagazzinata è trascurabile e costante nel tempo.

La relazione costitutiva è del tipo:

$$q = f(\vartheta_{21}) \quad (1.82)$$

Figura 1-38: schema della resistenza termica.

per un elemento lineare si ha che:

$$q = \frac{1}{R_T} \vartheta_{21} \quad (1.83)$$

La resistenza termica è schematizzata in Figura 1-38. L'espressione della resistenza termica dipende dal tipo di fenomeno di flusso che si sta studiando.

La conduzione è caratteristica dei solidi e consiste in una propagazione di energia attraverso gli urti delle molecole più veloci con quelle meno veloci, senza che vi sia spostamento di materia (legge di Fourier).

La convezione è caratteristica dei fluidi e in questo caso l'energia è trasportata come conseguenza dello spostamento di materia.

Infine il calore si propaga per irraggiamento quando passa da un corpo caldo ad uno lontano più freddo, anche se tra loro c'è il vuoto (radiazione elettromagnetica) e vale la legge di Stephan-Boltzman:

$$q = k(\vartheta_2^3 - \vartheta_1^3)$$

con K costante dipendente dalle caratteristiche fisico-geometriche della superficie di irraggiamento.

1.6 grafi lineari orientati

Un sistema generalmente complesso può essere rappresentato attraverso una rete di componenti elementari puri, in modo da agevolarne la formulazione matematica.



Figura 1-39: grafo lineare: i nodi numerati indicano la variazione della variabile di posizione; attraverso il ramo fluisce la variabile di flusso con il verso stabilito in base alla convenzione utilizzata. Solitamente vicino al ramo si indica oltre alla variabile di flusso l'espressione della capacità, della resistenza o dell'induttanza generalizzata.

Lo strumento che consente tale rappresentazione è il grafo lineare orientato che descrive la struttura e le proprietà topologiche di un sistema, cioè il modo in cui sono collegati i vari componenti, evidenziando le proprietà di continuità e congruenza tra elementi. I grafi lineari orientati sono composti da punti, detti nodi del grafo, che collegano delle linee orientate dette rami; i rami e i nodi possono essere manipolati senza variare il loro numero e la struttura del sistema, al fine metterne in evidenza particolari proprietà topologiche.

Ogni ramo del grafo rappresenta un elemento ideale puro e collega due nodi, che indicano la variazione della variabile di posizione, tra i quali fluisce la variabile di flusso (Figura 1-39).

Per questo motivo ad ogni ramo del grafo corrisponde l'equazione caratteristica di un elemento:

$$f = \varphi(v_{21}) \quad \text{oppure} \quad v_{21} = \psi(f) \quad (1.84)$$

se si utilizza la convenzione degli utilizzatori, posto $v_{21} = v_2 - v_1 > 0$, si ha che la variabile di flusso f fluisce dal nodo 2 al nodo 1 ed è positiva in questo verso, quindi la potenza è:

$$P_{in} = fv_{21} > 0 \quad (1.85)$$

quando si ipotizza il verso di percorrenza opposto per la variabile di flusso, e quindi si inverte il verso del ramo, allora si cambia contemporaneamente il segno ad entrambe le variabili affinché le equazioni del sistema risultino scritte in maniera congrua; nel caso in cui risolvendo le equazioni del sistema si dovesse trovare una soluzione con la variabile f negativa significa che questa fluisce nel verso opposto a quello ipotizzato.

Il grafo lineare non è rappresentativo dello stato di sforzo degli elementi: se per esempio si considera una molla, ai due stati di trazione e compressione corrisponde lo stesso grafo (Figura 1-40).

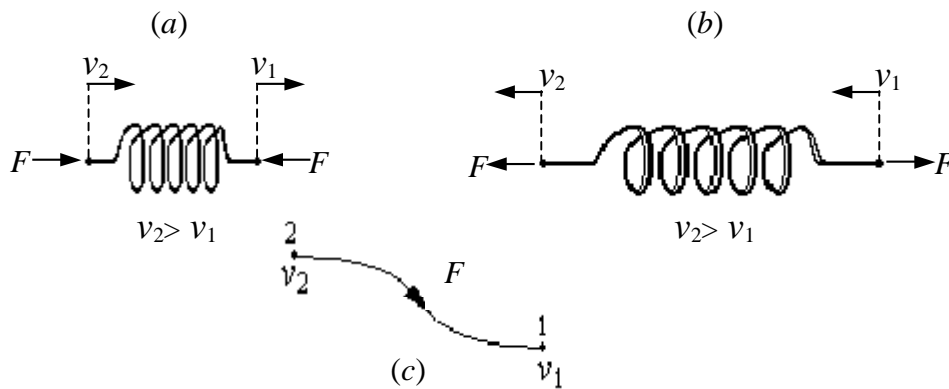


Figura 1-40: la molla in compressione (a) e la molla in trazione (b) hanno lo stesso grafo lineare (c). Il grafo lineare non è rappresentativo dello stato di sforzo degli elementi.



Figura 1-41: grafo della capacità generalizzata.

Le capacità non elettriche hanno una rappresentazione grafica che prevede il tratto discontinuo verso il terminale di riferimento (vedi ad esempio la massa in Figura 1-9), questo perché le capacità generalizzate (non elettriche) nel sistema fisico non sono collegate fisicamente al terminale di riferimento come viene rappresentato nei grafi lineari. Per questo motivo il grafo lineare non fornisce una descrizione geometrica del sistema ma talvolta è utile per evidenziarne, come già accennato, alcuni aspetti relativi alla "topologia dei collegamenti" tra i componenti. Nei grafi le capacità generalizzate vengono rappresentate nel modo illustrato nella Figura 1-41.

Nei grafi le sorgenti si rappresentano nella maniera descritta in Figura 1-9, mentre la rappresentazione dei trasformatori è descritta in Figura 1-42.

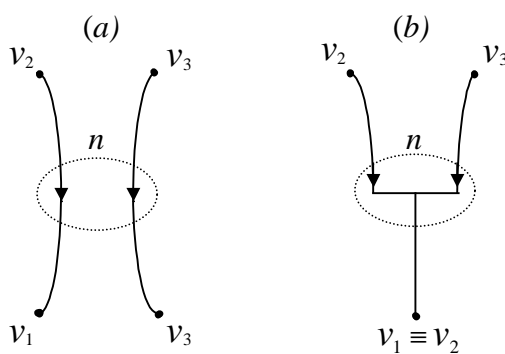
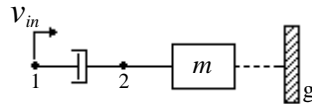


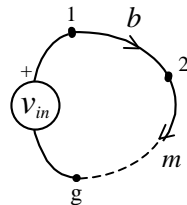
Figura 1-42 rappresentazione dei trasformatori nei grafi lineari. Trasformatori elettrici (a), trasformatori meccanici e fluidi (b).

Esempio 1.6-1: semplici sistemi meccanici: sorgente di variabile di posizione e di flusso, coerenza dei segni delle variabili.

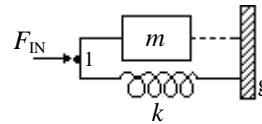
Ad un corpo di massa m viene impressa una certa velocità v_{in} : parte dell'energia fornita viene dissipata sotto forma di attrito, la parte residua è invece disponibile sotto forma di energia cinetica per la massa.



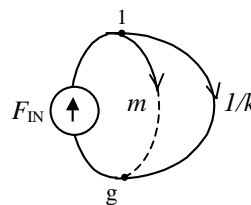
il grafo lineare del sistema è:



Il sistema in figura accumula energia cinetica, che favorisce il moto della massa m , ed energia potenziale elastica, grazie alla molla che imprime una forza di richiamo opposta alla forza applicata al sistema.

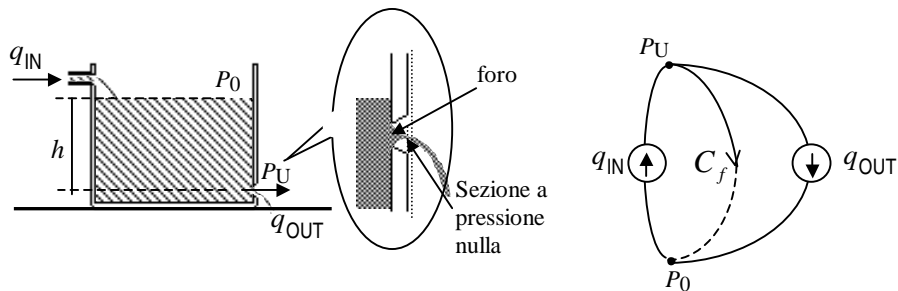


il grafo lineare del sistema è:



Esempio 1.6-2: sistema fluido non lineare e sorgenti controllate.

Il grafo lineare può essere utilizzato anche per descrivere sistemi non lineari. Consideriamo per esempio un sistema fluido in cui la portata di ingresso è diversa da quella di uscita, in particolare imponiamo la condizione $q_{IN} > q_{OUT}$ in maniera tale che nel sistema ci sia un fenomeno di accumulo.



Il serbatoio immagazzina fluido e quindi energia potenziale di tipo gravitazionale (fenomeno capacitivo). Il fluido in uscita dalla perdita acquista una certa energia cinetica con velocità di uscita v_U . Osservando la perdita con un ingrandimento si può affermare che nel foro esiste una sezione a pressione nulla, dove il fluido si restringe: una particella che passa dal pelo libero al foro di uscita non subisce variazioni relative allo stato energetico, che rimane uguale a quella del pelo libero; una volta sul foro la particella possiede la sola energia cinetica (sezione a pressione nulla). Questo ci permette di scrivere l'equazione del bilancio di energia come:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_U^2$$

da cui si ottiene l'espressione della velocità di uscita $v_U = \sqrt{2gh}$.

La portata in uscita è:

$$q_U = \alpha A \sqrt{2gh}$$

dove la costante α dipende dalla geometria del foro mentre A è la sua sezione.

La pressione di uscita dipende dall'altezza del pelo libero rispetto all'asse del foro, ed è riferita alla pressione atmosferica:

$$p_U - p_0 = \rho gh$$

combinando la due relazioni trovate si ha:

$$q_U = k \sqrt{p_{U0}}$$

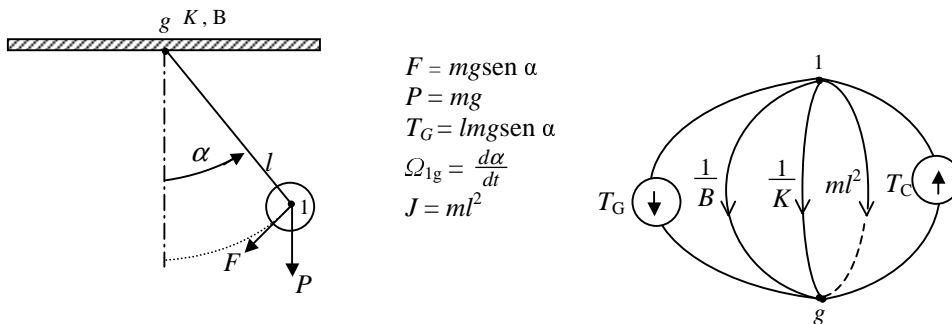
La relazione tra la portata di efflusso e pressione non è lineare, quindi il sistema è non lineare ma lo si può comunque rappresentare con un grafo.

Il generatore della portata di efflusso è controllato dalla pressione, ovvero si ha che

$q_U = \psi(P_{U0})$, cioè la grandezza imposta dipende da un'altra variabile del sistema.

Esempio 1.6-3: sistema pendolo.

Il pendolo è in generale un sistema non lineare: è costituito da un corpo di massa m appeso ad un filo di lunghezza l . Se si carica il pendolo portando la massa in una posizione tale che $\alpha > 0$ allora l'azione della coppia gravitazionale $T_G = mg \sin \alpha$ tende a riportare la massa in posizione di equilibrio ($\alpha = 0$) ma questa prosegue il suo moto fino a portarsi ad una certa posizione in cui $\alpha < 0$, grazie alla energia cinetica residua acquistata a spese della energia potenziale gravitazionale: si può quindi individuare una coppia T_C opposta a quella gravitazionale. Il processo inverso riporta la massa verso la posizione di equilibrio e così via fino a quando l'energia interna del sistema viene completamente dissipata a causa degli attriti del corpo con l'aria e del filo con il perno del pendolo, che possiamo modellare con un dissipatore torsionale di costante B . La forza di richiamo che consente l'oscillazione della massa, ovvero l'accumulo di energia potenziale può essere rappresentata con una molla di torsione con rigidità K .

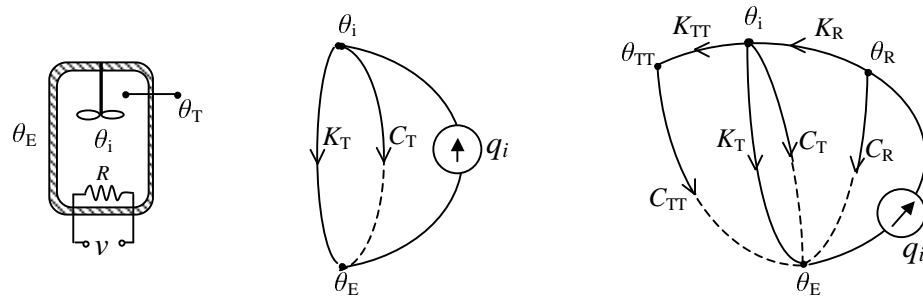


La coppia T_C si rappresenta con un generatore pilotato. Il pendolo può essere considerato un sistema lineare per piccole oscillazioni, cioè quando si può porre $\sin \alpha \approx \alpha$: in questo caso la relazione tra flusso e posizione è lineare.

Esempio 1.6-4: sistema termico: lo scaldabagno. Affinamento del grafo del sistema.

L'acqua è contenuta in un serbatoio isolato con dissipazione termica k_T e viene riscaldata per effetto Joule da una resistenza a cui è applicata una differenza di potenziale v : l'energia termica in ingresso al sistema può essere scritta come:

$$q_i = \frac{v^2}{R}$$



L'acqua accumula il calore in quanto possiede una capacità termica C_T mentre la sua temperatura θ_i è mantenuta omogenea da un'elica, che non apporta energia al sistema, e misurata tramite un termometro, la cui temperatura θ_T si può assumere come variabile di uscita. La temperatura esterna è il riferimento del sistema.

Il modello si del sistema si può affinare, considerando che la temperatura θ_R della resistenza è maggiore della temperatura dell'acqua: si può tenere conto dell'effetto di dissipazione termica (K_R) tra la resistenza e l'acqua circostante e nel termometro (K_{TT}). Un altro effetto che si può considerare è quello dell'accumulo di calore nella resistenza, che ha una capacità termica C_R , e nel termometro, che ha una capacità termica C_{TT} .

I grafi del sistema minimo e affinato sono riportati in figura.

Esempio 1.6-5: sistema ibrido. Il motore elettrico a corrente continua.

I grafi lineari si prestano anche alla descrizione dei sistemi ibridi. Il motore in corrente continua è un esempio di sistema elettro-meccanico.

Una spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico uniforme, se libera di ruotare attorno al proprio asse, viene messa in rotazione da una coppia T che si può esprimere come:

$$T = |iS\underline{n} \times \underline{b}| = iSbsen\alpha = i\phi_s$$

dove i è la corrente che percorre la spira, S la superficie della spira e α l'angolo che l'induzione magnetica \underline{b} forma con la normale \underline{n} alla superficie della spira.

L'asse di un motore a corrente continua ruota sulla base del principio descritto: le spire sono costituite da avvolgimenti longitudinali (circuiti di armatura) sopra un supporto cilindrico rotante; il circuito di armatura è alimentato da dalle spazzole che forniscono la corrente i_a all'avvolgimento ogni volta che si chiude il circuito ai contatti; il circuito di armatura è immerso in un campo magnetico costante, prodotto da due magneti permanenti o da una bobina, che ne permette la rotazione.

La coppia risultante T che mette in rotazione la parte mobile del motore, detta rotore, viene trasmessa all'esterno tramite un asse e può essere generalmente espressa come segue:

$$T = K i_a \phi$$

in questo caso il flusso è costante e quindi si può scrivere:

$$T = K_T i_a$$

La corrente di armatura giunge alle spazzole grazie ad una rete elettrica equivalente a un circuito RL serie alimentato dalla tensione v_a .

La rotazione del circuito di armatura genera una forza elettro motrice indotta ai suoi capi, proporzionale alla velocità di rotazione:

$$e_a = k_e \Omega$$

Analizzando la parte elettrica si può ottenere l'espressione della corrente di armatura, data da:

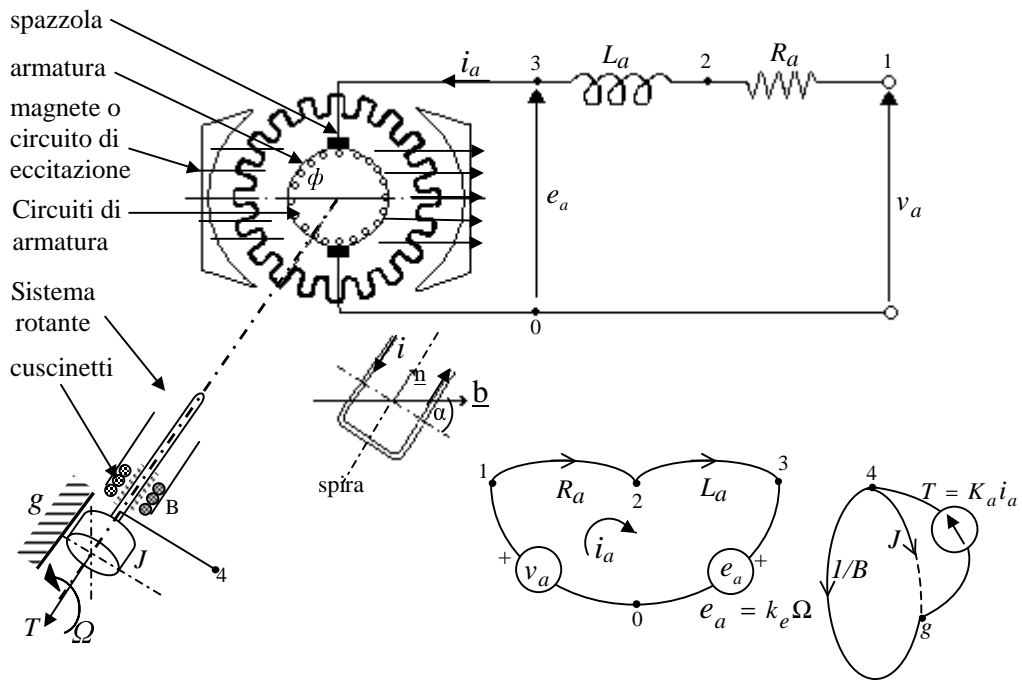
$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - e_a$$

Nella parte meccanica gli effetti di cui si può tener conto per la modellistica sono l'attrito (B) tra l'asse del volano e i cuscinetti e il momento di inerzia della parte rotante (J).

In assenza di perdite la potenza elettrica si trasforma in potenza meccanica:

$$e_a i_a = T \Omega = K_T i_a \Omega \Rightarrow e_a = k_T \Omega$$

quindi $K_e = K_A$ (costanti caratteristiche del motore fornite dal costruttore).



Il principio di funzionamento descritto è relativo a un particolare tipo di controllo del motore, detto controllo di armatura (con campo fisso). Si può scegliere invece di far variare il flusso di induzione magnetica, mantenendo costante la corrente di armatura (controllo di campo). In figura è rappresentato lo schema del motore e il relativo grafo lineare, riferiti al controllo di armatura.

Le sorgenti T e e_a sono pilotate rispettivamente da una grandezza della sezione elettrica (i_a) e da una grandezza meccanica (Ω): i due grafi non sono disgiunti.

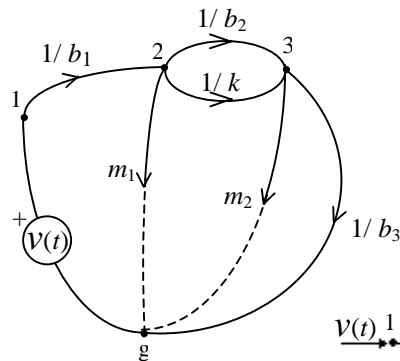
1.6-1 REGOLE PER IL TRACCIAMENTO DEI GRAFI

i passi da seguire per tracciare correttamente il grafo di un sistema sono fondamentalmente quattro:

- 1- Individuare il numero di elementi attivi e passivi del sistema: il loro numero corrisponde al numero dei rami di cui sarà composto il grafo relativo.
- 2- Si individua il riferimento delle variabili di posizione che nel grafo corrisponde al nodo al quale vengono collegate tutte le capacità generalizzate (ad eccezione di quelle elettriche che non sono collegate necessariamente alla terra del circuito) e che si chiama "terra generalizzata", solitamente etichettata con la lettera g (ground) (nei sistemi elettrici si usa lo solitamente lo zero, per indicare il potenziale nullo).
- 3- Si individuano nel sistema i punti in cui la variabile di posizione cambia valore, che corrispondono ai nodi del grafo.
- 4- Si orientano i rami del sistema: nei rami passivi non ci sono limitazioni, anche si conviene scegliere il verso di percorrenza della variabile di flusso a partire dalla sorgente. Nelle sorgenti l'orientazione conveniente è data dal verso crescente della variabile di posizione.

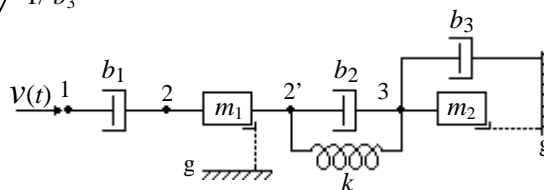
Esempio 1.6-6: corrispondenza schema-grafo lineare.

Dato un grafo lineare è possibile ricavare lo schema del sistema a cui appartiene, associando ad ogni ramo un sistema elementare e osservandone le connessioni con gli altri rami.
 Dato il grafo in figura:



il sistema è composto da tre nodi più il riferimento per le variabili di posizione. Gli elementi passivi sono cinque (3 dissipatori, 2 masse e 1 molla). Il sistema viene eccitato dalla velocità $v(t)$ impressa al nodo 1 (rispetto al nodo di riferimento).

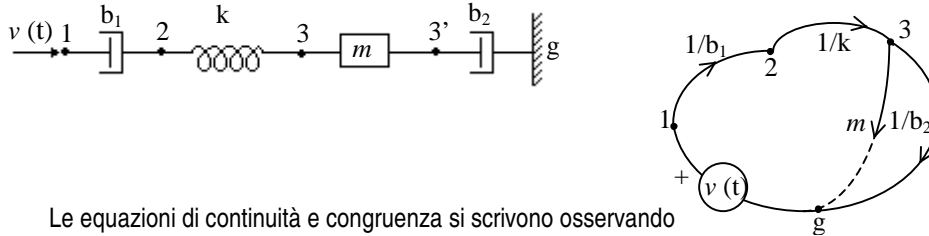
Il sistema è chiaramente di tipo meccanico. Il suo schema è riportato sotto.



I punti 2 e 2' nello schema del sistema corrispondono allo stesso nodo nel grafo: la velocità dei due punti è uguale in quanto la massa è un corpo rigido e la sua velocità si deve riferire sempre allo zero, mentre la velocità agli estremi della molla v_{23} è data dalla differenza tra la velocità delle due masse.

Esempio 1.7-1: deduzione del modello ingresso-uscita di un sistema dato il suo grafo lineare.

Si consideri il sistema in figura e il relativo grafo lineare, dove viene assegnato l'ingresso $v(t)$ e si vuole determinare l'uscita v_m :



Le equazioni di continuità e congruenza si scrivono osservando il grafo del sistema: la procedura che si segue per la loro scrittura è analoga a quella che si segue per scrivere le equazioni di Kirchhoff per l'analisi delle reti elettriche, trattando le variabili di flusso come la corrente e le variabili di posizione come la tensione. In base a quanto detto si ha:

$$f_{b_1} = f_k = f_m + f_{b_2}$$

quindi si può scrivere:

$$v(t) = 1/b_1 (f_m + f_{b_2}) + 1/k \frac{d(f_m + f_{b_2})}{dt} + v_m$$

da cui, sostituendo le relazioni costitutive:

$$f_m = m \frac{dv_m}{dt} \quad \text{e} \quad f_{b_2} = b_2 v_m$$

si ottiene il modello ingresso-uscita del sistema:

$$\frac{m}{k} \ddot{v}_m + \frac{mk + b_1 b_2}{kb_1} \dot{v}_m + \left(\frac{b_2}{b_1} + 1\right) v_m = v$$

Esempio 1.7-2: equazioni del motore a corrente continua.

Con riferimento all'Esempio 1.6-5, utilizzando lo stesso procedimento descritto nell'esempio precedente, si vogliono ricavare le equazioni che descrivono il comportamento del motore in corrente continua, ovvero che legano la posizione del rotore con le caratteristiche dinamiche del sistema.

Con $T_R(t)$ si indica la coppia resistente che il carico meccanico del motore oppone alla coppia motrice; ($T_R(t)$ può essere considerata come disturbo perché non è controllabile).

Dall'analisi del grafo si ottiene:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \Omega = v_a$$

per la parte meccanica:

$$J \frac{d\Omega}{dt} + B\Omega = k_a i_a - k_T(t)$$

posto $\Omega = \dot{\theta}$ si ha:

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_e \Omega = v_a \\ J \dot{\theta} + B\dot{\theta} = k_a i_a - k_T(t) \end{cases}$$

1.7 modello ingresso-uscita^(*)

Dato un sistema qualunque è possibile individuare la grandezza di ingresso (assegnata) e la variabile di uscita (da determinare). Combinando le equazioni caratteristiche dei componenti e le equazioni di continuità e congruenza scritte per il sistema assegnato nel dominio del tempo, è possibile ricavare una relazione matematica che lega l'ingresso all'uscita, chiamata legame ingresso-uscita, che in generale è un'equazione differenziale.

Il modello ingresso-uscita di un sistema si può esprimere nella forma generale:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)} y}{dt^i} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)} u}{dt^k} \quad (1.86)$$

dove l'ordine di derivazione dell'uscita n deve essere minore o al più uguale (per sistemi strettamente propri) all'ordine di derivazione dell'ingressi m , nel rispetto del principio di causalità in base al quale, in un sistema fisico, l'uscita all'istante t non può dipendere dall'ingresso in un istante futuro $t + \Delta T$ in cui l'evento non si è ancora verificato.

L'uscita del sistema $y(t)$ si ricava dal modello ingresso-uscita mediante integrazione della (1.86), che non è la classica integrazione matematica ma una procedura differente volta a distinguere i due termini della soluzione: l'evoluzione libera y_L e la risposta forzata y_F :

$$y(t) = y_L + y_F \quad (1.87)$$

La risposta libera è data dall'integrale dell'equazione omogenea:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)} y}{dt^i} = 0 \quad (1.88)$$

particolareggiata dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} & [y(t)]_{t=0} \\ & [y'(t)]_{t=0} \\ & \vdots \\ & [y^{n-1}(t)]_{t=0} \end{aligned} \quad (1.89)$$

e rappresenta l'evoluzione del sistema in assenza di forzante esterna a partire dall'istante $t = 0$, con stato diverso da zero (il sistema possiede energia interna ed è in grado di evolvere senza sollecitazioni esterne).

La risposta forzata rappresenta l'evoluzione del sistema con la forzante $u(t)$ applicata a partire condizioni iniziali nulle (a partire dallo stato zero). L'evoluzione forzata è data dall'integrale generale dal modello ingresso-uscita, particolareggiato con condizioni iniziali nulle.

Esempio 1.7-3: integrazione del modello ingresso-uscita di un sistema.

Si vuole integrare il modello ricavato per il sistema dell'Esempio 1.7-1, a cui si assegnano l'ingresso:

$$v(t) = 20\delta_{-1}(t) \left[\frac{m}{s} \right]$$

e le varie costanti:

$$b_1 = 2 \left[\frac{Ns}{m} \right]; b_2 = 6 \left[\frac{Ns}{m} \right]; k = 2 \left[\frac{N}{m} \right]; m = 2 \text{ [kg]}.$$

Sostituendo i valori dati nel modello ricavato in precedenza si ottiene:

$$\ddot{v}_m + 4\dot{v}_m + 4v_m = 20\delta_{-1}(t)$$

Date le condizioni iniziali:

$$v_m(0) = 10 \left[\frac{m}{s} \right] \quad \text{e} \quad f_k(0) = 0 \text{ [N]}$$

osservando il grafo lineare del sistema si ricava la relazione:

$$f_k(0) = m\dot{v}_m(0) + b_2v_m(0)$$

da cui si ottiene l'ulteriore condizione sull'uscita:

$$\dot{v}_m(0) = -30 \text{ [m s}^{-2}\text{]}$$

Gli autovalori dell'equazione sono coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

quindi l'integrale dell'equazione omogenea è del tipo:

$$v_{m_o} = A_1 t e^{-2t} + A_2 e^{-2t}$$

da cui, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la risposta libera del sistema:

$$v_{m_L} = 10(1-t)e^{-2t} \delta_{-1}(t)$$

l'integrale particolare del modello ha la stessa forma dell'ingresso assegnato, che in questo caso è una funzione a gradino. posto $v_m = k \delta_{-1}(t)$ si ottiene l'integrale particolare:

$$v_{mP} = 5\delta_{-1}(t)$$

di conseguenza la risposta forzata ha la forma seguente:

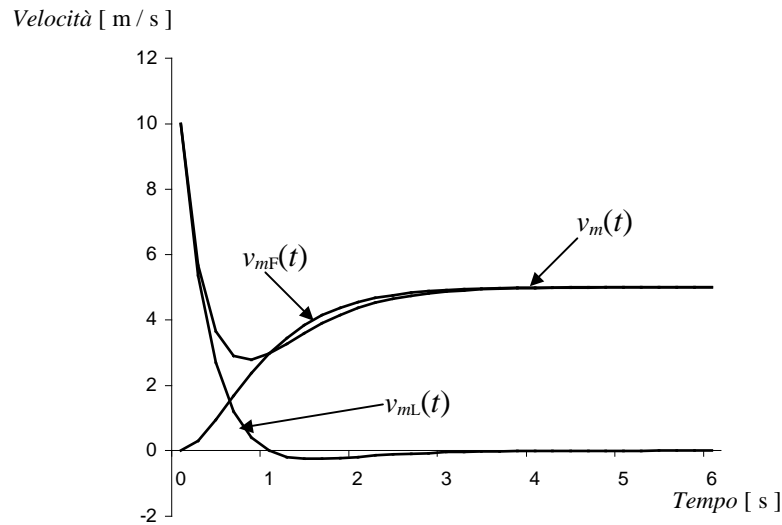
$$v_{m(o+p)} = A_1 t e^{-2t} + A_2 e^{-2t} + 5$$

dove, per determinare le costanti arbitrarie, si devono imporre condizioni iniziali nulle. Così facendo si ottiene:

$$v_{mF} = [5 - 5(2t+1)e^{-2t}] \delta_{-1}(t)$$

l'evoluzione totale del sistema è la somma dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata:

$$v_m(t) = 5[1 - (4t-1)e^{-2t}] \delta_{-1}(t)$$



1.8 Ordine del sistema

L'ordine di derivazione massimo del modello ingresso-uscita è anche l'ordine del sistema e, osservando gli esempi fatti, si può dedurre che questo sia in qualche modo legato al numero di componenti con memoria presenti nel sistema, ovvero quei componenti in grado di immagazzinare energia come le induttanze e le capacità generalizzate.

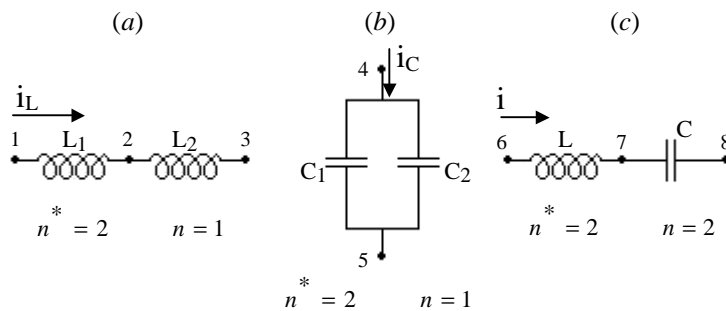


Figura 1-43: esempi di vincoli topologici: nel caso rappresentato in fig. (a) gli induttori immagazzinano energia magnetica per effetto della corrente i_L ; essendo $i_{L1} = i_{L2}$ si ha:

$$v_{13} = (L_1 + L_2) \frac{di_L}{dt}$$

il sistema è del primo ordine Analogamente nel caso, (b)

dove i condensatori immagazzinano energia per effetto della stessa tensione, il legame differenziale tra tensione ai capi e corrente attraverso il parallelo di condensatori è di primo ordine:

$$i_C = (C_1 + C_2) \frac{dv_{45}}{dt}$$

mentre nel caso (c) non essendoci nessun vincolo topologico l'induttore e condensatore sono indipendenti e il relativo modello è del secondo ordine:

$$v_{45} = L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i$$

Più precisamente l'ordine n del sistema è uguale al numero di elementi reattivi indipendenti, per i quali le grandezze che forniscono energia sono legate da una relazione differenziale, anziché da una relazione algebrica. Due elementi sono indipendenti se privi di vincoli topologici (vedi Figura 1-43).

In generale se n è l'ordine del sistema e n^* è il numero dei componenti che immagazzinano energia si ha che:

$$n \leq n^* \tag{1.90}$$

1.8-1 VINCOLI TOPOLOGICI

La riduzione dell'ordine del sistema a causa dei vincoli topologici passivi può essere valutata dall'analisi del grafo: si è visto come classici vincoli topologici nei sistemi elettrici siano costituiti da maglie (o cicli) di soli componenti reattivi e da nodi (o tagli) su cui convergono soli rami reattivi. il discorso si può estendere a tutti i tipi di sistemi se si considera il relativo grafo e i componenti generalizzati.

Si chiama "tie set" (T_s) l'insieme dei rami di un grafo che formano una maglia chiusa e "cut set" (C_s) l'insieme dei rami di un grafo la cui rimozione porta ad un grafo sconnesso (cioè un grafo in cui uno o più nodi risultano isolati).

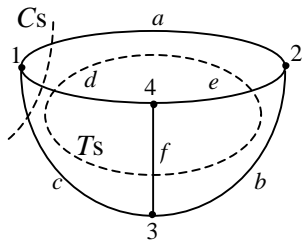


Figura 1-43: nel grafo a sinistra i rami a, d, c formano un "cut set" (si isola il nodo 1 dal resto del grafo) mentre i rami a, b, c formano un "tie set" in quanto costituiscono una maglia chiusa.

Se un insieme di sole capacità o sole induttanze formano un "tie set" allora le relative capacità ed induttanze non sono indipendenti; infatti esse devono soddisfare la condizione di congruenza :

$$\sum_{T_s} v_{i,j} = 0 \tag{1.91}$$

nel caso di sole induttanze generalizzate si ha:

$$\sum_{T_s} L_i \frac{df_i}{dt} = 0 \tag{1.92}$$

integrando la (1.92) si ottiene la relazione di vincolo:

$$\sum_{T_s} L_i f_i = 0 \tag{1.93}$$

Un caso particolare di "tie set" è quello formato da capacità generalizzate in parallelo. Se un insieme di sole capacità o sole induttanze generalizzate formano un "cut set" esse non sono indipendenti, infatti esse devono soddisfare la condizione di continuità per le variabili di flusso. Un caso particolare di "cut set" è costituito da induttanze generalizzate in serie.

In generale l'ordine del sistema è:

$$n = n^* - [(Ts)_{Lg} + (Ts)_{Cg} + (Cs)_{Lg} + (Cs)_{Cg}] \tag{1.94}$$

dove $(Ts)_{Lg}$ è il numero di "tie set" di induttanze, $(Ts)_{Cg}$ è il numero di "tie set" di capacità, $(Cs)_{Lg}$ è il numero di "cut set" di induttanze e $(Cs)_{Cg}$ è il numero di "Cut set" di capacità, indipendenti tra loro.

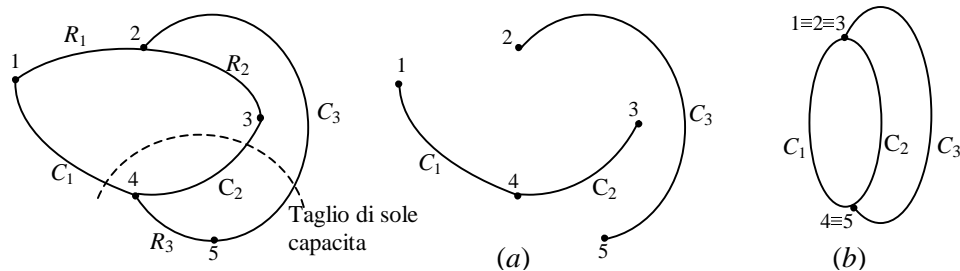
Per individuare i "cut set" e i "tie set" indipendenti è necessario seguire una procedura che si ricava da considerazioni di tipo topologico.

Asportando dal grafo i rami non capacitivi (non induttivi) si ottiene un grafo dove il numero di finestre di sole capacità generalizzate (induttanze generalizzate) corrisponde al numero di "tie set" indipendenti di sole capacità generalizzate (induttanze generalizzate).

Se invece si cortocircuitano i rami non capacitivi (non induttivi) si ottiene un grafo in cui il massimo numero di sottosistemi sconnessi di nodi e rami capacitivi (induttivi) meno uno corrisponde al numero di "cut set" indipendenti di sole capacità generalizzate (induttanze generalizzate). In generale da un sistema di n nodi è possibile ricavare n grafi sconnessi.

Esempio 1.8-1: determinazione dell'ordine di un sistema dato il suo grafo lineare.

Dato il seguente grafo lineare in assenza di sorgenti:



eliminando tutti i rami non capacitivi si ottiene il grafo (a) di sole capacità generalizzate, che però non contiene alcuna finestra per cui $(Ts)_{Cg} = 0$. Eliminando tutti i rami non induttivi si vede che $(Ts)_{Lg} = 0$.

Cortocircuitando tutti i rami non capacitivi si ottiene il grafo (b) in cui è possibile individuare due sottosistemi sconnessi (i due nodi) e quindi $(Cs)_{Cg} = 2 - 1 = 1$. Cortocircuitando tutti i rami non induttivi si vede che $(Cs)_{Lg} = 0$.

L'ordine del sistema è $n = n^* - (Cs)_{Cg} = 3 - 1 = 2$

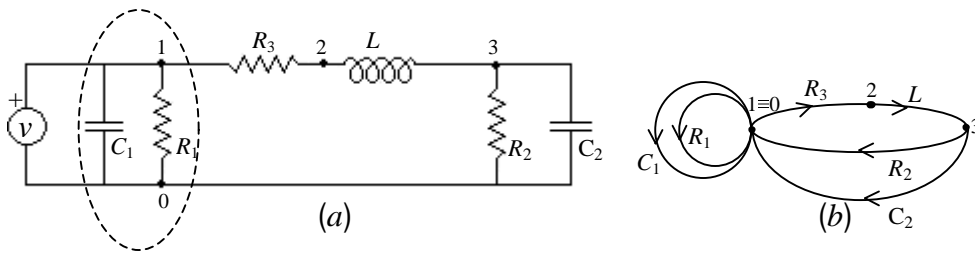
L'ordine del sistema si poteva subito dedurre osservando il grafo: la riduzione dell'ordine è pari a uno in quanto nel grafo è presente un solo taglio di capacità.

La presenza di sorgenti può introdurre ulteriori vincoli topologici nel sistema. Il primo accorgimento per evitare la riduzione dell'ordine consiste nell'inserire i generatori di flusso in serie e i generatori di posizione in parallelo, evitando le configurazioni come quelle descritte in Figura 1-44.

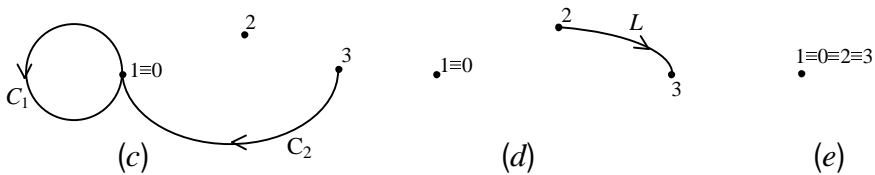
Per procedere alla determinazione dei "cut set" e dei "tie set" si deve prima rendere passivo il grafo, cortocircuitando i generatori di variabile di posizione (che hanno resistenza interna nulla) e aprendo i generatori di variabile di posizione (che hanno resistenza interna infinita).

Esempio 1.8-2: riduzione dell'ordine del sistema a causa di vincoli topologici.

Dato il circuito elettrico (a) e il relativo grafo passivato (b):



eliminando tutti i rami non capacitivi si ottiene il grafo (c):



dove compare un circuito di sole capacità, quindi si ha che $(Ts)_{C_g} = 1$. Eliminando tutti i rami non induttivi (d) si ottiene invece che $(Ts)_{L_g} = 0$ perché non ci sono circuiti di sole induttanze. Cortocircuitando i rami non capacitivi si ottiene il grafo (e), cortocircuitando i rami non induttivi si ottiene lo stesso grafo (e) quindi non ci sono tagli di induttanze o capacità: $(Cs)_{C_g} = (Cs)_{L_g} = 0$. In conclusione l'ordine del sistema è $n = 2$. Se infatti si assume v come ingresso del sistema e v_{C2} come uscita, sviluppando la relazione $v = v_{R3} + v_L + v_{R2}$ si ottiene il modello ingresso-uscita:

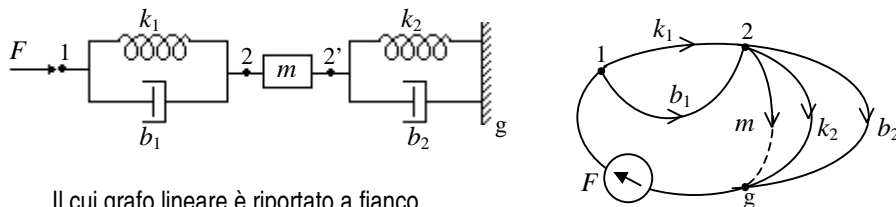
$$LC_2 \ddot{v}_{C2} + \left(R_3 C_2 + \frac{L}{R_2}\right) \dot{v}_{C2} + \left(\frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C2} = v$$

che è del secondo ordine. Se v è costante il parallelo $R_1 C_1$ è influente e infatti tali parametri non compaiono nel modello.

In questo caso si può affermare che la causa della riduzione dell'ordine del polinomio caratteristico del sistema è data dalla presenza di elementi reattivi che non apportano variazioni energetiche al sistema.

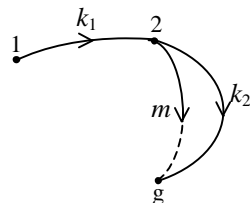
Esempio 1.8-3: riduzione dell'ordine dovuta alla scelta dei segnali di ingresso e uscita.

L'ordine di un sistema è l'ordine del suo polinomio caratteristico che generalmente è pari a $n = n^*$ in assenza di vincoli topologici. può vice-versa accadere che, pur non essendoci riduzione dovuta a vincoli topologici, si osserva che la funzione di trasferimento ha ordine $n < n^*$ per certe coppie di variabili ingresso-uscita: in questo caso la riduzione dell'ordine è dovuta alla particolare scelta dei segnali di ingresso e di uscita nel sistema. Consideriamo per esempio il sistema:



Il cui grafo lineare è riportato a fianco.

Dall'analisi topologica del grafo del sistema si deduce che $n = n^*$ in quanto non vi sono cicli e tagli di soli elementi capacitivi o induttivi.



$$1 \equiv 2 \equiv g$$

$$(Ts)_{Cg} = (Ts)_{Lg} = 0$$

$$(Cs)_{Cg} = (Cs)_{Lg} = 0$$

Sviluppando la relazione $F = F_m + F_{k_2} + F_{b_2}$, considerando F come ingresso e $v_m = v_{2g}$ come uscita del sistema si ottiene il modello ingresso-uscita:

$$\dot{F} = m\ddot{v}_m + b_2\dot{v}_m + k_2v_m$$

a cui corrisponde la funzione di trasferimento:

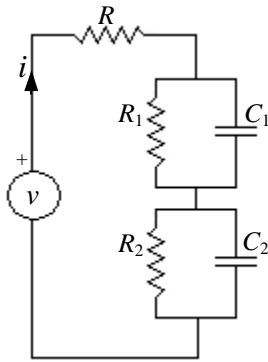
$$G(s) = \frac{s}{m s^2 + b_2 s + k_2}$$

che è del secondo ordine, nonostante l'assenza di vincoli topologici nel sistema.

La riduzione dell'ordine in questo caso è accompagnata da una perdita di osservabilità del sistema; infatti una volta fissato l'ingresso F se si osserva il sistema sull'uscita v_m si perde traccia di una parte della struttura, in particolare della parte (k_1, b_1) che non compare nella funzione di trasferimento: è come se la forza F fosse applicata direttamente sulla massa.

Esempio 1.8-4: riduzione dell'ordine per degenerazione parametrica.

Un'altra causa di riduzione dell'ordine del modello del sistema in assenza di vincoli topologici è la degenerazione parametrica, che consiste in una cancellazione zero-polo nella funzione di trasferimento, a causa dei particolari valori dei parametri assegnati per il sistema. Si consideri il sistema elettrico in figura:



La funzione del trasferimento del sistema, se v è l'ingresso e i l'uscita, è la seguente:

$$G(s) = \frac{(R_1 C_1 S + 1)^2}{(R_2 C_2 S + 1) [R(R_1 C_1 S + 1) + R_1 + R_2]}$$



il cui polinomio caratteristico è del secondo ordine.

Nel caso in cui $R_2 C_2 = R_1 C_1$ si ha degenerazione parametrica: a causa della semplificazione la f.d.t. diventa del primo ordine:

$$G'(s) = \frac{(R_1 C_1 S + 1)}{R(R_1 C_1 S + 1) + R_1 + R_2}$$

anche in questo caso il sistema è carente di osservabilità.

In generale si può affermare che l'ordine del sistema in assenza di vincoli topologici, osservabile sull'uscita considerata, è pari al numero di componenti reattivi in grado di modificare l'energia interna del sistema, ovvero di modificarne lo stato.

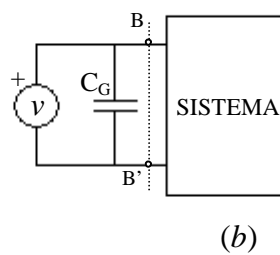
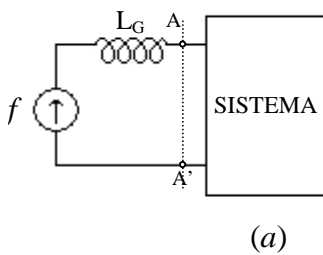


Figura 1-44: in entrambi i casi in figura ad una variazione della sorgente corrisponde la variazione dell'energia interna degli elementi reattivi e una indipendente variazione dello stato del sistema: in entrambe le configurazioni (a) e (b) si può considerare la sorgente come applicata

direttamente al sistema, ovvero ai nodi (AA') e (BB'): la presenza dell'induttanza generalizzata nel caso (a) [e della capacità generalizzata nel caso (b)] non apporta variazioni energetiche al sistema e quindi non contribuisce all'incremento dell'ordine del polinomio caratteristico del sistema. È questo un caso di riduzione dell'ordine dovuto all'inserzione di un generatore (sorgente di flusso in serie con un'induttanza generalizzata e generatore di posizione in parallelo ad una capacità generalizzata).

1.9 La funzione di trasferimento^(*)

Si è visto come in generale per un sistema fisico il legame ingresso-uscita sia di tipo differenziale. È tuttavia possibile esprimere lo stesso legame in maniera più immediata attraverso una funzione razionale data dal rapporto di polinomi, che si ottiene dalla trasformata di Laplace del modello ingresso-uscita di un sistema.

Se si considera la relazione:

$$y(t) = k \frac{dx}{dt} \quad \text{con} \quad x(0) = X_0 \quad (1.95)$$

si ha che la sua trasformata di Laplace è data da:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = ksX(s) - kX_0 \quad (1.96)$$

che è una relazione polinomiale dove $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$.

Più in generale si ha che:

$$y(t) = \frac{d^{(n)}x}{dt^n} \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \end{matrix} Y(s) = s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k X^{n-1-k}(0) \quad (1.97)$$

In base a quanto detto è possibile trasformare con Laplace il modello ingresso-uscita di un sistema, in cui si suppongono nulle le condizioni iniziali:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}y}{dt^i} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)}u}{dt^k} \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \end{matrix} Y(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i = U(s) \sum_{k=0}^m b_k s^k \quad (1.98)$$

La funzione di trasferimento di un sistema (a singolo ingresso e singola uscita) è il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso allo stato zero (con condizioni iniziali nulle):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^m b_k s^k} \quad (1.99)$$

La funzione di trasferimento descrive completamente la dinamica del sistema: la risposta forzata è data da:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} \quad (1.100)$$

mentre la risposta libera è:

$$y_l(t) = \sum_1^n \sum_0^{v_i-1} A_{ik} t^k e^{p_i t} \quad (1.101)$$

dove p_i sono i poli della funzione di trasferimento ottenuti colme soluzione del polinomio caratteristico del sistema, considerati con la propria molteplicità v_i . Le costanti A_{ik} si ricavano imponendo le condizioni iniziali.

Se si considerano sistemi a n ingressi e m uscite la (1.99) si può generalizzare:

$$[Y]_m = [G(s)]_{m \times n} [U]_n \quad (1.102)$$

La (1.102) è una espressione matriciale con $\underline{G}(s)$ la matrice di trasferimento del sistema i cui elementi esprimono il legame tra gli n ingressi e ognuna delle uscite e hanno in comune lo stesso polinomio caratteristico (in assenza di cancellazioni zero-polo che

limitano l'osservabilità del sistema su una particolare uscita), che è anche il polinomio caratteristico del sistema.

Sviluppando la relazione (1.102) si ha:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (1.102a)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} Y_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + \dots + G_{1n}U_n \\ Y_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + \dots + G_{2n}U_n \\ \vdots \\ Y_m = G_{m1}U_1 + G_{m2}U_2 + \dots + G_{mn}U_n \end{cases} \quad (1.102b)$$

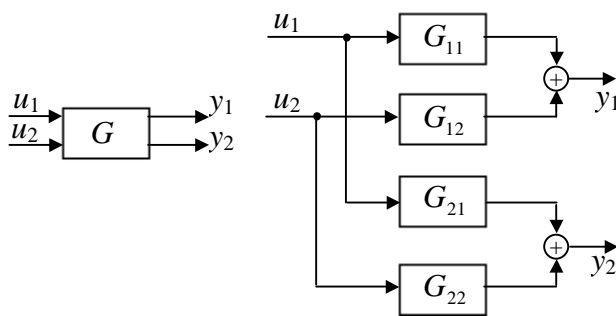


Figura 1-44: il sistema lineare in figura, con due ingressi e due uscite, può essere rappresentato come la connessione di più sistemi a singolo ingresso e singola uscita, mediante il principio di sovrapposizione degli effetti. Le G_{ij} hanno lo stesso polinomio caratteristico ma diversi zeri, che indicano come gli ingressi agiscono sulle uscite.

1.10 Equazioni del sistema

Nell' Esempio 1.7-1 e successivi si è visto come sia possibile scrivere il modello di un sistema a partire dal suo grafo lineare, combinando le relazioni costitutive dei componenti ideali puri secondo le condizioni di continuità e congruenza. In questo paragrafo si andranno a formalizzare tali concetti.

Il modello matematico di un sistema dinamico equivale alla descrizione delle relazioni energetiche tra i vari componenti elementari del sistema considerato. È possibile scrivere il modello matematico di un sistema in maniera sistematica con il metodo dei grafi lineari. In tale modello compaiono le relazioni costitutive (o le relazioni caratteristiche se il sistema è lineare) dei componenti del sistema, le equazioni di continuità ai nodi per le variabili di flusso e le relazioni di congruenza per le variabili di

posizione; queste ultime due relazioni sono diretta conseguenza del tracciamento del grafo lineare e dipendono dalla struttura del sistema.

Dato un grafo lineare, se n è il numero di nodi del grafo e r_k il numero dei rami convergenti al nodo k -esimo, si possono scrivere le equazioni di continuità per ognuno dei nodi nel seguente modo:

$$\sum_1^{r_k} i f_{k_i} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.103)$$

le somme nella (1.103) sono algebriche: si assumono per convenzione positive le grandezze entranti in un nodo, negative quelle uscenti.

L'interpretazione fisica della (1.103) dipende dal particolare tipo di sistema considerato: nei sistemi meccanici si ricava dall'equilibrio dinamico del sistema, per i sistemi elettrici dal principio di conservazione della carica elettrica, dal principio di conservazione della massa per i sistemi fluidi e dal principio di conservazione dell'energia nei sistemi termici. Sia m il numero delle maglie del grafo e r_p il numero dei rami della maglia p -esima si possono scrivere le equazioni di congruenza per ognuna delle maglie del grafo nel seguente modo:

$$\sum_1^{r_p} q v_{p_q} = 0 \quad p = 1, 2, \dots, m \quad (1.104)$$

L'interpretazione fisica della (1.104) dipende dal particolare sistema che si considera: nei sistemi meccanici si ricava da vincoli geometrici nel sistema, dalla seconda legge di kirchhoff per i sistemi elettrici e dal principio di additività di pressione e temperatura nei sistemi fluidi e termici.

Si dimostra che se n è il numero di nodi del grafo, il numero di equazioni ai nodi linearmente indipendenti è pari a $n-1$. Se b il numero dei rami del grafo, allora il numero delle equazioni alle maglie linearmente indipendenti è $b - (n-1)$. Infine se s è il numero di sorgenti del sistema, il numero di relazioni costitutive indipendenti è pari a $b - s$.

Per ogni ramo passivo del grafo si contano due incognite, una di posizione e una di flusso, mentre nei rami attivi una grandezza è imposta e soltanto una incognita; per tutti questi motivi il numero delle incognite del sistema è pari al doppio del numero di rami del grafo meno il numero di rami attivi (sorgenti) ed è quindi pari a $2b - s$, che corrisponde anche al numero di equazioni indipendenti del sistema:

$$2b - s = [n - 1] + [b - (n - 1)] + [b - s] \quad (1.105)$$

Il sistema di $2b - s$ equazioni nelle $2b - s$ incognite, se lineare, è risolubile in una qualunque delle incognite, a differenza dei sistemi non lineari.

In ogni caso il numero di equazioni è sufficiente per determinare il comportamento dinamico del sistema.

Se la scelta delle $b - (n - 1)$ incognite delle equazioni di congruenza dovesse essere casuale, potrebbe non essere garantita la loro indipendenza: per evitare questo in un grafo lineare piano si scelgono $b - (n - 1)$ finestre sulle quali impostare le equazioni (1.104).

Un grafo lineare si dice piano quando tutti i suoi rami giacciono in un piano senza intersecarsi, ovvero quando le intersezioni dei rami sono solamente sui nodi.

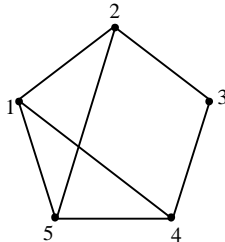


Figura 1-45: esempio di grafo non piano.

Si definisce finestra (maglia) di un grafo lineare piano un percorso chiuso la cui percorrenza permette di raggiungere ognuno dei rami che lo compongono, senza però intersecare altri rami.

Se il sistema è lineare è possibile assumere una variabile come uscita per esprimere tutte le altre in funzione di questa ed ottenere la variazione del sistema rispetto a tale uscita.

1.10-1 METODI DI RIDUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL SISTEMA

Esistono dei metodi che consentono la riduzione del numero di equazioni rappresentative del sistema e sono il metodo delle variabili di nodo e il metodo delle variabili di maglia.

Le equazioni ricavate sulla base di questi metodi possono essere scritte indifferentemente nel dominio del tempo o nel dominio di s , purché il sistema sia lineare; in caso contrario si lavora nel dominio del tempo e non è garantito che il sistema ricavato sia risolvibile.

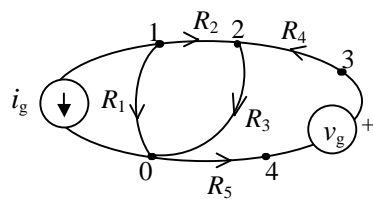
METODO AI NODI

Se si utilizza il metodo ai nodi le incognite sono le variabili di posizione di ciascun nodo rispetto al nodo di riferimento, che soddisfano identicamente le equazioni (1.103), scritte in funzione delle variabili di posizione.

Nel caso in cui nel grafo vi siano sorgenti di variabile di posizione il numero di equazioni del sistema si riduce ed è pari a $(n-1) - s_v$.

Esempio 1.10-1: scrittura delle equazioni di un sistema: il metodo su base nodi.

Dato il grafo in figura si scrivono le equazioni di continuità per ogni nodo: i versi delle variabili di flusso nel grafo sono arbitrari e le variabili di flusso imposte (sorgenti) compaiono nei termini noti delle equazioni.



$$\begin{aligned}
 i_1 + i_2 &= -i_g && \text{nodo1} \\
 i_2 - i_3 + i_4 &= 0 && \text{nodo2} \\
 i_4 &= i_{vg} && \text{nodo3} \\
 i_5 &= i_{vg} && \text{nodo4}
 \end{aligned}$$

Le equazioni scritte sopra devono essere espresse mediante le variabili di posizione (variabili di nodo) quindi si ha :

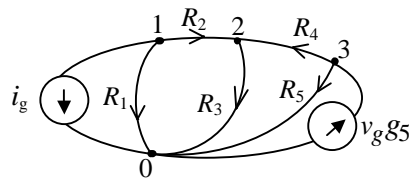
$$\begin{cases} g_1 v_1 + g_2 (v_1 - v_2) = -i_g \\ g_2 (v_1 - v_2) - g_3 v_2 + g_4 (v_3 - v_2) = 0 \\ (v_3 - v_2) g_4 + v_3 g_5 = v_g g_5 \end{cases} \quad (g_i = 1/R_i)$$

dove la terza equazione è data dalla combinazione lineare delle equazioni ai nodi 3 e 4 in cui è stato inserito il vincolo $v_g = v_3 - v_4$ dato dalla presenza del generatore di tensione.

Riscrivendo il sistema in maniera più ordinata si ottiene:

$$\begin{cases} (g_1 + g_2)v_1 - g_2 v_2 = -i_g \\ -g_2 v_1 + (g_2 + g_3 + g_4)v_2 - g_4 v_3 = 0 \\ -g_4 v_2 + (g_4 + g_5)v_3 = v_g g_5 \end{cases}$$

Secondo la (1.105), sono necessarie 12 equazioni indipendenti per descrivere completamente il sistema mentre, col metodo ridotto ai nodi, è sufficiente scrivere un sistema di $n-1-s_v$ equazioni (in questo caso $n = 5$ e $s_v = 1$) in $n-1-s_v$ incognite, le variabili di flusso si determinano dalle variabili di nodo per mezzo delle relazioni costitutive.



Il grafo a fianco è ottenuto dal precedente sostituendo l'equivalente di Norton ai morsetti 3-0 e permette di applicare il metodo in maniera sistematica: il sistema ricavato si può scrivere in forma matriciale:

$$[f] = [Y] \cdot [v]$$

dove $[f]$ è il vettore dei termini noti (sorgenti di variabile di flusso equivalenti), $[Y]$ la matrice delle ammettenze (generalizzate) e $[v]$ il vettore delle variabili (incognite) di nodo:

$$\begin{bmatrix} -i_g \\ 0 \\ g_5 v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ -g_2 & g_2 + g_3 + g_4 & -g_4 \\ -g_4 & 0 & g_4 + g_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

si osserva che:

- a) la matrice $[y]$ è simmetrica;
- b) i termini della diagonale y_{ii} sono dati dalla somma delle ammettenze connesse al nodo i -esimo;
- c) i termini y_{ij} ($i \neq j$) sono dati dalla somma cambiata di segno delle ammettenze connesse tra i nodi i e j ;
- d) $f_j > 0$ se f_j è entrante nel nodo j , negativo altrimenti.

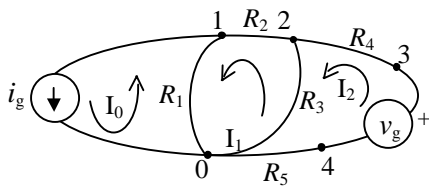
La generalizzazione introdotta è valida per qualsiasi sistema, anche se questo contiene elementi reattivi: per ogni elemento è possibile infatti definire una impedenza (ammettenza) generalizzata nel dominio di s .

METODO ALLE MAGLIE

Se si utilizza il metodo alle maglie le incognite sono le variabili di flusso fittizie definite arbitrariamente per ciascuna maglia, che soddisfano identicamente le equazioni (1.104), scritte in funzione delle variabili di maglia.
 Nel caso in cui nel grafo vi siano sorgenti di variabile di flusso il numero di equazioni del sistema si riduce ed è pari a $[b-(n-1)] - s_f$.

Esempio 1.10-2: scrittura delle equazioni di un sistema: il metodo su base maglie.

Si consideri il grafo dell'esempio precedente:



$$\begin{aligned} v_{10} &= -v_{ig} && \text{maglia 1} \\ v_{10} + v_{21} + v_{20} &= 0 && \text{maglia 2} \\ v_{20} + v_{32} + v_{04} &= v_g && \text{maglia 3} \end{aligned}$$

Le equazioni scritte sopra devono essere espresse mediante le variabili di flusso (variabili di maglia) quindi si ha ($I_0 \equiv I_g$):

$$\begin{cases} R_1(I_1 - I_g) + R_2 I_1 + R_3(I_1 - I_2) = 0 \\ R_3(I_2 - I_1) + R_4 I_2 + R_5 I_2 = v_g \end{cases}$$

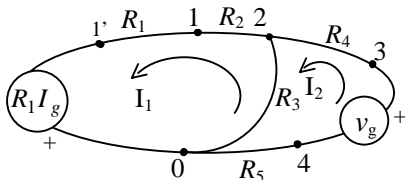
riordinando le equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_3 I_2 = R_1 I_g \\ -R_3 I_1 + (R_3 + R_4 + R_5)I_2 = v_g \end{cases}$$

l'equazione alla maglia 1 non è indipendente in quanto la corrente di maglia I_g è nota, quindi si elimina dal sistema.

Il sistema ottenuto è di due equazioni in due incognite, pari a $[b-(n-1)] - s_f$.

Una volta note le variabili di maglia è possibile ricavare le variabili di posizione tramite le equazioni costitutive.



Il grafo a fianco è ottenuto dal precedente sostituendo l'equivalente di Thevenin ai morsetti 1-0 e permette di applicare il metodo in maniera sistematica: il sistema ricavato si può scrivere in forma matriciale:

$$[v] = [Z] \cdot [f]$$

dove $[v]$ è il vettore dei termini noti (sorgenti di variabile di posizione equivalenti), $[Z]$ la matrice delle impedenze (generalizzate) e $[f]$ il vettore delle variabili (incognite) di maglia:

$$\begin{bmatrix} R_1 I_g \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

si osserva che:

- a) la matrice $[Z]$ è simmetrica;
- b) i termini della diagonale z_{ii} sono dati dalla somma delle impedenze della maglia i -esima;
- c) i termini z_{ij} ($i \neq j$) sono dati dalla somma delle impedenze comuni alle maglie i e j con segno negativo, purché i versi delle variabili di maglia siano tutti concordi;
- d) $v_j > 0$ se la f_j che attraversa la sorgente v_j esce dal morsetto "+", negativo altrimenti.

Tra i due metodi è preferibile scegliere quello che porta a semplificazioni matematiche maggiori: nel caso trattato negli esempi è preferibile il metodo alle maglie in quanto fornisce un sistema di equazioni di più immediata risoluzione.

1.10-2 IMPEDENZE E AMMETTENZE GENERALIZZATE

Nell' Esempio 1.10-1 (Esempio 1.10-2) è stata ricavata la matrice delle ammettenze (impedenze) per un sistema puramente dissipativo, ed è stato illustrato un procedimento generalizzato per la scrittura sistematica delle equazioni del sistema.

Per sistemi lineari sede di fenomeni reattivi si possono adottare gli stessi metodi descritti sopra, purché si utilizzino le impedenze (ammettenze) generalizzate definite mediante l'uso della trasformata di Laplace.

Se per esempio si applica la (1.96) alla (1.52), con condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$F(s) = sC_{GEN} V_{12}(s) \quad (1.106a)$$

che scritta nella forma:

$$V_{12}(s) = \frac{1}{sC_{GEN}} F(s) \quad (1.106b)$$

consente di definire l'impedenza generalizzata per gli elementi capacitivi:

$$Z_C = \frac{1}{sC_{GEN}} \quad (1.107)$$

ripetendo lo stesso procedimento per gli elementi induttivi si ottiene:

$$Z_L = sL_{GEN} \quad (1.108)$$

e per gli elementi dissipativi:

$$Z_R = R_{GEN} \quad (1.109)$$

le ammettenze generalizzate si definiscono in maniera analoga, inoltre vale:

$$Y_G = Z_G^{-1} \quad (1.110)$$

le grandezze complesse così definite si possono interpretare come le funzioni di trasferimento di un elemento ideale puro, definite tra variabile di posizione e variabile di flusso. Applicando i metodi ai nodi e alle maglie ad un sistema generico, utilizzando le ammettenze e le impedenze generalizzate, si ottengono delle equazioni algebriche e la loro composizione permette di definire la funzione di trasferimento (1.99) tra due grandezze qualsiasi del sistema lineare che si sta considerando, nonché la matrice di trasferimento secondo le (1.102) per sistemi lineari a più ingressi e più uscite, che si può definire in termini di matrice delle ammettenze o delle impedenze a seconda dei vettori ingresso uscita considerati. Si è visto che le matrici delle ammettenze e delle impedenze sono simmetriche quindi vale la relazione:

$$[Z] = [Y]^{-1} = \frac{[Y]^+}{\det([Y])} \tag{1.111}$$

una matrice quadrata A è invertibile se è non singolare, ovvero se $\det(A) \neq 0$.

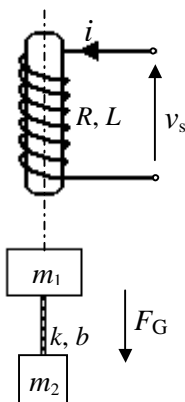
La matrice aggiunta di A si ricava come:

$$A^+ = [(-1)^{i+j} \det([\hat{A}_{ij}])]^T$$

dove $\det([\hat{A}_{ij}])$ è il determinante del minore complementare dell'elemento di posizione (i, j) ed inoltre, la trasposta di una matrice è ottenuta scambiando righe e colonne:

$$B = A^T \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Esercizio 1.1: scrittura della matrice di trasferimento di un sistema.



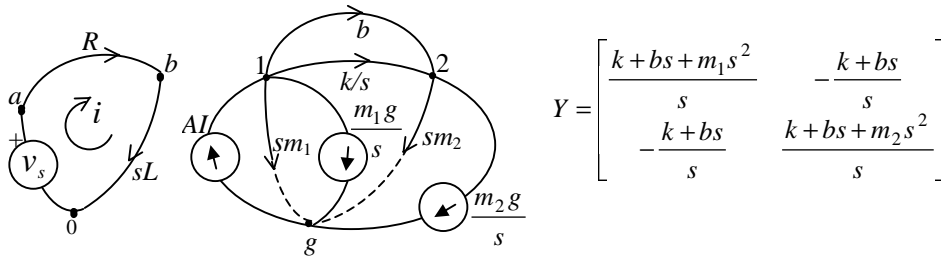
Dato il sistema in figura, costituito da una elettrocalamita che agisce su una massa ferrosa m_1 a cui è sospesa una massa m_2 mediante un cavo elastico di rigidità k con smorzamento viscoso b , si valuti la sua matrice di trasferimento considerando come ingresso la tensione $v_s(t)$ applicata all'elettrocalamita e come uscite le velocità delle masse.

Si ipotizzi che la forza esercitata sulla massa ferrosa dall'elettrocalamita sia proporzionale alla corrente che la percorre, e che non si abbiano urti e contatti tra le parti.

Il grafo lineare del sistema in figura è costituito da una parte elettrica e da una parte meccanica, messe in relazione da un generatore di variabile di flusso (forza fornita dall'elettrocalamita, opposta alla forza gravitazionale) pilotato dalla corrente i che fluisce nell'avvolgimento (una situazione analoga è descritta nell'Esempio 1.6-5).

Il grafo del sistema è riportato sotto, dove vengono messe in evidenza le ammettenze generalizzate degli elementi: per ricavare le equazioni del sistema è conveniente utilizzare il metodo ai nodi (Esempio 1.10-1), in quanto nel grafo (parte meccanica) compaiono solo

generatori di flusso e i nodi del grafo sono in numero minore rispetto alle finestre, La matrice delle ammettenze è riportata a fianco del grafo:



$$Y = \begin{bmatrix} \frac{k + bs + m_1 s^2}{s} & -\frac{k + bs}{s} \\ -\frac{k + bs}{s} & \frac{k + bs + m_2 s^2}{s} \end{bmatrix}$$

Nel vettore dei termini noti l'elemento j -esimo è la somma algebrica delle correnti imposte al nodo j (trasformate secondo Laplace), quindi le equazioni del sistema sono date da:

$$\begin{bmatrix} \frac{k + bs + m_1 s^2}{s} & -\frac{k + bs}{s} \\ -\frac{k + bs}{s} & \frac{k + bs + m_2 s^2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AI - \frac{m_1 g}{s} \\ -\frac{m_2 g}{s} \end{bmatrix}$$

le uscite del sistema sono le velocità delle due masse mentre l'ingresso è la forza fornita dall'elettrocalamita; la relazione:

$$[Y][V] = [F]$$

può essere invertita per ricavare l'uscita in funzione dell'ingresso:

$$[V] = [Y^{-1}][F]$$

Dove $[Y^{-1}] = \frac{[Y]^+}{\det[Y]}$;

$$\det[Y] = \frac{k^2 + 2kbs + (b^2 + km_1 + km_2)s^2 + (m_1 + m_2)bs^3 + m_1 m_2 s^4 - k^2 - 2kbs - b^2 s^2}{s^2}$$

$$= (m_1 + m_2)k + (m_1 + m_2)bs + m_1 m_2 s^2$$

quindi:

$$[Y]^{-1} = \frac{1}{s \left[(m_1 + m_2)k + (m_1 + m_2)bs + m_1 m_2 s^2 \right]} \begin{bmatrix} k + bs + m_1 s^2 & k + bs \\ k + bs & k + bs + m_1 s^2 \end{bmatrix}$$

dal grafo della parte elettrica si ricava la relazione che lega la corrente che attraversa l'elettrocalamita e la tensione di alimentazione:

$$I = \frac{1}{R + sL} V_s$$

separando gli effetti della forza elettromagnetica e del peso si ottiene:

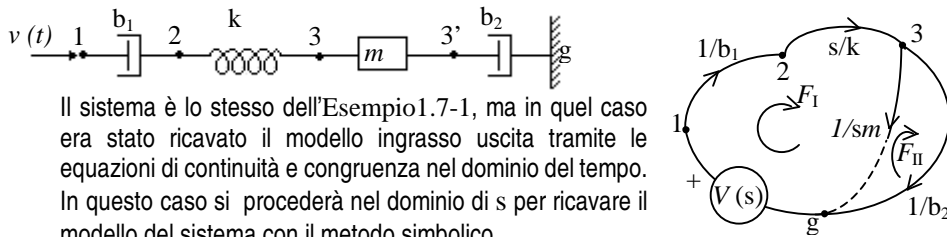
$$[V] = [Y]^{-1}[U] - [Y]^{-1}[D] \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{A}{R + Ls} V_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 g}{s} \\ \frac{m_2 g}{s} \end{bmatrix}$$

dove sono indicati i vettori di ingresso $[U]$ e di disturbo $[D]$ (forza gravitazionale opposta all'ingresso):

$$v = [Y]^{-1}(U + D)$$

Esercizio 1.2: scrittura della matrice di trasferimento di un sistema meccanico.

Dato il sistema meccanico sotto rappresentato si determini il suo grafo lineare e, assunte la velocità $v_s(t)$ come ingresso, le velocità della massa e la forza attraverso la molla come uscite, si ricavi la matrice di trasferimento del sistema col metodo simbolico.



Il sistema è lo stesso dell'Esempio 1.7-1, ma in quel caso era stato ricavato il modello ingresso uscita tramite le equazioni di continuità e congruenza nel dominio del tempo. In questo caso si procederà nel dominio di s per ricavare il modello del sistema con il metodo simbolico.

Il grafo del sistema riportato in figura permette di applicare il metodo delle maglie in maniera diretta. Le equazioni $\underline{V} = [Z]\underline{F}$ sono:

$$\begin{bmatrix} V(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} + \frac{s}{k} + \frac{1}{ms} & -\frac{1}{ms} \\ -\frac{1}{ms} & \frac{1}{b_2} + \frac{1}{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \end{bmatrix}$$

la relazione sopra deve essere invertita, in quanto interessa ricavare le variabili di maglia $\underline{F} = [Z]^{-1}\underline{V}$.

$$\det[Z] = \frac{(b_1 + b_2)k + (km + b_1b_2)s + b_1ms^2}{b_1b_2kms}$$

$$\begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{(b_1 + b_2)k + (km + b_1b_2)s + b_1ms^2} \begin{bmatrix} b_1k(b_2 + ms) \\ b_1b_2k \end{bmatrix} V(s)$$

la forza attraverso la molla è $F_k = F_I$ mentre la velocità della massa è data da:

$$v_m = \frac{1}{ms}(F_I - F_{II})$$

quindi in base alle grandezze scelte come ingresso e uscite la matrice di trasferimento del sistema è:

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{V(s)} \begin{bmatrix} F_k(s) \\ V_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1k(b_2 + ms)}{(b_1 + b_2)k + (km + b_1b_2)s + b_1ms^2} \\ \frac{b_1k}{(b_1 + b_2)k + (km + b_1b_2)s + b_1ms^2} \end{bmatrix}$$

Esercizio 1. 3: calcolo dell'evoluzione forzata di un sistema.

Calcolare l'evoluzione forzata $v_{mf}(t)$ del sistema descritto nell'esercizio 1.2 dato un ingresso a gradino $v(t) = v_s \delta_{-1}(t)$. Si considerino i dati dell'Esempio 1.7-3.

La funzione di trasferimento tra $v(t)$ e $v_m(t)$ si ricava dalla matrice di trasferimento dell'esercizio precedente:

$$g_2(s) = \frac{b_1 k}{(b_1 + b_2)k + (km + b_1 b_2)s + b_1 m s^2}$$

la risposta forzata è data dalla (1.100):

$$v_{mf}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b_1 k}{s [(b_1 + b_2)k + (km + b_1 b_2)s + b_1 m s^2]} V_s \right\}$$

sostituendo dati del problema si ottiene:

$$v_{mf}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{s [4 + 4s + 1s^2]} \right\}$$

scrivendo l'espressione da antitrasformare sotto forma di frazioni semplici si ha:

$$g_1(s)V(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{s+2}$$

e i residui calcolati per ciascun polo sono:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s g_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{(s+2)^2} = 5$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 g_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{20}{s} = -10$$

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{dt} [(s+2)^2 g_1] = \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{20}{s^2} = -5$$

quindi $v_{mf}(t) = 5\delta_{-1}(t) - 10e^{-2t}\delta_{-1}(t) - 10te^{-2t}\delta_{-1}(t) = [5 - 5(2t+1)e^{-2t}]\delta_{-1}(t)$.

1.11 Stato del sistema

Si è visto come un elemento ideale puro reattivo (capacità o induttanza generalizzata) sia in grado di immagazzinare energia nelle varie forme (energia potenziale gravitazionale, elettrica etc.); tali elementi sono quindi caratterizzati dall'aver un certo stato in un certo istante di tempo t , che è strettamente legato all'energia immagazzinata dall'elemento dall'istante t_0 (eccitazione dell'elemento) all'istante t . Solitamente si assume $t_0 = 0$ (Paragrafo 1.3-1).

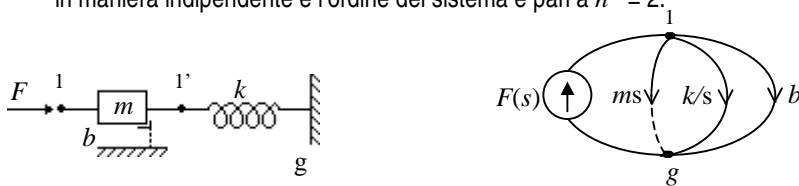
Un sistema complesso che sia costituito da almeno un elemento reattivo è allora in grado di immagazzinare energia, ed è quindi possibile definirne lo stato, che corrisponde all'insieme minimo di valori in grado di descrivere univocamente l'evoluzione del sistema: tale insieme di valori è detto vettore di stato, i cui elementi sono le variabili di stato del sistema:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.112}$$

il numero minimo di variabili di stato che si possono definire per un sistema è pari all'ordine n del sistema (Paragrafo 1.8). La scelta delle variabili di stato cade più convenientemente su quelle grandezze grazie alle quali un componente reattivo indipendente immagazzina energia (Esempio1.11-1); in generale si possono definire diversi vettori di stato per un sistema, purché legati da una relazione biunivoca. Si definisce spazio di stato il n -spazio le cui coordinate sono le componenti del vettore di stato (ogni base dello spazio di stato è un vettore di stato).

Esempio1.11-1: rappresentazione di un sistema in termini di variabili di stato.

Il sistema meccanico in figura è composto da uno smorzatore, una massa e una molla connessi in maniera tale da non introdurre vincoli topologici: gli elementi reattivi immagazzinano energia in maniera indipendente e l'ordine del sistema è pari a $n^* = 2$.



il grafo del sistema è espresso in termini di ammettenze generalizzate, si può quindi ricavare la funzione di trasferimento del sistema col metodo simbolico, essendo F l'ingresso e $v_m = v_{1g}$ l'uscita del sistema:

$$\left(ms + \frac{k}{s} + b \right) V(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$

il modello ingresso uscita del sistema si ricava dalla (1.98) ed è:

$$m\ddot{v}_m + b\dot{v}_m + kv_m = \dot{F}$$

molla e massa sono elementi reattivi indipendenti, la massa immagazzina energia cinetica grazie alla la velocità v_m e la molla energia potenziale elastica grazie alla forza F_k . Una volta stabilito vettore di stato del sistema:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} F_k(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

è possibile scrivere una relazione che lega lo stato attuale $\underline{x}(t)$ del sistema all'ingresso $u(t)$ e allo stato passato $\dot{\underline{x}}(t)$:

$$\underline{x}(t) = h(t, \underline{u}(t), \dot{\underline{x}}(t))$$

la funzione sopra è detta funzione di stato, che più spesso viene espressa nella forma normale:

$$\dot{\underline{x}}(t) = g(t, \underline{u}(t), \underline{x}(t))$$

in questo caso si ha:

$$\frac{1}{k} \dot{F}_k = v_m \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = kx_2$$

$$m\ddot{v}_m + b\dot{v}_m + kv_m = \dot{F} \quad \rightarrow \quad m\dot{x}_2 + bx_2 + x_1 = u$$

quindi l'equazione di stato del sistema, espressa in termini di variabili di stato è:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -\frac{1}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

alla trasformazione ingresso-stato si associa la trasformazione stato-uscita (funzione di uscita):

$$\underline{y}(t) = f(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

in questo caso banalmente si ha:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

e il modello in termini di variabili di stato è completo.

1.11-1 MODELLO A VARIABILI DI STATO^(*)

Un modello a variabili di stato, a differenza di altri modelli, mette in evidenza la trasformazione ingresso-stato e stato-uscita che avviene grazie al mediatore energetico "variabile di stato".

La trasformazione ingresso-stato è una relazione del tipo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = g(t, \underline{u}(t), \underline{x}(t)) \quad (1.113)$$

mentre la trasformazione stato-uscita ha la forma seguente:

$$\underline{y}(t) = f(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.114)$$

La (1.113) permette di determinare l'evoluzione del sistema nello stato, ovvero noto l'ingresso $u(t)\delta_{-1}(t-t_0)$ e lo stato pregresso del sistema $\underline{\dot{x}}(t)$ risulta univocamente determinato lo stato attuale $\underline{x}(t)$.

La (1.114) completa il modello in quanto fornisce l'uscita noto l'ingresso e lo stato del sistema; il modello a variabili di stato è quindi dato dal sistema di equazioni seguente:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = g(t, \underline{u}(t), \underline{x}(t)) \\ \underline{y}(t) = f(t, \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \end{cases} \quad (1.114)$$

Per sistemi lineari con p uscite, q ingressi e n stati la (1.114) assume la forma (1.115) e valgono i vincoli:

$$\begin{aligned} q &\leq n \\ p &\leq n \end{aligned}$$

in base ai quali la scelta di un numero di controlli (ingressi) o di misure (uscite) maggiore dell'ordine del sistema risulta ridondante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1q}u_q \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2q}u_q \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nq}u_q \end{array} \\ \begin{array}{l} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1q}u_q \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \dots + d_{2q}u_q \\ \vdots \\ y_p = c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \dots + d_{pq}u_q \end{array} \end{array} \right. \quad (1.115)$$

Nella (1.115) cui si possono individuare quattro blocchi distinti che ne permettono la scrittura più compatta in forma matriciale:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (1.116)$$

la matrice A dipende dalla struttura del sistema, infatti i suoi autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica del sistema $\det(\lambda I - A) = 0$. Le altre matrici esprimono i vari legami tra le variabili coinvolte, in particolare la matrice D esprime il legame istantaneo tra ingresso uscita, quindi si ha che $D = 0$ per sistemi strettamente propri.

1.11-2 STATO INIZIALE DEL SISTEMA

Il metodo delle impedenze generalizzate può essere utilizzato solo nella ricerca dell'evoluzione forzata di un sistema.

È tuttavia possibile, se il sistema è in evoluzione libera, inserire nel suo grafo delle sorgenti fittizie che tengono conto dello stato iniziale non nullo.

Si consideri per esempio l'induttanza generalizzata L_{GEN} con $f(0) \neq 0$.

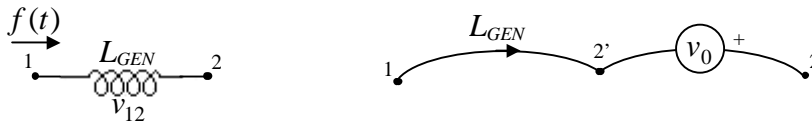


Figura 1-46: induttanza stato iniziale non nullo: lo stato iniziale non nullo è rappresentato da un generatore di posizione in serie.

Trasformando con Laplace la prima delle (1.53) tramite la (1.96) si ottiene:

$$V_{12}(s) = sL_{GEN} F(s) - L_{GEN} f(0) = V_{12}'(s) - V_0 \tag{1.117}$$

il secondo termine della (1.116) può essere considerato come una sorgente fittizia di posizione in serie al ramo passivo; la modifica del grafo è illustrata in Figura 1-46. Nel dominio del tempo si può scrivere:

$$v_{12}(t) = v_{12}'(t) - v_0(t) \tag{1.118}$$

dove $v_0(t) = V_0 \delta(t)$ è un generatore impulsivo, ottenuto antitrasformando una costante.

Al fine dell'analisi dinamica la presenza di uno stato iniziale non nullo nell'induttanza generalizzata equivale a considerare una sorgente di tipo impulsivo fittizia in serie con l'elemento passivo.

L'effetto della sorgente è quello di far assumere alla variabile di flusso il valore iniziale e di poter considerare il sistema come se fosse in evoluzione forzata, così da permettere l'utilizzo del metodo simbolico nel calcolo dell'evoluzione completa (Esempio 1.11-2).

L'inserzione della sorgente in serie non è l'unica possibile, infatti trasformando con Laplace la seconda delle (1.53) si ottiene:

$$F(s) = \frac{1}{sL_{GEN}} V_{12}(s) + \frac{f(0)}{s} \tag{1.119}$$

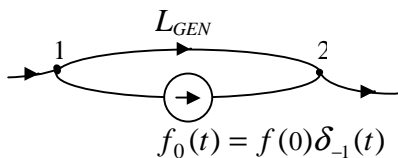


Figura 1-47: rappresentazione dello stato iniziale con generatore di flusso in parallelo al ramo passivo.

il secondo termine della (1.119) si può considerare come un generatore di flusso fittizio a gradino, questa volta inserito in parallelo al ramo passivo. La modifica del grafo lineare in seguito all'inserzione della sorgente è illustrata in Figura 1-47.

Per la capacità generalizzata il problema è duale: a condizioni iniziali non nulle potrà essere associata una sorgente di flusso impulsiva in parallelo o, in maniera equivalente, una sorgente di posizione a gradino serie (Figura 1-48).

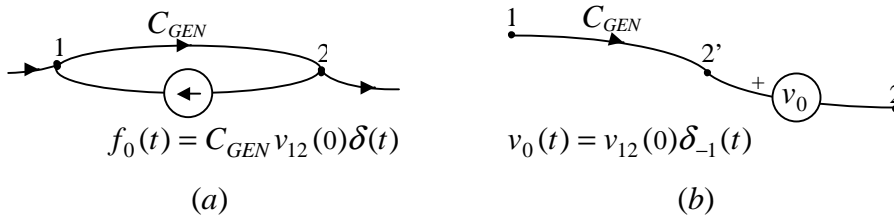


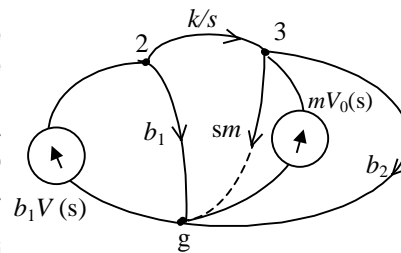
Figura 1-48: condizioni iniziali per la capacità generalizzata: (a) configurazione con sorgente di flusso impulsiva in parallelo; (b) configurazione equivalente con sorgente di posizione a gradino in serie.

Esempio1.11-2: calcolo dell'evoluzione di un sistema a partire da condizioni iniziali non nulle col metodo simbolico.

Si consideri il sistema dell'Esempio1.7-1. Nell'Esempio1.7-3 è stata calcolata l'evoluzione totale del sistema a partire dalle condizioni iniziali assegnate sulla velocità della massa.

In questo caso si vuole calcolare l'evoluzione della stessa $v_m(t)$ con il metodo simbolico; A tal proposito si inserisce nel grafo del sistema una sorgente fittizia di variabile di flusso di tipo impulsivo, connessa in parallelo con la massa: questa operazione consente di ricavare le equazioni del sistema nel dominio di s mediante la scrittura della matrice di ammettenza.

(Alla sezione 2g è stato applicato il teorema di Norton). Le due sorgenti, trasformate con Laplace, sono date dalle seguenti espressioni:



$$V(s) = \frac{20}{s} \quad V_0(s) = 10$$

applicando il metodo ai nodi si ottiene:

$$\begin{bmatrix} b_1 V(s) \\ m V_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + \frac{k}{s} & -\frac{k}{s} \\ -\frac{k}{s} & b_2 + ms + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ v_m(s) \end{bmatrix}$$

dal sistema scritto sopra si ricava l'espressione di $V_m(s)$:

$$V_m = \underbrace{\frac{b_1 k}{mb_1 s^2 + (km + b_1 b_2)s + k(b_1 + b_2)}}_{\text{TRASFORMATA DELL'EVOLUZIONE FORZATA}} V(s) + \underbrace{\frac{m(b_1 s + k)}{mb_1 s^2 + (km + b_1 b_2)s + k(b_1 + b_2)}}_{\text{TRASFORMATA DELL'EVOLUZIONE LIBERA}} V_0(s)$$

l'evoluzione forzata è già stata calcolata nell'Esercizio1-3 per brevità si considera solo la trasformata di Laplace dell'evoluzione libera.
 Sostituendo i dati dell' Esempio1.7-3 si ottiene:

$$V_{mL}(s) = \frac{10(s+1)}{s^2 + 4s + 4}$$

antitrasformando si ha:

$$v_{mL}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{(s+2)^2} \right\}$$

dove:

$$R_1 = 10 \lim_{s \rightarrow -2} (s+1) = -10$$

$$R_2 = 10 \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} (s+1) = 10$$

quindi:

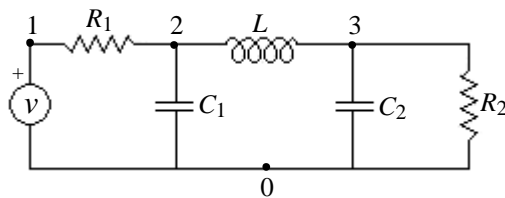
$$v_{mL}(t) = 10(1-t)e^{-2t} \delta_{-1}(t)$$

i risultati coincidono con quelli dell' Esempio1.7-3.

Un alternativa al procedimento seguito è quella di scrivere il grafo in termini di impedenze generalizzate, inserendo un generatore fittizio di tipo a gradino in serie alla massa per tener conto delle condizioni iniziali non nulle.

Esercizio 1-4: determinare il modello a variabili di stato di un sistema.

Rappresentare la dinamica della rete elettrica in figura in termini di variabili di stato scegliendo quelle che permettono di definire l'energia interna del sistema in maniera semplice ed intuitiva.



- 1) $i_{C1} = C_1 \frac{dv_{C1}}{dt}$
- 2) $i_{C2} = C_2 \frac{dv_{C2}}{dt}$
- 3) $v_L = L \frac{di_L}{dt}$

Il circuito elettrico in figura non presenta vincoli topologici quindi gli elementi reattivi indipendenti sono tre.

Le variabili di stato del sistema possono essere identificate nelle grandezze per mezzo delle quali i singoli elementi reattivi immagazzinano energia e sono le tensioni ai capi dei condensatori e la corrente attraverso l'induttore.

Per determinare la funzione di transizione dello stato $\dot{x} = Ax + Bu$ per il sistema è conveniente sviluppare le equazioni costitutive degli elementi reattivi (riportate a fianco dello schema) in maniera tale da esprimere la variabile dipendente in funzione delle sole variabili di stato v_{C1} , v_{C2} , i_L e dell'ingresso $v(t)$.

Procedendo in questo modo si può scrivere i_{C1} in funzione di v e v_{C1} :

$$i_{C1} = i_{R1} - i_L = \frac{v - v_{C1}}{R_1} - i_L$$

e sostituendo nella 1):

$$\dot{v}_{C1} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{C1} - \frac{1}{C_1} i_L + \frac{1}{R_1 C_1} v$$

per la seconda delle equazioni:

$$i_{C2} = i_L - \frac{v_{C2}}{R_2} \quad \text{sostituendo nella 2):} \quad \dot{v}_{C2} = -\frac{1}{R_2 C_2} v_{C2} + \frac{1}{C_2} i_L$$

per la seconda delle equazioni:

$$v_L = v_{C1} - v_{C2} \quad \text{sostituendo nella 3):} \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_{C1} - \frac{1}{L} v_{C2}$$

da cui:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Appendice

Tabella I: trasformate di Laplace delle funzioni elementari.

<i>Dominio del tempo:</i>	<i>Dominio di s:</i>
$y(t) = k\delta(t)$	$Y(s) = k$
$y(t) = k\delta_{-1}(t)$	$Y(s) = \frac{k}{s}$
$y(t) = kt^m\delta_{-1}(t)$	$Y(s) = \frac{k}{s^{m+1}}$
$y(t) = ke^{pt}\delta_{-1}(t)$	$Y(s) = \frac{k}{(s-p)}$
$y(t) = kt^m e^{pt}\delta_{-1}(t)$	$Y(s) = \frac{k}{(s-p)^{m+1}}$

antitrasformata di Laplace.

Data una funzione della variabile $G(s)$ da antitrasformare con Laplace, con l poli di molteplicità v_i :

1) Scrivere $G(s)$ nella forma residui-poli:

$$\begin{aligned}
 G_{RP}(s) &= \sum_1^l i \sum_0^{v_i-1} k \frac{R_{ik}}{(s-p_i)^{v-k}} = \\
 &= \frac{R_{11}}{(s-p_1)^{v_1}} + \frac{R_{12}}{(s-p_1)^{v_1-1}} + \dots + \frac{R_{1(v_1-1)}}{s-p_1} + \frac{R_{21}}{(s-p_2)^{v_2}} + \dots + \frac{R_{2(v_2-1)}}{s-p_2} + \\
 &\quad + \dots + \frac{R_{l1}}{(s-p_l)^{v_l}} + \dots + \frac{R_{l(v_l-1)}}{s-p_l} \quad (*)
 \end{aligned}$$

2) calcolare i residui dalla $G(s)$:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)^{v_1} G(s) \\
 R_{12} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{dt} (s-p_1)^{v_1-1} G(s) & R_{ik} &= \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^k}{dt^k} (s-p_i)^{v_i-k} G(s) \\
 &\vdots & & \\
 R_{1(v_1-1)} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{v_1-1}}{dt^{v_1-1}} (s-p_1) G(s)
 \end{aligned}$$

3) scrivere l'antitrasformata di ognuno degli addendi della (*) osservando la Tabella I:

$$g(t) = \sum_1^l i \sum_0^{v_i-1} k R_{ik} t^{v_i-k} e^{p_i t} \delta_{-1}(t) \quad (**)$$

se p_i è un polo complesso, ovvero $p_i = \sigma + j\omega$:

$$R_{ik} e^{p_i t} = R_{ik} e^{(\sigma + j\omega)t}$$

nella (*) comparirà anche un polo coniugato $p_j = \sigma - j\omega$:

$$R_{ik}^* e^{p_j t} = R_{ik}^* e^{(\sigma - j\omega)t}$$

dove R_{ik}^* complesso coniugato di R_{ik} .

Nella (**), ad ogni coppia di poli complessi coniugati corrisponde quindi l'espressione seguente:

$$R_{ik}^* e^{p_j t} + R_{ik} e^{p_i t} = M_i e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi_i) \delta_{-1}(t)$$

dove $\frac{M_i}{2}$ è il modulo di R_{ik} e φ_i la sua fase.